

2015 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010009

參展科別 數學

作品名稱 多個三角形的重心連線性質探討

得獎獎項 大會獎：四等獎

就讀學校 國立新竹女子高級中學、
國立科學工業園區實驗高級中學、
國立新竹女子高級中學

指導教師 魏子超

作者姓名 蔡佩珊、張欣雅、陳芊卉

關鍵字 重心、重複疊作、質心

作者簡介



我是蔡佩珊，目前就讀於國立新竹女子高級中學一年級。我的興趣是閱讀，透過文字我能獲得許多不同的觀點，讓我的思考更多元。我最喜歡數學中的幾何與邏輯推理，探究圖形奧秘、按部就班發現問題的答案，都能使我獲得無上的快樂。我認為每個人應該有「知」的權利，也只有資訊完全的情況下才能下決定，這是我努力達成的目標。



你好，我是國立新竹女子高級中學的小高一陳芊卉。比起其他科目，我更喜歡沉浸在幾何數學的題海中，只要解出答案就會特別有成就感；閒暇時，我喜歡看小說、收看歐美影集(我超愛 Person of Interest！)或者慢跑。

在這趟學習的旅程上，我最想感謝的是我的家人、指導老師、隊友以及 Google 大神，感謝這些陪伴我們一路走來的人。

我愛我的作品，希望你也會喜歡它。



我是國立竹科實中高一生張欣雅。從小到大我就特別喜歡數學，而數學科展更讓我深深體會到數學研究的魅力與挑戰性。

除了數學外，課餘時間我也喜歡和同學練習無伴奏合唱。我認為數學和唱歌本質上是一樣的，因為它們帶來的快樂都具有強大的感染力。我也希望我們能透過這個作品，將我們對數學的熱情傳達給大家。

摘要

根據參考資料，在平面上移動 P 點，P 點重心 n 邊形形狀皆全等且原 n 邊形的相隔對角線為 P 點重心 n 邊形相對應邊的 3 倍。

由 P 點重心 n 邊形反推作原 n 邊形，探討 P 點重心 n 邊形的存在性及唯一性；進一步作 P 點重心 n 邊形的 P 點重心 n 邊形，重複疊作至無限，作各層的重心 G_1 、 G_2 ... $G_k(k \in \mathbb{N})$ ，發現 P 點與各重心共線，且當 $k \rightarrow \infty$ 時， $\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = P$ 。

在空間中作 P 點質心多面體，原多面體與 P 點質心多面體有線段比性質。作 P 點質心四面體，再用 P 點質心四面體反推得原四面體並探討其存在性及唯一性；重複疊作 P 點質心四面體至無限，有線段比與極限性質。

Abstract

According to reference material, moving point P on a plane forms congruent “point P barycenter n sides.” Every other diagonal line of the original n sides is three times longer than the corresponding side of “point P barycenter n sides.”

We retrace the original n sides from “point P barycenter n sides,” research into the existence and singularity of “point P barycenter n sides” and moreover infinitely produce the “point P barycenter n sides” of the “point P barycenter n sides.” Then, we find out the barycenter of every layer G_1 、 G_2 ... $G_k(k \in \mathbb{N})$ and we discover that point P is colinear with every barycenter, and when $k \rightarrow \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = P$.

In space, connect point P to every apex of the polyhedron and form cones. Figure out the barycenter of every cone and form. They have the property of linear ratio with the “point P barycenter polyhedron.” Connect point P to tetrahedrons and form cones and figure out the barycenter from every cone. They form “point P barycenter tetrahedron.” We retrace the original tetrahedrons from “point P barycenter tetrahedron”, research into the existence and singularity of “point P barycenter tetrahedron”. We also infinitely reproduce them and discover they have the property of linear ratio and the limit.

壹、前言

有次在查找資料時，我們看到第五十二屆全國科展「心心相印」這件作品，發現他們分別將三角形各頂點與特定 P 點連接成三個三角形，這三個三角形再分別作外、重、垂心並連接，發現了一些奇妙的性質。在這件作品中， P 點只限於三角形的內、外、重、垂心，對於重心的相似性質沒有充分證明。這些不足之處引發我們決定把這個幾何題研究得更加完善。

我們的目的有以下幾點：

- 一、給定 P 點重心 n 邊形，用尺規作圖反推其原 n 邊形，探討其存在性及唯一性。
- 二、重複疊作 P 點重心 n 邊形。
- 三、探討 P 點質心多面體的性質及原多面體與 P 點質心多面體的關係。
- 四、給定 P 點質心四面體，反推其原四面體，探討其存在性及唯一性。
- 五、重複疊作 P 點質心四面體。

(註：以上加底線的文字見【貳、研究方法和過程】)

貳、 研究方法和過程

為了使閱讀的過程更簡潔明瞭，在表一中，我們將報告中使用到的專有名詞和自行定義的名詞以及參考資料中《多個三角形的重心連線性質探討》的研究成果做簡單的說明。

一、 名詞定義

名稱	意義	圖例
P 點重心 n 邊形	任意 n 邊形各頂點與平面上任意 P 點連接形成的 n 個三角形作重心，並將各相鄰三角形的重心連接形成 P 點重心 n 邊形。 (圖中 $\triangle LJK$ 為 P 點重心三角形)	
相隔對角線	將多邊形間隔一頂點的兩頂點相連稱之相隔對角線。奇數邊形的多邊形相隔對角線數為奇數，偶數邊形的多邊形相隔對角線數為偶數。	
重複疊作 P 點重心 n 邊形	作任意 n 邊形的 P 點重心 n 邊形，並以此 P 點重心 n 邊形與相同 P 點再作 P 點重心 n 邊形，重複此動作延伸至無限(圖中各三角形為一組重複疊作 P 點重心三角形)	
P 點質心多面體	多面體各頂點與空間中任意 P 點連接形成的多個錐體作質心，並將各相鄰錐體的質心連接形成 P 點質心多面體。(圖中淡綠色的四面體為 P 點質心多面體)	
重複疊作 P 點質心四面體	作任意四面體的 P 點質心四面體，並以此 P 點質心四面體與相同 P 點再作 P 點質心四面體，重複此動作延伸至無限(圖中各多面體為一組重複疊作 P 點質心四面體)	

二、 P 點重心 n 邊形(引用自參考資料〈多個三角形的重心連線性質探討〉)

(一) 三角形

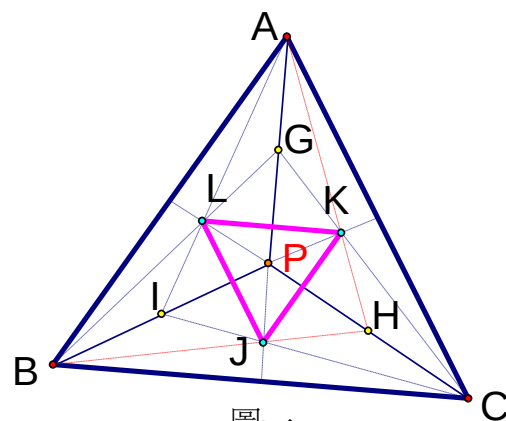
給定任意 $\triangle ABC$ ，在平面上設任意點 P，作 P 點重心

$\triangle LJK$ (如圖一)，我們發現性質如下：

【性質一】 $\overline{JK} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{LK} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{LJ} \parallel \overline{AC}$

【性質二】 $(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) : (\overline{JK} + \overline{LK} + \overline{LJ}) = 3 : 1$

【性質三】給定任意 $\triangle ABC$ ，移動 P 點位置， $\triangle LJK$ 恆全等不變(僅跟隨 P 點相對位移)



圖一

(二) 四邊形

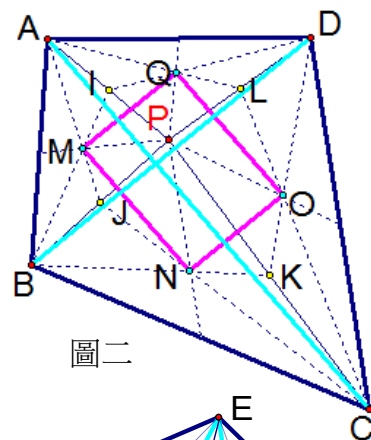
給定任意四邊形 ABCD，在平面上設任意點 P，作 P

點重心四邊形 MNOQ(如圖二)，我們發現性質如下：

【性質一】 $\overline{MN} \parallel \overline{QO} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{MQ} \parallel \overline{NO} \parallel \overline{BD}$

【性質二】 $2(\overline{AC} + \overline{BD}) : (\overline{MN} + \overline{NO} + \overline{QO} + \overline{MQ}) = 3 : 1$

【性質三】給定任意四邊形 ABCD，移動 P 點位置，四邊形 MNOQ 恆全等不變



圖二

(三) 五邊形

給定任意五邊形 ABCDE，在平面上設任意點 P，作 P 點重心五

邊形 QRSTU(如圖三)，我們發現性質如下：

【性質一】 $\overline{UT} \parallel \overline{AD}$ ， $\overline{RS} \parallel \overline{BD}$ ， $\overline{ST} \parallel \overline{CE}$ ， $\overline{QR} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{QU} \parallel \overline{BE}$

【性質二】 $(\overline{AC} + \overline{BD} + \overline{CE} + \overline{AD} + \overline{BE}) :$

$$(\overline{QR} + \overline{RS} + \overline{ST} + \overline{UT} + \overline{QU}) = 3 : 1$$

【性質三】給定任意五邊形 ABCDE，移動 P 點位置，五邊形 QRSTU 恆全等不變

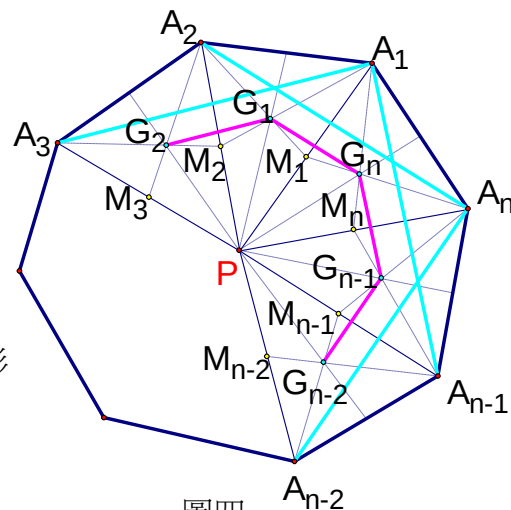
【性質四】五邊形 QRSTU 任意兩邊不平行

(四) n 邊形

【性質一】 $\overline{G_{k-1}G_{k-2}} \parallel \overline{A_kA_{k-2}} (k=3,4, \dots, n, n \geq 3)$ ，
 $\overline{G_nG_1} \parallel \overline{A_nA_2}$ 且 $\overline{G_{n-1}G_n} \parallel \overline{A_{n-1}A_1}$

【性質二】 $(\overline{A_1A_3} + \overline{A_2A_4} + \dots + \overline{A_{n-2}A_n} + \overline{A_{n-1}A_1} + \overline{A_nA_2}) : (\overline{G_1G_2} + \overline{G_2G_3} + \dots + \overline{G_{n-2}G_{n-1}} + \overline{G_{n-1}G_n} + \overline{G_nG_1}) = 3 : 1$

【性質三】給定任意 n 邊形 $A_1 \sim A_n$ ，移動 P 點位置，n 邊形 $G_1 \sim G_n$ 恆全等不變(僅跟隨 P 點位移)



圖四

一、 P 點重心 n 邊形的反推探討

作一 n 邊形，用尺規作圖依其性質反推作出另一 n 邊形，使原本的 n 邊形為新 n 邊形的 P 點重心 n 邊形，並觀察兩者之間的關聯。(因三角形與四邊形為特例，故以五六邊形示範)

(一)五邊形

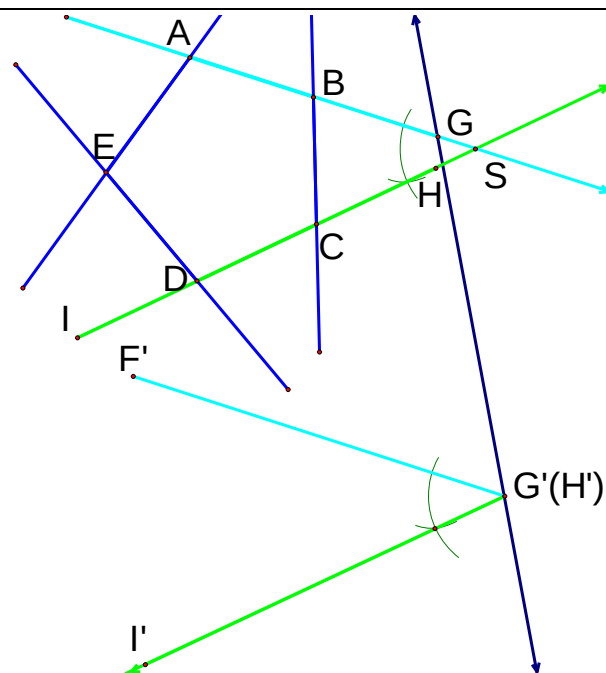
作一原五邊形，用尺規作圖求出一五邊形使原五邊形為此五邊形的 P 點重心五邊形，性質如下：

1. 一個 P 點重心五邊形可反推得唯一的原五邊形。
2. P 點重心五邊形必無任意對邊平行。

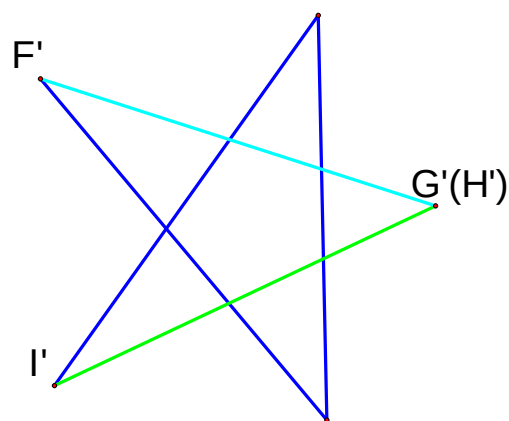
做法如下：

步驟	尺規作圖
1. 令一任意五邊形 $ABCDE$ 。	
2. 分別作 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{AE}$ 的平行三倍線段。	
3. 平移 $\overline{FG}$ 得 $\overline{F'G'}$ 。	

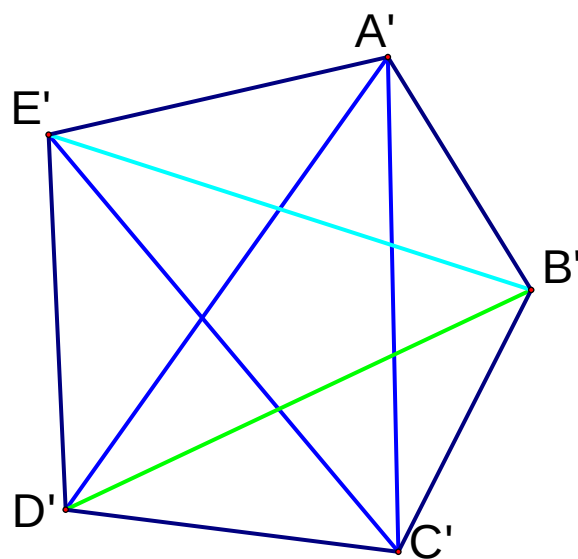
4. 平移 $\overline{IH}$ 得 $\overline{I'H'}$ 並使 G' 和 H' 重疊。



5. 平移並連接相隔一邊的三倍線段。



6. 將相鄰頂點連接，形成五邊形 $A'B'C'D'E'$ ，五邊形 $ABCDE$ 即為其 P 點重心五邊形。因為 $\overline{A'C'}$ 、 $\overline{C'E'}$ 、 $\overline{E'B'}$ 、 $\overline{B'D'}$ 、 $\overline{D'A'}$ 無法作任意相對移動，所以五邊形 $ABCDE$ 只有唯一的原五邊形。

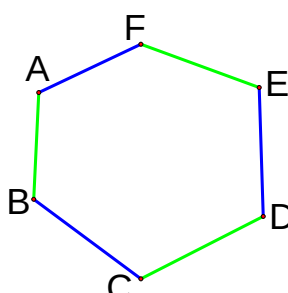
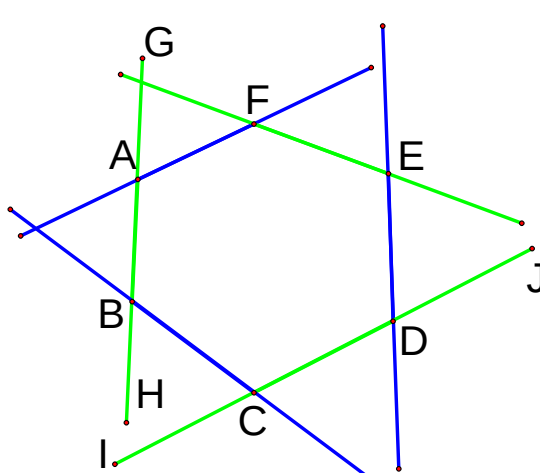
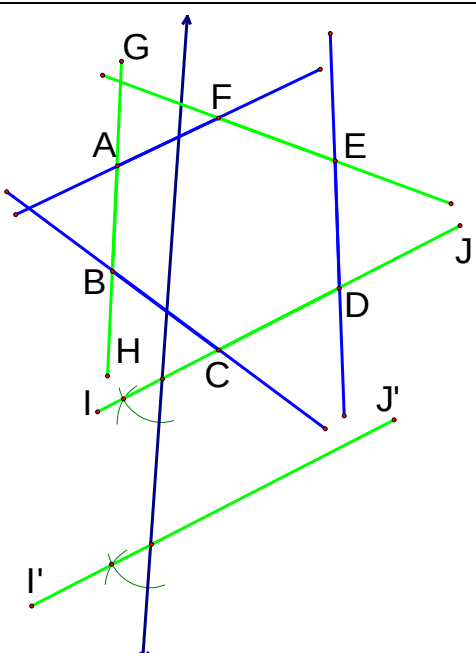


(二) 六邊形

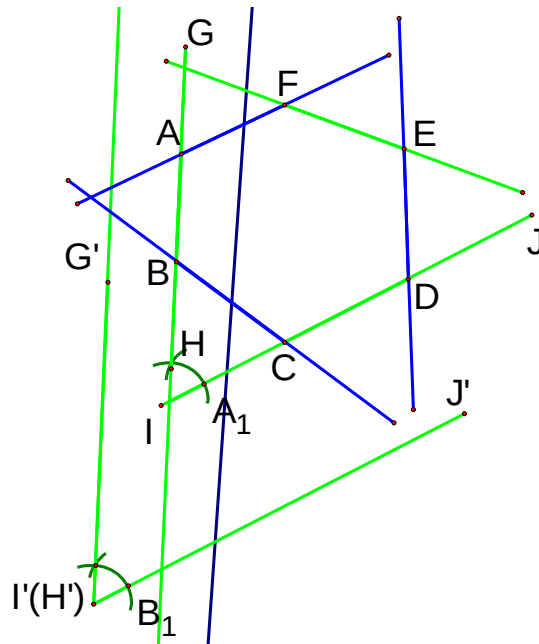
作一原六邊形，用尺規作圖求出一六邊形使原六邊形為此六邊形的 P 點重心六邊形，性質如下：

1. 一個 P 點重心六邊形可反推得無限的原六邊形。
2. P 點重心六邊形相隔一邊的兩邊不得平行。

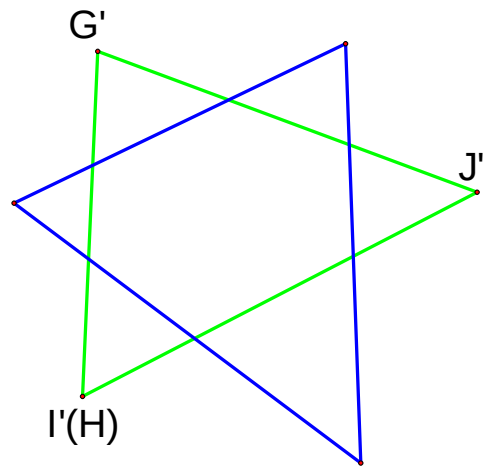
作法如下：

步驟	尺規作圖
1. 令一任意六邊形 $ABCDEF$ 。	
2. 分別作 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{AF}$ 的平行三倍線段。	
3. 平移 $\overline{IJ}$ 得 $\overline{I'J'}$ 。	

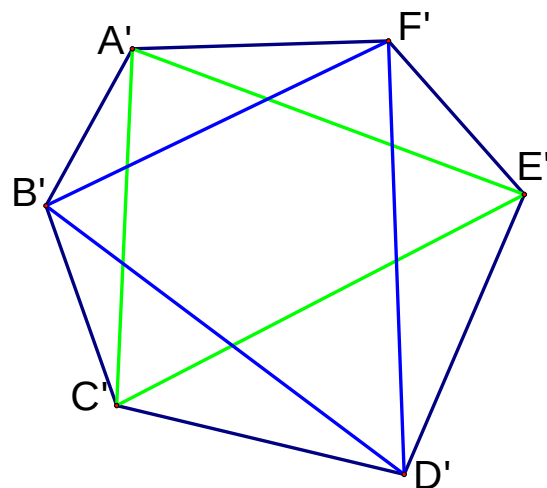
4. 平移 $\overline{GH}$ 得 $\overline{I'H'}$ 並使 I' 和 H' 重疊。



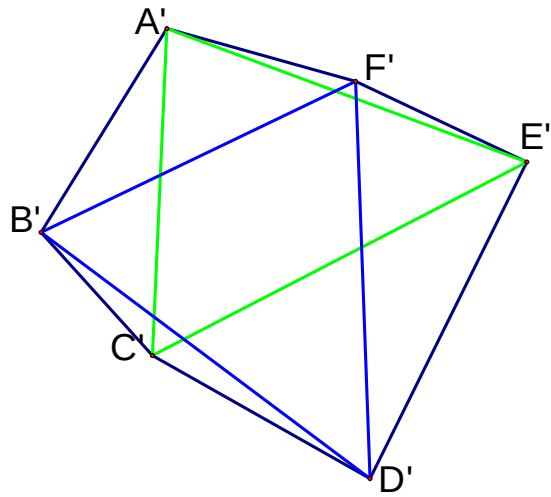
5. 平移並連接相隔一邊的三倍線段。



6. 將相鄰頂點連接，形成六邊形 $A'B'C'D'E'F'$ ，六邊形 $ABCDEF$ 即為其 P 點重心六邊形。



7. 因為 $\triangle A' C' E'$ 和 $\triangle B' D' F'$ 可以作相對移動，所以六邊形 $ABCDEF$ 有無限個原六邊形。

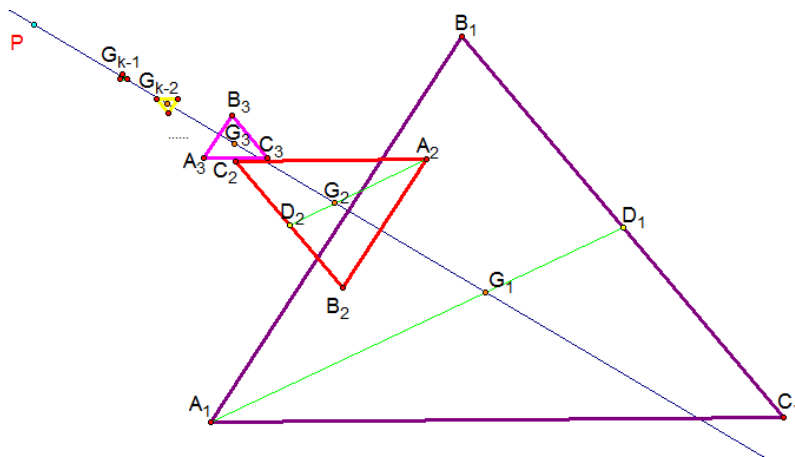


【性質一】任一個 P 點重心奇數邊形必存在唯一的原奇數邊形，任一個 P 點重心偶數邊形則必存在無限個原偶數邊形。

【性質二】除四邊形以外的 P 點重心 n 邊形相隔一邊的兩邊不得平行。

二、重複疊作 P 點重心 n 邊形

給定任意 n 邊形 $A_1B_1C_1 \dots$ ，在平面上取任意 P 點，作 P 點重心 n 邊形 $A_2B_2C_2 \dots$ ，再以 P 點對 n 邊形 $A_2B_2C_2 \dots$ 繼續作 P 點重心 n 邊形 $A_3B_3C_3 \dots$ ，以此類推得 n 邊形 $A_kB_kC_k \dots (k \in \mathbb{N})$ ，分別作各重心 $G_1, G_2, \dots, G_k$ (如圖五)。



圖五

(一)幾何證明

【性質一】 $G_1, G_2, \dots, G_k$ 與 P 點共線， $k \in \mathbb{N}$

【證明】

- 分別作 $\overline{B_{k-1}C_{k-1}}$ 、 $\overline{B_kC_k}$ 的中點 D_{k-1} 、 D_k ，連接 $\overline{A_{k-1}D_{k-1}}$ 、 $\overline{A_kD_k}$
則在 $\triangle A_kB_kC_k$ 、 $\triangle A_{k-1}B_{k-1}C_{k-1}$ 中
 $\because \triangle A_{k-1}B_{k-1}C_{k-1} \sim \triangle A_kB_kC_k$ (SSS 相似性質)
 $\therefore \overline{B_{k-1}C_{k-1}} : \overline{B_kC_k} = 3 : 1 = \overline{A_{k-1}D_{k-1}} : \overline{A_kD_k}$
又 $\overline{A_{k-1}G_{k-1}} : \overline{D_{k-1}G_{k-1}} = \overline{A_kG_k} : \overline{D_kG_k} = 2 : 1$
故 $\overline{D_{k-1}G_{k-1}} : \overline{A_kG_k} = 3 : 2 = \overline{D_{k-1}P} : \overline{A_kP}$
- $\because \overline{D_{k-1}G_{k-1}} : \overline{A_kG_k} = \overline{D_{k-1}P} : \overline{A_kP} = 3 : 2$ 且 $\angle PA_kG_k = \angle PD_{k-1}G_{k-1}$
 $\therefore \triangle PA_kG_k \sim \triangle PD_{k-1}G_{k-1}$ (SAS 相似性質)
- $\because \overline{G_{k-1}P} \parallel \overline{G_kP}$ 且共用點 P
 $\therefore P, G_k, G_{k-1}$ 共線，得證。

【性質二】 $\overline{G_{k-2}G_{k-1}} : \overline{G_{k-1}G_k} = 3 : 2, k \in \mathbb{N}, k \geq 3$

【證明】

- 承上，
 $\triangle PA_kG_k \sim \triangle PD_{k-1}G_{k-1} \Rightarrow \overline{G_{k-1}P} : \overline{G_kP} = \overline{G_{k-2}P} : \overline{G_{k-1}P} = 3 : 2$
又 P, G_k, G_{k-1}, G_{k-2} 共線
 $\Rightarrow \overline{G_{k-2}G_{k-1}} : \overline{G_{k-1}G_k} = 3 : 2$ ，得證。

【性質三】 $\overline{G_{k-1}G_k} : \overline{G_{k-1}P} = 1 : 3, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

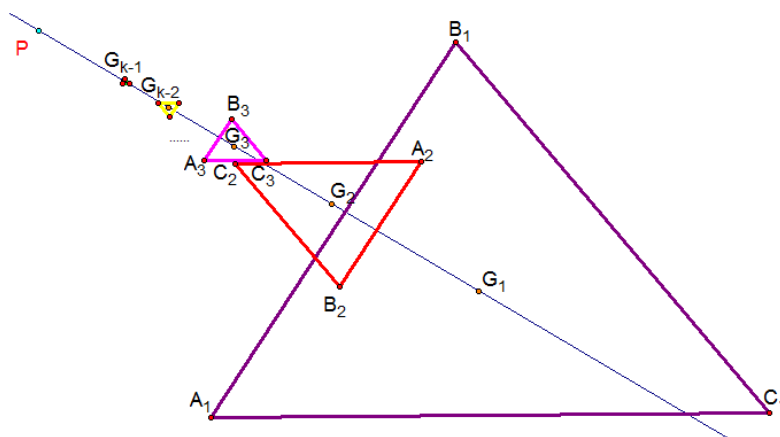
【證明】

1. 承上，

$\because P, G_k, G_{k-1}$ 共線且 $\overline{G_kP} : \overline{G_{k-1}P} = 2 : 3$

$\therefore \overline{G_{k-1}G_k} : \overline{G_{k-1}P} = 1 : 3$ ，得證。

(二)代數證明



圖六

設 P 坐標 (x_0, y_0) 、 A_1 坐標 (x_1, y_1) 、 B_1 坐標 (x_2, y_2) 、 C_1 坐標 (x_3, y_3) ，以此類推。以 A_k 坐標為例，將 $k=1 \sim 4$ 的情形逐一列出：

$$A_1 (1x_1 + 0x_0, 1y_1 + 0y_0)$$

$$A_2 \left(\frac{1x_1 + 1x_2 + 1x_0}{3}, \frac{1y_1 + 1y_2 + 1y_0}{3} \right)$$

$$A_3 \left(\frac{1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 5x_0}{9}, \frac{1y_1 + 2y_2 + 1y_3 + 5y_0}{9} \right)$$

$$A_4 \left(\frac{1x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 1x_1 + 9x_0}{27}, \frac{1y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 1y_1 + 9y_0}{27} \right)$$

...

觀察紅、藍色係數規律，發現其排列恰相似於巴斯卡三角形：

1
11
121
1331
...

因此，我們可推得當 $k \leq n$ 時， A_k 坐標中的 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ 係數分別為 $C_0^{k-1}, C_1^{k-1}, C_2^{k-1}, \dots, C_{k-2}^{k-1}, C_{k-1}^{k-1}$ ，係數和為 2^{k-1} 。此規律只適用於當 $k \leq n$ 時。若 $k > n$ ， $C_n^{k-1}, C_{n+1}^{k-1}, \dots, C_{k-1}^{k-1}$ 等數會分別和 $C_0^{k-1}, C_1^{k-1}, \dots, C_{n-1}^{k-1}$ 相加。

令 $k = n + m$ 且 $m \in \mathbb{N}$ ，則 A_k 坐標中的 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 係數分別為

$$C_0^m C_{n-m}^{n-1} + C_1^m C_{n-m+1}^{n-1} + \dots + C_{m-1}^m C_{n-1}^{n-1} + C_m^m C_0^{n-1}, C_0^m C_{n-m+1}^{n-1} + C_1^m C_{n-m+2}^{n-1} + C_2^m C_{n-m+3}^{n-1} + \dots + C_{m-2}^m C_{n-1}^{n-1} + C_{m-1}^m C_0^{n-1} + C_m^m C_1^{n-1}, \dots, C_0^m C_{n-m-1}^{n-1} + C_1^m C_{n-m}^{n-1} + \dots + C_{m-1}^m C_{n-2}^{n-1} +$$

$C_m^n C_{n-1}^{n-1}$ 。但不論 k 和 n 的關係如何，求出的 G_k 坐標公式皆相等，因為 x_1 、 x_2 、 x_3 、 $\dots$ 、 x_k 係數仍符合 2^{k-1} 的規律。

觀察分母數字規律 (紫色)，因為 A_k 坐標來自於 A_{k-1} 、 B_{k-1} 、 P 三點坐標相加後除三，所以分母有 3^{k-1} 的規律。

觀察 x_0 係數規律 (綠色)，已知 A_1 坐標中 x_0 係數為 0， A_2 坐標中 x_0 係數為 1，等於 $0 \times 2 + 3^0$ 。
 A_3 坐標中 x_0 係數為 5，等於 $1 \times 2 + 3^1$ ，以此類推，歸納出 x_0 係數的遞迴關係式：

$$\begin{cases} A_1 \text{ 坐標中 } x_0 \text{ 係數} = 0 \\ A_k \text{ 坐標中 } x_0 \text{ 係數} = (A_{k-1} \text{ 坐標中 } x_0 \text{ 係數}) \times 2 + 3^{k-2} \end{cases}$$

由此關係式，得 A_k 坐標中 x_0 係數 $= 3^{k-1} - 2^{k-1}$

綜合上述討論結果，當 $k \leq n$ 時， A_k 坐標為

$$\left(\frac{C_0^{k-1}x_1 + C_1^{k-1}x_2 + C_2^{k-1}x_3 + \dots + C_{k-1}^{k-1}x_k + (3^{k-1} - 2^{k-1})x_0}{3^{k-1}}, \frac{C_0^{k-1}y_1 + C_1^{k-1}y_2 + C_2^{k-1}y_3 + \dots + C_{k-1}^{k-1}y_k + (3^{k-1} - 2^{k-1})y_0}{3^{k-1}} \right), \text{ 同}$$

理可得 B_k 坐標

$$\left(\frac{C_0^{k-1}x_2 + C_1^{k-1}x_3 + C_2^{k-1}x_4 + \dots + C_{k-1}^{k-1}x_{k+1} + (3^{k-1} - 2^{k-1})x_0}{3^{k-1}}, \frac{C_0^{k-1}y_1 + C_1^{k-1}y_2 + C_2^{k-1}y_3 + \dots + C_{k-1}^{k-1}y_{k+1} + (3^{k-1} - 2^{k-1})y_0}{3^{k-1}} \right),$$

C_k 、 $\dots$ 、 x_n 、 y_n 後面分別接續 x_1 、 y_1 ，直到係數出現 C_{k-1}^{k-1} 為止，例如重複疊作第四層 P 點重

$$\text{心五邊形的 } D_k \text{ 坐標為 } \left(\frac{C_0^3x_4 + C_1^3x_5 + C_2^3x_1 + C_3^3x_2 + (3^3 - 2^3)x_0}{3^{4-1}}, \frac{C_0^3y_4 + C_1^3y_5 + C_2^3y_1 + C_3^3y_2 + (3^{4-1} - 2^{4-1})y_0}{3^{4-1}} \right)$$

$$= \left(\frac{1x_4 + 3x_5 + 3x_1 + 1x_2 + 19x_0}{27}, \frac{1y_4 + 3y_5 + 3y_1 + 1y_2 + (3^3 - 2^3)y_0}{27} \right)。$$

當 $k = n + m$ 且 $m \in \mathbb{N}$ 時， A_k 坐標為

$$\left(\frac{\begin{aligned} &(C_0^m C_{n-m}^{n-1} + C_1^m C_{n-m+1}^{n-1} + \dots + C_{m-1}^m C_{n-1}^{n-1} + C_m^m C_0^{n-1})x_1 \\ &+ (C_0^m C_{n-m+1}^{n-1} + C_1^m C_{n-m+2}^{n-1} + \dots + C_{m-2}^m C_{n-1}^{n-1} + C_{m-1}^m C_0^{n-1} + C_m^m C_1^{n-1})x_2 \\ &+ \dots + (C_0^m C_{n-m-1}^{n-1} + C_1^m C_{n-m}^{n-1} + \dots + C_{m-1}^m C_{n-2}^{n-1} + C_m^m C_{n-1}^{n-1})x_n + (3^{k-1} - 2^{k-1})x_0 \end{aligned}}{3^{k-1}}, \frac{\begin{aligned} &(C_0^m C_{n-m}^{n-1} + C_1^m C_{n-m+1}^{n-1} + \dots + C_{m-1}^m C_{n-1}^{n-1} + C_m^m C_0^{n-1})y_1 \\ &+ (C_0^m C_{n-m+1}^{n-1} + C_1^m C_{n-m+2}^{n-1} + \dots + C_{m-2}^m C_{n-1}^{n-1} + C_{m-1}^m C_0^{n-1} + C_m^m C_1^{n-1})y_2 \\ &+ \dots + (C_0^m C_{n-m-1}^{n-1} + C_1^m C_{n-m}^{n-1} + \dots + C_{m-1}^m C_{n-2}^{n-1} + C_m^m C_{n-1}^{n-1})y_n + (3^{k-1} - 2^{k-1})y_0 \end{aligned}}{3^{k-1}} \right), \text{ 同理得 } B_k、C_k、\dots。$$

根據任意多邊形的重心定義： n 邊形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 中，若 G 滿足 $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \dots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ ，則

稱 G 為 n 邊形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 的重心， n 邊形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 重心坐標公式為 $\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \right)$ 。

由此，我們得到重複疊作第 k 層 P 點重心 n 邊形 $A_k B_k C_k \dots$ 的 G_k 坐標公式：

$$\left(\frac{n(3^{k-1} - 2^{k-1})x_0 + 2^{k-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{3^{k-1}n}, \frac{n(3^{k-1} - 2^{k-1})y_0 + 2^{k-1}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)}{3^{k-1}n} \right), k \in \mathbb{N}。$$

【性質一】 $G_1, G_2, \dots, G_k$ 與 P 點共線， $k \in \mathbb{N}$

【證明】

利用前述所得 G_k 坐標，可得 $\overrightarrow{G_k G_{k-1}} = \left(\frac{2^{k-2}(nx_0 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)}{3^{k-1}n}, \frac{2^{k-2}(ny_0 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4)}{3^{k-1}n} \right)$

又， $\overrightarrow{PG_k} = \left(\frac{2^{k-1}(nx_0 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)}{3^{k-1}n}, \frac{2^{k-1}(ny_0 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4)}{3^{k-1}n} \right)$

$$= 2\overrightarrow{G_k G_{k-1}}$$

$\Rightarrow P, G_k, G_{k-1}$ 三點共線， $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

$\Rightarrow P, G_1, G_2, \dots, G_k$ 共線， $k \in \mathbb{N}$ ，得證。

【性質二】 $\overrightarrow{G_{k-2} G_{k-1}} : \overrightarrow{G_{k-1} G_k} = 3 : 2, k \in \mathbb{N}, k \geq 3$

【證明】

承性質一， $2\overrightarrow{G_{k-1} G_k} = \overrightarrow{G_k P}$

$\Rightarrow$ 同理得 $2\overrightarrow{G_{k-2} G_{k-1}} = \overrightarrow{G_{k-1} P} = \overrightarrow{G_k P} + \overrightarrow{G_{k-1} G_k} = 3\overrightarrow{G_{k-1} G_k}$

$\Rightarrow \overrightarrow{G_{k-2} G_{k-1}} : \overrightarrow{G_{k-1} G_k} = 3 : 2, k \in \mathbb{N}, k \geq 3$ ，得證。

【性質三】 $\overrightarrow{G_{k-1} G_k} : \overrightarrow{G_{k-1} P} = 1 : 3, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

【證明】

承性質一與性質二， $\overrightarrow{G_{k-1} P} = \overrightarrow{G_{k-1} G_k} + \overrightarrow{G_k P}$

$$= \overrightarrow{G_{k-1} G_k} + 2\overrightarrow{G_{k-1} G_k} = 3\overrightarrow{G_{k-1} G_k}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{G_{k-1} G_k} : \overrightarrow{G_{k-1} P} = 1 : 3$ ，得證。

以上三項性質證明，幾何與代數方法皆可，但【性質四】只能用代數方法證明。

【性質四】重複疊作 n 邊形 $A_k B_k C_k \dots$ 的重心 $G_k, k \in \mathbb{N}, k$ 足夠大時 G_k 會收斂至 P ，即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = P$$

【證明】

承性質一， $G_k = \left(\frac{n(3^{k-1}-2^{k-1})x_0 + 2^{k-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n \times 3^{k-1}}, \frac{n(3^{k-1}-2^{k-1})y_0 + 2^{k-1}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)}{n \times 3^{k-1}} \right), k \in \mathbb{N}$

則 $\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{n(3^{k-1}-2^{k-1})x_0 + 2^{k-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{3^{k-1}n}, \frac{n(3^{k-1}-2^{k-1})y_0 + 2^{k-1}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)}{3^{k-1}n} \right)$

$$= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{3} \times 3^k - \frac{n}{2} \times 2^k \right) x_0 + \frac{1}{2} \times 2^k (x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{\frac{n}{3} \times 3^k}, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{3} \times 3^k - \frac{n}{2} \times 2^k \right) y_0 + \frac{1}{2} \times 2^k (y_1 + y_2 + \dots + y_n)}{\frac{n}{3} \times 3^k} \right)$$

$$= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3} \right)^k \right) x_0 + \frac{3}{2n} \times \left(\frac{2}{3} \right)^k (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \right], \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3} \right)^k \right) y_0 + \frac{3}{2n} \times \left(\frac{2}{3} \right)^k (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \right] \right)$$

$$= (x_0, y_0) = P \quad (\because \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^k = 0), \text{得證。}$$

三、 P 點質心多面體的探討

接著，將 P 點重心多邊形的概念延伸到空間中，進一步研究探討有否相同的性質與概念

(一) 四面體

給定任意四面體 $ABC-D$ ，在空間中設任意點 P ，連至各頂點形成四個錐體，根據文獻的錐體質心做法，分別作錐體的質心(如圖七)並相連得 P 點質心四面體 $IJL-K$ (如圖八)，我們發現性質如下：

【性質一】 $\overline{LJ} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{IL} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{IJ} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{KJ} \parallel \overline{AD}$ ， $\overline{KL} \parallel \overline{BD}$ ， $\overline{KI} \parallel \overline{CD}$

【證明】

1. 作 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 中點 E 、 F 以及 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的重心 G 、 H 。
2. $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle EBF$ 中， $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$ (平行線截等比例線段)；
 $\triangle EDF$ 和 $\triangle GDH$ 中， $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ ； $\triangle GPH$ 和 $\triangle IPJ$ 中， $\overline{GH} \parallel \overline{IJ}$
 $\therefore \overline{IJ} \parallel \overline{AC}$ 同理， $\overline{LJ} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{IL} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{KJ} \parallel \overline{AD}$ ， $\overline{KL} \parallel \overline{BD}$ ， $\overline{KI} \parallel \overline{CD}$ ，得證。

【性質二】 $(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}) : (\overline{LJ} + \overline{IL} + \overline{IJ} + \overline{KJ} + \overline{KL} + \overline{KI}) = 4 : 1$

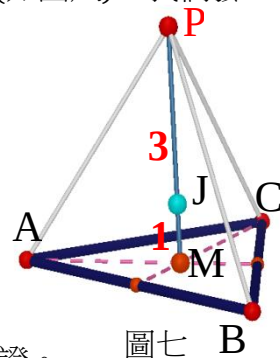
【證明】

1. $\triangle ABC$ 和 $\triangle EBF$ 中， $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$ (平行線截等比例線段)；
 $\therefore \overline{AB} : \overline{EB} = \overline{CB} : \overline{FB} = \overline{AC} : \overline{EF} = 2 : 1$
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBF$ (SAS 相似性質)
 $\Rightarrow \overline{AB} : \overline{EB} = \overline{AC} : \overline{EF} = 2 : 1$
2. 同理， $\triangle EDF \sim \triangle GDH$ ， $\triangle GPH \sim \triangle IPJ$
 $\Rightarrow \overline{ED} : \overline{GD} = \overline{EF} : \overline{GH} = 3 : 2$ ，
 $\overline{GP} : \overline{IP} = \overline{GH} : \overline{IJ} = 3 : 2$
3. $\overline{AC} : \overline{EF} : \overline{GH} : \overline{IJ} = 12 : 6 : 4 : 3$
 $\Rightarrow \overline{AC} : \overline{IJ} = 12 : 3 = 4 : 1$
4. 同理， $(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CD}) : (\overline{LJ} + \overline{IL} + \overline{IJ} + \overline{KJ} + \overline{KL} + \overline{KI}) = 4 : 1$ ，得證。

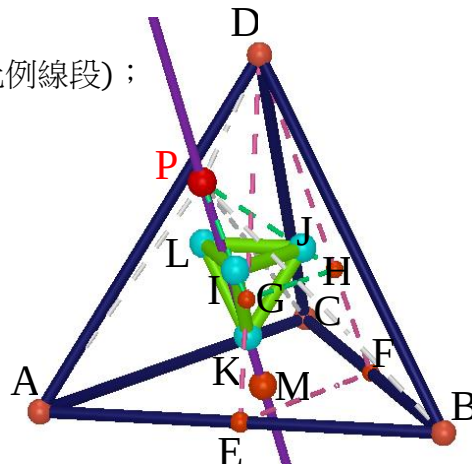
【性質三】移動 P 點位置，四面體 $IJL-K$ 恆全等不變（僅跟隨 P 點相對位移）

【證明】

1. $\because \overline{IJ} \parallel \overline{AC}$ 且 $\overline{AC} : \overline{IJ} = 4 : 1$
 $\therefore \overline{IJ}$ 恆全等不變。
2. 同理， $\overline{LJ}$ 、 $\overline{IL}$ 、 $\overline{KJ}$ 、 $\overline{KL}$ 、 $\overline{KI}$ 恆全等不變
 $\Rightarrow$ 移動 P 點位置，四面體 $IJL-K$ 恆全等不變，得證。



圖七



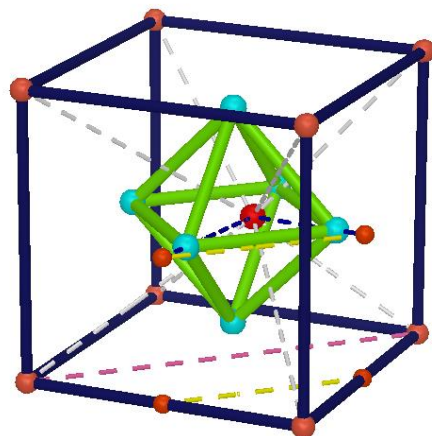
圖八

(二) 正六面體

給定正六面體，在空間中設任意點 P ，會作出 P 點質心正八面體(如圖九)，性質如下：

【性質一】原六面體邊長： P 點質心八面體邊長 = $4\sqrt{2} : 3$

【性質二】移動 P 點位置， P 點質心八面體恆全等不變
(僅跟隨 P 點相對位移)



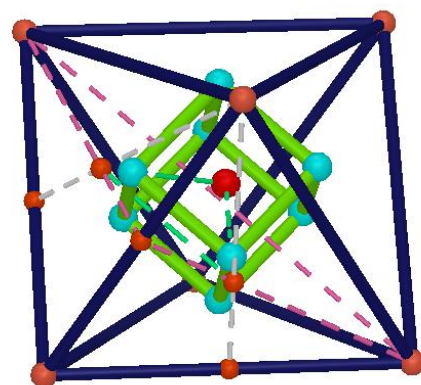
圖九

(一) 正八面體

給定正八面體，在空間中設任意點 P ，會作出 P 點質心正六面體(如圖十)，性質如下：

【性質一】原八面體邊長： P 點質心六面體邊長 = $2\sqrt{2} : 1$

【性質二】移動 P 點位置， P 點質心六面體恆全等不變
(僅跟隨 P 點相對位移)



圖十

(二) 正十二面體

給定正十二面體，在空間中設任意點 P ，會作出 P 點質心正二十面體(如圖十一)，性質如下：

【性質一】原十二面體邊長： P 點質心二十面體邊長 = $16(1 + \cos 36^\circ) : 3(1 + 2\cos 36^\circ)(\sqrt{5} + 1)$

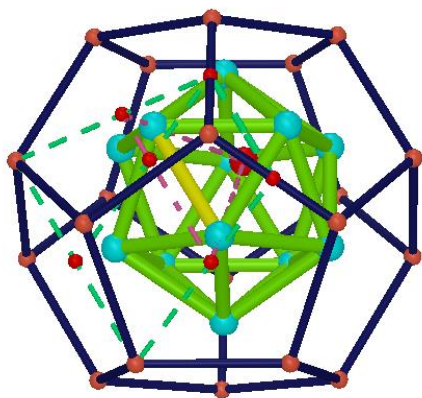
【性質二】移動 P 點位置， P 點質心二十面體恆全等不變 (僅跟隨 P 點相對位移)

(五) 正二十面體

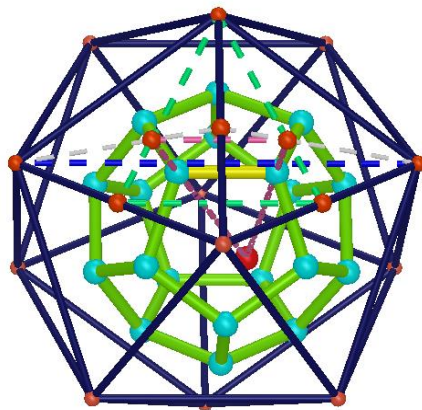
給定正二十面體，在空間中設任意點 P ，會作出 P 點質心正十二面體(如圖十二)，性質如下：

【性質一】原二十面體邊長： P 點質心十二面體邊長 = $8 : \sqrt{5} + 1$

【性質二】移動 P 點位置， P 點質心十二面體恆全等不變 (僅跟隨 P 點相對位移)



圖十一



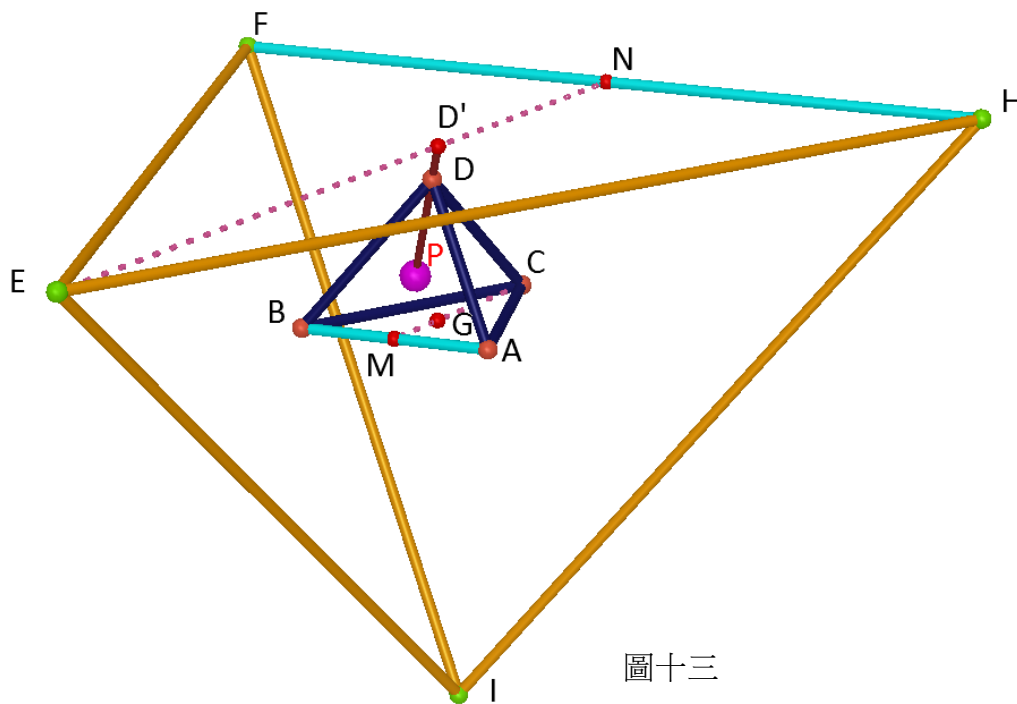
圖十二

四、 P 點質心四面體反推

作一任意四面體，依其性質反推作出另一四面體(如圖十三)，使原本的四面體為新四面體的 P 點質心四面體，並觀察兩者之間的關聯，性質如下：

1. 一個 P 點質心四面體可反推得唯一的原四面體。

作法如下：

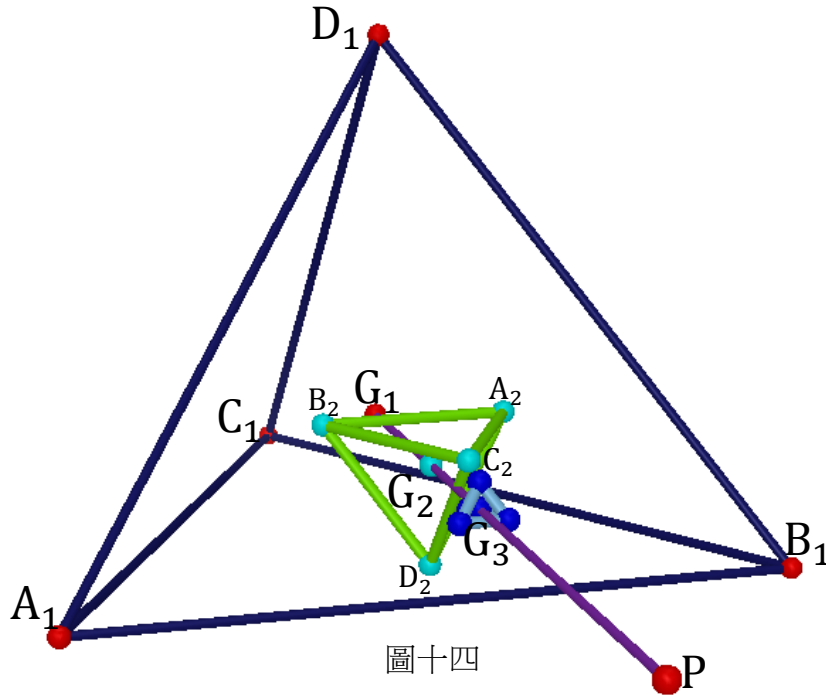


1. 給定任意四面體 $ABC-D$ ，作 $\overline{AB}$ 中點 M 並求出 $\triangle ABC$ 的重心 G 。
2. 作 $\overline{PD}$ ，在 $\overline{PD}$ 上取一點 D' ，使 $\overline{PD'} : \overline{PD} = 4 : 3$ 。
($\because$ 原多面體重心到 P 點距離 : P 點質心多面體頂點到 P 點距離 = $4 : 3$)
3. 連 $\overline{CM}$ ，過 D' 作直線 L_1 平行於 $\overline{CM}$ 。在直線 L 上分別於 D' 的兩端取點 E 、 N ，使 $\overline{ED'} : \overline{CG} = \overline{D'N} : \overline{GM} = 4 : 1$ 。
($\because$ 原四面體底面中線長 : P 點質心四面體底面中線長 = $4 : 1$)
4. 過 N 作 $\overline{AB}$ 的平行線 L_2 ，在 L_2 上取兩點 F 、 H ，使 $\overline{FH} = 4\overline{AB}$ 且 N 為 $\overline{FH}$ 中點。($\because$ 原四面體邊長 : P 點質心四面體相對應邊長 = $4 : 1$)
5. 連接 $\overline{EF}$ 、 $\overline{EH}$ ，得 $\triangle EFH$ 。
6. 過 E 作直線 L_3 平行 $\overline{CD}$ ，過 F 作直線 L_4 平行 $\overline{AD}$ ， L_3 、 L_4 相交於點 I 。
7. 連 $\overline{IH}$ ，則四面體 $EFH-I$ 為四面體 $ABC-D$ 的原四面體。

【性質一】 任一個 P 點質心四面體必存在唯一的原四面體

五、重複疊作 P 點質心四面體

給定任意四面體 $A_1B_1C_1-D_1$ ，在空間中取任意 P 點，作 P 點重心四面體 $A_2B_2C_2-D_2$ ，再以 P 點對四面體 $A_2B_2C_2-D_2$ 繼續作第 3 層的 P 點重心四面體 $A_3B_3C_3-D_3$ ，以此類推得四面體 $A_kB_kC_k-D_k$ ，分別作各重心 $G_1、G_2 \dots G_k$ (如圖十四)。



設 A_1 坐標 (x_1, y_1, z_1) ， B_1 坐標 (x_2, y_2, z_2) ， C_1 坐標 (x_3, y_3, z_3) ， D_1 坐標 (x_4, y_4, z_4) ，P坐標 (x_0, y_0, z_0) 。利用內分點公式求得 $A_2、B_2、C_2、D_2、A_3、B_3、C_3、D_3 \dots$ 坐標後，我們歸納出 $A_k、B_k、C_k、D_k、G_k$ 坐標如下：

若 k 為奇數

$$\begin{aligned}
 A_k & \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})x_1 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(x_2+x_3+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
 & \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})y_1 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(y_2+y_3+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})z_1 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(z_2+z_3+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
 B_k & \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})x_2 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(x_1+x_3+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
 & \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})y_2 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(y_1+y_3+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})z_2 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(z_1+z_3+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
 C_k & \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})x_3 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(x_1+x_2+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
 & \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})y_3 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(y_1+y_2+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})z_3 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(z_1+z_2+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
 D_k & \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})x_4 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(x_1+x_2+x_3)}{4^{k-1}}, \right. \\
 & \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})y_4 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(y_1+y_2+y_3)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})z_4 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(z_1+z_2+z_3)}{4^{k-1}} \right) \\
 G_k & \left(\frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + 3^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
 & \left. \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + 3^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + 3^{k-1}(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right)
 \end{aligned}$$

若 k 為偶數，

$$\begin{aligned}
& A_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})x_1 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(x_2+x_3+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})y_1 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(y_2+y_3+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})z_1 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(z_2+z_3+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
& B_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})x_2 + \frac{2^{k-1}+1}{3}(x_1+x_3+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})y_2 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(y_1+y_3+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})z_1 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(z_1+z_3+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
& C_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})x_3 + \frac{2^{k-1}+1}{3}(x_1+x_2+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})y_3 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(y_1+y_2+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})z_1 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(z_1+z_2+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
& D_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})x_4 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(x_1+x_2+x_3)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})y_4 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(y_1+y_2+y_3)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})z_4 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(z_1+z_2+z_3)}{4^{k-1}} \right) \text{ 且} \\
& G_k \left(\frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + 3^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
& \left. \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + 3^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + 3^{k-1}(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right)
\end{aligned}$$

我們利用數學歸納法證明如下：

1. 當 $k=1$ 時， A_1 坐標 (x_1, y_1, z_1)

$$\begin{aligned}
& = \left(\frac{(4^{1-1}-3^{1-1})x_0 + (\frac{3^{1-1}-3}{4})x_1 + \frac{3^{1-1}+1}{4}(x_2+x_3+x_4)}{4^{1-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{1-1}-3^{1-1})y_0 + (\frac{3^{1-1}-3}{4})y_1 + \frac{3^{1-1}+1}{4}(y_2+y_3+y_4)}{4^{1-1}}, \frac{(4^{1-1}-3^{1-1})z_0 + (\frac{3^{1-1}-3}{4})z_1 + \frac{3^{1-1}+1}{4}(z_2+z_3+z_4)}{4^{1-1}} \right), \text{ 成立。}
\end{aligned}$$

同理可證 B_1 、 C_1 、 D_1 成立。

利用內分點公式， G_1 坐標 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
& = \left(\frac{4(4^{1-1}-3^{1-1})x_0 + 3^{1-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
& \left. \frac{4(4^{1-1}-3^{1-1})y_0 + 3^{1-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{4(4^{1-1}-3^{1-1})z_0 + 3^{1-1}(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right), \text{ 成立。}
\end{aligned}$$

當 $k=2$ 時，利用內分點公式， A_2 坐標 $\left(\frac{x_2+x_3+x_4+x_0}{3}, \frac{y_2+y_3+y_4+y_0}{3}, \frac{z_2+z_3+z_4+z_0}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
& = \left(\frac{(4^{2-1}-3^{2-1})x_0 + (\frac{3^{2-1}-3}{4})x_1 + (x_2+x_3+x_4)}{4^{2-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{2-1}-3^{2-1})y_0 + (\frac{3^{2-1}-3}{4})y_1 + \frac{3^{2-1}+1}{4}(y_2+y_3+y_4)}{4^{2-1}}, \frac{(4^{2-1}-3^{2-1})z_0 + (\frac{3^{2-1}-3}{4})z_1 + \frac{3^{2-1}+1}{4}(z_2+z_3+z_4)}{4^{2-1}} \right), \text{ 成立。}
\end{aligned}$$

同理可證 B_2 、 C_2 、 D_2 成立。

利用內分點公式， G_2 坐標 $\left(\frac{4x_0+3(x_1+x_2+x_3+x_4)}{16}, \frac{4y_0+3(y_1+y_2+y_3+y_4)}{16}\right)$

$$\begin{aligned}
& = \left(\frac{4(4^{2-1}-3^{2-1})x_0 + 3^{2-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^2}, \right. \\
& \left. \frac{4(4^{2-1}-3^{2-1})y_0 + 3^{2-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^2}, \frac{4(4^{2-1}-3^{2-1})z_0 + 3^{2-1}(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^2} \right), \text{ 成立。}
\end{aligned}$$

2. 假設 k 為奇數時成立，可得

$$\begin{aligned}
& A_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})x_1 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(x_2+x_3+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})y_1 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(y_2+y_3+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})z_1 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(z_2+z_3+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
& B_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})x_2 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(x_1+x_3+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})y_2 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(y_1+y_3+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})z_2 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(z_1+z_3+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
& C_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})x_3 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(x_1+x_2+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})y_3 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(y_1+y_2+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})z_3 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(z_1+z_2+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
& D_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})x_4 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(x_1+x_2+x_3)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})y_4 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(y_1+y_2+y_3)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}+3}{4})z_4 + \frac{3^{k-1}-1}{4}(z_1+z_2+z_3)}{4^{k-1}} \right) \\
& \text{且 } G_k \left(\frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + 3^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
& \left. \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + 3^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + 3^{k-1}(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right)
\end{aligned}$$

假設 k 為偶數時成立，可得

$$\begin{aligned}
& A_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})x_1 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(x_2+x_3+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})y_1 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(y_2+y_3+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})z_1 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(z_2+z_3+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
& B_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})x_2 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(x_1+x_3+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})y_2 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(y_1+y_3+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})z_2 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(z_1+z_3+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
& C_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})x_3 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(x_1+x_2+x_4)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})y_3 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(y_1+y_2+y_4)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})z_3 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(z_1+z_2+z_4)}{4^{k-1}} \right) \\
& D_k \left(\frac{(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})x_4 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(x_1+x_2+x_3)}{4^{k-1}}, \right. \\
& \left. \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})y_4 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(y_1+y_2+y_3)}{4^{k-1}}, \frac{(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + (\frac{3^{k-1}-3}{4})z_4 + \frac{3^{k-1}+1}{4}(z_1+z_2+z_3)}{4^{k-1}} \right) \\
& \text{且 } G_k \left(\frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})x_0 + 3^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
& \left. \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})y_0 + 3^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})z_0 + 3^{k-1}(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right)
\end{aligned}$$

3. 當 k 為奇數時，則 $k+1$ 為偶數。由假設得知此時 A_{k+1} 為四面體 $B_k C_k D_k - P$ 的重心，

$$\begin{aligned}
 A_{k+1} &= \left(\frac{(4 \times 4^{k-1} - 3 \times 3^{k-1})x_0 + 3\left(\frac{3^{k-1}-1}{4}\right)x_1 + \frac{3 \times 3^{k-1}+1}{4}(x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(4 \times 4^{k-1} - 3 \times 3^{k-1})y_0 + 3\left(\frac{3^{k-1}-1}{4}\right)y_1 + \frac{3 \times 3^{k-1}+1}{4}(y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{(4 \times 4^{k-1} - 3 \times 3^{k-1})z_0 + 3\left(\frac{3^{k-1}-1}{4}\right)z_1 + \frac{3 \times 3^{k-1}+1}{4}(z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right) \\
 &= \left(\frac{(4^k-3^k)x_0 + \frac{3^k-3}{4}x_1 + \frac{3^k+1}{4}(x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(4^k-3^k)y_0 + \frac{3^k-3}{4}y_1 + \frac{3^k+1}{4}(y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{(4^k-3^k)z_0 + \frac{3^k-3}{4}z_1 + \frac{3^k+1}{4}(z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{同理，} B_{k+1} &\left(\frac{(4^k-3^k)x_0 + \frac{3^k-3}{4}x_2 + \frac{3^k+1}{4}(x_1+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(4^k-3^k)y_0 + \frac{3^k-3}{4}y_2 + \frac{3^k+1}{4}(y_1+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{(4^k-3^k)z_0 + \frac{3^k-3}{4}z_2 + \frac{3^k+1}{4}(z_1+z_3+z_4)}{4^k} \right) \\
 C_{k+1} &\left(\frac{(4^k-3^k)x_0 + \frac{3^k-3}{4}x_3 + \frac{3^k+1}{4}(x_1+x_2+x_4)}{4^k}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(4^k-3^k)y_0 + \frac{3^k-3}{4}y_3 + \frac{3^k+1}{4}(y_1+y_2+y_4)}{4^k}, \frac{(4^k-3^k)z_0 + \frac{3^k-3}{4}z_3 + \frac{3^k+1}{4}(z_1+z_2+z_4)}{4^k} \right) \\
 D_{k+1} &\left(\frac{(4^k-3^k)x_0 + \frac{3^k-3}{4}x_4 + \frac{3^k+1}{4}(x_1+x_2+x_3)}{4^k}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(4^k-3^k)y_0 + \frac{3^k-3}{4}y_4 + \frac{3^k+1}{4}(y_1+y_2+y_3)}{4^k}, \frac{(4^k-3^k)z_0 + \frac{3^k-3}{4}z_4 + \frac{3^k+1}{4}(z_1+z_2+z_4)}{4^k} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{則 } G_{k+1} &\left(\frac{4(4^k-3^k)x_0 + 3^k(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{4(4^k-3^k)y_0 + 3^k(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{4(4^k-3^k)z_0 + 3^k(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right), \text{ 成立。}
 \end{aligned}$$

當 k 為偶數時，則 $k+1$ 為奇數。 $A_{k+1} =$

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{(4 \times 4^{k-1} - 3 \times 3^{k-1})x_0 + 3\left(\frac{3^{k-1}+1}{4}\right)x_1 + \frac{3 \times 3^{k-1}-1}{4}(x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(4 \times 4^{k-1} - 3 \times 3^{k-1})y_0 + 3\left(\frac{3^{k-1}+1}{4}\right)y_1 + \frac{3 \times 3^{k-1}-1}{4}(y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{(4 \times 4^{k-1} - 3 \times 3^{k-1})z_0 + 3\left(\frac{3^{k-1}+1}{4}\right)z_1 + \frac{3 \times 3^{k-1}-1}{4}(z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right) \\
 &= \left(\frac{(4^k-3^k)x_0 + \frac{3^k+3}{4}x_1 + \frac{3^k-1}{4}(x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(4^k-3^k)y_0 + \frac{3^k+3}{4}y_1 + \frac{3^k-1}{4}(y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{(4^k-3^k)z_0 + \frac{3^k+3}{4}z_1 + \frac{3^k-1}{4}(z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{同理，} B_{k+1} &\left(\frac{(4^k-3^k)x_0 + \frac{3^k+3}{4}x_2 + \frac{3^k-1}{4}(x_1+x_3+x_4)}{4^k}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(4^k-3^k)y_0 + \frac{3^k+3}{4}y_2 + \frac{3^k-1}{4}(y_1+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{(4^k-3^k)z_0 + \frac{3^k+3}{4}z_2 + \frac{3^k-1}{4}(z_1+z_3+z_4)}{4^k} \right) \\
 C_{k+1} &\left(\frac{(4^k-3^k)x_0 + \frac{3^k+3}{4}x_3 + \frac{3^k-1}{4}(x_1+x_2+x_4)}{4^k}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(4^k-3^k)y_0 + \frac{3^k+3}{4}y_3 + \frac{3^k-1}{4}(y_1+y_2+y_4)}{4^k}, \frac{(4^k-3^k)z_0 + \frac{3^k+3}{4}z_3 + \frac{3^k-1}{4}(z_1+z_2+z_4)}{4^k} \right)
 \end{aligned}$$

$$D_{k+1}\left(\frac{(4^k-3^k)x_0+\frac{3^{k+3}}{4}x_4+\frac{3^{k-1}}{4}(x_1+x_2+x_3)}{4^k}, \frac{(4^k-3^k)y_0+\frac{3^{k+3}}{4}y_4+\frac{3^{k-1}}{4}(y_1+y_2+y_3)}{4^k}, \frac{(4^k-3^k)z_0+\frac{3^{k+3}}{4}z_4+\frac{3^{k-1}}{4}(z_1+z_2+z_3)}{4^k}\right)$$

則 $G_{k+1}\left(\frac{4(4^k-3^k)x_0+3^k(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^{k+1}}, \frac{4(4^k-3^k)y_0+3^k(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^{k+1}}, \frac{4(4^k-3^k)z_0+3^k(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^{k+1}}\right)$ ，成立。

綜合上述討論，由數學歸納法得 k 為偶數時的 G_k 坐標，與 k 為奇數時的 G_k 坐標相同。

由此，我們可推論出 $G_k\left(\frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})x_0+3^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})y_0+3^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})z_0+3^{k-1}(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^k}\right)$ ， $k \in \mathbb{N}$ 。

【性質一】 G_1 、 G_2 、...、 G_k 與 P 點共線， $k \in \mathbb{N}$

【證明】

1. 利用前述所得 G_k 坐標，可得 $\overrightarrow{G_k G_{k-1}} = \left(\frac{3^{k-2}(4x_0-x_1-x_2-x_3-x_4)}{4^k}, \frac{3^{k-2}(4y_0-y_1-y_2-y_3-y_4)}{4^k}, \frac{3^{k-2}(4z_0-z_1-z_2-z_3-z_4)}{4^k}\right)$
又， $\overrightarrow{PG_k} = \left(\frac{3^{k-1}(4x_0-x_1-x_2-x_3-x_4)}{4^k}, \frac{3^{k-1}(4y_0-y_1-y_2-y_3-y_4)}{4^k}, \frac{3^{k-1}(4z_0-z_1-z_2-z_3-z_4)}{4^k}\right)$
 $= 3\overrightarrow{G_k G_{k-1}}$
 $\Rightarrow P$ 、 G_k 、 G_{k-1} 三點共線， $k=2 \sim n$
 $\Rightarrow P$ 、 G_1 、 G_2 、.....、 G_k 共線，得證。

【性質二】 $\overrightarrow{G_{k-2} G_{k-1}} : \overrightarrow{G_{k-1} G_k} = 4 : 3$ ， $k \in \mathbb{N}$ ， $k \geq 3$

【證明】

1. 承性質一， $3\overrightarrow{G_{k-1} G_k} = \overrightarrow{G_k P}$
 $\Rightarrow$ 同理得 $3\overrightarrow{G_{k-2} G_{k-1}} = \overrightarrow{G_{k-1} P} = \overrightarrow{G_k P} + \overrightarrow{G_{k-1} G_k} = 4\overrightarrow{G_{k-1} G_k}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{G_{k-2} G_{k-1}} : \overrightarrow{G_{k-1} G_k} = 4 : 3$ ， $k=3 \sim n$ ，得證。

【性質三】 $\overrightarrow{G_{k-1} P} : \overrightarrow{G_{k-1} G_k} = 4 : 1$ ， $k \in \mathbb{N}$ ， $k \geq 2$

【證明】

1. 承性質一與性質三， $\overrightarrow{G_{k-1} P} = \overrightarrow{G_{k-1} G_k} + \overrightarrow{G_k P} = \overrightarrow{G_{k-1} G_k} + 3\overrightarrow{G_{k-1} G_k} = 4\overrightarrow{G_{k-1} G_k}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{G_{k-1} P} : \overrightarrow{G_{k-1} G_k} = 4 : 1$ ，得證。

【性質四】重複疊作四面體 $A_k B_k C_k D_k$ 的質心 G_k ， $k \in \mathbb{N}$ ，當 k 趨近於無限大時 G_k 會收斂至 P ，
即 $\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = P$

【證明】

承性質一與 G_k 坐標，

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} G_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})x_0+3^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})y_0+3^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \right. \\ &\quad \left. \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})z_0+3^{k-1}(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right) \\ &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(4^k-\frac{4}{3} \times 3^k)x_0+\frac{1}{3} \times 3^k(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(4^k-\frac{4}{3} \times 3^k)y_0+\frac{1}{3} \times 3^k(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \right. \\ &\quad \left. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(4^k-\frac{4}{3} \times 3^k)z_0+\frac{1}{3} \times 3^k(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^k} \right) \\ &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{4}{3} \times \left(\frac{3}{4} \right)^k \right) x_0 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4} \right)^k (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \right], \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{4}{3} \times \left(\frac{3}{4} \right)^k \right) y_0 + \frac{1}{3} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{3}{4} \right)^k (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \right], \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{4}{3} \times \left(\frac{3}{4} \right)^k \right) z_0 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4} \right)^k (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \right] \right) \\ &= (x_0, y_0) = P \quad (\because \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^k = 0), \text{ 得證。} \end{aligned}$$

參、 研究結論

一、 P 點重心 n 邊形反推

- ◆ 任一個 P 點重心奇數邊形必存在唯一的原奇數邊形，任一個 P 點重心偶數邊形則必存在無限個原偶數邊形
- ◆ 除四邊形以外的 P 點重心 n 邊形相隔一邊的兩邊不得平行

二、 重複疊作 P 點重心 n 邊形

- ◆ G_k 坐標 $(\frac{n(3^{k-1}-2^{k-1})x_0+2^{k-1}(x_1+x_2+\dots+x_n)}{3^{k-1}n}, \frac{n(3^{k-1}-2^{k-1})y_0+2^{k-1}(y_1+y_2+\dots+y_n)}{3^{k-1}n})$, $k \in \mathbb{N}$
- ◆ 一組重複疊作 P 點重心 n 邊形，各重心與 P 點共線
- ◆ 相鄰 P 點重心 n 邊形重心的距離比為 3 : 2
- ◆ 一 P 點重心 n 邊形重心到 P 點和到下一個重心的距離比為 3 : 1
- ◆ P 點為第 k 層 ($k \rightarrow \infty$) P 點重心 n 邊形重心的收斂點

三、 P 點質心多面體

- ◆ 任意四面體的 P 點質心四面體各邊分別與原四面體相對應邊平行
- ◆ 原四面體的邊長和 : P 點質心四面體的邊長和 = 4 : 1
- ◆ 原正多面體的邊長和與其 P 點質心多面體的邊長和皆有固定比例
- ◆ 移動 P 點位置，P 點質心多面體恆全等不變(僅跟隨 P 點相對位移)

四、 P 點質心四面體反推

- ◆ 任一個 P 點質心四面體必存在唯一的原四面體

五、 重複疊作 P 點質心四面體

- ◆ G_k 坐標 $(\frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})x_0+3^{k-1}(x_1+x_2+x_3+x_4)}{4^k}, \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})y_0+3^{k-1}(y_1+y_2+y_3+y_4)}{4^k}, \frac{4(4^{k-1}-3^{k-1})z_0+3^{k-1}(z_1+z_2+z_3+z_4)}{4^k})$, $k \in \mathbb{N}$
- ◆ 一組重複疊作 P 點重心四面體，各重心與 P 點共線
- ◆ 相鄰 P 點質心四面體質心的距離比為 4 : 3
- ◆ 一 P 點質心四面體質心到 P 點和到下一個質心的距離比為 3 : 1
- ◆ P 點為第 k 層 ($k \rightarrow \infty$) P 點質心四面體質心的收斂點

肆、 未來展望

- 一、 推出任意 P 點質心多面體的性质及證明方法

伍、參考資料及其他

- ◆ 林哲佑、朱柏翰、李沛宸（2012）。第 52 屆全國中小學科展作品—心心相印。2012 年 11 月 27 日，取自「科展群傑廳」：<http://science.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=1000000&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=9618>
- ◆ 林福來等（2011）。普通高級中學數學第三冊。第三章平面向量。台南市：南一書局。
- ◆ 林語謙、林彤、鄧爵明、李堉辰（2009）。宜蘭高中98學年度學生數理自然科學專題研究—任意多邊形的重心求法。2009年，取自：
<http://blog.ylsh.ilc.edu.tw/life/gallery/45/%E8%87%AA%E7%84%B612-%E4%BB%BB%E6%84%8F%E5%A4%9A%E9%82%8A%E5%BD%A2%E7%9A%84%E9%87%8D%E5%BF%83%E6%B1%82%E6%B3%95.pdf>
- ◆ 鄭元博(2003)。多面體重心的幾何作法。2003年，取自：
[http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/92\(256-265\)259-PDF/2003-259-03\(29-32\).pdf](http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/92(256-265)259-PDF/2003-259-03(29-32).pdf)
- ◆ 林福來等（2011）。普通高級中學數學第三冊。第一章空間向量。台南市：南一書局。
- ◆ 張欣雅、陳芊卉、蔡佩珊（2013）。第53屆全國中小學科展作品—多個三角形的重心連線性質探討。2014年5月24日，取自「科展群傑廳」：
<http://science.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=1000000&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=10131>

【評語】 010009

本作品從給定任意 N 邊形及一 P 點的情況下，作出 P 點重心 N 邊形，並探討其性質，繼而再作其他延伸研究。在推廣至多面體時，研究有探討四面體的 P 點重心四面體的相關性質，但其他多面體的反推上存技術上的困難有待克服，建議日後可考慮改用向量作進一步的探討。