2015 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010008

參展科別　數學

作品名稱　N 邊形與多面體的頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質

得獎獎項　大會獎：四等獎

就讀學校　國立鹿港高級中學

指導教師　鄭仕豐、張富強

作者姓名　莊閔宇、莊祐鈞、柯諭淇

關鍵字　N 邊形、多面體、向量的除法

作者簡介

我是莊閎宇，數學是一種興趣也是提升自己的邏輯概念。在平日有時會算算數學，當遇到難題，找到方法、解開，那種成就感是給自己更進一步的契機。一種很玄的規律，都是激發自己的勘察力。

每一次參加科展，看見了許多更不一樣的作品，讓自己眼光更開闊。同時希望這次的科展盡自己全力，努力到最後一刻。

我的名字是莊祐鈞，平時最大的興趣是打球和玩電腦，為了在籃球上能有一定的表現，放學後在不影響課業前提下，我都會到球場上打上 1 到 2 小時的球。平時在課業如果有同學問我數學問題，我都十分樂於解答，也曾為了找出問題的答案，花了許久時間，這次能有幸進入國際科展，雖然我並不是特別優異，但我們會盡我們最大的努力將我們的作品呈現出來。

我叫做柯諭淇，就讀國立鹿港高中一年級。閒暇時總喜歡看看日本動漫，畫畫小插圖，聽聽西洋音樂等等，不過在我眾多的興趣當中，能帶給我最大樂趣的莫過於解數學題了。置身在數學的世界裡，常常一算就是一整天，忘了吃飯的時間。在一次因緣際會下，我和兩位學長開始進行一個數學專題研究，雖然過程中遇到了許多瓶頸，但最後大部分都能順利解決。透過這次的研究，我深刻的體悟

到經過重重關卡而得到的成功是多麼美好且令人興奮，我一定會永遠記得這一段研究歷程所帶給我的感動。

N 邊形與多面體的頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質

摘要

本文主要探討三角形的一個幾何定性性質的推廣，原始問題為：『點 P 為三角形 ABC 內部一點，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 三邊於 P_1 、P_2 與 P_3 三點，則 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 成立。』我們發現此結果在**正多邊形**中也有相對應的推論，只是定值不再是 1，我們可以表示出數個線段比值相加後之定值的一般化公式；更甚者，我們發現原問題中的**點 P 不一定要在三角形與正多邊形的內部**，而**可以將之移至三角形與正多邊形的外部**，並將原結論推廣成**『有向線段比值和為定值』**的一般化結果。此外，我們亦將原問題推廣到空間中的**『任意四面體』與『正多面體』**中，並發現驗證得相對應的有向線段比值和為定值。

Abstract

The main purpose of the article is to investigate the generalization of a certain geometric property concerning the sum of the ratios of several segments in triangle. The original problem says that "Given a triangle ABC and a point P inside the triangle. Suppose that the lines AP, BP and CP intersects the segments BC, CA and AB at the points P_1, P_2 and P_3 respectively. Then $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$." We had generalized it and already found out that there are similar results in regular polygons. But the sum of the ratios of several segments is no longer equal to 1. For regular polygons, we had observed the general formula of the fixed sum of the ratios of several segments. Moreover, we found that the point P in the original problem is not necessarily inside the triangle and the regular polygons. Instead, we could move the point P to the outside of the triangle and the regular polygons and generalize the original result to be the form of the fixed sum of the ratios of several directed segments. In addition, we also try to consider the inference of the original result to arbitrary tetrahedrons and regular polyhedrons. Fortunately, we got that the sum of the ratios of several directed segments is fixed.

壹、 研究動機

在一個課餘的機會裡，老師教我們使用數學繪圖軟體 Geogebra 繪製一些平面上的幾何圖形，透過實驗與觀察重新驗證一些平面幾何上的結果，我們做了許多數學實驗，發現這套軟體除了容易操作外，重要的是操作起來讓我們覺得很有趣，因為它可以快速實驗考慮多種變化的情形。在這個軟體操作的學習裡，我們除了重新品嚐了一些學過的平面幾何結論外，更對參考資料[1]中的一個三角形幾何定性性質產生興趣，問題的描述詳見『引理一』。

我們除了用軟體檢驗了一下這個幾何定性性質，也給出其嚴謹的證明（詳見引理一），接著我們就想說有沒有機會將它推廣到任意多邊形的情形，我們用了軟體先行檢驗一番，發現任意的凸四邊形內只有一些 P 點會保持這個性質成立，所以我們退而求其次，先考慮正多邊形的情形，從正方形、正五邊形、正六邊形、正七邊形與正八邊形，一直到一般化的正 $2n$（$n \geq 2$）邊形與正 $2n-1$（$n \geq 2$）邊形，一步一腳印，邊數由小至大，探索過程之中，除了軟體作圖、紙筆計算外，並給予嚴謹的證明，慢慢地我們發現其中的奧妙與規則，最後，我們發現正多邊形內的任一點 P 都可以維持這樣的定性性質，只是數個比值相加後之定值不再是 1，而是會隨著邊數的不同而有所改變，幸運的是我們可以給出這個定值的一般化公式。

完成『引理一』在平面上正多邊形中的推論後，我們試想著『引理一』中的點 P 是否可以將之移至三角形的外部，進而在正多邊形中的推論是否也可以將點 P 移至正多邊形的外部，我們做了一些嘗試後，發現直接將 P 點移至三角形與正多邊形的外部時，原來的『線段比值和』不再是定值，但是如果我們同時將**『線段比值和』**換成相對應的**『有向線段比值和』**時，則**這些『有向線段比值和』會成相同的定值**，這樣我們便更完整的看到『引理一』在三角形與正多邊形的推論。

完成了『引理一』在平面上三角形與正多邊形中的推論後，我們更進一步去思考在空間中延伸的可能性，經過一些努力，輔以繪圖軟體 Cabri3D，我們成功地驗證得『引理一』在**『任意四面體』與『正多面體』**中也有類似的推論，依舊可得『數個有向線段比值和為定值』。

貳、 研究目的

一、 將『引理一』中**三角形**內的一**點 P 移至三角形外**，觀察驗證對應的定性性質。
二、 『引理一』在**正方形**中的推論。
三、 『引理一』在**正五邊形**中的推論。
四、 『引理一』在**正六邊形**中的推論。
五、 『引理一』在**正八邊形**中的推論。
六、 『引理一』在**正 $2n$（$n \geq 2$）邊形**中的推論。
七、 『引理一』在**正 $2n-1$（$n \geq 2$）邊形**中的推論。
八、 『引理一』在**四面體**中的推論。
九、 『引理一』在**正六面體**中的推論。
十、 『引理一』在**正八面體**中的推論。
十一、『引理一』在**正十二面體**中的推論。
十二、『引理一』在**正二十面體**中的推論。

參、 研究設備及器材

頭腦、計算機、紙、筆、尺、電腦、電腦軟體（Microsoft Word,Geogebra4.2,Cabri 3D）

肆、 研究過程與方法

在參考資料[1]中，我發現了如下的結果，為驗證其正確性，我以 Geogebra 繪圖軟體驗證其正確性，並給出了嚴謹的證明如下。

引理一：

在平面上，已知點 P 在 ΔABC 內部，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 三邊於 P_1 、P_2 與 P_3 三點，如下圖 I-1 所示，試證明：$\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$。

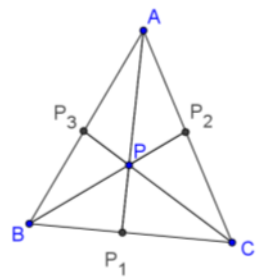


圖 I-1

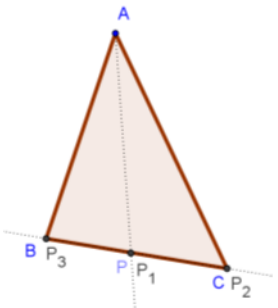


圖 R-1

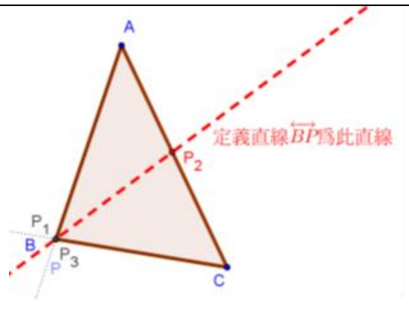


圖 R-2

證明：

(i) 由上圖 I-1 知，

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}=\frac{\Delta BPC}{\Delta ABC}\ ,\ \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}=\frac{\Delta APC}{\Delta ABC}\ ,\ \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=\frac{\Delta APB}{\Delta ABC}\ 。$$

(ii) 利用上述(i)之結果得

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=\frac{\Delta BPC}{\Delta ABC}+\frac{\Delta APC}{\Delta ABC}+\frac{\Delta APB}{\Delta ABC}=\frac{\Delta ABC}{\Delta ABC}=1$$

，得證原題。 Q.E.D.

上述『引理一』中，若將點 P 移至 ΔABC 的邊上，但是點 P 不與 ΔABC 的三頂點重合，則結論依舊會成立，詳述如下。

Remark 1:

(1) 在平面上，若點 P 在 ΔABC 邊上，但是點 P 不與 ΔABC 的三頂點重合，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 三邊於 P_1 、P_2 與 P_3 三點，如上圖 R-1，則 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 亦成立。

(2) 承(1)，若點 P 與 ΔABC 的某一頂點重合，則等式 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 可**視為不成立**或**視為成立**。

證明：

(1) $\because P$ 在 $\overline{BC}$ 上，$\therefore P_1=P, P_2=C, P_3=B$，從而 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=\dfrac{0}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PC}}{\overline{BC}}+\dfrac{\overline{PB}}{\overline{CB}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BC}}=1$，故得證原命題成立。

(2)

觀點一：視為不成立的理由

假設點 P 與頂點 B 重合，則直線 $\overleftrightarrow{BP}$ 無定義，所以 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{AC}$ 之交點 P_2 不存在，故原等式無意義，或說原等式不成立。

觀點二：視為成立的理由

假設點 P 與頂點 B 重合，若我們定義直線 $\overleftrightarrow{BP}$ 為通過 B 點的任意直線，則此時 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{AC}$ 會交於一點 P_2，如上圖 R-2 所示，

又 $P_1 = P, P_3 = P$ ，所以 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} = \dfrac{0}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{BP_2}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{0}{\overline{CP_3}} = 1$ ，即原等式成立。

上述的『觀點一』似乎比『觀點二』合理一些，但是其實『觀點二』可以視為『引理一』的一種極端情形。

在參考資料[2]中，我發現了如下的『共邊定理』，在接下來的問題論證中，偶爾會用到這個結果，因此特別將其列出，詳述如下。

引理二：

若直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 相交於 M 點，則 $\dfrac{\Delta PAB}{\Delta QAB} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$ 。

證明：

直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 相交於 M 點，則可能的圖形有如下圖 II-1,II-2,II-3,II-4,II-5 等幾種，我們僅針對其中圖 II-1 之情形給出證明，詳述如下。

(1)先考慮圖 II-1 的情形

法一：過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PP_0}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於點 P_0 ，過 Q 點作直線 $\overleftrightarrow{QQ_0}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於點 Q_0 ，如下圖 II-1-1 所示，則 $\dfrac{\Delta PAB}{\Delta QAB} = \dfrac{\overline{PP_0}}{\overline{QQ_0}} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$ ，故得證。

法二：在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上取一點 N ，使得 $\overline{MN} = \overline{AB}$ ，如下圖 II-1-2 所示，則 $\Delta PAB = \Delta PMN$ ，$\Delta QAB = \Delta QMN$ ，所以 $\dfrac{\Delta PAB}{\Delta QAB} = \dfrac{\Delta PMN}{\Delta QMN} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$ ，故得證。

法三：如圖 II-1，$\dfrac{\Delta PAB}{\Delta QAB} = \dfrac{\Delta PAB}{\Delta PAM} \times \dfrac{\Delta PAM}{\Delta QAM} \times \dfrac{\Delta QAM}{\Delta QAB} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AM}} \times \dfrac{\overline{PM}}{\overline{QM}} \times \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$ ，故得證。

(3) 圖 II-2,II-3,II-4,II-5 等情形證法類似。故得證原題。

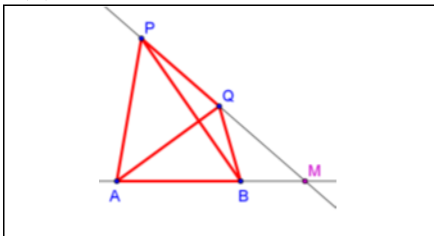


圖 II-1

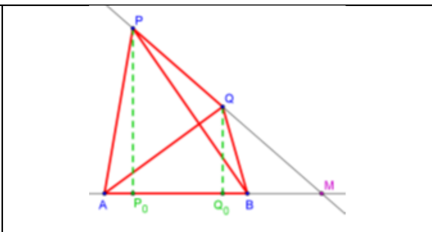


圖 II-1-1

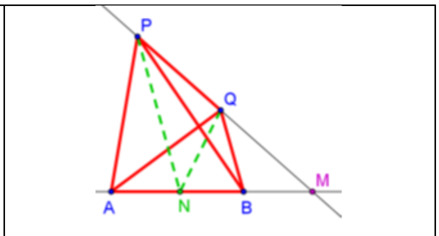


圖 II-1-2

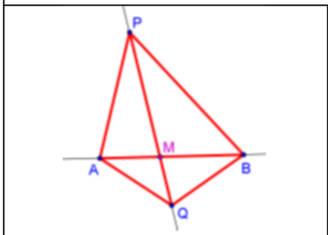


圖 II-2

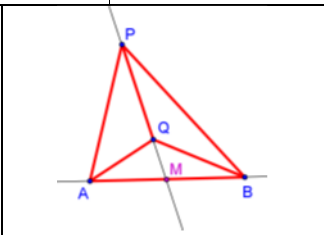


圖 II-3

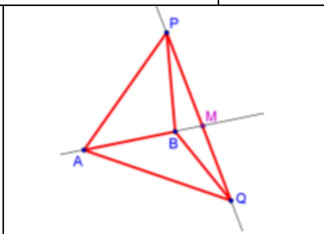


圖 II-4

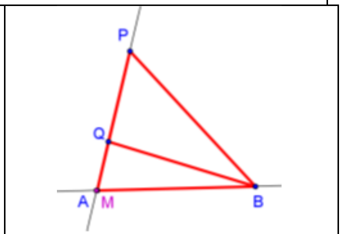


圖 II-5

上述『引理一』之結論，如果允許 P 點的位置在 ΔABC 的外部，則會有如下之結果。

問題一：

在平面上，已知 ΔABC 外部有一點 P，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交三邊所在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_1 、P_2 與 P_3 三點，過 A 點作平行直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線 L_A、過 B 點作平行直線 $\overleftrightarrow{CA}$ 的直線 L_B 及過 C 點作平行直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線 L_C，使得 L_B 與 L_C 交於點 A'、L_C 與 L_A 交於點 B' 及 L_A 與 L_B 交於點 C'，則

(1) 若 P 點落在 $\Delta A'BC$ 內部，如下圖 1-1 所示，試證明：$\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=1$。

(2) 若 P 點落在 $\Delta AB'C$ 內部，如下圖 1-2 所示，試證明：$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=1$。

(3) 若 P 點落在 $\Delta ABC'$ 內部，如下圖 1-3 所示，試證明：$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$。

(4) 若 P 點不落在 $\Delta A'BC$ 、$\Delta AB'C$ 與 $\Delta ABC'$ 內部，如下圖 1-4、1-5 與 1-6 所示，試證明：

$\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$，$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$ 且 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}>1$。

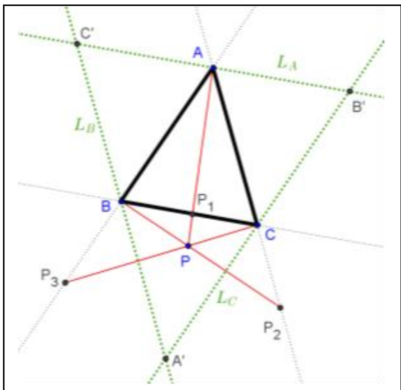


圖 1-1

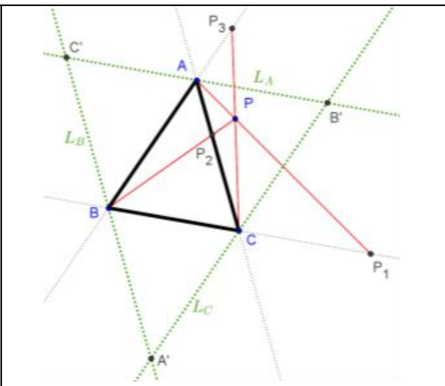


圖 1-2

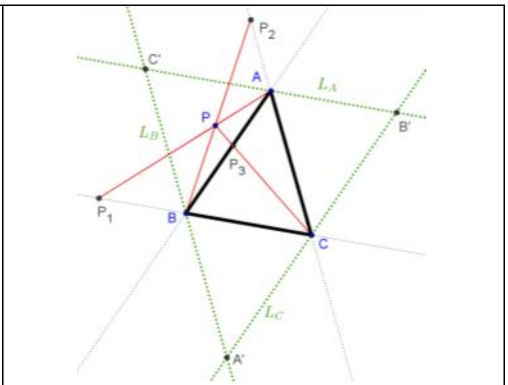


圖 1-3

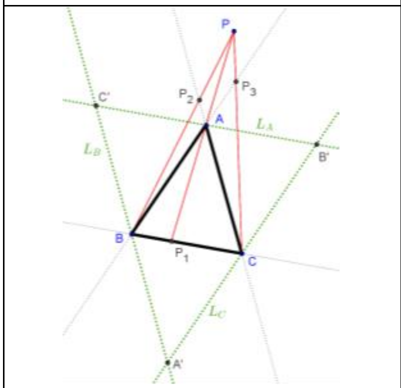


圖 1-4

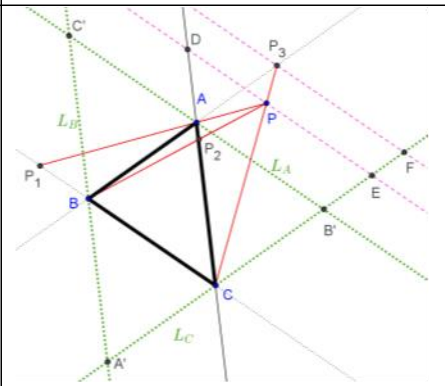


圖 1-5

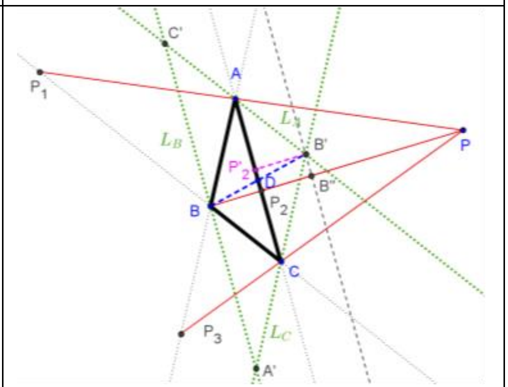


圖 1-6

證明：

(1) 當 P 點落在 $\Delta A'BC$ 內部時，如上圖 1-1 所示，

連接直線 $\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 與延長直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 交 $\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 於點 P''，如下圖 1-1-1 所示，則

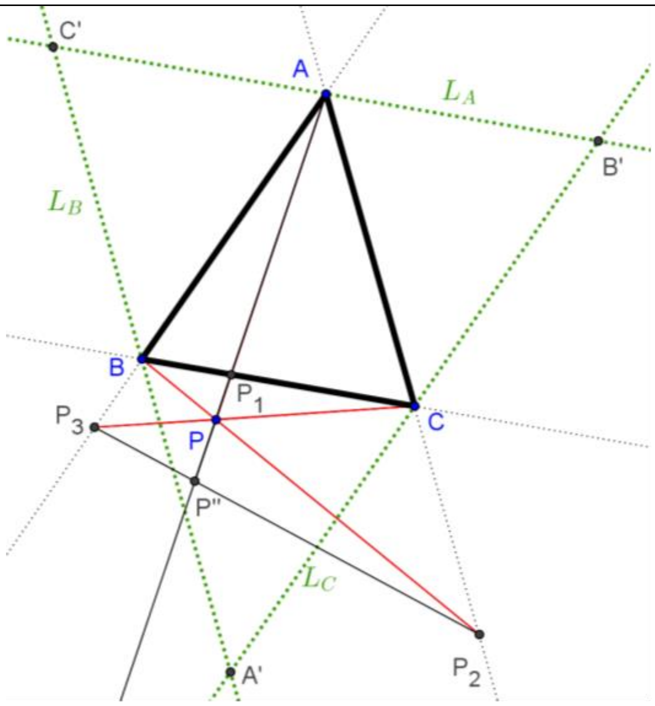


圖 1-1-1

(i) $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}=\dfrac{\Delta BPC}{\Delta BAC}=\dfrac{\Delta BPC}{\Delta ACP}\times\dfrac{\Delta ACP}{\Delta BAC}=\underrightarrow{\text{引理二}}\dfrac{\overline{BP_3}}{\overline{AP_3}}\times\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}=\dfrac{\Delta BP_2P_3}{\Delta AP_2P_3}\times\dfrac{\Delta PP_2P_3}{\Delta BP_2P_3}=\dfrac{\Delta PP_2P_3}{\Delta AP_2P_3}=\dfrac{\overline{PP''}}{\overline{AP''}}$ 。

(ii) 又 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}=\dfrac{\Delta APP_3}{\Delta AP_2P_3}$ 且 $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=\dfrac{\Delta APP_2}{\Delta AP_2P_3}$ ，

所以 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=\dfrac{\Delta PP_2P_3}{\Delta AP_2P_3}+\dfrac{\Delta APP_3}{\Delta AP_2P_3}+\dfrac{\Delta APP_2}{\Delta AP_2P_3}=\dfrac{\Delta AP_2P_3}{\Delta AP_2P_3}=1$，故得證原題。

(2) 仿上述(1)之證明方式，即得原題之結果。

(3) 仿上述(1)之證明方式，即得原題之結果。

(4)

(i) 先考慮圖 1-4 的情形

①$\because \overline{PP_1}>\overline{AP_1},\therefore \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}>1\Rightarrow \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$ 成立。

②$\because \overline{CP}>\overline{CP_3},\therefore \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1\Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$ 成立。

③$\because \overline{BP}>\overline{BP_2},\therefore \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}>1\Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}>1$ 成立。

故此時原命題成立。

(ii) 次考慮圖 1-5 的情形

①$\because \overline{PP_1}>\overline{AP_1},\therefore \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}>1\Rightarrow \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$ 成立。

②過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PD}//\overleftrightarrow{BC}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{CB'}$ 於 D 與 E 兩點，再過 P_3 點作直線 $\overleftrightarrow{P_3F}//\overleftrightarrow{BC}$ 交 $\overleftrightarrow{CB'}$ 於 F 點，則由相似三角形性質知

$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PD}}{\overline{BC}}+\dfrac{\overline{PE}}{\overline{P_3F}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\left(\dfrac{\overline{PD}}{\overline{BC}}+\dfrac{\overline{PE}}{\overline{BC}}\right)=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}>\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+1>1$，故

得證此時原命題成立。

③$\because \overline{BP} > \overline{BP_2}, \therefore \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} > 1 \Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} > 1$成立。

故此時原命題成立。

(iii) 再考慮圖 1-6 的情形

①$\because \overline{PP_1} > \overline{AP_1}, \therefore \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} > 1 \Rightarrow \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}} > 1$成立。

②$\because ABCB'$是一個平行四邊形，

過B'點作$\overleftrightarrow{B'P_2'} // \overleftrightarrow{BP_2}$交$\overleftrightarrow{AC}$於$P_2'$點，則$\overline{B'P_2'} = \overline{BP_2}$，又$\overline{PP_2} > \overline{B''P_2} = \overline{B'P_2'}$，所以

$\overline{PP_2} > \overline{BP_2}$，因此$\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} > 1$，從而得證$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}} > 1$成立。

③$\because \overline{PP_3} > \overline{CP_3}, \therefore \dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} > 1 \Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} > 1$成立。

故此時原命題成立。

(iv) 由上述(i),(ii)與(iii)得證原命題成立。

Q.E.D.

針對上述『問題一』中(4)之結果，我可以再將其細分成幾種情形，為了方便起見，我們先定義如下幾個符號。

定義一：

我們將上圖 1-1 由直線$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}, L_A, L_B$與$L_C$所圍成之各區域以下列符號定義之：

(1) 以$I_{\Delta ABC}$表示『由直線$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{CA}$所圍成之三角形$ABC$內部區域』。

(2) 以$I_{\Delta A'BC}$表示『由直線$\overleftrightarrow{A'B}, \overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{CA'}$所圍成之三角形$A'BC$內部區域』。

(3) 以$I_{\Delta AB'C}$表示『由直線$\overleftrightarrow{AB'}, \overleftrightarrow{B'C}$與$\overleftrightarrow{CA}$所圍成之三角形$AB'C$內部區域』。

(4) 以$I_{\Delta ABC'}$表示『由直線$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC'}$與$\overleftrightarrow{C'A}$所圍成之三角形$ABC'$內部區域』。

(5) 定義I_A為$I_A := \{P \mid \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC},$ 其中$x<0, y<0\}$。

(6) 定義$I_{A'}$為$I_{A'} := \{P \mid \overrightarrow{A'P} = x\overrightarrow{A'B} + y\overrightarrow{A'C},$ 其中$x<0, y<0\}$。

(7) 定義I_B為$I_B := \{P \mid \overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BA},$ 其中$x<0, y<0\}$。

(8) 定義$I_{B'}$為$I_{B'} := \{P \mid \overrightarrow{B'P} = x\overrightarrow{B'C} + y\overrightarrow{B'A},$ 其中$x<0, y<0\}$。

(9) 定義I_C為$I_C := \{P \mid \overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB},$ 其中$x<0, y<0\}$。

(10) 定義$I_{C'}$為$I_{C'} := \{P \mid \overrightarrow{C'P} = x\overrightarrow{C'A} + y\overrightarrow{C'B},$ 其中$x<0, y<0\}$。

(11) 定義$I_{AB'}$為$I_{AB'} := \{P \mid \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AB'},$ 其中$x<0, 0<y<1\}$。

(12) 定義$I_{AC'}$為$I_{AC'} := \{P \mid \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AC'},$ 其中$x<0, 0<y<1\}$。

(13) 定義$I_{BC'}$為$I_{BC'} := \{P \mid \overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BC'},$ 其中$x<0, 0<y<1\}$。

(14) 定義$I_{BA'}$為$I_{BA'} := \{P \mid \overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BA'},$ 其中$x<0, 0<y<1\}$。

(15) 定義$I_{CA'}$為$I_{CA'} := \{P \mid \overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CA'},$ 其中$x<0, 0<y<1\}$。

(16) 定義$I_{CB'}$為$I_{CB'} := \{P \mid \overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CB'},$ 其中$x<0, 0<y<1\}$。

各區域位置詳見下圖 D-1，

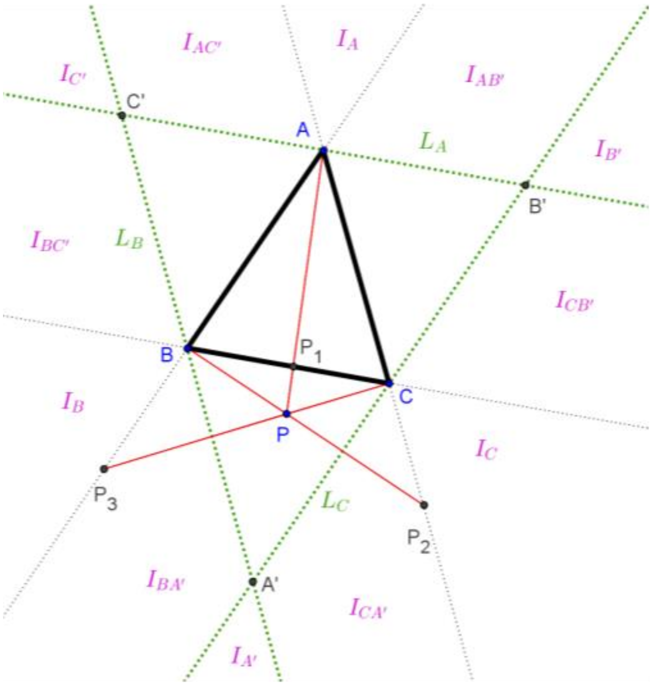


圖 D-1

將上述『問題一』中(4)之結果細分成幾種情形，經測試驗證得如下之結果。

問題二：

承『問題一』，在平面上，已知 ΔABC 外部有一點 P，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交三邊所在直線 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_1、P_2 與 P_3 三點，過 A 點作平行直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線 L_A、過 B 點作平行直線 $\overleftrightarrow{CA}$ 的直線 L_B 及過 C 點作平行直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線 L_C，使得 L_B 與 L_C 交於點 A'、L_C 與 L_A 交於點 B' 及 L_A 與 L_B 交於點 C'，承『定義一』中各符號之定義，於此又定義 $R := \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}$，

$R_A := \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}$，$R_B := \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}$，$R_C := \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}} + \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} + \dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}$，則

(1) 當 $P \in I_A$ 或 $P \in -\overrightarrow{AB}$ 或 $P \in -\overrightarrow{AC}$ 時，$R = R_B = R_C > 1$ 且 $R_A = R + 2$。

(2) 當 $P \in I_{A'}$ 時，$R = R_B = R_C > 1$ 且 $R_A = R - 2$。

(3) 當 $P \in I_B$ 或 $P \in -\overrightarrow{BC}$ 或 $P \in -\overrightarrow{BA}$ 時，$R = R_A = R_C > 1$ 且 $R_B = R + 2$。

(4) 當 $P \in I_{B'}$ 時，$R = R_A = R_C > 1$ 且 $R_B = R - 2$。

(5) 當 $P \in I_C$ 或 $P \in -\overrightarrow{CA}$ 或 $P \in -\overrightarrow{CB}$ 時，$R = R_A = R_B > 1$ 且 $R_C = R + 2$。

(6) 當 $P \in I_{C'}$ 時，$R = R_A = R_B > 1$ 且 $R_C = R - 2$。

(7) 當 $P \in I_{AB'}$ 時，$R = R_C > 1$ 且 $R_A - R_B = 2$。

(8) 當 $P \in I_{AC'}$ 時，$R = R_B > 1$ 且 $R_A - R_C = 2$。

(9) 當 $P \in I_{BC'}$ 時，$R = R_A > 1$ 且 $R_B - R_C = 2$。

(10) 當 $P \in I_{BA'}$ 時，$R = R_C > 1$ 且 $R_B - R_A = 2$。

(11) 當 $P \in I_{CA'}$ 時，$R = R_B > 1$ 且 $R_C - R_A = 2$。

(12) 當 $P \in I_{CB'}$ 時，$R = R_A > 1$ 且 $R_C - R_B = 2$。

證明：

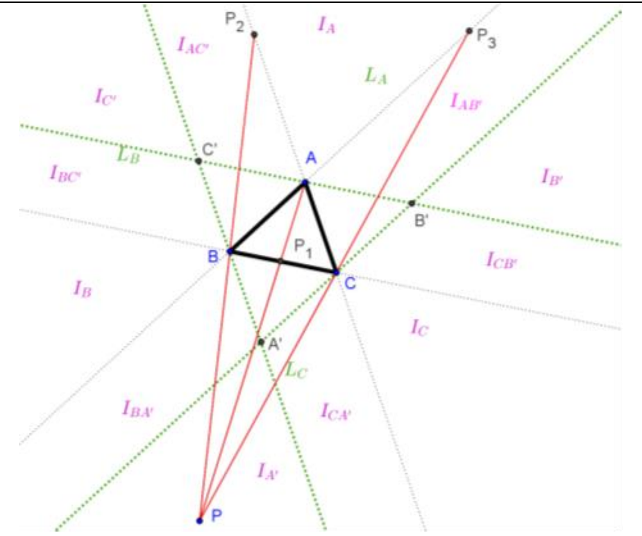


圖 2-1

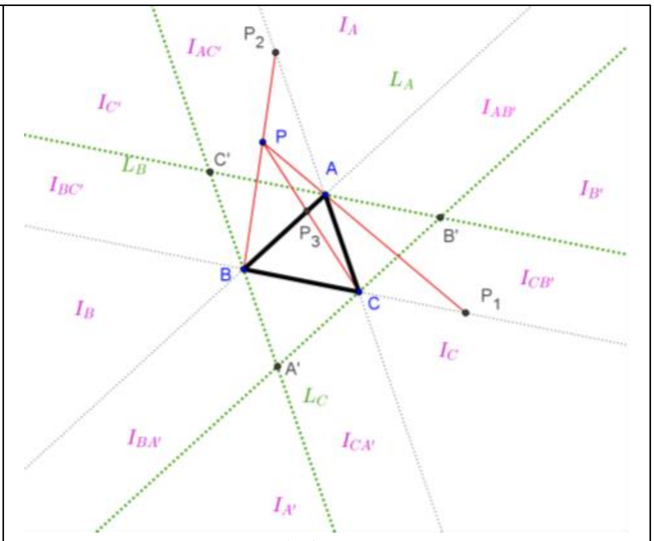


圖 2-2

(1) 當 $P \in I_A$ 或 $P \in -\overrightarrow{AB}$ 或 $P \in -\overrightarrow{AC}$ 時，參閱圖 1-4，則

(i)

①當 $P \in I_A$ 時，

$R - R_B$

$$= \left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right) - \left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$$

$$= \left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} - \frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right) + \left(\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} - \frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$$

$$= \frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}} + \left(-\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}}\right) = 1 + (-1) = 0$$

所以 $R = R_B$ 。

②當 $P \in -\overrightarrow{AC}$ 時，$P_1 = C, P_2 = P, P_3 = A$, 則

$R - R_B$

$$= \left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right) - \left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$$

$$= \left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} - \frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right) + \left(\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} - \frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$$

$$= \left(\frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}\right) + \left(\frac{\overline{PA}}{\overline{CA}} - \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}}\right) = 0$$

所以 $R = R_B$ 。當 $P \in -\overrightarrow{AB}$ 時，同理可證。

(ii) 同上述(i)之法可證 $R = R_C$ 。

(iii)

①當 $P \in I_A$ 時，

$R_A - R$

$$= \left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right) - \left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$$

$$= \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} - \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}\right) + \left(\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$$

$$= \frac{\overline{BP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}} = 1 + 1 = 2$$

②當 $P \in -\overrightarrow{AC}$ 時，$P_1 = C, P_2 = P, P_3 = A$, 則

$R_A - R$

$$= \left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right) - \left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$$

$$= \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} - \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}\right) + \left(\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$$

$$= \left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BP}} - \frac{\overline{PP}}{\overline{BP}}\right) + \left(\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} - \frac{\overline{PA}}{\overline{CA}}\right) = 1 + \frac{\overline{CA}}{\overline{CA}} = 2$$

所以 $R = R_B$ 。當 $P \in -\overrightarrow{AB}$ 時，同理可證。

綜上(i)至(iii)所述，得證(1)之結果成立。

(2) 當 $P \in I_{A'}$ 或 $P \in -\overrightarrow{A'B}$ 或 $P \in -\overrightarrow{A'C}$ 時，參閱圖 2-1，則

(i) $R-R_B$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(-\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}}\right)=(-1)+1=0$ ，所以 $R=R_B$ 。 (ii) 同上述(i)之法可證 $R=R_C$ 。	(iii) $R-R_A$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}-\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\frac{\overline{BP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}}$ $=1+1=2$ 。 綜上(i)至(iii)所述，得證(2)之結果成立。

(3) 同(1)之法可證(3)之結果。

(4) 同(2)之法可證(4)之結果。

(5) 同(1)之法可證(5)之結果。

(6) 同(2)之法可證(6)之結果。

(7) 當 $P\in I_{AB'}$ 或 $P\in\overline{AB'}\setminus\{A,B'\}$ 時，參閱圖 1-5，則

(i) $R-R_C$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}-\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}\right)$ $=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}}+\left(-\frac{\overline{BP_2}}{\overline{BP_2}}\right)=1+(-1)=0$ ，所以 $R=R_C$ 。	(ii) R_A-R_B $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}\right)$ $=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP_2}}{\overline{BP_2}}=1+1=2$ 。 (iii) 綜上(i)與(ii)所述，得證(7)之結果成立。

(8) 當 $P\in I_{AC'}$ 或 $P\in\overline{AC'}\setminus\{A,C'\}$ 時，參閱圖 2-2，則

(i) $R-R_B$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(-\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}}\right)=1+(-1)=0$ ， 所以 $R=R_B$ 。	(ii) R_A-R_C $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}\right)-\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}\right)+\left(\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}\right)$ $=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{CP_3}}{\overline{CP_3}}=1+1=2$ 。 (iii) 綜上(i)與(ii)所述，得證(8)之結果成立。

(9) 同(7)之法可證(9)之結果。

(10) 同(8)之法可證(10)之結果。

(11) 同(7)之法可證(11)之結果。

(12) 同(8)之法可證(12)之結果。

綜上(1)至(12)所述，得證原命題成立。 Q.E.D.

Remark 2:

(1) 綜合上述『引理一』、『Remark 1』、『問題一』與『問題二』之結果，我們其實已經討論完平面上所有 P 點的情形。

(2) 在『問題一』與『問題二』中，針對任意三角形，我們討論了『引理一』裡的 P 點不在三角形內部的所有情形，我們發現『三組線段比值之和』有為定值 1 的情形，亦有大於 1 的時候。只是美中不足的是『問題一』與『問題二』中的『三組線段比值』並不完全與『引理一』中的『三組線段比值』一樣，於是我們開始去思考，有沒有可能讓『三組線段比值』同『引理一』一樣，但試著讓某幾個線段比值先取負值再加總，觀察加總之後的和是否有機會為定值 1，以下的『問題三』與『定理一』兩個結果是我們發現的。

為了方便本文後續內容之描述，我們定義了兩個向量的除法如下。

定義二：

(1) 在空間中，若兩向量 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 的夾角為 $\theta(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$ 時，則我們定義 $\dfrac{\vec{v}}{\vec{u}} = \dfrac{|\vec{v}|\cos\theta}{|\vec{u}|}$。

(2) 承(1)，在空間中，若兩向量 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 同方向，則我們定義 $\dfrac{\vec{v}}{\vec{u}} = \dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$。

(3) 承(1)，在空間中，若兩向量 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 反方向，則我們定義 $\dfrac{\vec{v}}{\vec{u}} = -\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$。

將『引理一』中之 P 點移至 ΔABC 之外部，則有如下之結果。

問題三：

在平面上，已知 ΔABC 外部有一點 P，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交三邊所在直線 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_1、P_2 與 P_3 三點，過 A 點作平行直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線 L_A、過 B 點作平行直線 $\overleftrightarrow{CA}$ 的直線 L_B 及過 C 點作平行直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線 L_C，使得 L_B 與 L_C 交於點 A'、L_C 與 L_A 交於點 B' 及 L_A 與 L_B 交於點 C'，如圖 D-1 所示，則

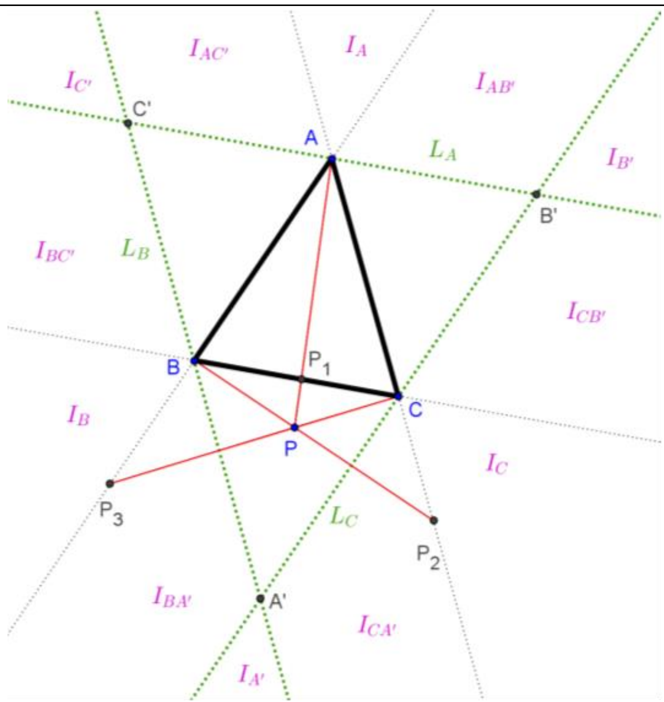


圖 D-1

(1) 若 P 點落在 $\Delta A'BC$ 內部或 $P\in I_{BA'}$ 或 $P\in I_{CA'}$ 或 $P\in I_{A'}$ ，如『問題一』中的圖 1-1 所示，試證明：$-\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$。

(2) 若 P 點落在 $\Delta AB'C$ 內部或 $P\in I_{AB'}$ 或 $P\in I_{CB'}$ 或 $P\in I_{B'}$ ，如『問題一』中的圖 1-2 所示，試證明：$\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$。

(3) 若 P 點落在 $\Delta ABC'$ 內部或 $P\in I_{AC'}$ 或 $P\in I_{BC'}$ 或 $P\in I_{C'}$ ，如『問題一』中的圖 1-3 所示，試證明：$\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}-\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$。

(4) 若 $P\in I_A$ ，如『問題一』中的圖 1-4 所示，試證明：$\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}-\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$。

(5) 若 $P\in I_B$ ，試證明：$-\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}-\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$。

(6) 若 $P\in I_C$ ，試證明：$-\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$。

證明：

(1)

(i) 當 P 點落在 $\Delta A'BC$ 內部時，則

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}=-\frac{\Delta PBC}{\Delta ABC}\ ;\ \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}=\frac{\Delta PAC}{\Delta BAC}\ ;\ \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=\frac{\Delta PAB}{\Delta CAB}\ ,$$

將上述三式相加即得 $-\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=-\dfrac{\Delta PBC}{\Delta ABC}+\dfrac{\Delta PAC}{\Delta BAC}+\dfrac{\Delta PAB}{\Delta CAB}=\dfrac{\Delta ABC}{\Delta ABC}=1$，

故此時原命題成立。

(ii) 當 $P\in I_{BA'}$ 時，則

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}=-\frac{\Delta PBC}{\Delta ABC}\ ;\ \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}=\frac{\Delta PAC}{\Delta BAC}\ ;\ \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=\frac{\Delta PAB}{\Delta CAB}\ ,$$

將上述三式相加即得 $-\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=-\dfrac{\Delta PBC}{\Delta ABC}+\dfrac{\Delta PAC}{\Delta BAC}+\dfrac{\Delta PAB}{\Delta CAB}=\dfrac{\Delta ABC}{\Delta ABC}=1$，

故此時原命題成立。

(iii) 當 $P\in I_{CA'}$ 時，則

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}=-\frac{\Delta PBC}{\Delta ABC}\ ;\ \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}=\frac{\Delta PAC}{\Delta BAC}\ ;\ \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=\frac{\Delta PAB}{\Delta CAB}\ ,$$

將上述三式相加即得 $-\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=-\dfrac{\Delta PBC}{\Delta ABC}+\dfrac{\Delta PAC}{\Delta BAC}+\dfrac{\Delta PAB}{\Delta CAB}=\dfrac{\Delta ABC}{\Delta ABC}=1$，

故此時原命題成立。

(iv) 當 $P\in I_{A'}$ 時，則

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}=-\frac{\Delta PBC}{\Delta ABC}\ ;\ \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}=\frac{\Delta PAC}{\Delta BAC}\ ;\ \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=\frac{\Delta PAB}{\Delta CAB}\ ,$$

將上述三式相加即得 $-\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=-\dfrac{\Delta PBC}{\Delta ABC}+\dfrac{\Delta PAC}{\Delta BAC}+\dfrac{\Delta PAB}{\Delta CAB}=\dfrac{\Delta ABC}{\Delta ABC}=1$，

故此時原命題成立。

(2) 同(1)之法可證得該命題成立。
(3) 同(1)之法可證得該命題成立。

(4) 當 $P \in I_A$ 時，則

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} = \frac{\Delta PBC}{\Delta ABC} \text{；} -\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} = -\frac{\Delta ACP}{\Delta ABC} \text{；} -\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} = -\frac{\Delta ABP}{\Delta ABC} \text{，}$$

將上述三式相加即得 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} - \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} = \frac{\Delta PBC}{\Delta ABC} - \frac{\Delta ACP}{\Delta ABC} - \frac{\Delta ABP}{\Delta ABC} = \frac{\Delta ABC}{\Delta ABC} = 1$，

故此時原命題成立。
(5) 同(4)之法可證得該命題成立。
(6) 同(4)之法可證得該命題成立。

Q.E.D.

綜合『引理一』與『問題三』之結論，我們可以歸納出如下之結果。

定理一：
給定平面上一個三角形 ΔABC，且 P 為平面上異於 ΔABC 三頂點之一定點，又連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交三邊所在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_1 、P_2 與 P_3 三點，則

$$\frac{\overrightharpoon{PP_1}}{\overrightharpoon{AP_1}} + \frac{\overrightharpoon{PP_2}}{\overrightharpoon{BP_2}} + \frac{\overrightharpoon{PP_3}}{\overrightharpoon{CP_3}} = 1 \text{。}$$

證明：
分別就 $P \in \Delta ABC$，

$P \in \Delta A'BC$，$P \in I_{BA'}$，$P \in I_{CA'}$，$P \in I_{A'}$，
$P \in \Delta AB'C$，$P \in I_{AB'}$，$P \in I_{CB'}$，$P \in I_{B'}$，
$P \in \Delta ABC'$，$P \in I_{AC'}$，$P \in I_{BC'}$，$P \in I_{C'}$，
$P \in I_A$，$P \in I_B$，$P \in I_C$

等 16 種情形討論，利用『定義二』，且論證過程類似於『引理一』與『問題三』，故證得該命題成立。

Q.E.D.

Remark 3:
『定理一』中的定點 P 已經不需要限制在三角形 ABC 的內部了，我們依然可以有類似『引理一』的結果，而且我們從『定理一』的證明過程中很輕易的知道『引理一』的結論其實是『定理一』的特例，換言之，『定理一』的結論已大大的改善了『引理一』中的結果，事實上，我們可以說『定理一』的結論是『引理一』的向量形式。

接下來我們想將『引理一』的三角形換成『正方形』，看看是否也有類似的結果，詳述如下。

問題四：
已知 $ABCD$ 為一正方形，點 P 在正方形 $ABCD$ 內部，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 、$\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DP}$，$\overleftrightarrow{AP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 P_1 與 P_2 兩點、$\overleftrightarrow{BP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 P_3 與 P_4 兩點、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{DA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於

P_5 與 P_6 兩點、$\overleftrightarrow{DP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P_7 與 P_8 兩點，如下圖 4-1 所示，試證明：

(1) $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$。 (2) $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$。

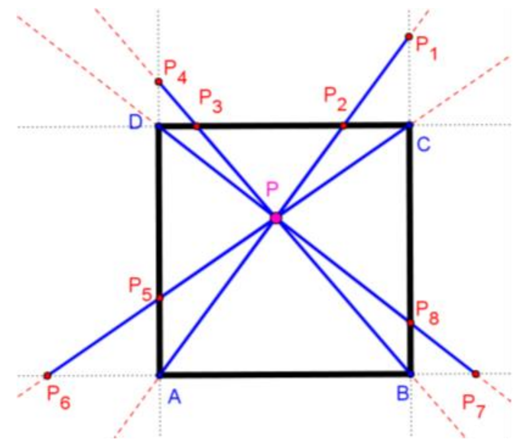


圖 4-1

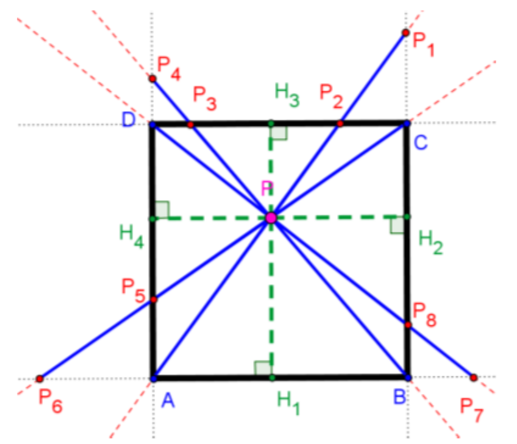


圖 4-2

證明：

(1)

過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_1}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 H_1，作直線 $\overleftrightarrow{PH_2}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 H_2，作直線 $\overleftrightarrow{PH_3}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 交 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 H_3，作直線 $\overleftrightarrow{PH_4}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{DA}$ 交 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 H_4，如上圖 4-2 所示，則

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PH_2}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_3}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{PH_4}}{\overline{CD}}+\frac{\overline{PH_1}}{\overline{DA}}=\frac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_3}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_4}\right)}{\overline{AB}}=$$

$$\frac{\overline{BC}+\overline{AB}}{\overline{AB}}=\frac{2\overline{AB}}{\overline{AB}}=2 \quad \cdots\cdots(\alpha);$$

同理可得，

$$\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=\frac{\overline{PH_3}}{\overline{DA}}+\frac{\overline{PH_4}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_1}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{PH_2}}{\overline{CD}}=\frac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_3}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_4}\right)}{\overline{AB}}=$$

$$\frac{\overline{BC}+\overline{AB}}{\overline{AB}}=\frac{2\overline{AB}}{\overline{AB}}=2 \quad \cdots\cdots(\beta);$$

故得證原命題。

(2) 將上述(1)中之 (α) 與 (β) 兩式相加即得

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$$

，故得證原命題。 Q.E.D.

接著我們試著考慮『問題四』中的 P 點在正方形外部的情形，而有如下的結果。

問題五：

已知 $ABCD$ 為平面上一正方形，點 P 為平面上不落在正方形 $ABCD$ 四邊所在直線的一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 、$\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DP}$，$\overleftrightarrow{AP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 P_1 與 P_2 兩點、$\overleftrightarrow{BP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 P_3 與 P_4 兩點、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{DA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_5 與 P_6 兩點、$\overleftrightarrow{DP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P_7 與 P_8 兩點，如圖 5-1 與圖 5-2 所示，則

(1) 當 $P \in I_A$ 時，則 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}-\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}-\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}-\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}-\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$，

亦即 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}-\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}-\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}-\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}-\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$。

(2) 當 $P \in I_{AB}$ 時，則 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}-\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}-\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$，

亦即 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}-\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}-\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$。

(3) 當 $P \in I_B$ 時，則 $-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}-\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}-\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}-\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$，

亦即 $-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}-\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}-\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}-\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$。

(4) 當 $P \in I_{BC}$ 時，則 $-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}-\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}-\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}-\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$，

亦即 $-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}-\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$。

(5) 當 $P \in I_C$ 時，則 $-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}-\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$，

亦即 $-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}-\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}-\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$。

(6) 當 $P \in I_{CD}$ 時，則 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$，

亦即 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}-\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$。

(7) 當 $P \in I_D$ 時，則 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}-\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}-\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$，

亦即 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}-\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}-\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}-\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$。

(8) 當 $P \in I_{DA}$ 時，則 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}-\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}-\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$，

亦即 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}-\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}-\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$。

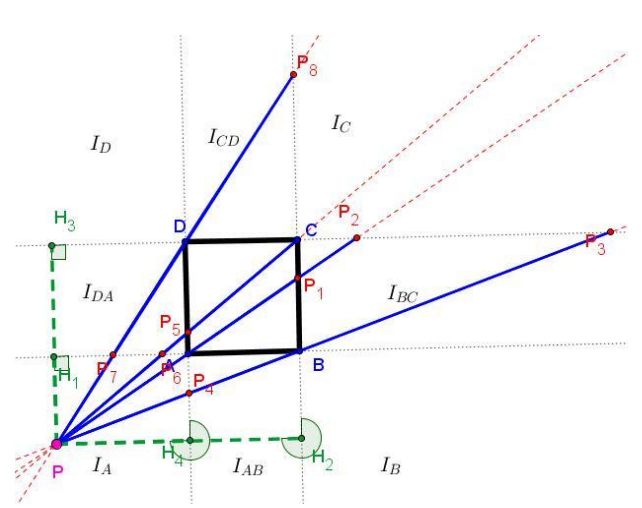


圖 5-1

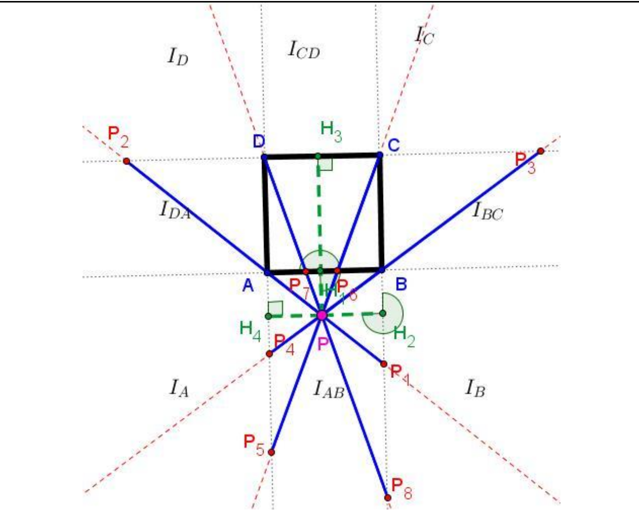


圖 5-2

證明：

利用相似三角形性質，將每一個線段比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。

Q.E.D.

『問題四』與『問題五』中(1)至(8)之結果可以合併寫成向量形式，並將『正方形』換成『平行四邊形』，如下所示。

定理二：

已知 $ABCD$ 為平面上一平行四邊形，點 P 為平面上不落在平行四邊形 $ABCD$ 四邊所在直線的一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DP}$，$\overleftrightarrow{AP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 P_1 與 P_2 兩點、$\overleftrightarrow{BP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 P_3 與 P_4 兩點、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{DA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_5 與 P_6 兩點、$\overleftrightarrow{DP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P_7 與 P_8 兩點，則

(1) $$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}=\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=2 \text{ 。}$$

(2) $$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=4 \text{ 。}$$

證明：

仿『問題五』之證法，就 P 點所在之位置分類討論，再利用『定義二』與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。

Q.E.D.

試著將『問題四』裡的『正方形』換成『正五邊形』，看看是不是會有類似的結果，詳述如下。

問題六：

已知 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 為一正五邊形，點 P 在正五邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 的內部，連接直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5P}$，$\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_1、P_2 與 P_3 三點，$\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 於 P_4、P_5 與 P_6 三點，$\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_7、P_8 與 P_9 三點，$\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 P_{10}、P_{11} 與 P_{12} 三點，$\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_{13}、P_{14} 與 P_{15} 三點，如下圖 6-1 所示，試證明：

(1) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ 。

(2) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_3P_8}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_4P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}=\sqrt{5}$ 。

(3) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_4P_{12}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_5P_{15}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ 。

(4) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{i+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=5+2\sqrt{5}$ 。

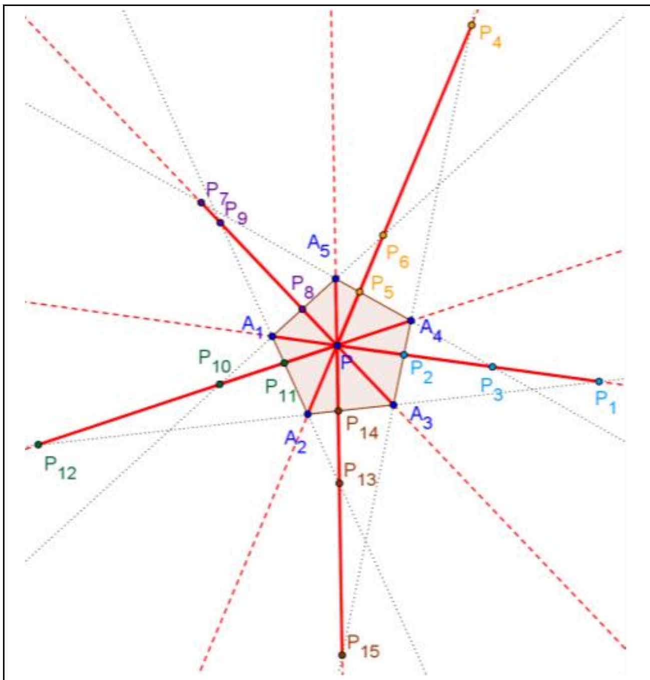


圖 6-1

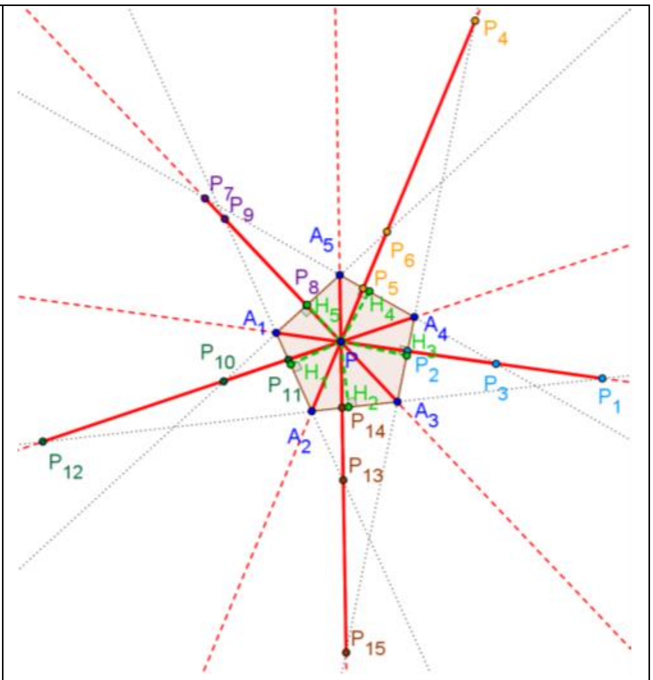


圖 6-2

證明：

(1)

(i) 對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,5\}$，我們均過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_i}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 H_i，如上圖 6-2 所示，假設正五邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 之邊長為 a，則對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,5\}$，$d\left(A_i,\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\right)=a\times\sin 72^\circ=a\times\cos 18^\circ$。

(ii) 以 $Area(\Gamma)$ 表示正五邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 之面積，則

$$Area(\Gamma)=\sum_{i=1}^{5}\Delta PA_iA_{i+1}$$

$$\Rightarrow \frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}=\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_2}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_3}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_4}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_5}$$

$$\Rightarrow \frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}=\frac{a}{2}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)=\frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}\times\frac{2}{a}=\frac{5a\tan 54^\circ}{2}$$

(iii) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)$

$$=\frac{\overline{PH_2}}{a\cos18^\circ}+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{a\cos18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{a\cos18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{a\cos18^\circ}$$

$$=\frac{1}{a\cos18^\circ}\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)=\frac{1}{a\cos18^\circ}\times\frac{5a\tan54^\circ}{2}$$

$$=\frac{5}{2}\times\left(\frac{1}{\cos18^\circ}\times\frac{\sin54^\circ}{\cos54^\circ}\right)=\frac{5}{2}\times\left(\frac{1}{\cos18^\circ}\times\frac{\cos36^\circ}{\sin36^\circ}\right)=\frac{5}{2}\times\left(\frac{1}{\cos18^\circ}\times\frac{\cos36^\circ}{2\sin18^\circ\cos18^\circ}\right)$$

$$=\frac{5}{4}\times\left(\frac{\cos36^\circ}{\sin18^\circ\cos^2 18^\circ}\right)=\frac{5}{4}\times\left(\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2}\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$ ，故得證原命題。

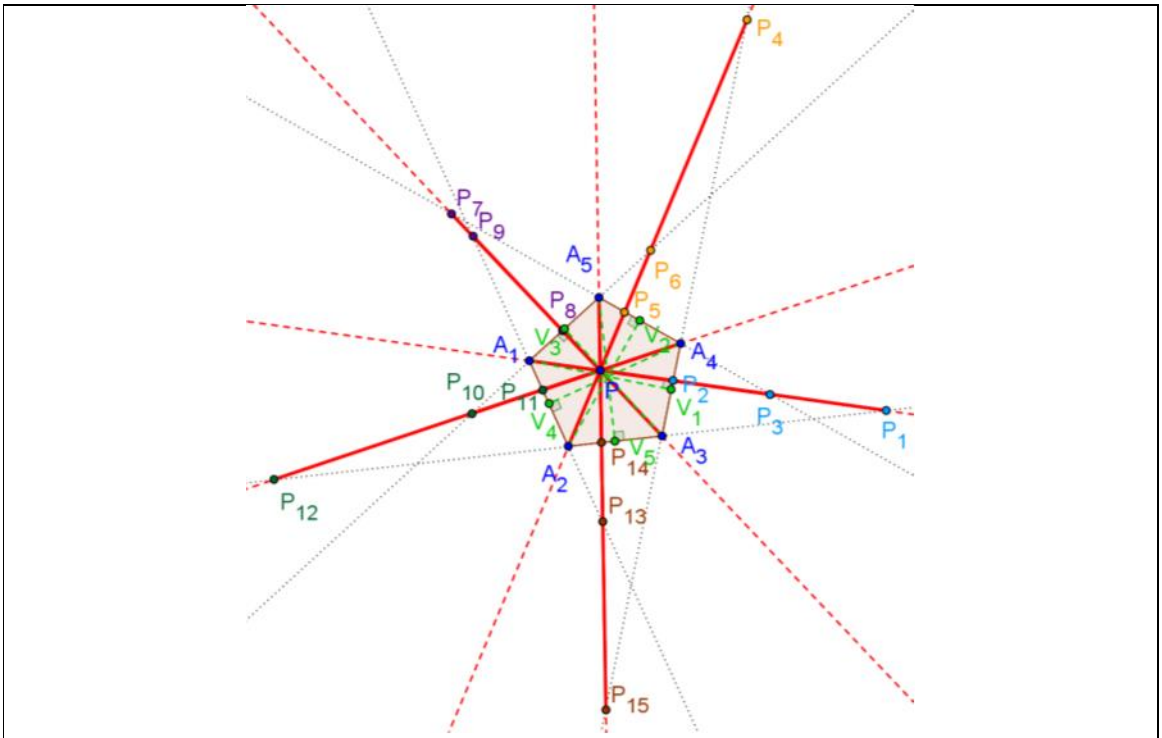


圖 6-3

(2) 對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,5\}$，我們均過頂點 A_i 點作直線 $\overleftrightarrow{A_iV_i}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$ 於 V_i ，如上圖 6-3 所示。

(i) 對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,5\}$ ，令 $d\left(A_i,\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}\right)=\overline{A_iV_i}$ ，則

$d\left(A_i,\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}\right)=\overline{A_iV_i}=\overline{A_1V_1}=\overline{A_1A_4}\times\cos18^\circ=\left(2a\cos36^\circ\right)\times\cos18^\circ$ 。

(ii) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)$

$$=\frac{\overline{PH_3}}{2a\cos36^\circ\cos18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{2a\cos36^\circ\cos18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{2a\cos36^\circ\cos18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{2a\cos36^\circ\cos18^\circ}+\frac{\overline{PH_2}}{2a\cos36^\circ\cos18^\circ}$$

$$=\frac{1}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)$$

$$=\frac{1}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\frac{5}{4}\times\frac{1}{\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\times\tan 54^\circ=\frac{5}{4}\times\frac{1}{\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\times\frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ}$$

$$=\frac{5}{4}\times\frac{1}{\cos 18^\circ\sin 36^\circ}=\frac{5}{4}\times\frac{1}{\cos 18^\circ\left(2\sin 18^\circ\cos 18^\circ\right)}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{\sin 18^\circ\cos^2 18^\circ}$$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}\times\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2}=\sqrt{5}$$ ，故得證原命題。

(3) 仿(1)之證明方法，可得證原命題成立，詳述如下。

$$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_2}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)$$

$$=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$ ，故得證原命題。

(4) 將上述(1),(2)與(3)所得之三個等式相加即得

$$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{5}+\frac{5+\sqrt{5}}{2}=5+2\sqrt{5}$$ ，

亦即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{i+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+3(k-1)}}}=5+2\sqrt{5}$ ，故得證原命題。

Q.E.D.

試著將『問題六』中的定點 P 移至正五邊形的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理三:

已知 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 為平面上一正五邊形，點 P 為平面上異於正五邊形 Γ 五頂點之一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5P}$，$\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_1、P_2 與 P_3 三點，$\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 於 P_4、P_5 與 P_6 三點，$\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_7、P_8 與 P_9 三點，$\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 P_{10}、P_{11} 與 P_{12} 三點，$\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_{13}、P_{14} 與 P_{15} 三點，如圖 T3-1、圖 T3-2 與圖 T3-3 所示，則

(1) $$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$ 。

(2) $$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}=\sqrt{5}$$ 。

(3) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ 。

(4) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=5+2\sqrt{5}$ 。

即 $\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=5+2\sqrt{5}$ 。

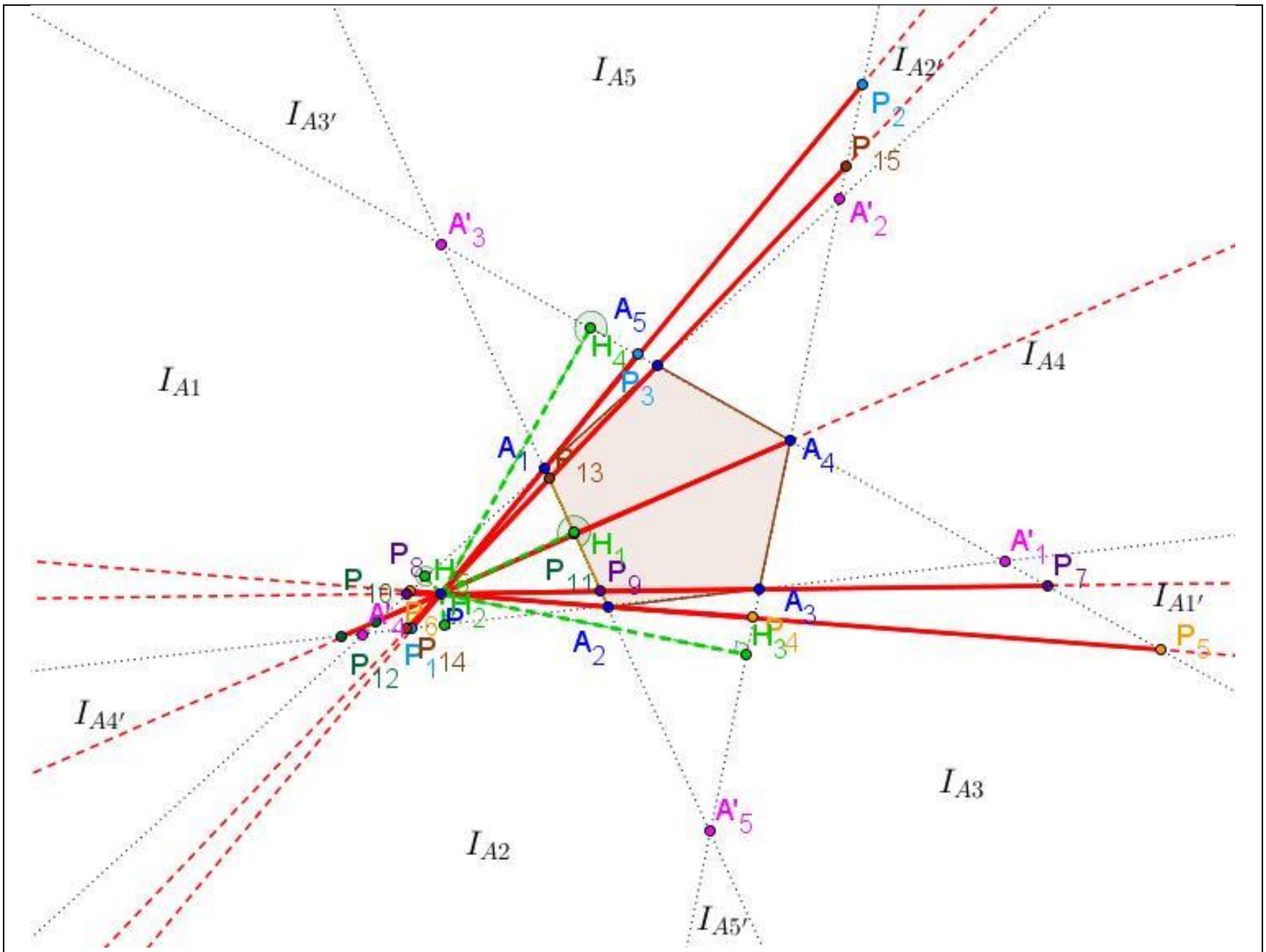


圖 T3-1

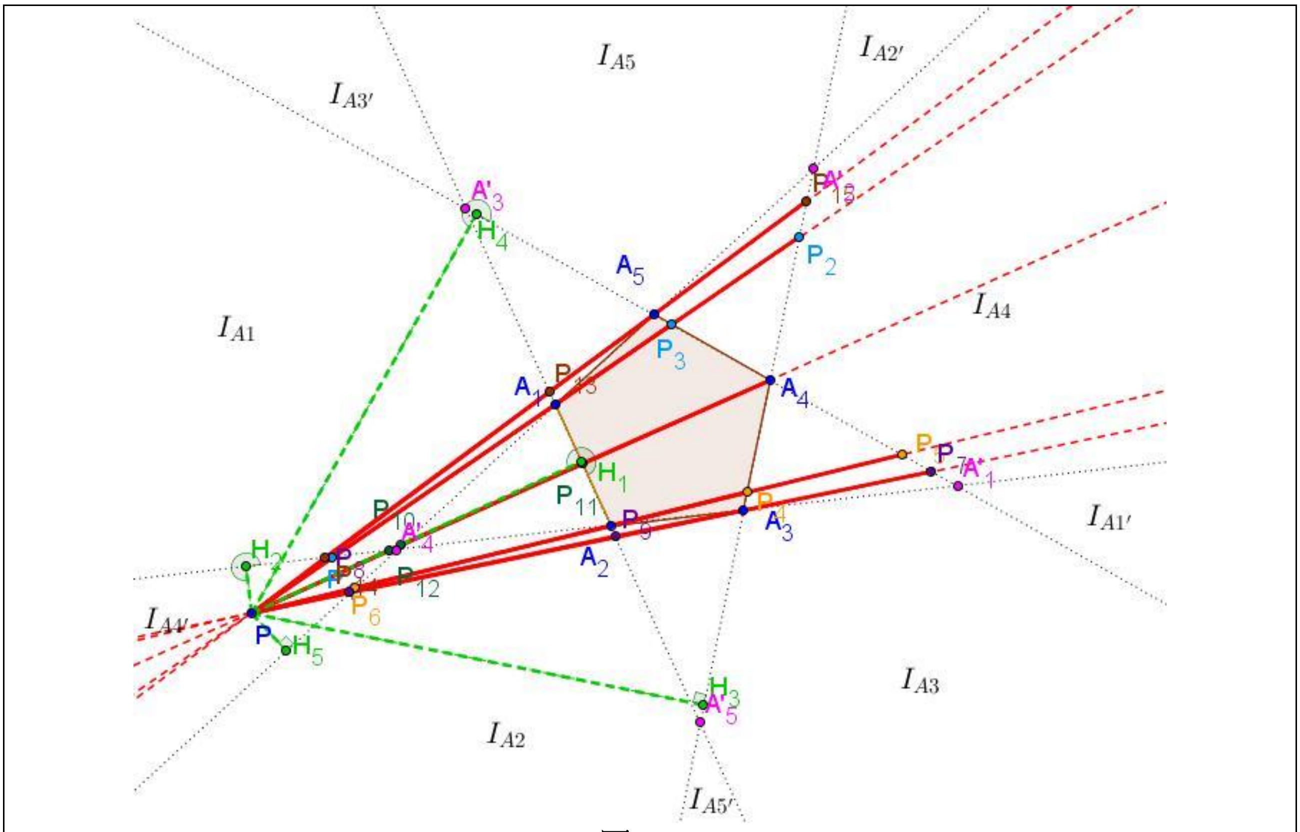


圖 T3-2

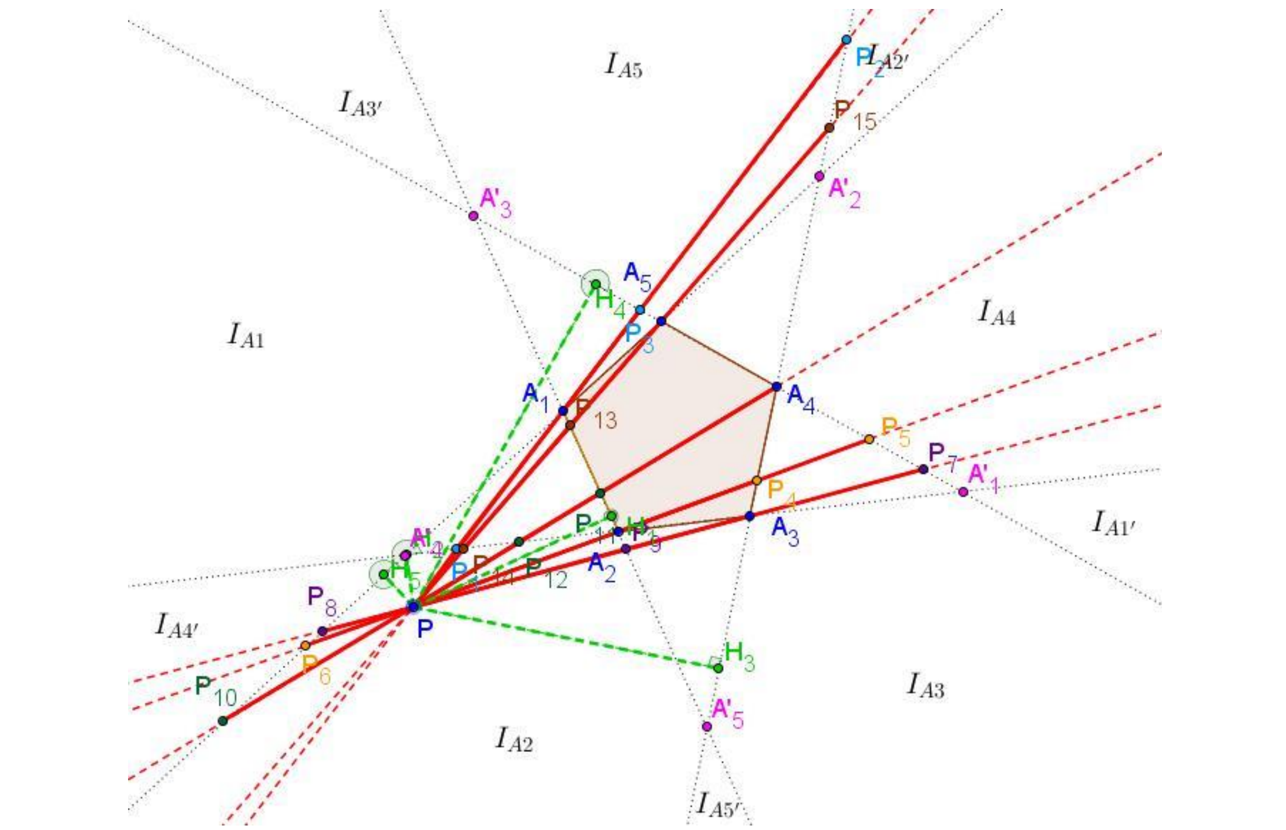


圖 T3-3

證明：

首先將正五邊形的外部分成 15 個區域（即 $I_{A_1A_2A'_4}$、$I_{A_2A_3A'_5}$、$I_{A_3A_4A'_1}$、$I_{A_4A_5A'_2}$、$I_{A_5A_1A'_3}$、$I_{A'_1}$、$I_{A'_2}$、$I_{A'_3}$、$I_{A'_4}$、$I_{A'_5}$、I_{A_1}、I_{A_2}、I_{A_3}、I_{A_4} 與 I_{A_5} 等十五個區域），再加上正五邊形的內部，共可分

成 16 個區域，如上圖 T3-1、圖 T3-2 與圖 T3-3 所示，接下來我們將就 P 點所在之位置分類討論，詳述如下：

(i) 當 P 落在正五邊形 Γ 的內部時，如『問題六』中的圖 6-1、圖 6-2 與圖 6-3 所示，則由『定義二』且仿『問題六』之證法知，

(a) 以 $Area(\Gamma)$ 表示正五邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 之面積，則 $Area(\Gamma)=\dfrac{5a^2\tan 54^\circ}{4}$ 且可得

$$\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)=\frac{5a\tan 54^\circ}{2}$$

(b)

(1) $$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(2) $$\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_3P_8}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_4P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}=\sqrt{5}$$

(3) $$\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_4P_{12}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_5P_{15}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(4) 將上述(1)、(2)與(3)三等式相加即得

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=5+2\sqrt{5}$$

，故此時原命題成立。

(ii) 當 $P\in I_{A_1A_2A'_4}$ 時，如上圖 T3-1 所示，則

(a) 以 $Area(\Gamma)$ 表示正五邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 之面積，則由圖 T3-1 知

$$Area(\Gamma)=-\Delta PA_1A_2+\Delta PA_2A_3+\Delta PA_3A_4+\Delta PA_4A_5+\Delta PA_5A_1$$

$$\Rightarrow\frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}=-\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_2}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_3}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_4}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_5}$$

$$\Rightarrow\frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}=\frac{a}{2}\times\left(-\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)$$

$$\Rightarrow\left(-\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)=\frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}\times\frac{2}{a}=\frac{5a\tan 54^\circ}{2}$$

(b)

(5)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}}-\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}$$

$$=\frac{\overline{PH_2}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ}-\frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\left(-\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(6)

$$\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_3P_8}}-\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_4P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}$$

$$=\frac{\overline{PH_3}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}$$

$$-\frac{\overline{PH_1}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_2}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\left(-\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)$$

$$=\frac{1}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\sqrt{5}$$

(7) 仿(1)之證法可得

$$\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}$$

$$=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\left(-\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(8) 將上述(5)、(6)與(7)所得之三等式相加即得

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=5+2\sqrt{5}$$

，故此時原命題成立。

(iii) 當 $P\in I_{A'_4}$ 時，如上圖 T3-2 所示，則

(a) 以 $Area(\Gamma)$ 表示正五邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 之面積，則由圖 T3-2 知

$$Area(\Gamma)=-\Delta PA_1A_2-\Delta PA_2A_3+\Delta PA_3A_4+\Delta PA_4A_5-\Delta PA_5A_1$$

$$\Rightarrow\frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}=-\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}-\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_2}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_3}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_4}-\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_5}$$

$$\Rightarrow\frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}=\frac{a}{2}\times\left(-\overline{PH_1}-\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}-\overline{PH_5}\right)$$

$$\Rightarrow\left(-\overline{PH_1}-\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}-\overline{PH_5}\right)=\frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}\times\frac{2}{a}=\frac{5a\tan 54^\circ}{2}$$

(b)

(9)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}=-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}}-\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}}-\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}$$

$$=-\frac{\overline{PH_2}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ}-\frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ}-\frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\left(-\overline{PH_1}-\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}-\overline{PH_5}\right)=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(10)

$$\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}-\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_3P_8}}-\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_4P_{11}}}-\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}$$

$$=\frac{\overline{PH_3}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}-\frac{\overline{PH_5}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}$$

$$-\frac{\overline{PH_1}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}-\frac{\overline{PH_2}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\left(-\overline{PH_1}-\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}-\overline{PH_5}\right)$$

$$=\frac{1}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\sqrt{5}$$

(11) 仿(5)之證法可得

$$\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\left(-\overline{PH_1}-\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}-\overline{PH_5}\right)$$

$$=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(12) 將上述(9)、(10)與(11)所得之三等式相加即得

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=5+2\sqrt{5}$$

，故此時原命題成立。

(iv) 當 $P\in I_{A_2}$ 時，如上圖 T3-3 所示，則

(a) 以 $Area(\Gamma)$ 表示正五邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 之面積，則由圖 T3-3 知

$$Area(\Gamma)=-\Delta PA_1A_2-\Delta PA_2A_3+\Delta PA_3A_4+\Delta PA_4A_5+\Delta PA_5A_1$$

$$\Rightarrow\frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}=-\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}-\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_2}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_3}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_4}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_5}$$

$$\Rightarrow\frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}=\frac{a}{2}\times\left(-\overline{PH_1}-\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)$$

$$\Rightarrow\left(-\overline{PH_1}-\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)=\frac{5a^2\tan 54^\circ}{4}\times\frac{2}{a}=\frac{5a\tan 54^\circ}{2}$$

(b)

(13)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}=-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}}-\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}$$

$$=-\frac{\overline{PH_2}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ}-\frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\left(-\overline{PH_1}-\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(14)

$$\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_3P_8}}-\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_4P_{11}}}-\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}$$

$$=\frac{\overline{PH_3}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}$$

$$-\frac{\overline{PH_1}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}-\frac{\overline{PH_2}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\left(-\overline{PH_1}-\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)$$

$$=\frac{1}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\sqrt{5}$$

(15) 仿(9)之證法可得

$$\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}$$

$$=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\left(-\overline{PH_1}-\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\overline{PH_5}\right)=\frac{1}{a\cos 18^\circ}\times\frac{5a\tan 54^\circ}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(16) 將上述(13)、(14)與(15)所得之三等式相加即得

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=5+2\sqrt{5}$$

，故此時原命題成立。

(v) P 點之位置共可分成 16 種情形，其中第(i)類的有 1 種，第(ii)類的有 5 種，第(iii)類的有 5 種，第(iv)類的有 5 種，上述(i)至(iv)已經討論了四種，剩餘的 12 種均會與上述四種之一歸於同類，且可求得 $\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ 、 $\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}=\sqrt{5}$ 、 $\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ 與 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=5+2\sqrt{5}$，故其實我們已經討論完所有情形，所以得證原命題成立。

Q.E.D.

試著將『問題六』裡的『正五邊形』換成『正六邊形』，看看是不是會有類似的結果，詳述如下。

問題七：

已知 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 為一正六邊形，點 P 在正六邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的內部，連接直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 、$\overleftrightarrow{A_5P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_6P}$ ，$\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overline{A_2A_3}$ 、$\overline{A_3A_4}$ 、$\overline{A_4A_5}$ 與 $\overline{A_5A_6}$ 於 P_1、P_2、P_3 與 P_4 四點，$\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 與 $\overleftrightarrow{A_6A_1}$ 於 P_5、P_6、P_7 與 P_8 四點，$\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_9、P_{10}、P_{11} 與 P_{12} 四點，$\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$

於 P_{13}、P_{14}、P_{15} 與 P_{16} 四點，$\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_6A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_{17}、P_{18}、P_{19} 與 P_{20} 四點，$\overleftrightarrow{A_6P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_{21}、P_{22}、P_{23} 與 P_{24} 四點如下圖 7-1 所示，試證明：

(1) $\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{1+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\dfrac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\dfrac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}+\dfrac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_4P_{13}}}+\dfrac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_5P_{17}}}+\dfrac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_6P_{21}}}=6$。

(2) $\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{2+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\dfrac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}+\dfrac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_3P_{10}}}+\dfrac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_4P_{14}}}+\dfrac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_5P_{18}}}+\dfrac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_6P_{22}}}=3$。

(3) $\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{3+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\dfrac{\overline{PP_7}}{\overline{A_2P_7}}+\dfrac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_3P_{11}}}+\dfrac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_4P_{15}}}+\dfrac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_5P_{19}}}+\dfrac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_6P_{23}}}=3$。

(4) $\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{4+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overline{PP_4}}{\overline{A_1P_4}}+\dfrac{\overline{PP_8}}{\overline{A_2P_8}}+\dfrac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_3P_{12}}}+\dfrac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_4P_{16}}}+\dfrac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_5P_{20}}}+\dfrac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_6P_{24}}}=6$。

(5) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{i+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{1+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{2+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{3+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{4+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=18$。

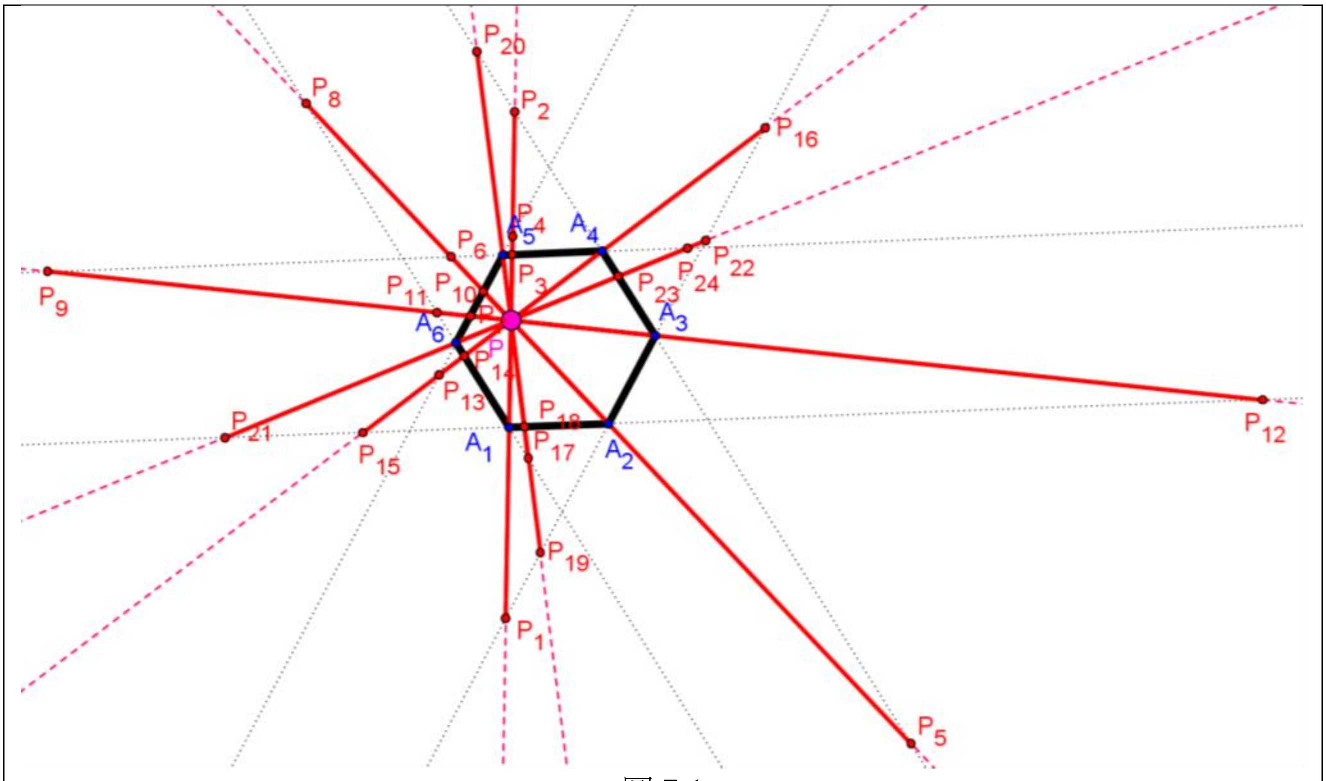


圖 7-1

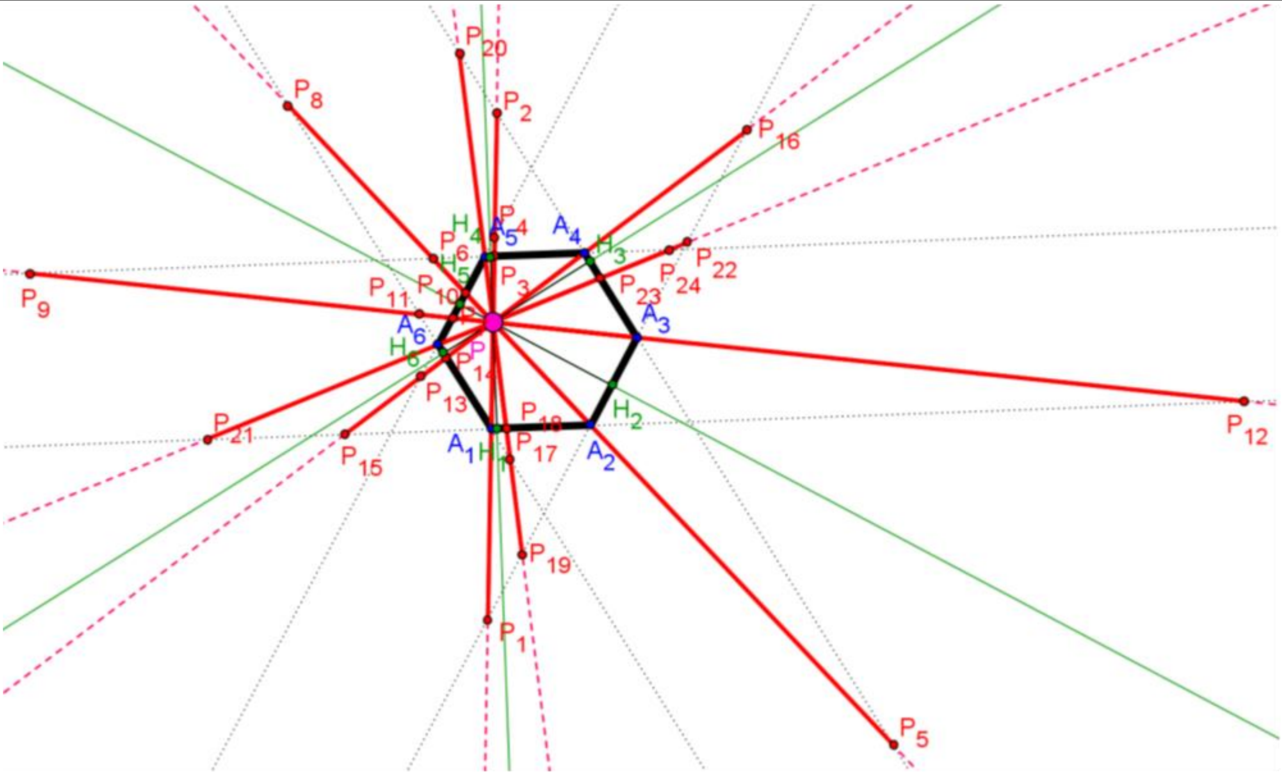


圖 7-2

證明：

對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,6\}$，我們均過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_i}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 H_i，如上圖 7-2 所示，假設正六邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 之邊長為 a，則

(1)
$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}+\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_4P_{13}}}+\frac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_5P_{17}}}+\frac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_6P_{21}}}=\frac{\overline{PH_2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\frac{\overline{PH_3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\frac{\overline{PH_4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\frac{\overline{PH_5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\frac{\overline{PH_6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\frac{\overline{PH_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$
$$=\frac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_4}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_5}\right)+\left(\overline{PH_3}+\overline{PH_6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$
$$=\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}a+\sqrt{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=6$$
，故得證原命題。

(2)
$$\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_3P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_4P_{14}}}+\frac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_5P_{18}}}+\frac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_6P_{22}}}=\frac{\overline{PH_3}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_4}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_5}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_6}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_1}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_2}}{\sqrt{3}a}$$
$$=\frac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_4}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_5}\right)+\left(\overline{PH_3}+\overline{PH_6}\right)}{\sqrt{3}a}$$
$$=\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}a+\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a}=3$$
，故得證原命題。

(3)
$$\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_2P_7}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_3P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_4P_{15}}}+\frac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_5P_{19}}}+\frac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_6P_{23}}}=\frac{\overline{PH_4}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_5}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_6}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_1}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_2}}{\sqrt{3}a}+\frac{\overline{PH_3}}{\sqrt{3}a}$$
$$=\frac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_4}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_5}\right)+\left(\overline{PH_3}+\overline{PH_6}\right)}{\sqrt{3}a}$$
$$=\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}a+\sqrt{3}a}{\sqrt{3}a}=3$$
，故得證原命題。

(4) $\dfrac{\overline{PP_4}}{\overline{A_1P_4}}+\dfrac{\overline{PP_8}}{\overline{A_2P_8}}+\dfrac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_3P_{12}}}+\dfrac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_4P_{16}}}+\dfrac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_5P_{20}}}+\dfrac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_6P_{24}}}=\dfrac{\overline{PH_5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{\overline{PH_6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{\overline{PH_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{\overline{PH_2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{\overline{PH_3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}+\dfrac{\overline{PH_4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$

$=\dfrac{\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_4}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_5}\right)+\left(\overline{PH_3}+\overline{PH_6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$

$=\dfrac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}a+\sqrt{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=6$，故得證原命題。

(5) 將上述(1),(2),(3)與(4)中所得四個等式相加即得
$\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{1+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{2+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{3+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overline{PP_{4+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=6+3+3+6=18$，故得證原命題。

Q.E.D.

試著將『問題七』中的定點 P 移至正六邊形的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理四：

已知 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 為一正六邊形，點 P 為平面上異於正六邊形 Γ 六頂點之一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_6P}$，$\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 於 P_1、P_2、P_3 與 P_4 四點，$\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 與 $\overleftrightarrow{A_6A_1}$ 於 P_5、P_6、P_7 與 P_8 四點，$\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_9、P_{10}、P_{11} 與 P_{12} 四點，$\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 P_{13}、P_{14}、P_{15} 與 P_{16} 四點，$\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_6A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_{17}、P_{18}、P_{19} 與 P_{20} 四點，$\overleftrightarrow{A_6P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_{21}、P_{22}、P_{23} 與 P_{24} 四點如上圖 7-1 所示，試證明：

(1) $\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overrightarrow{PP_{1+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_4P_{13}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{17}}}{\overrightarrow{A_5P_{17}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{21}}}{\overrightarrow{A_6P_{21}}}=6$。

(2) $\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overrightarrow{PP_{2+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_3P_{10}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_4P_{14}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{18}}}{\overrightarrow{A_5P_{18}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{22}}}{\overrightarrow{A_6P_{22}}}=3$。

(3) $\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overrightarrow{PP_{3+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_2P_7}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_3P_{11}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_4P_{15}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{19}}}{\overrightarrow{A_5P_{19}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{23}}}{\overrightarrow{A_6P_{23}}}=3$。

(4) $\left(\sum_{k=1}^{6}\dfrac{\overrightarrow{PP_{4+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_1P_4}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_2P_8}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_3P_{12}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{16}}}{\overrightarrow{A_4P_{16}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{20}}}{\overrightarrow{A_5P_{20}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{24}}}{\overrightarrow{A_6P_{24}}}=6$。

(5) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{i+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{1+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{2+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{3+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{4+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=18$ 。

證明：

仿『問題七』之證法，就 P 點所在之位置分類討論(註:正六邊形內部與外部共分成 19 個區域)，再利用『定義二』與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。

Q.E.D.

試著將『問題七』裡的『正六邊形』換成『正八邊形』，則得如下『問題八』之結論。

問題八：

已知 $\Gamma:A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 為一正八邊形，點 P 在正八邊形 $\Gamma:A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的內部，連接直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 、$\overleftrightarrow{A_5P}$ 、$\overleftrightarrow{A_6P}$ 、$\overleftrightarrow{A_7P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_8P}$ ，又

$\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 與 $\overleftrightarrow{A_7A_8}$ 於 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5 與 P_6 六點，

$\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$ 與 $\overleftrightarrow{A_8A_1}$ 於 P_7、P_8、P_9、P_{10}、P_{11} 與 P_{12} 六點，

$\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$ 、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_{13}、P_{14}、P_{15}、P_{16}、P_{17} 與 P_{18} 六點，

$\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$ 、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 P_{19}、P_{20}、P_{21}、P_{22}、P_{23} 與 P_{24} 六點，

$\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$ 、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_{25}、P_{26}、P_{27}、P_{28}、P_{29} 與 P_{30} 六點，

$\overleftrightarrow{A_6P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_7A_8}$ 、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_{31}、P_{32}、P_{33}、P_{34}、P_{35} 與 P_{36} 六點，

$\overleftrightarrow{A_7P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_8A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 於 P_{37}、P_{38}、P_{39}、P_{40}、P_{41} 與 P_{42} 六點

$\overleftrightarrow{A_8P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 與 $\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 於 P_{43}、P_{44}、P_{45}、P_{46}、P_{47} 與 P_{48} 六點，

如下圖 8-1 所示，試證明：

(1) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{1+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_2P_7}}+\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_3P_{13}}}+\frac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_4P_{19}}}+\frac{\overline{PP_{25}}}{\overline{A_5P_{25}}}+\frac{\overline{PP_{31}}}{\overline{A_6P_{31}}}+\frac{\overline{PP_{37}}}{\overline{A_7P_{37}}}+\frac{\overline{PP_{43}}}{\overline{A_8P_{43}}}=\left(8+4\sqrt{2}\right)$ 。

(2) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{2+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_2P_8}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_3P_{14}}}+\frac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_4P_{20}}}+\frac{\overline{PP_{26}}}{\overline{A_5P_{26}}}+\frac{\overline{PP_{32}}}{\overline{A_6P_{32}}}+\frac{\overline{PP_{38}}}{\overline{A_7P_{38}}}+\frac{\overline{PP_{44}}}{\overline{A_8P_{44}}}=4\sqrt{2}$ 。

(3) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{3+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_2P_9}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_3P_{15}}}+\frac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_4P_{21}}}+\frac{\overline{PP_{27}}}{\overline{A_5P_{27}}}+\frac{\overline{PP_{33}}}{\overline{A_6P_{33}}}+\frac{\overline{PP_{39}}}{\overline{A_7P_{39}}}+\frac{\overline{PP_{45}}}{\overline{A_8P_{45}}}=4$ 。

(4) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{4+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_1P_4}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_2P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_3P_{16}}}+\frac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_4P_{22}}}+\frac{\overline{PP_{28}}}{\overline{A_5P_{28}}}+\frac{\overline{PP_{34}}}{\overline{A_6P_{34}}}+\frac{\overline{PP_{40}}}{\overline{A_7P_{40}}}+\frac{\overline{PP_{46}}}{\overline{A_8P_{46}}}=4$ 。

(5) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{5+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{5+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_1P_5}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_2P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_3P_{17}}}+\frac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_4P_{23}}}+\frac{\overline{PP_{29}}}{\overline{A_5P_{29}}}+\frac{\overline{PP_{35}}}{\overline{A_6P_{35}}}+\frac{\overline{PP_{41}}}{\overline{A_7P_{41}}}+\frac{\overline{PP_{47}}}{\overline{A_8P_{47}}}=4\sqrt{2}$ 。

(6) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{6+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{6+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_1P_6}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_2P_{12}}}+\frac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_3P_{18}}}+\frac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_4P_{24}}}+\frac{\overline{PP_{30}}}{\overline{A_5P_{30}}}+\frac{\overline{PP_{36}}}{\overline{A_6P_{36}}}+\frac{\overline{PP_{42}}}{\overline{A_7P_{42}}}+\frac{\overline{PP_{48}}}{\overline{A_8P_{48}}}=\left(8+4\sqrt{2}\right)$ 。

(7) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{i+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+6(k-1)}}}=24+16\sqrt{2}$ 。

證明：

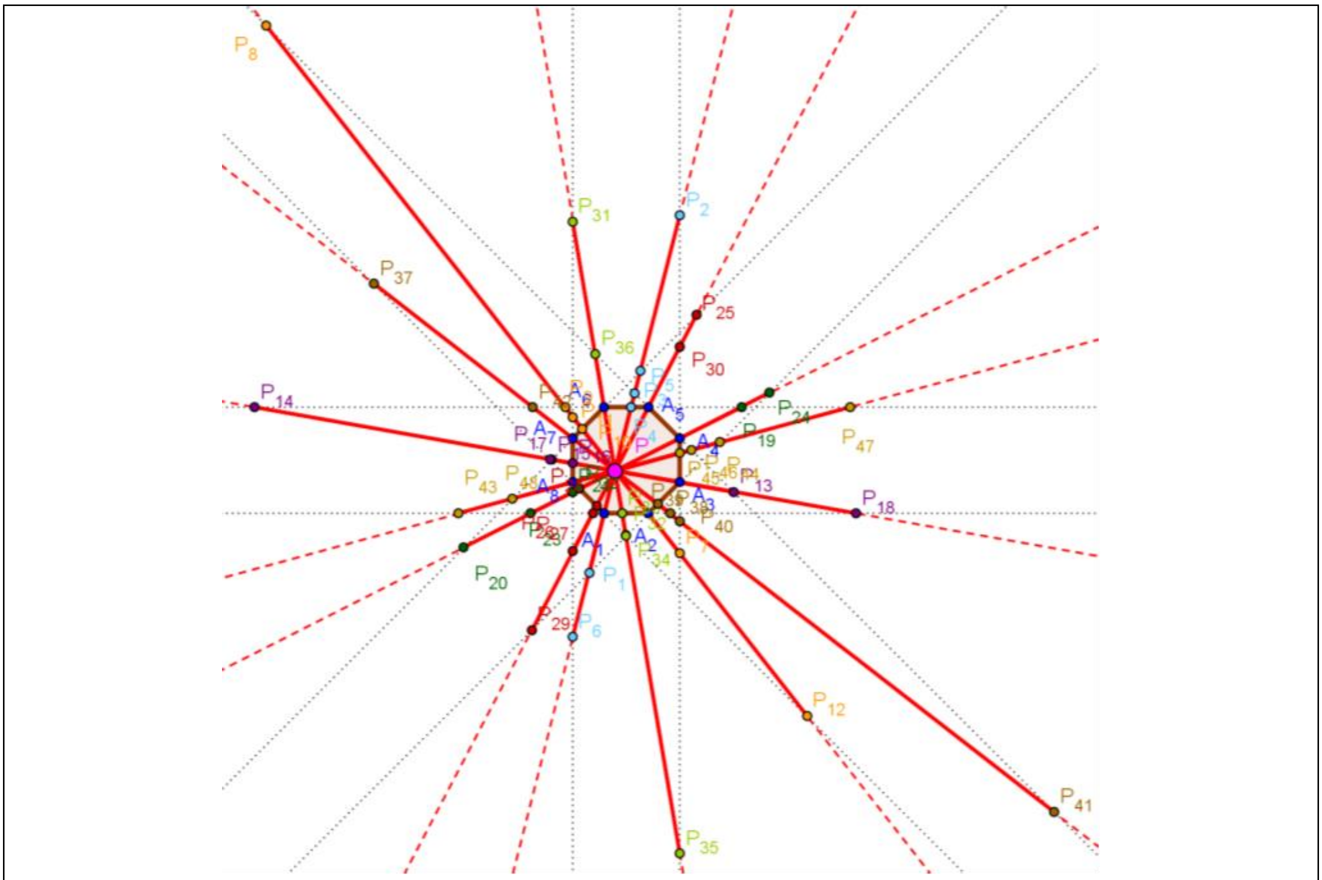


圖 8-1

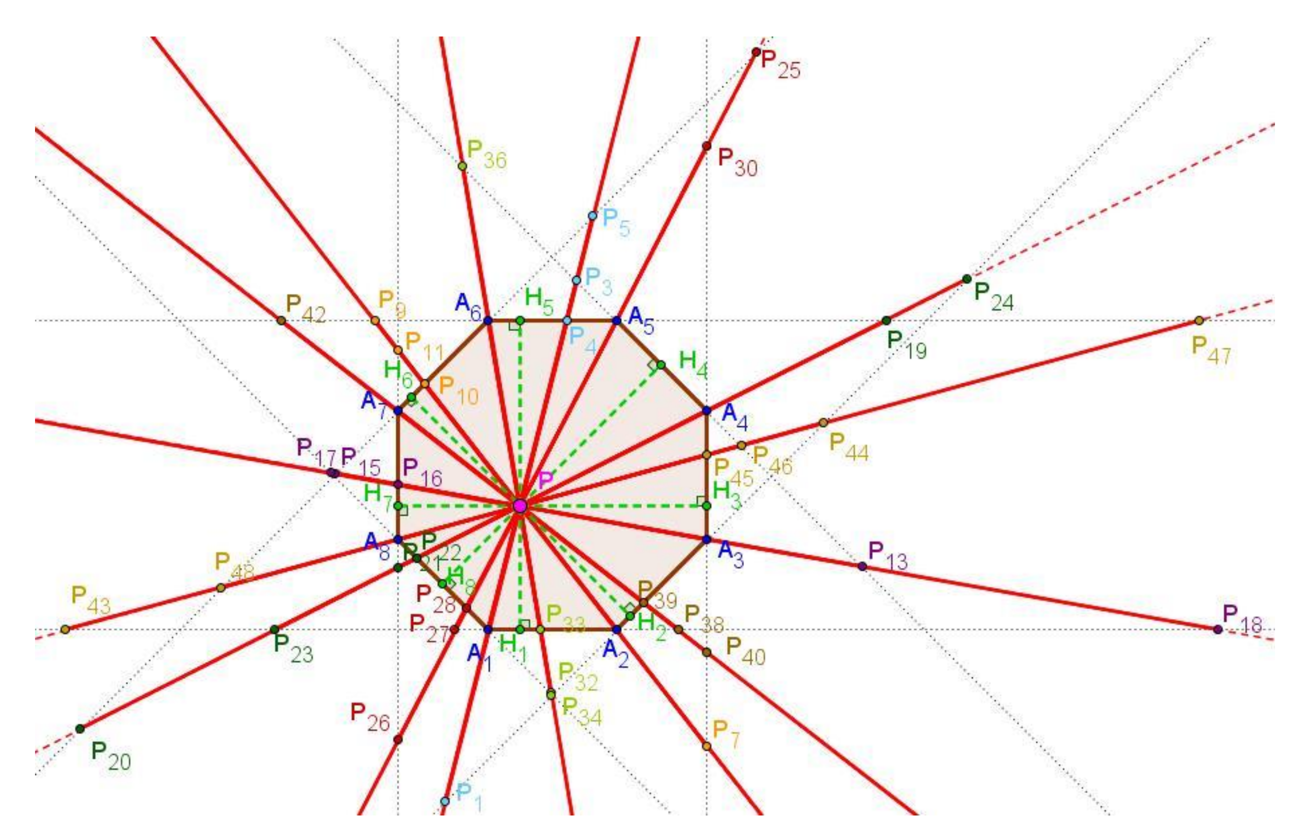


圖 8-2 (將圖 8-1 放大一些)

對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,8\}$，我們均過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_i}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 H_i，如上圖 8-2 所示。

(1)

(i) 假設正八邊形$\Gamma : A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$之邊長為$a$，又以$Area(\Gamma)$表示正八邊形$\Gamma : A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$之面積，則

$$Area(\Gamma) = \sum_{i=1}^{8} \Delta PA_iA_{i+1}$$

$$\Rightarrow \left(a+\sqrt{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\times\frac{a}{\sqrt{2}}\times\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\times 4 = \frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1} + \frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_2} + \cdots + \frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_8}$$

$$\Rightarrow \left(2+2\sqrt{2}\right)a^2 = \frac{a}{2}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\cdots+\overline{PH_8}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\cdots+\overline{PH_8}\right) = \left(4+4\sqrt{2}\right)a$$

(ii) $$\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{1+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+6(k-1)}}}\right) = \frac{\overline{PH_2}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{\overline{PH_3}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \cdots + \frac{\overline{PH_7}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{\overline{PH_8}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{\overline{PH_1}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\cdots+\overline{PH_8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{a}\times\left(4+4\sqrt{2}\right)a$$

$=\left(8+4\sqrt{2}\right)$，故得證原命題。 （ 註：$\left(8+4\sqrt{2}\right)\approx 13.656$ ）

(2) $$\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{2+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+6(k-1)}}}\right) = \frac{\overline{PH_3}}{a+\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{\overline{PH_4}}{a+\frac{a}{\sqrt{2}}} + \cdots + \frac{\overline{PH_8}}{a+\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{\overline{PH_1}}{a+\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{\overline{PH_2}}{a+\frac{a}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\cdots+\overline{PH_8}\right)$$

$= \frac{1}{\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)a}\times\left(4+4\sqrt{2}\right)a = 4\sqrt{2}$，故得證原命題。 （ 註：$4\sqrt{2}\approx 5.656$ ）

(3) $$\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{3+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+6(k-1)}}}\right)$$

$$= \frac{\overline{PH_4}}{a+\sqrt{2}a} + \frac{\overline{PH_5}}{a+\sqrt{2}a} + \cdots + \frac{\overline{PH_8}}{a+\sqrt{2}a} + \frac{\overline{PH_1}}{a+\sqrt{2}a} + \frac{\overline{PH_2}}{a+\sqrt{2}a} + \frac{\overline{PH_3}}{a+\sqrt{2}a}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)a}\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\cdots+\overline{PH_8}\right)$$

$= \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)a}\times\left(4+4\sqrt{2}\right)a = 4$，故得證原命題。

(4) 根據對稱性，再由(3)之結果得$\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{4+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+6(k-1)}}}\right) = 4$成立。

(5) 根據對稱性，再由(2)之結果得$\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{5+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{5+6(k-1)}}}\right) = 4\sqrt{2}$成立。

(6) 根據對稱性，再由(1)之結果得$\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{6+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{6+6(k-1)}}}\right) = \left(8+4\sqrt{2}\right)$成立。

(7) 將(1)至(6)所得之六個等式相加即得$\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{8}\frac{\overline{PP_{i+6(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+6(k-1)}}} = \left[\left(8+4\sqrt{2}\right)+4\sqrt{2}+4\right]\times 2 = 24+16\sqrt{2}$

，故得證原命題。　(註：$\left(24+16\sqrt{2}\right)\approx 46.624$)

綜合上述(1)至(7)所述，得證原命題成立。

Q.E.D.

試著將『問題八』中的定點P移至正八邊形的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理五：

已知$\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$為一正八邊形，點$P$為平面上異於正八邊形$\Gamma$八頂點之一定點，連接直線$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$、$\overleftrightarrow{A_6P}$、$\overleftrightarrow{A_7P}$與$\overleftrightarrow{A_8P}$，又

$\overleftrightarrow{A_1P}$分別交$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$與$\overleftrightarrow{A_7A_8}$於$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$與$P_6$六點，

$\overleftrightarrow{A_2P}$分別交$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$與$\overleftrightarrow{A_8A_1}$於$P_7$、$P_8$、$P_9$、$P_{10}$、$P_{11}$與$P_{12}$六點，

$\overleftrightarrow{A_3P}$分別交$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$於$P_{13}$、$P_{14}$、$P_{15}$、$P_{16}$、$P_{17}$與$P_{18}$六點，

$\overleftrightarrow{A_4P}$分別交$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$於$P_{19}$、$P_{20}$、$P_{21}$、$P_{22}$、$P_{23}$與$P_{24}$六點，

$\overleftrightarrow{A_5P}$分別交$\overleftrightarrow{A_6A_7}$、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{A_3A_4}$於$P_{25}$、$P_{26}$、$P_{27}$、$P_{28}$、$P_{29}$與$P_{30}$六點，

$\overleftrightarrow{A_6P}$分別交$\overleftrightarrow{A_7A_8}$、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{A_4A_5}$於$P_{31}$、$P_{32}$、$P_{33}$、$P_{34}$、$P_{35}$與$P_{36}$六點，

$\overleftrightarrow{A_7P}$分別交$\overleftrightarrow{A_8A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$與$\overleftrightarrow{A_5A_6}$於$P_{37}$、$P_{38}$、$P_{39}$、$P_{40}$、$P_{41}$與$P_{42}$六點

$\overleftrightarrow{A_8P}$分別交$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$與$\overleftrightarrow{A_6A_7}$於$P_{43}$、$P_{44}$、$P_{45}$、$P_{46}$、$P_{47}$與$P_{48}$六點，

如圖 8-1 所示，試證明：

(1) $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{1+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_2P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_3P_{13}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{19}}}{\overrightarrow{A_4P_{19}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{25}}}{\overrightarrow{A_5P_{25}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{31}}}{\overrightarrow{A_6P_{31}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{37}}}{\overrightarrow{A_7P_{37}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{43}}}{\overrightarrow{A_8P_{43}}}=\left(8+4\sqrt{2}\right)$。

(2) $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{2+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_2P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_3P_{14}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{20}}}{\overrightarrow{A_4P_{20}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{26}}}{\overrightarrow{A_5P_{26}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{32}}}{\overrightarrow{A_6P_{32}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{38}}}{\overrightarrow{A_7P_{38}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{44}}}{\overrightarrow{A_8P_{44}}}=4\sqrt{2}$。

(3) $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{3+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_2P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_3P_{15}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{21}}}{\overrightarrow{A_4P_{21}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{27}}}{\overrightarrow{A_5P_{27}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{33}}}{\overrightarrow{A_6P_{33}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{39}}}{\overrightarrow{A_7P_{39}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{45}}}{\overrightarrow{A_8P_{45}}}=4$。

(4) $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{4+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{4+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_1P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_2P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{16}}}{\overrightarrow{A_3P_{16}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{22}}}{\overrightarrow{A_4P_{22}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{28}}}{\overrightarrow{A_5P_{28}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{34}}}{\overrightarrow{A_6P_{34}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{40}}}{\overrightarrow{A_7P_{40}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{46}}}{\overrightarrow{A_8P_{46}}}=4$。

(5) $\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{5+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{5+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_1P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_2P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{17}}}{\overrightarrow{A_3P_{17}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{23}}}{\overrightarrow{A_4P_{23}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{29}}}{\overrightarrow{A_5P_{29}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{35}}}{\overrightarrow{A_6P_{35}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{41}}}{\overrightarrow{A_7P_{41}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{47}}}{\overrightarrow{A_8P_{47}}}=4\sqrt{2}$。

(6) $$\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{6+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{6+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_1P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_2P_{12}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{18}}}{\overrightarrow{A_3P_{18}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{24}}}{\overrightarrow{A_4P_{24}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{30}}}{\overrightarrow{A_5P_{30}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{36}}}{\overrightarrow{A_6P_{36}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{42}}}{\overrightarrow{A_7P_{42}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{48}}}{\overrightarrow{A_8P_{48}}}=\left(8+4\sqrt{2}\right)$$ 。

(7) $$\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{i+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+6(k-1)}}}=24+16\sqrt{2}$$ 。

證明：

仿『問題八』之證法，就 P 點所在之位置分類討論(註:正八邊形內部與外部共分成 33 個區域)，再利用『定義二』與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。

Q.E.D.

由上述『問題四』、『問題七』與『問題八』，我們推測在『正 $2n$ 邊形』中應該也有類似的結果，驗證其結論如下：

定理六：

已知 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n}$ 為一正 $2n$ 邊形，點 P 在正 $2n$ 邊形 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的內部，對於 $i\in\{1,2,\cdots,2n\}$，連接直線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 、$\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$ 、$\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$ 、…、$\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$ 於 $P_{1+(i-1)(2n-2)}$、$P_{2+(i-1)(2n-2)}$、$P_{3+(i-1)(2n-2)}$、…、$P_{(2n-3)+(i-1)(2n-2)}$ 與 $P_{i(2n-2)}$ 等 $(2n-2)$ 個點，則

(1) $$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_{1+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{1+(2n-2)}}}+\frac{\overline{PP_{1+2(2n-2)}}}{\overline{A_3P_{1+2(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{1+(2n-1)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n}P_{1+(2n-1)(2n-2)}}}=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$ 。

(2) $$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_{2+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{2+(2n-2)}}}+\frac{\overline{PP_{2+2(2n-2)}}}{\overline{A_3P_{2+2(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{2+(2n-1)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n}P_{2+(2n-1)(2n-2)}}}=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}$$ 。

(3) ①當 $i\in\{1,2,\cdots,\frac{2n-2}{2}\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-2)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-2)}}}{\overline{A_3P_{i+2(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-1)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n}P_{i+(2n-1)(2n-2)}}}=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n}}$$ 。

②當 $i\in\{n,n+1,\cdots,2n-2\}$ 時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-2)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-2)}}}{\overline{A_3P_{i+2(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-1)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n}P_{i+(2n-1)(2n-2)}}}=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{(2n-2)-(i-1)}\sin\frac{k\pi}{n}}$$ 。

(4) $$\sum_{i=1}^{2n-2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}=\left(2n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\sum_{k=1}^{j}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$$ 。

(5) $$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}$$ 。

證明：

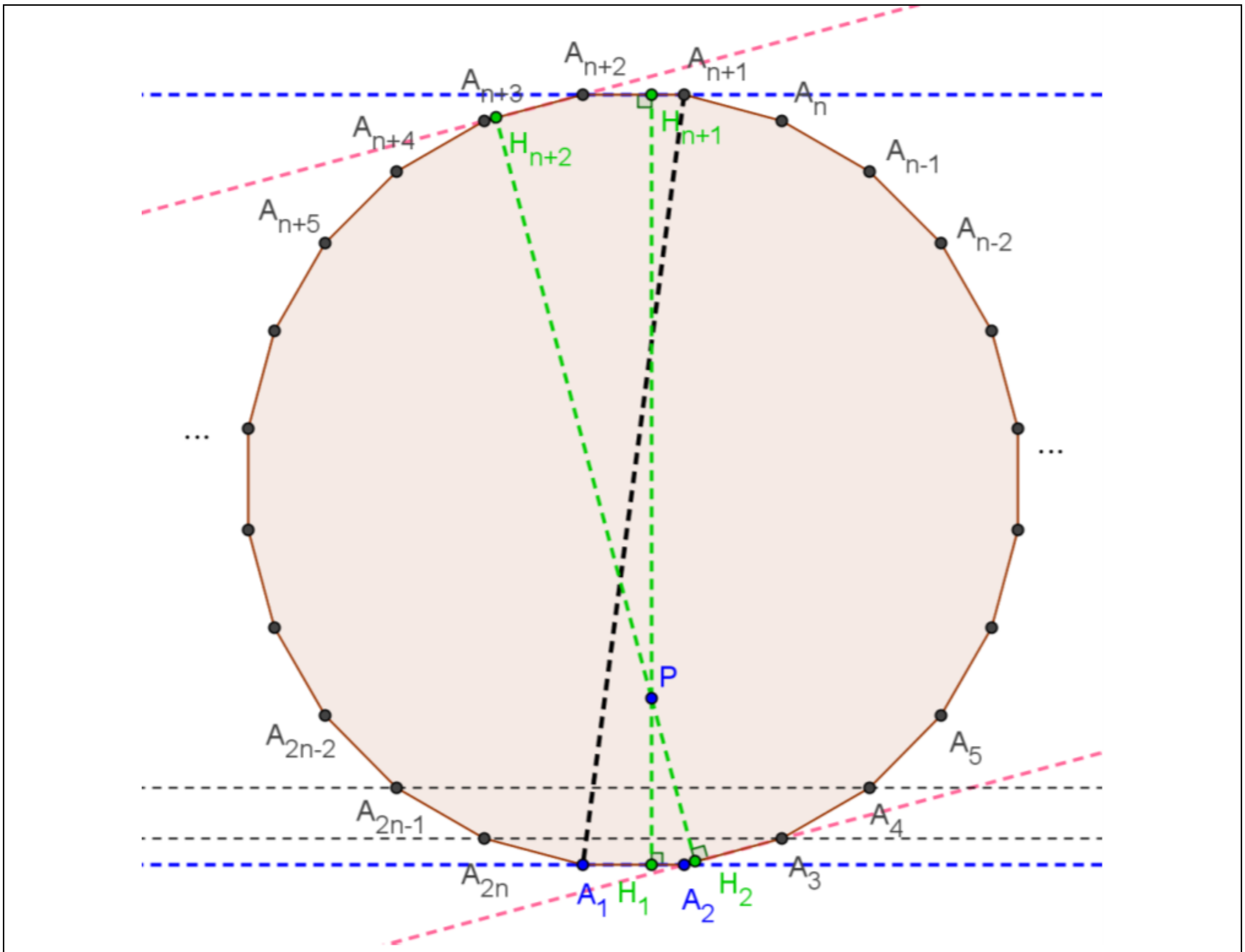


圖 T1-1

對於每一個$i \in \{1,2,\cdots,2n\}$，我們均過P點作直線$\overleftrightarrow{PH_i}$垂直直線$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$交$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$於$H_i$，如上圖 T1-1 所示。

(1) 假設正$2n$邊形Γ之邊長為a，則

(i)

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_2}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_3}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}+\cdots+\frac{\overline{PH_{2n-1}}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_{2n}}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_1}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}\right)$$

$$=\frac{1}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\cdots+\overline{PH_{2n-1}}+\overline{PH_{2n}}+\overline{PH_1}\right)$$

$$=\frac{1}{a\sin\frac{180^\circ}{n}}\left[\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_{n+2}}\right)+\cdots+\left(\overline{PH_{n-1}}+\overline{PH_{2n-1}}\right)+\left(\overline{PH_n}+\overline{PH_{2n}}\right)\right]$$

再由正 2n 邊形的對稱性得知

$$\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)=\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_{n+2}}\right)=\cdots=\left(\overline{PH_{n-1}}+\overline{PH_{2n-1}}\right)=\left(\overline{PH_n}+\overline{PH_{2n}}\right)$$

所以

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{1}{a\sin\frac{180^\circ}{n}}\left[\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)\times n\right]$$

(ii) 觀點一：

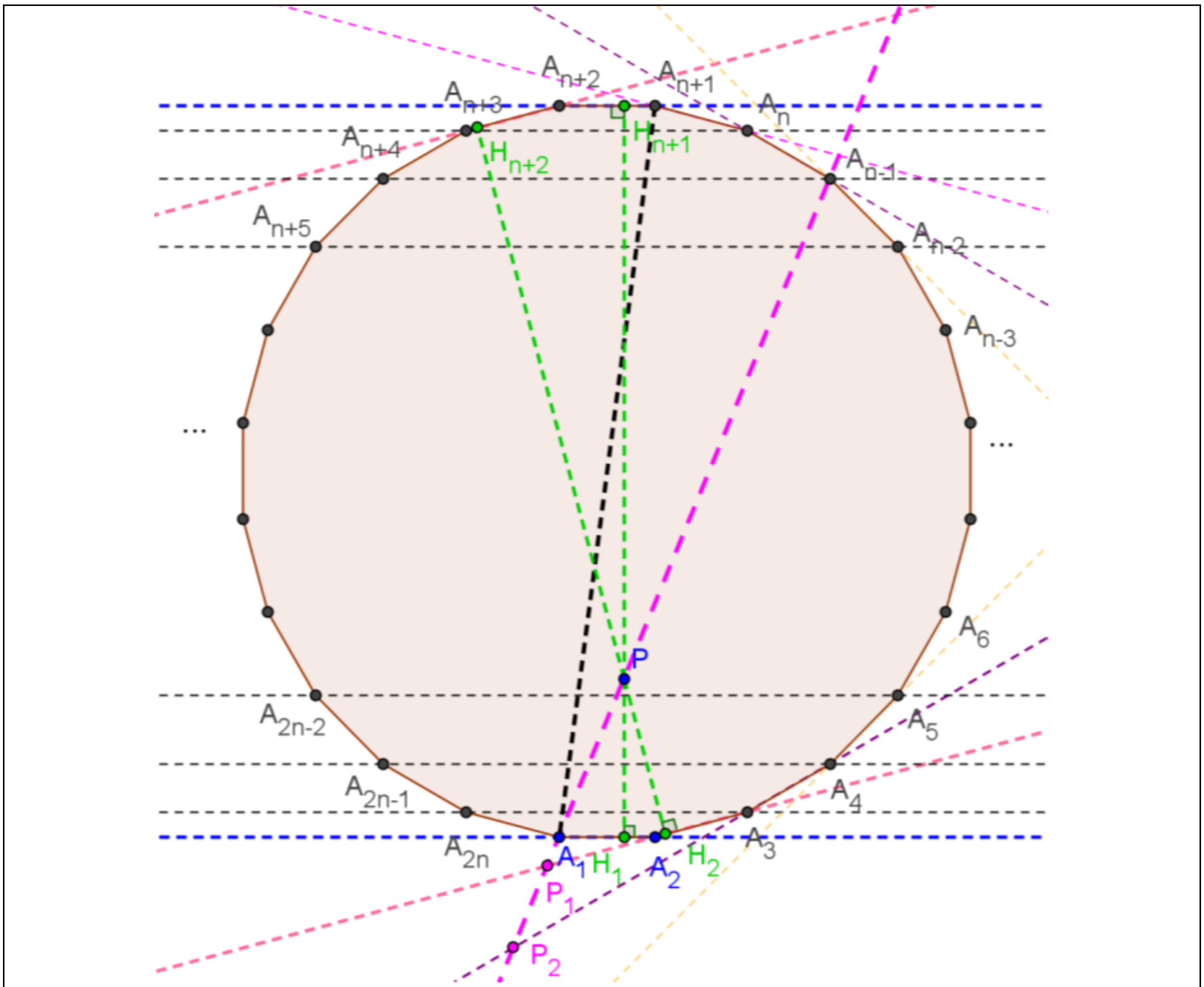


圖 T1-2

由上圖 T1-2 知，

$$\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}=a\sin\tfrac{360^\circ}{2n}+a\sin\tfrac{720^\circ}{2n}+a\sin\tfrac{1080^\circ}{2n}+\cdots+a\sin\tfrac{(n-1)\times360^\circ}{2n}$$

$$=a\left(\sin\tfrac{180^\circ}{n}+\sin\tfrac{360^\circ}{n}+\sin\tfrac{540^\circ}{n}+\cdots+\sin\tfrac{(n-1)\times180^\circ}{n}\right)$$

$$=a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\times180^\circ}{n}\right)=a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\pi}{n}\right)\ 。$$

觀點二：

將正 2n 邊形切成等大的 2n 個三角形，則其面積為 $2n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{a}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right]$，

又正 2n 邊形面積$=n\times\left(\Delta PA_1A_2+\Delta PA_{n+1}A_{n+2}\right)=n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_{n+1}}\right]$，

所以由用兩種方來計算正 2n 邊形的面積得，

$$n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_{n+1}}\right]=2n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{a}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)\right]=2n\times\left[\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{a}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)=a\times\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}\ 。$$

在下面的論述中，我們可以將$\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)$之值以$a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$來取代，亦可以將$\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)$之值以$a\times\tan\dfrac{(n-1)\pi}{2n}$來取代。

(iii) 承上述(ii)，我們依n的奇偶性分兩類情形來討論$\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\times180^\circ}{n}\right)$之和，詳述如下，

①若n是奇數，則

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\times180^\circ}{n}&=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\pi}{n}=\sin\tfrac{\pi}{n}+\sin\tfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n}\\&=\left(\sin\tfrac{\pi}{n}+\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n}\right)+\left(\sin\tfrac{2\pi}{n}+\sin\tfrac{(n-2)\pi}{n}\right)+\cdots+\left(\sin\tfrac{(\frac{n-1}{2})\pi}{n}+\sin\tfrac{(\frac{n+1}{2})\pi}{n}\right)\\&=2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{n-2}{2n})\pi+2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{n-4}{2n})\pi+\cdots+2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{1}{2n})\pi\\&=2\sin\tfrac{\pi}{2}\left[\cos(\tfrac{n-2}{2n})\pi+\cos(\tfrac{n-4}{2n})\pi+\cdots+\cos(\tfrac{\pi}{2n})\right]\\&=2\left[\cos(\tfrac{n-2}{2n})\pi+\cos(\tfrac{n-4}{2n})\pi+\cdots+\cos(\tfrac{\pi}{2n})\right]\end{aligned}$$

②若n是偶數，則

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\times180^\circ}{n}&=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\pi}{n}=\sin\tfrac{\pi}{n}+\sin\tfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n}\\&=\left(\sin\tfrac{\pi}{n}+\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n}\right)+\left(\sin\tfrac{2\pi}{n}+\sin\tfrac{(n-2)\pi}{n}\right)+\cdots+\left(\sin\tfrac{(\frac{n}{2}-1)\pi}{n}+\sin\tfrac{(\frac{n}{2}+1)\pi}{n}\right)+\sin\tfrac{(\frac{n}{2})\pi}{n}\\&=2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{n-2}{2n})\pi+2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{n-4}{2n})\pi+\cdots+2\sin\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{2}{2n})\pi+\sin\tfrac{\pi}{2}\\&=2\left[\cos(\tfrac{n-2}{2n})\pi+\cos(\tfrac{n-4}{2n})\pi+\cdots+\cos(\tfrac{2}{2n})\pi\right]+1\end{aligned}$$

(iv) 結合上述(i)與(ii)之結果得知

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{1}{a\sin\frac{180^\circ}{n}}\left[\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)\times n\right]=\frac{1}{a\sin\frac{\pi}{n}}\left[a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\pi}{n}\right)\times n\right]$$

$$=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$，故得證原命題。

(2) $$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-2)}}}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{l}\dfrac{\overline{PH_3}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\dfrac{\overline{PH_4}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\cdots\\+\dfrac{\overline{PH_{2n-1}}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\dfrac{\overline{PH_{2n}}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\dfrac{\overline{PH_1}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\dfrac{\overline{PH_2}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}\end{array}\right)$$

$$=\frac{1}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}\times\left(\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\cdots+\overline{PH_{2n-1}}+\overline{PH_{2n}}+\overline{PH_1}+\overline{PH_2}\right)$$

$$=\frac{1}{a\left(\sin\frac{180^\circ}{n}+\sin\frac{360^\circ}{n}\right)}\times\left[\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_{n+2}}\right)+\cdots+\left(\overline{PH_{n-1}}+\overline{PH_{2n-1}}\right)+\left(\overline{PH_n}+\overline{PH_{2n}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\right)}\times\left[a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\pi}{n}\right)\times n\right]=\frac{n}{\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\right)}\times\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\tfrac{k\pi}{n}\right)=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}$$，故得證原命

題。

(3) 為了方便起見，對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,2n-2\}$，我們定義 $R_{2n,i}=\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)$。

①當 $i\in\{1,2,\cdots,\frac{2n-2}{2}\}$ 時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)$$

$$=\frac{1}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}+\cdots+a\sin\frac{i\times360^\circ}{2n}}\times\left(\overline{PH_{i+1}}+\overline{PH_{i+2}}+\cdots+\overline{PH_{2n-1}}+\overline{PH_{2n}}+\overline{PH_1}+\cdots+\overline{PH_i}\right)$$

$$=\frac{1}{a\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{i\pi}{n}\right)}\times\left[\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)+\left(\overline{PH_2}+\overline{PH_{n+2}}\right)+\cdots+\left(\overline{PH_{n-1}}+\overline{PH_{2n-1}}\right)+\left(\overline{PH_n}+\overline{PH_{2n}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{a\left(\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)}\times\left[a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\times n\right]=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n}}$$ ，故得證原命題。

②當 $i\in\{n,n+1,\cdots,2n-2\}$ 時，

由正 2n 邊形的對稱性知，對於每一個 $i\in\{n,n+1,\cdots,2n-2\}$， $R_{2n,i}=R_{2n,(2n-2)-(i-1)}$，即此時 $R_{2n,i}=R_{2n,(2n-2)-(i-1)}=\dfrac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{(2n-2)-(i-1)}\sin\frac{k\pi}{n}}$，故得證原命題。

(4) 因為 $R_{2n,i}=R_{2n,(2n-2)-(i-1)}$，所以將(3)所得之 $(2n-2)$ 個等式相加即得

$$\sum_{i=1}^{2n-2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}=2\times\left(\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}+\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{3}\sin\frac{k\pi}{n}}+\cdots+\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$$

$$=2n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\times\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{3}\sin\frac{k\pi}{n}}+\cdots+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$$

$$=\left(2n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{j}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$$ ，故得證原命題。

(5) 由上述(1)中之(ii)，我們得知等式 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\tan\dfrac{(n-1)\pi}{2n}$ 必成立，故得證原命題。

Q.E.D.

試著將『**定理六**』中的定點 P 移至正 2n 邊形的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理七：

已知 $\Gamma:A_1A_2\cdots A_{2n}$ 為一正 $2n$ 邊形，點 P 為平面上異於正 2n 邊形 Γ 的 2n 個頂點之一定點，對於 $i\in\{1,2,\cdots,2n\}$，連接直線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$、$\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$、$\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$、…、$\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$ 於

$P_{1+(i-1)(2n-2)}$、$P_{2+(i-1)(2n-2)}$、$P_{3+(i-1)(2n-2)}$、…、$P_{(2n-3)+(i-1)(2n-2)}$ 與 $P_{i(2n-2)}$ 等 $(2n-2)$ 個點，則

(1) $\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$。(令 $N=2n$，則(1)中的左式= $\frac{\frac{N}{2}\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})}{\sin\frac{2\pi}{N}}$)

(2) $\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{2+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}$。(令 $N=2n$，則(2)中的左式= $\frac{\frac{N}{2}\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

(3) ①當 $i\in\{1,2,\cdots,\frac{2n-2}{2}\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n}}$$
。(令 $N=2n$，則①中的左式= $\frac{\frac{N}{2}\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

②當 $i\in\{n,n+1,\cdots,2n-2\}$ 時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{(2n-2)-(i-1)}\sin\frac{k\pi}{n}}$$
。(令 $N=2n$，則②中的左式= $\frac{\frac{N}{2}\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})}{\sum_{k=1}^{(N-2)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

(4) $\sum_{i=1}^{2n-2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}=\left(2n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{j}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$。

(5) $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}$。 (令 $N=2n$，則(5)中的右式= $\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})$)

證明：

仿『定理六』之證法，就 P 點所在之位置分類討論，再利用『定義二』與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。

Q.E.D.

由上述『引理一』與『問題六』，我們推測在『正 $2n-1$ 邊形』中應該也有類似的結果，驗證其結論如下：

定理八：

已知 $\Gamma:A_1A_2\cdots A_{2n-1}$ 為一正 $2n-1$ 邊形，點 P 在正 $2n-1$ 邊形 $\Gamma:A_1A_2\cdots A_{2n-1}$ 的內部，對於 $i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}$，連接直線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$、$\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$、$\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$、…、$\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$ 於 $P_{1+(i-1)(2n-3)}$、$P_{2+(i-1)(2n-3)}$、$P_{3+(i-1)(2n-3)}$、…、$P_{(2n-4)+(i-1)(2n-3)}$ 與 $P_{i(2n-3)}$ 等 $(2n-3)$ 個點，則

(1) $\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_{1+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{1+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{1+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{1+2(2n-3)}}}+\ldots\ldots\cdots+\frac{\overline{PP_{1+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{1+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}}$。

(2) $\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_{2+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{2+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{2+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{2+2(2n-3)}}}+\cdots\ldots\ldots+\frac{\overline{PP_{2+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{2+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$。

(3) ①當 $i\in\{1,2,3,\cdots,n-1\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+2(2n-3)}}}+\cdots\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$ 。

②當 $i\in\{n,n+1,n+2,\cdots,2n-3\}$ 時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{i+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+2(2n-3)}}}+\cdots\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum\limits_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$ 。

(4) $$\sum_{i=1}^{2n-3}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)+\sum_{i=n}^{2n-3}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum\limits_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$

$$=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}+2\times\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$ 。

證明：

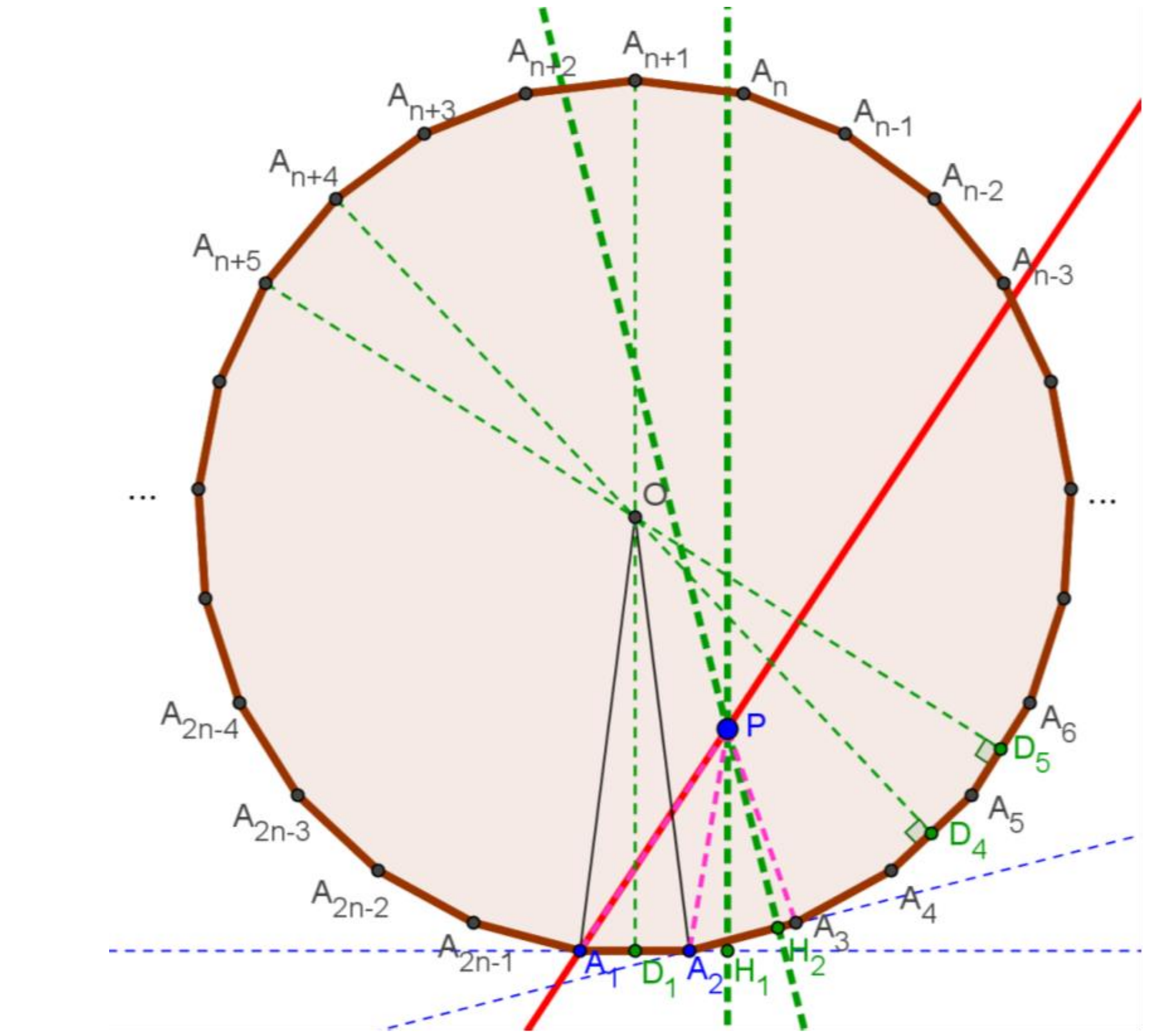


圖 T2-1

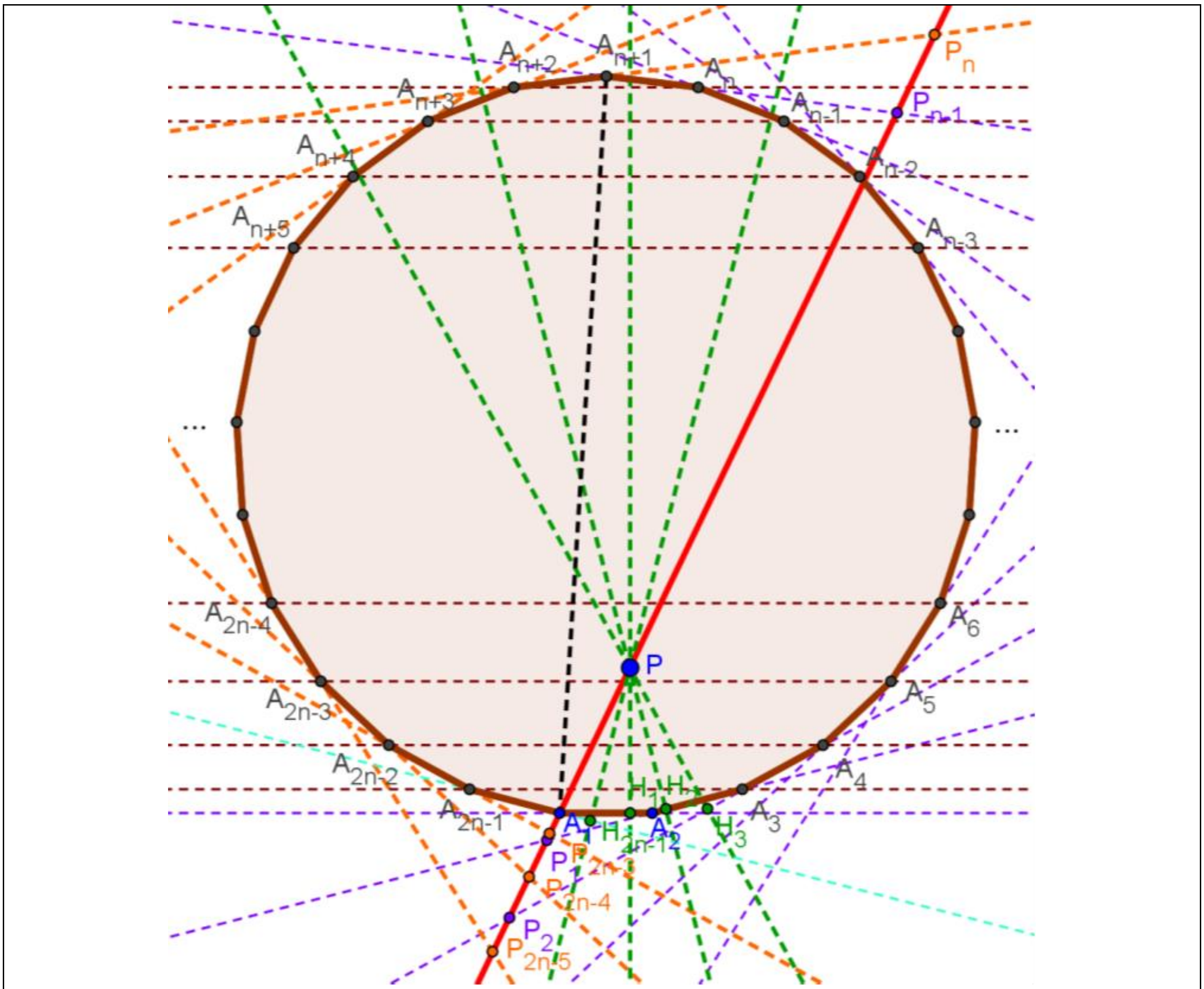


圖 T2-2

(1) 假設正 $2n-1$ 邊形 Γ 之邊長為 a ，則

(i) 對於每一個 $i \in \{1,2,\cdots,2n-1\}$ ，我們均過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_i}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 H_i 。

(ii) 將正 2n-1 邊形切成等大的 2n-1 個三角形，則其面積為 $\frac{1}{2}\times a\times\frac{a}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)$ 。

(iii) 用兩種方式來計算正 2n-1 邊形之面積得

$$(2n-1)\times\left(\frac{1}{2}\times a\times\frac{a}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)\right)=\frac{1}{2}\times a\times(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\ldots\ldots\cdots+\overline{PH_{2n-1}})\ ,$$

推得 $\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\cdots\ldots\ldots+\overline{PH_{2n-1}}=\frac{a}{2}(2n-1)\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)$ 。

(iv) 所以

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\left(\frac{\overline{PH_2}}{a\sin\frac{2\pi}{2n-1}}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a\sin\frac{2\pi}{2n-1}}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{a\sin\frac{2\pi}{2n-1}}\right)+\cdots+\left(\frac{\overline{PH_{2n-1}}}{a\sin\frac{2\pi}{2n-1}}\right)+\left(\frac{\overline{PH_1}}{a\sin\frac{2\pi}{2n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a\sin\frac{\pi}{2n-1}}(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\cdots\ldots\ldots+\overline{PH_{2n-1}})$$

$$=\frac{1}{a\sin\frac{\pi}{2n-1}}\times\left(\frac{a}{2}(2n-1)\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)\right)$$

$$=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}}$$

，故得證原命題。

(2)

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_{2+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{2+(2n-3)}}}+\frac{\overline{PP_{2+2(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{2+2(2n-3)}}}+\cdots\cdots+\frac{\overline{PP_{2+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{2+(2n-2)(2n-3)}}}$$

$$=\frac{\overline{PH_1}}{a\sin\frac{2\pi}{2n-1}+a\sin\frac{4\pi}{2n-1}}+\frac{\overline{PH_2}}{a\sin\frac{2\pi}{2n-1}+a\sin\frac{4\pi}{2n-1}}+\frac{\overline{PH_3}}{a\sin\frac{2\pi}{2n-1}+a\sin\frac{4\pi}{2n-1}}+\cdots\cdots+\frac{\overline{PH_{2n-1}}}{a\sin\frac{2\pi}{2n-1}+a\sin\frac{4\pi}{2n-1}}$$

$$=\frac{1}{a\left(\sin\frac{2\pi}{2n-1}+\sin\frac{4\pi}{2n-1}\right)}\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_2}+\overline{PH_3}+\cdots\cdots+\overline{PH_{2n-1}}\right)$$

所以$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{a}{2}(2n-1)\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{a\left(\sin\frac{2\pi}{2n-1}+\sin\frac{4\pi}{2n-1}\right)}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\left(\sin\frac{2\pi}{2n-1}+\sin\frac{4\pi}{2n-1}\right)}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$，故得證原命題。

(3) 為了方便起見，對於每一個$i\in\{1,2,\cdots,2n-3\}$，我們定義$R_{2n-1,i}=\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)$。

①當$i\in\{1,2,3,\cdots,n-1\}$時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)$$

$$=\frac{1}{a\sin\frac{2\pi}{2n-1}+a\sin\frac{4\pi}{2n-1}+\cdots+a\sin\frac{i\times2\pi}{2n-1}}\times\left(\overline{PH_{i+1}}+\overline{PH_{i+2}}+\cdots+\overline{PH_{2n-1}}+\overline{PH_1}+\cdots+\overline{PH_i}\right)$$

$$=\frac{\frac{a}{2}(2n-1)\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{a\times\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$ ，故得證原命題。

②當$i\in\{n,n+1,n+2,\cdots,2n-3\}$時，

由正$2n-1$邊形的圖形知，對於每一個$i\in\{n,n+1,n+2,\cdots,2n-3\}$，$R_{2n-1,i}=R_{2n-1,(2n-3)-(i-1)}$，

即此時$R_{2n-1,i}=R_{2n-1,(2n-3)-(i-1)}=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$，故得證原命題。

(4) 因為$R_{2n-1,i}=R_{2n-1,(2n-3)-(i-1)}$，所以將(3)中所得之$(2n-3)$個等式相加即得

$$\sum_{i=1}^{2n-3}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)+\sum_{i=n}^{2n-3}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$

$$=\frac{(2n-1)}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})\times\left(\frac{1}{\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}+\cdots+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n-2}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)+$$

$$\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)\times\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n-2}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{n-3}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}+\cdots+\frac{1}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}+\frac{1}{\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$

$$=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}+2\times\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$，故得證原命題。

Q.E.D.

試著將『定理八』中的定點 P 移至正 $2n-1$ 邊形的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理九:

已知 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n-1}$ 為平面上一正 $2n-1$ 邊形，點 P 為平面上異於正 $2n-1$ 邊形 Γ 之 $2n-1$ 個頂點的一定點，對於 $i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}$，連接直線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$、$\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$、$\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$、…、$\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$ 於 $P_{1+(i-1)(2n-3)}$、$P_{2+(i-1)(2n-3)}$、$P_{3+(i-1)(2n-3)}$、…、$P_{(2n-4)+(i-1)(2n-3)}$ 與 $P_{i(2n-3)}$ 等 $(2n-3)$ 個點，則

(1) $\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overrightarrow{PP_{1+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}}$。(令 $N=2n-1$，則(1)中的左式$=\frac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{(N-2)\pi}{2N}\right)}{\sin\frac{2\pi}{N}}$)

(2) $\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overrightarrow{PP_{2+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$。(令 $N=2n-1$，則(2)中的左式$=\frac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{(N-2)\pi}{2N}\right)}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

(3) ①當 $i\in\{1,2,3,\cdots,n-1\}$ 時，則

$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$。(令 $N=2n-1$，則①中的左式$=\frac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{(N-2)\pi}{2N}\right)}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

②當 $i\in\{n,n+1,n+2,\cdots,2n-3\}$ 時，

$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$。(令 $N=2n-1$，則②中的左式$=\frac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{(N-2)\pi}{2N}\right)}{\sum_{k=1}^{(N-2)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

(4) $$\sum_{i=1}^{2n-3}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)+\sum_{i=n}^{2n-3}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$

$$=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}+2\times\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$。

證明：

仿『定理八』之證法，就 P 點所在之位置分類討論，再利用『定義二』與相似三角形性質，

將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。

Q.E.D.

接下來，我們又試著將平面上的結論推廣到立體空間中的『任意四面體』與『正多面體』，我們發現『引理一』在『任意四面體』與『正多面體』中均有類似的推論，詳細結果如下之『引理三』、『定理十』、『定理十一』、『定理十二』、『定理十三』、『定理十四』、『定理十五』、『定理十六』、『定理十七』與『定理十八』。

在參考資料[1]中，曾提及『引理一』在立體空間中的推論，我們將其結果詳細描述如下：

引理三：

假設$\Gamma: A-BCD$為空間中一四面體，且P點為四面體Γ內部一點，又直線$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$、$\overleftrightarrow{DP}$分別與平面E_{BCD}、E_{ACD}、E_{ABD}、E_{ABC}交於P_1、P_2、P_3、P_4四點，如下圖 III-1 與 III-2 所示，則$\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}+\dfrac{\overline{PP_4}}{\overline{DP_4}}=1$。

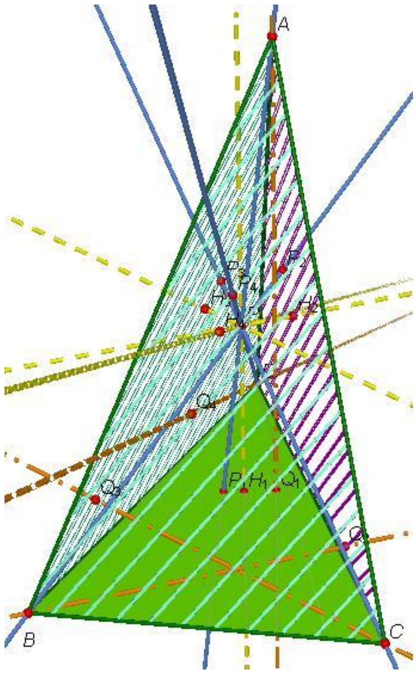


圖 III-1

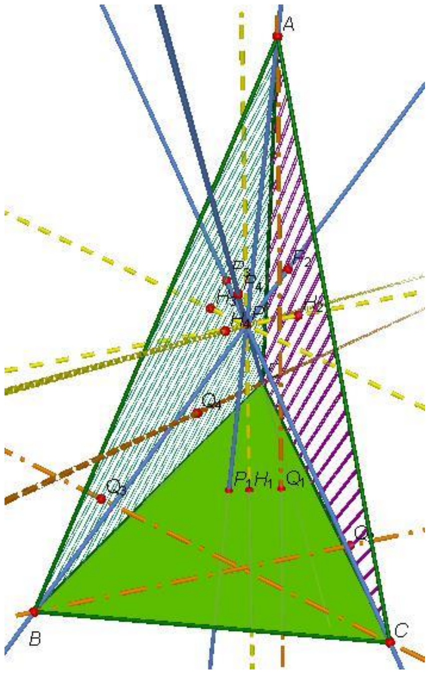


圖 III-2

證明：

(i) 過P點作直線$\overleftrightarrow{PH_1}$、$\overleftrightarrow{PH_2}$、$\overleftrightarrow{PH_3}$、$\overleftrightarrow{PH_4}$分別垂直於平面$E_{BCD}$、$E_{ACD}$、$E_{ABD}$、$E_{ABC}$且分別交平面$E_{BCD}$、$E_{ACD}$、$E_{ABD}$、$E_{ABC}$於$H_1$、$H_2$、$H_3$、$H_4$四點，又過$A$點作$\overleftrightarrow{AQ_1}$垂直平面$E_{BCD}$且交平面$E_{BCD}$於$Q_1$點，又過$B$點作$\overleftrightarrow{BQ_2}$垂直平面$E_{ACD}$且交平面$E_{ACD}$於$Q_2$點，又過$C$點作$\overleftrightarrow{CQ_3}$垂直平面$E_{ABD}$且交平面$E_{ABD}$於$Q_3$點，又過$D$點作$\overleftrightarrow{DQ_4}$垂直平面$E_{ABC}$且交平面$E_{ABC}$於$Q_4$點，如上圖 III-1 與 III-2 所示，則

(ii) $\because \Delta PP_1H_1 \sim \Delta AP_1Q_1 (AA\text{相似})$，$\therefore \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}=\dfrac{\overline{PH_1}}{\overline{AQ_1}}=\dfrac{\frac{1}{3}\times(\Delta BCD)\times\overline{PH_1}}{\frac{1}{3}\times(\Delta BCD)\times\overline{AQ_1}}=\dfrac{V_{P-BCD}}{V_{A-BCD}}$；

同理可證，$\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}=\dfrac{\overline{PH_2}}{\overline{BQ_2}}=\dfrac{\frac{1}{3}\times(\Delta ACD)\times\overline{PH_2}}{\frac{1}{3}\times(\Delta ACD)\times\overline{BQ_2}}=\dfrac{V_{P-ACD}}{V_{B-ACD}}$，

$$\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=\frac{\overline{PH_3}}{\overline{CQ_3}}=\frac{\frac{1}{3}\times(\Delta ABD)\times\overline{PH_3}}{\frac{1}{3}\times(\Delta ABD)\times\overline{CQ_3}}=\frac{V_{P-ABD}}{V_{C-ABD}}\ ,\ \frac{\overline{PP_4}}{\overline{DP_4}}=\frac{\overline{PH_4}}{\overline{DQ_4}}=\frac{\frac{1}{3}\times(\Delta ABC)\times\overline{PH_4}}{\frac{1}{3}\times(\Delta ABC)\times\overline{DQ_4}}=\frac{V_{P-ABC}}{V_{D-ABC}}\ ,$$

故 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{AP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{AP_4}}=\frac{V_{P-BCD}}{V_{A-BCD}}+\frac{V_{P-ACD}}{V_{B-ACD}}+\frac{V_{P-ABD}}{V_{C-ABD}}+\frac{V_{P-ABC}}{V_{D-ABC}}=\frac{V_{A-BCD}}{V_{A-BCD}}=1$，得證原命題。

Q.E.D.

試著將『引理三』中的定點 P 移至四面體的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理十：

假設 $\Gamma: A-BCD$ 為空間中一四面體，點 P 為空間中異於四面體 Γ 之四個頂點的一定點，又直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 、$\overleftrightarrow{CP}$ 、$\overleftrightarrow{DP}$ 分別與平面 E_{BCD} 、E_{ACD} 、E_{ABD} 、E_{ABC} 交於 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 四點，如圖 III-1 與 III-2 所示，則 $\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{DP_4}}=1$ 。

證明：

我們將依點 P 所在的位置分成幾類情形討論，詳述如下：

(i) 當點 P 落在四面體 Γ 內部或 Γ 之四個面上但異於 Γ 之四個頂點時，

由『定義二』且仿『引理三』之證法知，

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{DP_4}}=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{DP_4}}$$

$$=\frac{V_{P-BCD}}{V_{A-BCD}}+\frac{V_{P-ACD}}{V_{B-ACD}}+\frac{V_{P-ABD}}{V_{C-ABD}}+\frac{V_{P-ABC}}{V_{D-ABC}}=\frac{V_{A-BCD}}{V_{A-BCD}}=1$$

，故此時原命題成立。

(ii) 當點 P 與頂點 A 在平面 E_{BCD} 的異側 且 點 P 與頂點 B 在平面 E_{ACD} 的同側 且 點 P 與頂點 C 在平面 E_{ABD} 的同側 且 點 P 與頂點 D 在平面 E_{ABC} 的同側 時，

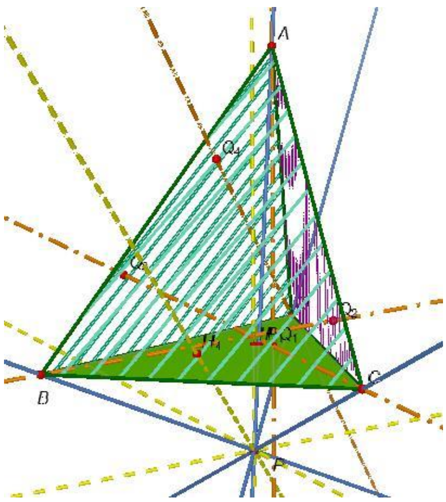


圖 T10-1

由『定義二』且參考點 P 之位置的立體圖 (如上圖 T10-1 所示) 得

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{DP_4}}=-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{DP_4}}$$

$$=-\frac{V_{P-BCD}}{V_{A-BCD}}+\frac{V_{P-ACD}}{V_{B-ACD}}+\frac{V_{P-ABD}}{V_{C-ABD}}+\frac{V_{P-ABC}}{V_{D-ABC}}=\frac{V_{A-BCD}}{V_{A-BCD}}=1$$

，故此時原命題成立。

(iii) 當點 P 與頂點 A 在平面 E_{BCD} 的異側 且 點 P 與頂點 B 在平面 E_{ACD} 的同側 且 點 P 與頂點 C 在平面 E_{ABD} 的同側 且 點 P 與頂點 D 在平面 E_{ABC} 的異側 時，

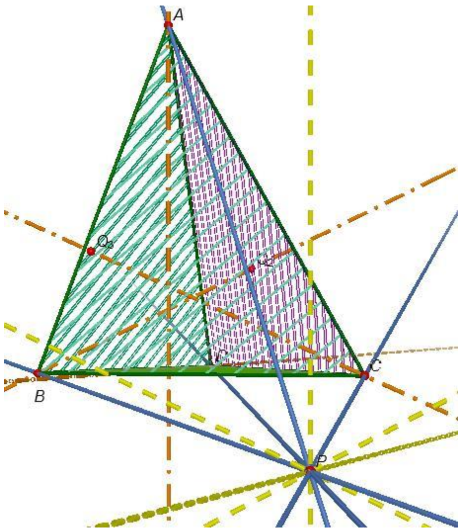


圖 T10-2

由『定義二』且參考點 P 之位置的立體圖 (如上圖 T10-2 所示) 得

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{DP_4}}=-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{PP_4}}{\overline{DP_4}}$$

$$=-\frac{V_{P-BCD}}{V_{A-BCD}}+\frac{V_{P-ACD}}{V_{B-ACD}}+\frac{V_{P-ABD}}{V_{C-ABD}}-\frac{V_{P-ABC}}{V_{D-ABC}}=\frac{V_{A-BCD}}{V_{A-BCD}}=1$$

，故此時原命題成立。

(iv) 當點 P 與頂點 A 在平面 E_{BCD} 的異側 且 點 P 與頂點 B 在平面 E_{ACD} 的異側 且 點 P 與頂點 C 在平面 E_{ABD} 的同側 且 點 P 與頂點 D 在平面 E_{ABC} 的異側 時，

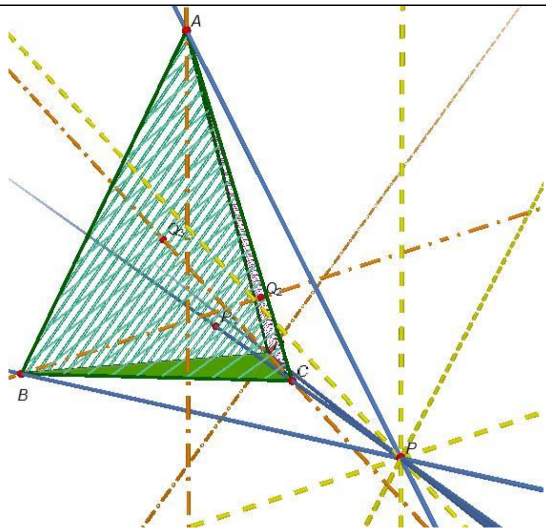


圖 T10-3

由『定義二』且參考點P之位置的立體圖 (如上圖 T10-3 所示) 得

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{DP_4}}=-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}-\frac{\overline{PP_4}}{\overline{DP_4}}$$

$$=-\frac{V_{P-BCD}}{V_{A-BCD}}-\frac{V_{P-ACD}}{V_{B-ACD}}+\frac{V_{P-ABD}}{V_{C-ABD}}-\frac{V_{P-ABC}}{V_{D-ABC}}=\frac{V_{A-BCD}}{V_{A-BCD}}=1$$

，故此時原命題成立。

(v) P點之位置共可分成 15 種情形，其中第(i)類的有 1 種，第(ii)類的有 4 種，第(iii)類的有 6 種，第(iv)類的有 4 種，上述(i)至(iv)已經討論了四種，剩餘的 11 種均會與上述四種之一歸於同類，且$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{DP_4}}$之值均會等於 1，故其實我們已經討論完所有情形，所以得證原命題成立。

Q.E.D.

我們試著考慮『引理三』在『正六面體』上的推論，而有了如下『定理十一』的結果。

定理十一：

已知正立方體$\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$，且$P$點為正立方體$\Gamma$內部一點，若$\Gamma$之稜長$\overline{A_1A_2}=a$且$\pi_1=\pi_{1265}$表示過$A_1$、$A_2$、$A_6$與$A_5$四點之平面，$\pi_2=\pi_{2376}$表通過$A_2$、$A_3$、$A_7$與$A_6$四點之平面，$\pi_3=\pi_{3487}$表示過$A_3$、$A_4$、$A_8$與$A_7$四點之平面，$\pi_4=\pi_{1485}$表通過$A_1$、$A_4$、$A_8$與$A_5$四點之平面，$\pi_5=\pi_{1234}$表示過$A_1$、$A_2$、$A_3$與$A_4$四點之平面，$\pi_6=\pi_{5678}$表通過$A_5$、$A_6$、$A_7$與$A_8$四點之平面，又

直線$\overleftrightarrow{A_1P}$分別交平面$\pi_2$、$\pi_3$與$\pi_6$於$P_1$、$P_2$與$P_3$三點，

直線$\overleftrightarrow{A_2P}$分別交平面$\pi_3$、$\pi_4$與$\pi_6$於$P_4$、$P_5$與$P_6$三點，

直線$\overleftrightarrow{A_3P}$分別交平面$\pi_4$、$\pi_1$與$\pi_6$於$P_7$、$P_8$與$P_9$三點，

直線$\overleftrightarrow{A_4P}$分別交平面$\pi_1$、$\pi_2$與$\pi_6$於$P_{10}$、$P_{11}$與$P_{12}$三點，

直線$\overleftrightarrow{A_5P}$分別交平面$\pi_2$、$\pi_3$與$\pi_5$於$P_{13}$、$P_{14}$與$P_{15}$三點，

直線$\overleftrightarrow{A_6P}$分別交平面$\pi_3$、$\pi_4$與$\pi_5$於$P_{16}$、$P_{17}$與$P_{18}$三點，

直線$\overleftrightarrow{A_7P}$分別交平面$\pi_4$、$\pi_1$與$\pi_5$於$P_{19}$、$P_{20}$與$P_{21}$三點，

直線$\overleftrightarrow{A_8P}$分別交平面$\pi_1$、$\pi_2$與$\pi_5$於$P_{22}$、$P_{23}$與$P_{24}$三點，

如下圖 T11-1 所示，

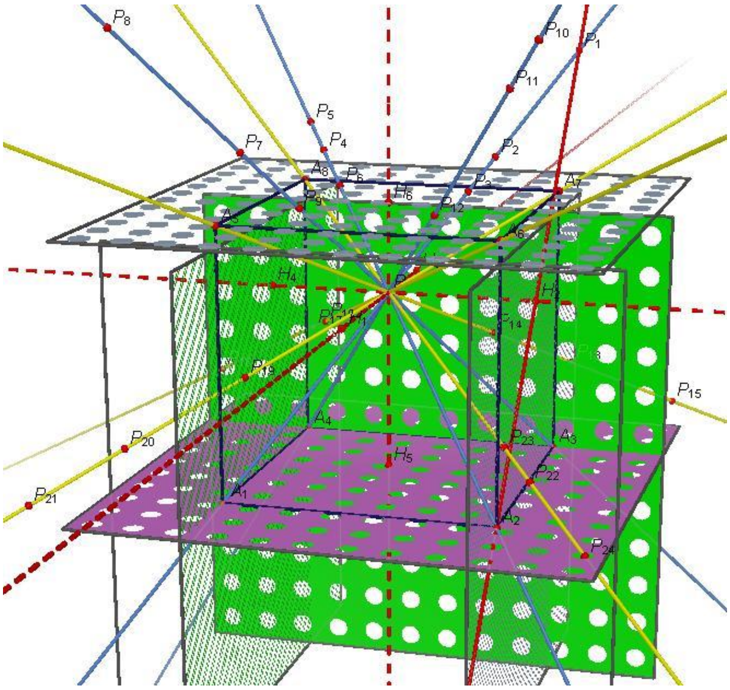


圖 T11-1

試證明：$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overline{PP_{i+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=12$ 。

證明：

(i) 過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_1}$ 、 $\overleftrightarrow{PH_2}$ 、 $\overleftrightarrow{PH_3}$ 、 $\overleftrightarrow{PH_4}$ 、 $\overleftrightarrow{PH_5}$ 、 $\overleftrightarrow{PH_6}$ 分別垂直於平面 π_1 、 π_2 、 π_3 、 π_4 、 π_5 、 π_6 且分別交平面 π_1 、 π_2 、 π_3 、 π_4 、 π_5 、 π_6 於 H_1 、 H_2 、 H_3 、 H_4 、 H_5 、 H_6 六點，

(ii) 由三角形相似性質知，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_7P_{19}}}+\frac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_7P_{20}}}+\frac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_7P_{21}}}\right)=\left(\frac{\overline{PH_2}}{\overline{A_1A_2}}+\frac{\overline{PH_3}}{\overline{A_1A_4}}+\frac{\overline{PH_6}}{\overline{A_1A_5}}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{\overline{A_7A_8}}+\frac{\overline{PH_1}}{\overline{A_7A_6}}+\frac{\overline{PH_5}}{\overline{A_7A_3}}\right)\\&=\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)\\&=\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_6}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)\\&=1+1+1=3\text{ 。}\end{aligned}$$

同理可證

$$\left(\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_8P_{22}}}+\frac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_8P_{23}}}+\frac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_8P_{24}}}\right)=3\text{ ，}$$

$$\left(\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_3P_8}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_5P_{15}}}\right)=3\text{ ，}$$

$$\left(\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_4P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_4P_{12}}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_6P_{16}}}+\frac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_6P_{17}}}+\frac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_6P_{18}}}\right)=3\text{ ，}$$

將上述四個式子相加即得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overline{PP_{i+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=12$ ，得證原命題。

Q.E.D.

試著將『定理十一』中的定點 P 移至正立方體的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理十二:

已知正立方體 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$，點 P 為空間中異於正立方體 Γ 之八個頂點的一定點，若 Γ 之稜長 $\overline{A_1A_2}=a$ 且

$\pi_1=\pi_{1265}$ 表示過 A_1、A_2、A_6 與 A_5 四點之平面，$\pi_2=\pi_{2376}$ 表通過 A_2、A_3、A_7 與 A_6 四點之平面，$\pi_3=\pi_{3487}$ 表示過 A_3、A_4、A_8 與 A_7 四點之平面，$\pi_4=\pi_{1485}$ 表通過 A_1、A_4、A_8 與 A_5 四點之平面，$\pi_5=\pi_{1234}$ 表示過 A_1、A_2、A_3 與 A_4 四點之平面，$\pi_6=\pi_{5678}$ 表通過 A_5、A_6、A_7 與 A_8 四點之平面，又

直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交平面 π_2、π_3 與 π_6 於 P_1、P_2 與 P_3 三點，
直線 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交平面 π_3、π_4 與 π_6 於 P_4、P_5 與 P_6 三點，
直線 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交平面 π_4、π_1 與 π_6 於 P_7、P_8 與 P_9 三點，
直線 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交平面 π_1、π_2 與 π_6 於 P_{10}、P_{11} 與 P_{12} 三點，
直線 $\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交平面 π_2、π_3 與 π_5 於 P_{13}、P_{14} 與 P_{15} 三點，
直線 $\overleftrightarrow{A_6P}$ 分別交平面 π_3、π_4 與 π_5 於 P_{16}、P_{17} 與 P_{18} 三點，
直線 $\overleftrightarrow{A_7P}$ 分別交平面 π_4、π_1 與 π_5 於 P_{19}、P_{20} 與 P_{21} 三點，
直線 $\overleftrightarrow{A_8P}$ 分別交平面 π_1、π_2 與 π_5 於 P_{22}、P_{23} 與 P_{24} 三點，
如圖 T11-1 所示，

試證明：$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=12$。

證明：

我們將依點 P 所在的位置分成幾類情形討論，詳述如下：

(i) 當點 P 落在正立方體 Γ 內部或 Γ 之六個面上但異於 Γ 之八個頂點時，
由『定義二』且仿『定理十一』之證法知，

$$\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overline{PP_{i+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+3(k-1)}}}=12$$

，故此時原命題成立。

(ii) 當點 P 與平面 $\pi_3=\pi_{3487}$ 在平面 $\pi_1=\pi_{1265}$ 的異側且
點 P 在平面 $\pi_2=\pi_{2376}$ 與平面 $\pi_4=\pi_{1485}$ 之間且
點 P 在平面 $\pi_5=\pi_{1234}$ 與平面 $\pi_6=\pi_{5678}$ 之間　時，

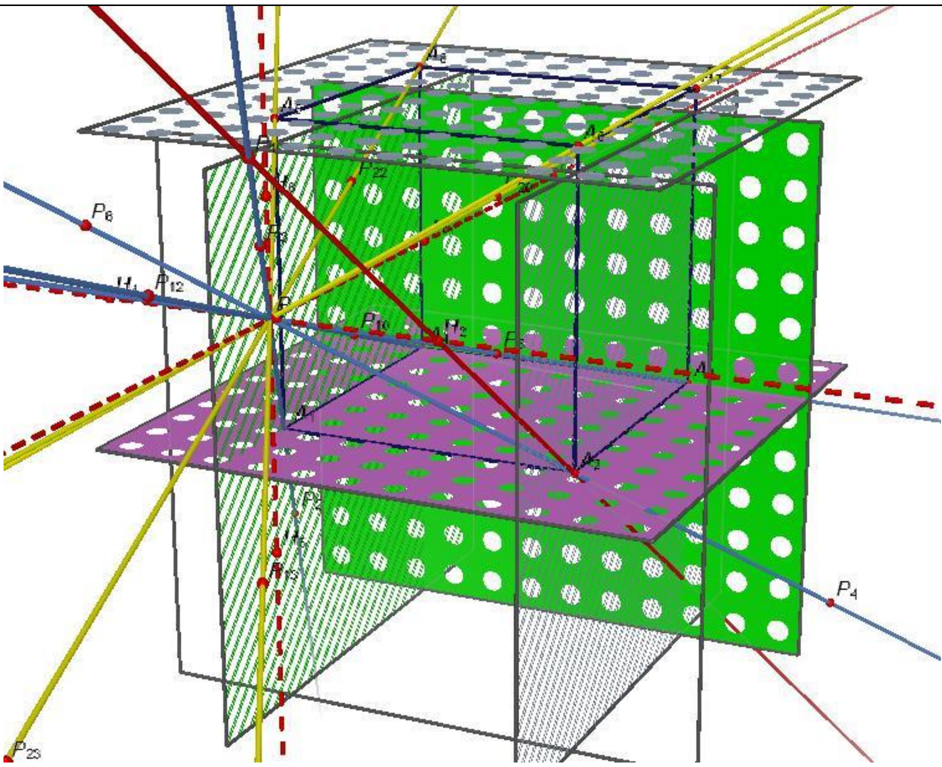


圖 T12-1

由『定義二』且參考點 P 之位置的立體圖 (如上圖 T12-1 所示) 分組討論如下，

(1)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}=\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots(1\text{-}1)，$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{19}}}{\overrightarrow{A_7P_{19}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{20}}}{\overrightarrow{A_7P_{20}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{21}}}{\overrightarrow{A_7P_{21}}}=\frac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_7P_{19}}}-\frac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_7P_{20}}}+\frac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_7P_{21}}}=\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots(1\text{-}2)，$$

由(1-1)+(1-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{19}}}{\overrightarrow{A_7P_{19}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{20}}}{\overrightarrow{A_7P_{20}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{21}}}{\overrightarrow{A_7P_{21}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)=1+1+1=3 \quad \cdots\cdots\cdots(\text{ii-1})$$

(2)

$$\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}=\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}=\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{-}1)，$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{22}}}{\overrightarrow{A_8P_{22}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{23}}}{\overrightarrow{A_8P_{23}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{24}}}{\overrightarrow{A_8P_{24}}}=-\frac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_8P_{22}}}+\frac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_8P_{23}}}+\frac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_8P_{24}}}=-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\cdots\cdots\cdots(2\text{-}2)，$$

由(2-1)+(2-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{22}}}{\overrightarrow{A_8P_{22}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{23}}}{\overrightarrow{A_8P_{23}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{24}}}{\overrightarrow{A_8P_{24}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)=1+1+1=3 \quad \cdots\cdots\cdots\text{(ii-2)}$$

(3)

$$\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}=\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}}-\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_3P_8}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}=\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\text{(3-1)},$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_5P_{15}}}=\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\text{(3-2)},$$

由(3-1)+(3-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)=1+1+1=3 \quad \cdots\cdots\cdots\text{(ii-3)}$$

(4)

$$\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}=-\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_4P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_4P_{12}}}=-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\text{(4-1)},$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{16}}}{\overrightarrow{A_6P_{16}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{17}}}{\overrightarrow{A_6P_{17}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{18}}}{\overrightarrow{A_6P_{18}}}=\frac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_6P_{16}}}+\frac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_6P_{17}}}+\frac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_6P_{18}}}=\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\text{(4-2)},$$

由(4-1)+(4-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{16}}}{\overrightarrow{A_6P_{16}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{17}}}{\overrightarrow{A_6P_{17}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{18}}}{\overrightarrow{A_6P_{18}}}\right)$$

$$=\left(-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)=1+1+1=3 \quad \cdots\cdots\cdots\text{(ii-4)}$$

(5) 將上述四個等式(ii-1)、(ii-2)、(ii-3)與(ii-4)相加即得

$$\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=12$$

，故得證此時原命題成立。

(iii) 當點 P 與平面 $\pi_3 = \pi_{3487}$ 在平面 $\pi_1 = \pi_{1265}$ 的異側且

點 P 與平面 $\pi_4 = \pi_{1485}$ 在平面 $\pi_2 = \pi_{2376}$ 的異側且

點 P 在平面 $\pi_5 = \pi_{1234}$ 與平面 $\pi_6 = \pi_{5678}$ 之間　時，

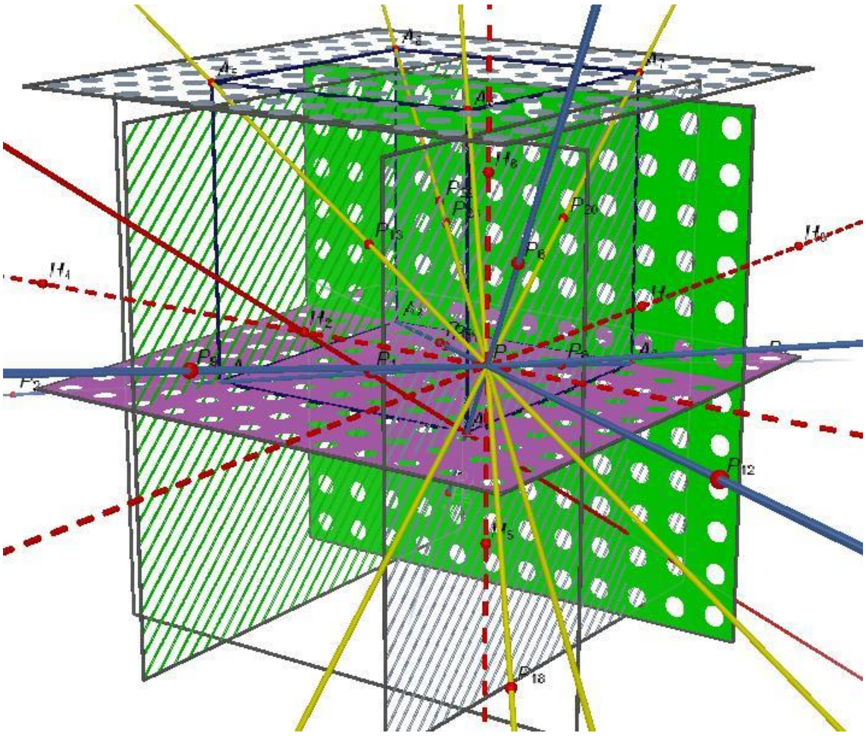


圖 T12-2

由『定義二』且參考點 P 之位置的立體圖 (如上圖 T12-2 所示) 分組討論如下，

(6)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}=-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}=-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a} \qquad \cdots\cdots\cdots(6\text{-}1)，$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{19}}}{\overrightarrow{A_7P_{19}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{20}}}{\overrightarrow{A_7P_{20}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{21}}}{\overrightarrow{A_7P_{21}}}=\frac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_7P_{19}}}-\frac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_7P_{20}}}+\frac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_7P_{21}}}=\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a} \qquad \cdots\cdots\cdots(6\text{-}2)，$$

由(6-1)+(6-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{19}}}{\overrightarrow{A_7P_{19}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{20}}}{\overrightarrow{A_7P_{20}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{21}}}{\overrightarrow{A_7P_{21}}}\right)$$

$$=\left(-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)=1+1+1=3 \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{iii-1})$$

(7)

$$\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}=\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}=\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a} \qquad \cdots\cdots\cdots(7\text{-}1)，$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{22}}}{\overrightarrow{A_8P_{22}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{23}}}{\overrightarrow{A_8P_{23}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{24}}}{\overrightarrow{A_8P_{24}}}=-\frac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_8P_{22}}}-\frac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_8P_{23}}}+\frac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_8P_{24}}}=-\frac{\overline{PH_1}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\cdots\cdots\cdots(7\text{-}2)\text{，}$$

由(7-1)+(7-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{22}}}{\overrightarrow{A_8P_{22}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{23}}}{\overrightarrow{A_8P_{23}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{24}}}{\overrightarrow{A_8P_{24}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(-\frac{\overline{PH_1}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)=1+1+1=3\quad\cdots\cdots\cdots(\text{iii-2})$$

(8)

$$\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}=\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}}-\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_3P_8}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}=\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\qquad\cdots\cdots\cdots(8\text{-}1)\text{，}$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=-\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_5P_{15}}}=-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\qquad\cdots\cdots\cdots(8\text{-}2)\text{，}$$

由(8-1)+(8-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)=1+1+1=3\quad\cdots\cdots\cdots(\text{iii-3})$$

(9)

$$\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}=-\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}}-\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_4P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_4P_{12}}}=-\frac{\overline{PH_1}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\qquad\cdots\cdots\cdots(9\text{-}1)\text{，}$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{16}}}{\overrightarrow{A_6P_{16}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{17}}}{\overrightarrow{A_6P_{17}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{18}}}{\overrightarrow{A_6P_{18}}}=\frac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_6P_{16}}}+\frac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_6P_{17}}}+\frac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_6P_{18}}}=\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\qquad\cdots\cdots\cdots(9\text{-}2)\text{，}$$

由(9-1)+(9-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{16}}}{\overrightarrow{A_6P_{16}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{17}}}{\overrightarrow{A_6P_{17}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{18}}}{\overrightarrow{A_6P_{18}}}\right)$$

$$=\left(-\frac{\overline{PH_1}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)=1+1+1=3\quad\cdots\cdots\cdots(\text{iii-4})$$

(10) 將上述四個等式(iii-1)、(iii-2)、(iii-3)與(iii-4)相加即得

$$\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=12$$

，故得證此時原命題成立。

(iv) 當點 P 與平面 $\pi_3=\pi_{3487}$ 在平面 $\pi_1=\pi_{1265}$ 的異側且
點 P 與平面 $\pi_4=\pi_{1485}$ 在平面 $\pi_2=\pi_{2376}$ 的異側且
點 P 與平面 $\pi_6=\pi_{5678}$ 在平面 $\pi_5=\pi_{1234}$ 的異側　時，

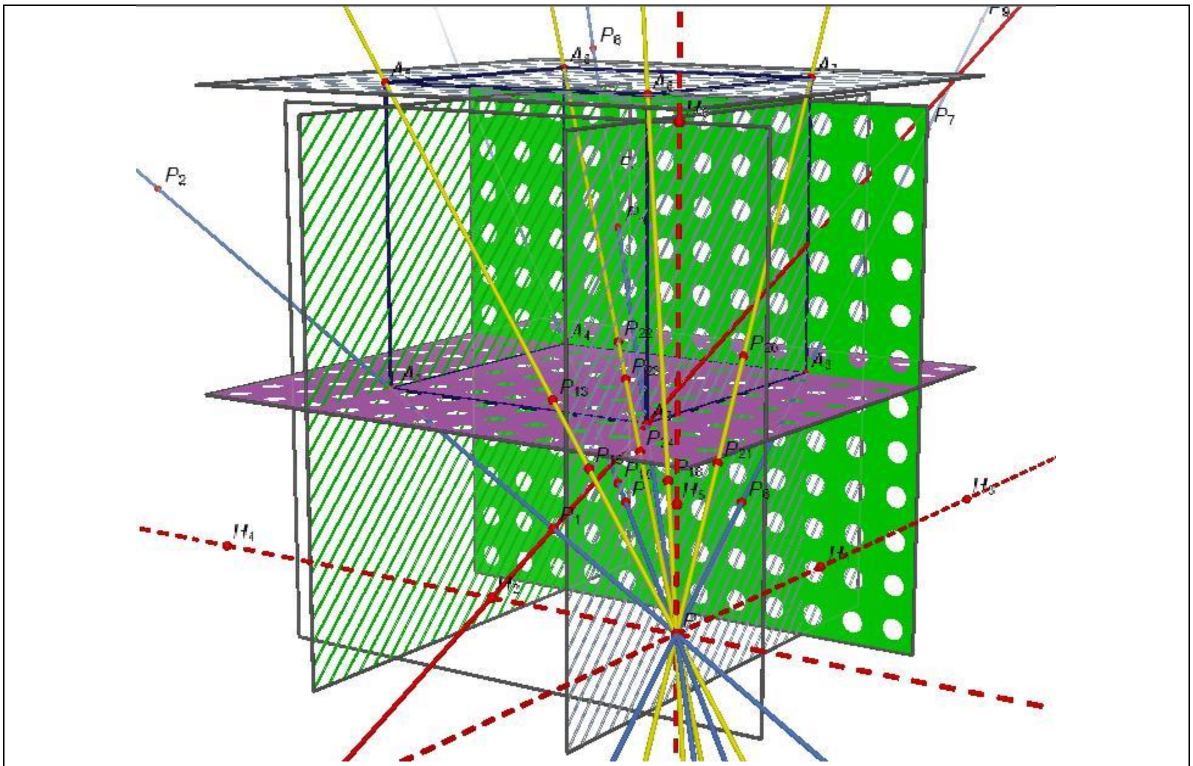


圖 T12-3

由『定義二』且參考點 P 之位置的立體圖 (如上圖 T12-3 所示) 分組討論如下，
(11)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}=-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}=-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots(11\text{-}1)，$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{19}}}{\overrightarrow{A_7P_{19}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{20}}}{\overrightarrow{A_7P_{20}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{21}}}{\overrightarrow{A_7P_{21}}}=\frac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_7P_{19}}}-\frac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_7P_{20}}}-\frac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_7P_{21}}}=\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots(11\text{-}2)，$$

由(11-1)+(11-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{19}}}{\overrightarrow{A_7P_{19}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{20}}}{\overrightarrow{A_7P_{20}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{21}}}{\overrightarrow{A_7P_{21}}}\right)$$

$$=\left(-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_6}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)=1+1+1=3 \quad \cdots\cdots\cdots(\text{iv-}1)$$

(12)

$$\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}=\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}=\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots(12\text{-}1),$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{22}}}{\overrightarrow{A_8P_{22}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{23}}}{\overrightarrow{A_8P_{23}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{24}}}{\overrightarrow{A_8P_{24}}}=-\frac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_8P_{22}}}-\frac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_8P_{23}}}-\frac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_8P_{24}}}=-\frac{\overline{PH_1}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots(12\text{-}2),$$

由(12-1)+(12-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{22}}}{\overrightarrow{A_8P_{22}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{23}}}{\overrightarrow{A_8P_{23}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{24}}}{\overrightarrow{A_8P_{24}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(-\frac{\overline{PH_1}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_6}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)=1+1+1=3 \quad \cdots\cdots\cdots(\text{iv-2})$$

(13)

$$\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}=\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}}-\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_3P_8}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}=\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots(13\text{-}1),$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=-\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}-\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_5P_{15}}}=-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots(13\text{-}2),$$

由(13-1)+(13-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_6}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)=1+1+1=3 \quad \cdots\cdots\cdots(\text{iv-3})$$

(14)

$$\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}=-\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}}-\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_4P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_4P_{12}}}=-\frac{\overline{PH_1}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots(14\text{-}1),$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{16}}}{\overrightarrow{A_6P_{16}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{17}}}{\overrightarrow{A_6P_{17}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{18}}}{\overrightarrow{A_6P_{18}}}=\frac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_6P_{16}}}+\frac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_6P_{17}}}-\frac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_6P_{18}}}=\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots(14\text{-}2),$$

由(14-1)+(14-2)得

$$\left(\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}\right)+\left(\frac{\overrightarrow{PP_{16}}}{\overrightarrow{A_6P_{16}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{17}}}{\overrightarrow{A_6P_{17}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{18}}}{\overrightarrow{A_6P_{18}}}\right)$$

$$=\left(-\frac{\overline{PH_1}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_3}}{a}-\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{a}-\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_6}}{a}-\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)=1+1+1=3 \quad \cdots\cdots\cdots(\text{iv-4})$$

(15) 將上述四個等式(iv-1)、(iv-2)、(iv-3)與(iv-4)相加即得

$$\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=12$$

，故得證此時原命題成立。

(v) P 點之位置共可分成 27 種情形，其中第(i)類的有 1 種，第(ii)類的有 6 種，第(iii)類的有 12 種，第(iv)類的有 8 種，上述(i)至(iv)已經討論了四種，剩餘的 23 種均會與上述四種之一歸於同類，且 $\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}$ 之值均會等於 12，故其實我們已經討論完所有情形，所以得證原命題成立。

Q.E.D.

Remark 4:

將『定理十一』與『定理十二』中的『正立方體』換成『長方體』或『平行六面體』時，結論亦成立，證明方法類似，僅需將直線 $\overleftrightarrow{PH_i}$ 改成通過 P 點且平行『長方體』或『平行六面體』兩互相平行平面的直線即可。

完成『引理三』在『正立方體』的推論之後，我們接著去考慮『引理三』在『正八面體』的推論，於是有了如下的結果。

定理十三：

已知正八面體 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，且 P 點為正八面體 Γ 內部一點，若頂點 A_i 到 Γ 不通過頂點 A_i 的四個平面的垂直距離為 a，且

$\pi_1=\pi_{123}$ 表示過 A_1、A_2 與 A_3 三點之平面，$\pi_2=\pi_{134}$ 表通過 A_1、A_3 與 A_4 三點之平面，

$\pi_3=\pi_{145}$ 表示過 A_1、A_4 與 A_5 三點之平面，$\pi_4=\pi_{152}$ 表通過 A_1、A_5 與 A_2 三點之平面，

$\pi_5=\pi_{623}$ 表示過 A_6、A_2 與 A_3 三點之平面，$\pi_6=\pi_{634}$ 表通過 A_6、A_3 與 A_4 三點之平面，

$\pi_7=\pi_{645}$ 表通過 A_6、A_4 與 A_5 三點之平面，$\pi_8=\pi_{652}$ 表通過 A_6、A_5 與 A_2 三點之平面，

又

直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交平面 π_6、π_5、π_8 與 π_7 於 P_1、P_2、P_3 與 P_4 四點，

直線 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交平面 π_2、π_3、π_7 與 π_6 於 P_5、P_6、P_7 與 P_8 四點，

直線 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交平面 π_3、π_4、π_8 與 π_7 於 P_9、P_{10}、P_{11} 與 P_{12} 四點，

直線 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交平面 π_1、π_5、π_8 與 π_4 於 P_{13}、P_{14}、P_{15} 與 P_{16} 四點，

直線 $\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交平面 π_2、π_6、π_5 與 π_1 於 P_{17}、P_{18}、P_{19} 與 P_{20} 四點，

直線 $\overleftrightarrow{A_6P}$ 分別交平面 π_2、π_3、π_4 與 π_1 於 P_{21}、P_{22}、P_{23} 與 P_{24} 四點，

如下圖 T13-1 與圖 T13-2 所示，

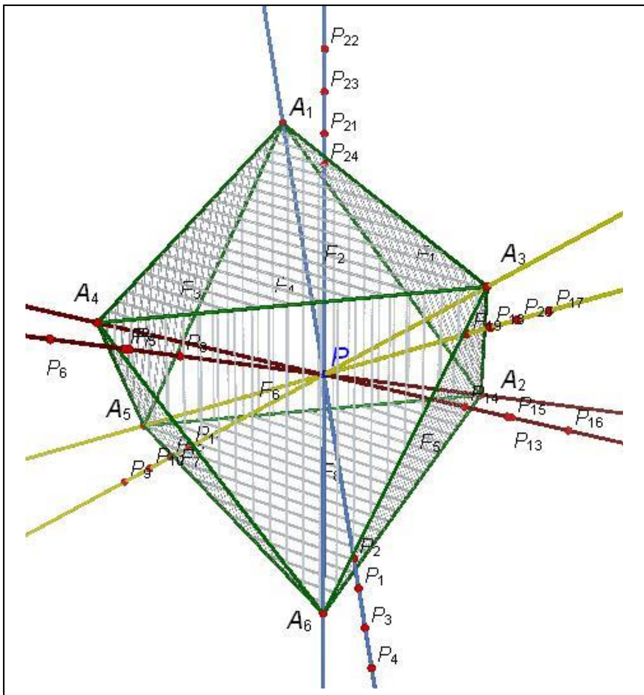


圖 T13-1

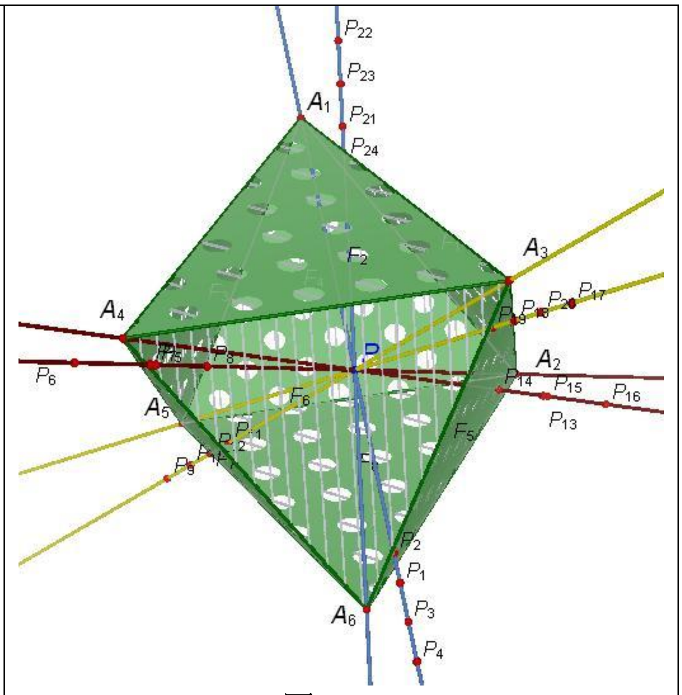


圖 T13-2

試證明: $\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{4}\dfrac{\overline{PP_{i+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{6}\left(\dfrac{\overline{PP_{1+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+4(k-1)}}}+\dfrac{\overline{PP_{2+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+4(k-1)}}}+\dfrac{\overline{PP_{3+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+4(k-1)}}}+\dfrac{\overline{PP_{4+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=12$ 。

證明:

(i) 過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_1}$、$\overleftrightarrow{PH_2}$、$\overleftrightarrow{PH_3}$、$\overleftrightarrow{PH_4}$、$\overleftrightarrow{PH_5}$、$\overleftrightarrow{PH_6}$、$\overleftrightarrow{PH_7}$、$\overleftrightarrow{PH_8}$ 分別垂直於平面 π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6、π_7、π_8 且分別交平面 π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6、π_7、π_8 於 H_1、H_2、H_3、H_4、H_5、H_6、H_7、H_8 八點，如下圖 T13-3 與圖 T13-4 所示，

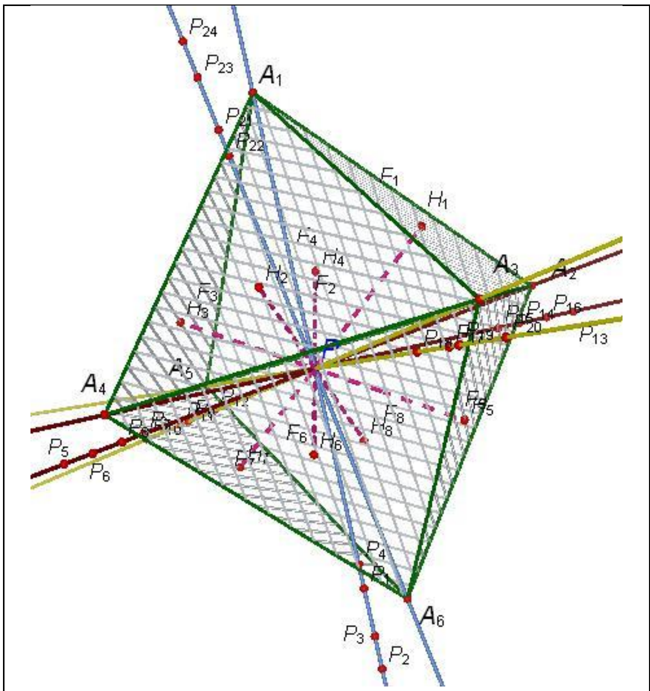


圖 T13-3

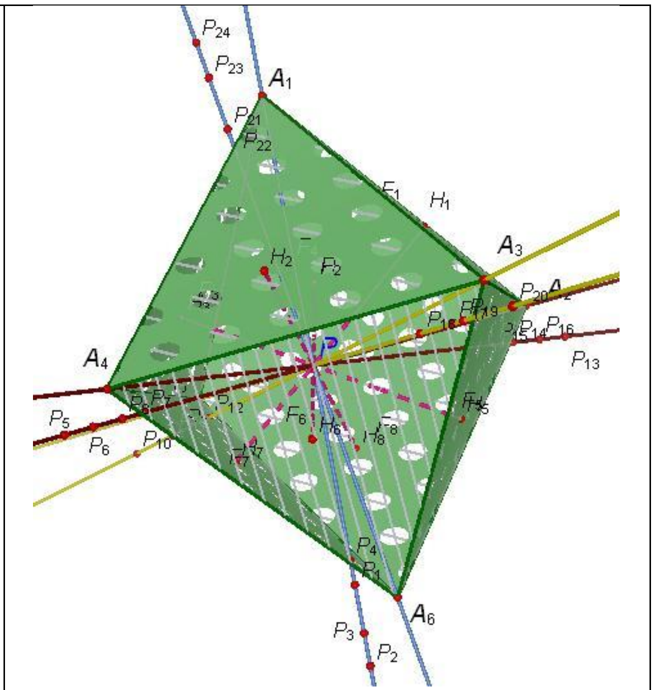


圖 T13-4

(ii) 由三角形相似性質知，

$$\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_1P_4}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{21}}}{\overline{A_6P_{21}}}+\frac{\overline{PP_{22}}}{\overline{A_6P_{22}}}+\frac{\overline{PP_{23}}}{\overline{A_6P_{23}}}+\frac{\overline{PP_{24}}}{\overline{A_6P_{24}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_6}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_8}}{a}+\frac{\overline{PH_7}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_6}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_8}}{a}+\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_7}}{a}+\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)=1+1+1+1=4$$

同理可證 $\left(\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_2P_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_2P_8}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_4P_{13}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_4P_{14}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_4P_{15}}}+\frac{\overline{PP_{16}}}{\overline{A_4P_{16}}}\right)=4$，

$\left(\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_3P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_3P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_4P_{12}}}\right)+\left(\frac{\overline{PP_{17}}}{\overline{A_5P_{17}}}+\frac{\overline{PP_{18}}}{\overline{A_5P_{18}}}+\frac{\overline{PP_{19}}}{\overline{A_5P_{19}}}+\frac{\overline{PP_{20}}}{\overline{A_5P_{20}}}\right)=4$，

將上述四個式子相加即得

$\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{4}\frac{\overline{PP_{i+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{\overline{PP_{1+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{2+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{3+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{4+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=12$，得證原命題。

Q.E.D.

試著將『定理十三』中的定點 P 移至正八面體的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理十四:

已知正八面體 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，點 P 為空間中異於正八面體 Γ 之六個頂點的一定點，若頂點 A_i 到 Γ 不通過頂點 A_i 的四個平面的垂直距離為 a，且

$\pi_1=\pi_{123}$ 表示過 A_1、A_2 與 A_3 三點之平面，$\pi_2=\pi_{134}$ 表通過 A_1、A_3 與 A_4 三點之平面，

$\pi_3=\pi_{145}$ 表示過 A_1、A_4 與 A_5 三點之平面，$\pi_4=\pi_{152}$ 表通過 A_1、A_5 與 A_2 三點之平面，

$\pi_5=\pi_{623}$ 表示過 A_6、A_2 與 A_3 三點之平面，$\pi_6=\pi_{634}$ 表通過 A_6、A_3 與 A_4 三點之平面，

$\pi_7=\pi_{645}$ 表通過 A_6、A_4 與 A_5 三點之平面，$\pi_8=\pi_{652}$ 表通過 A_6、A_5 與 A_2 三點之平面，

又

直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交平面 π_6、π_5、π_8 與 π_7 於 P_1、P_2、P_3 與 P_4 四點，

直線 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交平面 π_2、π_3、π_7 與 π_6 於 P_5、P_6、P_7 與 P_8 四點，

直線 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交平面 π_3、π_4、π_8 與 π_7 於 P_9、P_{10}、P_{11} 與 P_{12} 四點，

直線 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交平面 π_1、π_5、π_8 與 π_4 於 P_{13}、P_{14}、P_{15} 與 P_{16} 四點，

直線 $\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交平面 π_2、π_6、π_5 與 π_1 於 P_{17}、P_{18}、P_{19} 與 P_{20} 四點，

直線 $\overleftrightarrow{A_6P}$ 分別交平面 π_2、π_3、π_4 與 π_1 於 P_{21}、P_{22}、P_{23} 與 P_{24} 四點，

如上圖 T13-1 與圖 T13-2 所示，

試證明: $\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{4}\frac{\overrightarrow{PP_{i+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+4(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+4(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{3+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+4(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{4+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=12$。

證明：

仿『定理十三』之證法，就 P 點所在之位置分類討論，再利用『定義二』與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。

Q.E.D.

完成『引理三』在『正八面體』的推論之後，我們接著去考慮『引理三』在『正十二面體』的推論，於是有了如下的結果。

定理十五：

已知正十二面體$\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}A_{15}A_{16}A_{17}A_{18}A_{19}A_{20}$，且$P$點為正十二面體$\Gamma$內部一點，如下圖 T15-1 與圖 T15-2 所示，

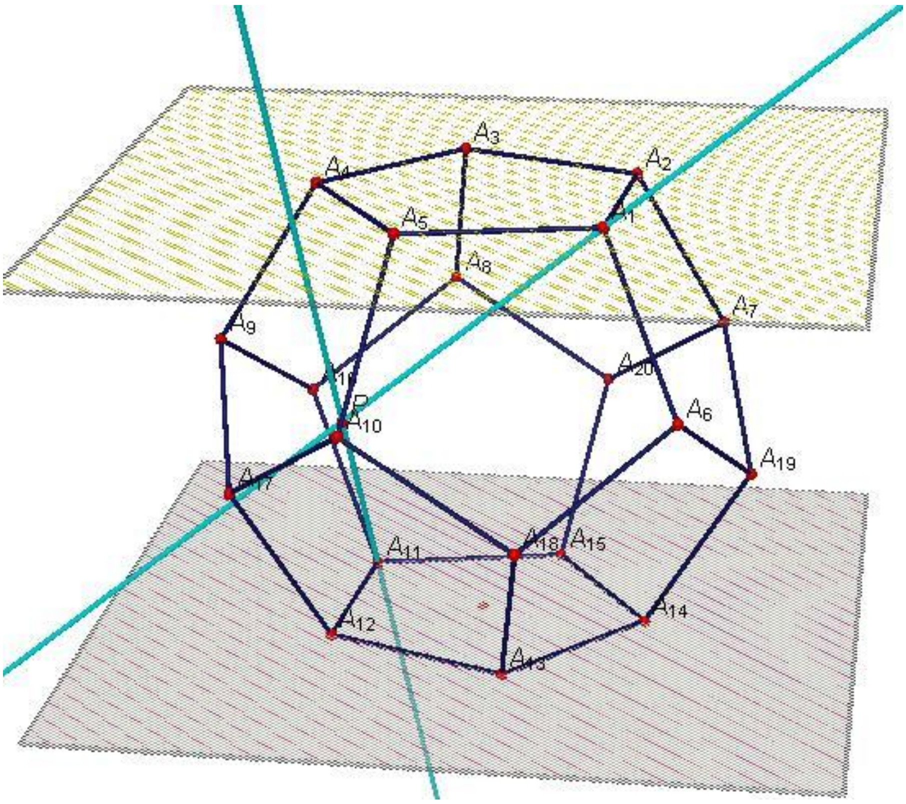


圖 T15-1

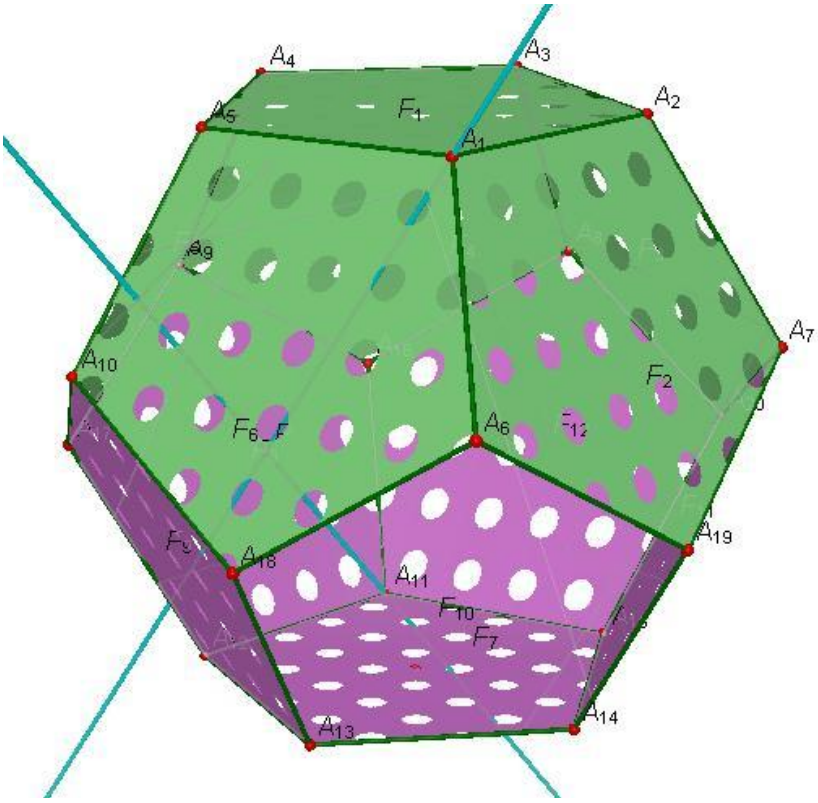


圖 T15-2

若平面$\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{12}$分別表示包含正十二面體$\Gamma$之十二個面$F_1,F_2,\cdots,F_{12}$的十二個平面，如圖 T15-2 所示，此十二個平面通過之頂點詳列如下，

$\pi_1=\pi_{1,2,3,4,5}$表示過A_1、A_2、A_3、A_4與A_5五點之平面，

$\pi_2=\pi_{1,2,6,7,19}$表通過A_1、A_2、A_6、A_7與A_{19}五點之平面，

$\pi_3=\pi_{2,3,7,8,20}$表示過A_2、A_3、A_7、A_8與A_{20}五點之平面，

$\pi_4=\pi_{3,4,8,9,16}$表示過A_3、A_4、A_8、A_9與A_{16}五點之平面，

$\pi_5=\pi_{4,5,9,10,17}$表示過A_4、A_5、A_9、A_{10}與A_{17}五點之平面，

$\pi_6=\pi_{5,1,10,6,18}$表示過A_5、A_1、A_{10}、A_6與A_{18}五點之平面，

$\pi_7=\pi_{11,12,13,14,15}$表示過$A_{11}$、$A_{12}$、$A_{13}$、$A_{14}$與$A_{15}$五點之平面，

$\pi_8=\pi_{11,12,16,17,9}$表示過$A_{11}$、$A_{12}$、$A_{16}$、$A_{17}$與$A_9$五點之平面，

$\pi_9=\pi_{12,13,17,18,10}$表示過$A_{12}$、$A_{13}$、$A_{17}$、$A_{18}$與$A_{10}$五點之平面，

$\pi_{10}=\pi_{13,14,18,19,6}$表示過$A_{13}$、$A_{14}$、$A_{18}$、$A_{19}$與$A_6$五點之平面，

$\pi_{11}=\pi_{14,15,19,20,7}$表示過$A_{14}$、$A_{15}$、$A_{19}$、$A_{20}$與$A_7$五點之平面，

$\pi_{12}=\pi_{15,11,20,16,8}$表示過$A_{15}$、$A_{11}$、$A_{20}$、$A_{16}$與$A_8$五點之平面，

且

頂點A_1到平面π_7的垂直距離為a，頂點A_1到平面π_3的垂直距離為b，頂點A_1到平面π_4的垂直距離為c，又

直線$\overleftrightarrow{A_1P}$分別交平面$\pi_3$、$\pi_4$、$\pi_5$、$\pi_7$、$\pi_8$、$\pi_9$、$\pi_{10}$、$\pi_{11}$與$\pi_{12}$於$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$、$P_6$、$P_7$、$P_8$與$P_9$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_2P}$分別交平面$\pi_4$、$\pi_5$、$\pi_6$、$\pi_7$、$\pi_9$、$\pi_{10}$、$\pi_{11}$、$\pi_{12}$與$\pi_8$於$P_{10}$、$P_{11}$、$P_{12}$、$P_{13}$、$P_{14}$、$P_{15}$、$P_{16}$、$P_{17}$與$P_{18}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_3P}$分別交平面$\pi_5$、$\pi_6$、$\pi_2$、$\pi_7$、$\pi_{10}$、$\pi_{11}$、$\pi_{12}$、$\pi_8$與$\pi_9$於$P_{19}$、$P_{20}$、$P_{21}$、$P_{22}$、$P_{23}$、$P_{24}$、$P_{25}$、$P_{26}$與$P_{27}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_4P}$分別交平面$\pi_6$、$\pi_2$、$\pi_3$、$\pi_7$、$\pi_{11}$、$\pi_{12}$、$\pi_8$、$\pi_9$與$\pi_{10}$於$P_{28}$、$P_{29}$、$P_{30}$、$P_{31}$、$P_{32}$、$P_{33}$、$P_{34}$、$P_{35}$與$P_{36}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_5P}$分別交平面$\pi_2$、$\pi_3$、$\pi_4$、$\pi_7$、$\pi_{12}$、$\pi_8$、$\pi_9$、$\pi_{10}$與$\pi_{11}$於$P_{37}$、$P_{38}$、$P_{39}$、$P_{40}$、$P_{41}$、$P_{42}$、$P_{43}$、$P_{44}$與$P_{45}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_6P}$分別交平面$\pi_{11}$、$\pi_7$、$\pi_9$、$\pi_4$、$\pi_8$、$\pi_5$、$\pi_1$、$\pi_3$與$\pi_{12}$於$P_{46}$、$P_{47}$、$P_{48}$、$P_{49}$、$P_{50}$、$P_{51}$、$P_{52}$、$P_{53}$與$P_{54}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_7P}$分別交平面$\pi_{12}$、$\pi_7$、$\pi_{10}$、$\pi_5$、$\pi_9$、$\pi_6$、$\pi_1$、$\pi_4$與$\pi_8$於$P_{55}$、$P_{56}$、$P_{57}$、$P_{58}$、$P_{59}$、$P_{60}$、$P_{61}$、$P_{62}$與$P_{63}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_8P}$分別交平面$\pi_8$、$\pi_7$、$\pi_{11}$、$\pi_6$、$\pi_{10}$、$\pi_2$、$\pi_1$、$\pi_5$與$\pi_9$於$P_{64}$、$P_{65}$、$P_{66}$、$P_{67}$、$P_{68}$、$P_{69}$、$P_{70}$、$P_{71}$與$P_{72}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_9P}$分別交平面$\pi_9$、$\pi_7$、$\pi_{12}$、$\pi_2$、$\pi_{11}$、$\pi_3$、$\pi_1$、$\pi_6$與$\pi_{10}$於$P_{73}$、$P_{74}$、$P_{75}$、$P_{76}$、$P_{77}$、$P_{78}$、$P_{79}$、$P_{80}$與$P_{81}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_{10}P}$分別交平面$\pi_{10}$、$\pi_7$、$\pi_8$、$\pi_3$、$\pi_{12}$、$\pi_4$、$\pi_1$、$\pi_2$與$\pi_{11}$於$P_{82}$、$P_{83}$、$P_{84}$、$P_{85}$、$P_{86}$、$P_{87}$、$P_{88}$、$P_{89}$與$P_{90}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_{11}P}$分別交平面$\pi_9$、$\pi_{10}$、$\pi_{11}$、$\pi_1$、$\pi_2$、$\pi_3$、$\pi_4$、$\pi_5$與$\pi_6$於$P_{91}$、$P_{92}$、$P_{93}$、$P_{94}$、$P_{95}$、$P_{96}$、$P_{97}$、$P_{98}$與$P_{99}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_{12}P}$分別交平面$\pi_{10}$、$\pi_{11}$、$\pi_{12}$、$\pi_1$、$\pi_3$、$\pi_4$、$\pi_5$、$\pi_6$與$\pi_2$於$P_{100}$、$P_{101}$、$P_{102}$、$P_{103}$、$P_{104}$、$P_{105}$、$P_{106}$、$P_{107}$與$P_{108}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_{13}P}$分別交平面$\pi_{11}$、$\pi_{12}$、$\pi_8$、$\pi_1$、$\pi_4$、$\pi_5$、$\pi_6$、$\pi_2$與$\pi_3$於$P_{109}$、$P_{110}$、$P_{111}$、$P_{112}$、$P_{113}$、$P_{114}$、$P_{115}$、$P_{116}$與$P_{117}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_{14}P}$分別交平面$\pi_{12}$、$\pi_8$、$\pi_9$、$\pi_1$、$\pi_5$、$\pi_6$、$\pi_2$、$\pi_3$與$\pi_4$於$P_{118}$、$P_{119}$、$P_{120}$、$P_{121}$、$P_{122}$、$P_{123}$、$P_{124}$、$P_{125}$與$P_{126}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_{15}P}$分別交平面$\pi_8$、$\pi_9$、$\pi_{10}$、$\pi_1$、$\pi_6$、$\pi_2$、$\pi_3$、$\pi_4$與$\pi_5$於$P_{127}$、$P_{128}$、$P_{129}$、$P_{130}$、$P_{131}$、$P_{132}$、$P_{133}$、$P_{134}$與$P_{135}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_{16}P}$分別交平面$\pi_5$、$\pi_1$、$\pi_3$、$\pi_{10}$、$\pi_2$、$\pi_{11}$、$\pi_7$、$\pi_9$與$\pi_6$於$P_{136}$、$P_{137}$、$P_{138}$、$P_{139}$、$P_{140}$、$P_{141}$、$P_{142}$、$P_{143}$與$P_{144}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_{17}P}$分別交平面$\pi_6$、$\pi_1$、$\pi_4$、$\pi_{11}$、$\pi_3$、$\pi_{12}$、$\pi_7$、$\pi_{10}$與$\pi_2$於$P_{145}$、$P_{146}$、$P_{147}$、$P_{148}$、$P_{149}$、$P_{150}$、$P_{151}$、$P_{152}$與$P_{153}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_{18}P}$分別交平面$\pi_2$、$\pi_1$、$\pi_5$、$\pi_{12}$、$\pi_4$、$\pi_8$、$\pi_7$、$\pi_{11}$與$\pi_3$於$P_{154}$、$P_{155}$、$P_{156}$、$P_{157}$、$P_{158}$、$P_{159}$、$P_{160}$、$P_{161}$與$P_{162}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_{19}P}$分別交平面$\pi_3$、$\pi_1$、$\pi_6$、$\pi_8$、$\pi_5$、$\pi_9$、$\pi_7$、$\pi_{12}$與$\pi_4$於$P_{163}$、$P_{164}$、$P_{165}$、$P_{166}$、$P_{167}$、$P_{168}$、$P_{169}$、$P_{170}$與$P_{171}$九點，

直線$\overleftrightarrow{A_{20}P}$分別交平面$\pi_4$、$\pi_1$、$\pi_2$、$\pi_9$、$\pi_6$、$\pi_{10}$、$\pi_7$、$\pi_8$與$\pi_5$於$P_{172}$、$P_{173}$、$P_{174}$、$P_{175}$、$P_{176}$、$P_{177}$、$P_{178}$、$P_{179}$與$P_{180}$九點，

如圖 T5-3 與圖 T5-4 所示，

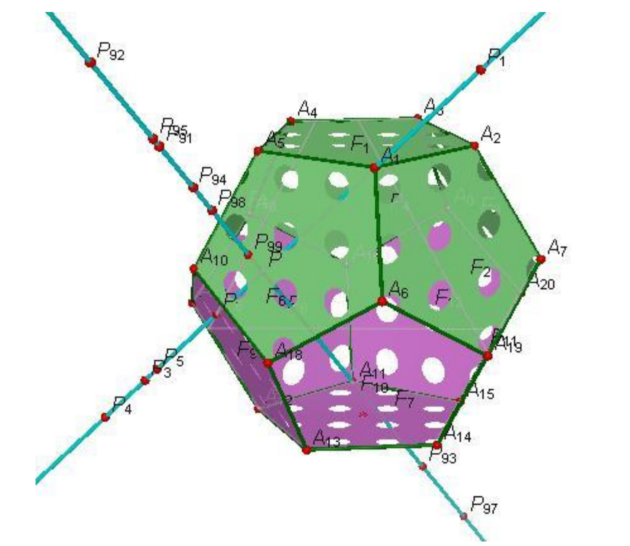


圖 T5-3

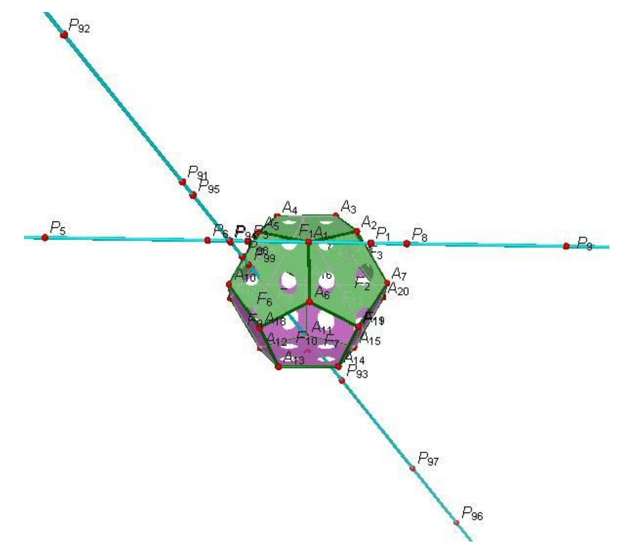


圖 T5-4(將圖 T5-3 縮小)

試證:

$$\sum_{k=1}^{20}\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+9(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+9(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{\overline{PP_{1+9(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+9(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{2+9(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+9(k-1)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{9+9(k-1)}}}{\overline{A_kP_{9+9(k-1)}}}\right)=30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=90+30\sqrt{5}$$ 。

證明:

(i) 過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_1}$ 、$\overleftrightarrow{PH_2}$ 、$\overleftrightarrow{PH_3}$ 、$\overleftrightarrow{PH_4}$ 、$\overleftrightarrow{PH_5}$ 、$\overleftrightarrow{PH_6}$ 、$\overleftrightarrow{PH_7}$ 、$\overleftrightarrow{PH_8}$ 、$\overleftrightarrow{PH_9}$ 、$\overleftrightarrow{PH_{10}}$ 、$\overleftrightarrow{PH_{11}}$ 、$\overleftrightarrow{PH_{12}}$ 分別垂直於平面 π_1 、π_2 、π_3 、π_4 、π_5 、π_6 、π_7 、π_8 、π_9 、π_{10} 、π_{11} 、π_{12} 且分別交平面 π_1 、π_2 、π_3 、π_4 、π_5 、π_6 、π_7 、π_8 、π_9 、π_{10} 、π_{11} 、π_{12} 於 H_1 、H_2 、H_3 、H_4 、H_5 、H_6 、H_7 、H_8 、H_9 、H_{10} 、H_{11} 、H_{12} 等十二點。

(ii) 由三角形相似性質知，

$$\left(\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_1P_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_1P_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_1P_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_1P_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_1P_8}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_1P_9}}\right)+$$

$$\left(\frac{\overline{PP_{91}}}{\overline{A_{11}P_{91}}}+\frac{\overline{PP_{92}}}{\overline{A_{11}P_{92}}}+\frac{\overline{PP_{93}}}{\overline{A_{11}P_{93}}}+\frac{\overline{PP_{94}}}{\overline{A_{11}P_{94}}}+\frac{\overline{PP_{95}}}{\overline{A_{11}P_{95}}}+\frac{\overline{PP_{96}}}{\overline{A_{11}P_{96}}}+\frac{\overline{PP_{97}}}{\overline{A_{11}P_{97}}}+\frac{\overline{PP_{98}}}{\overline{A_{11}P_{98}}}+\frac{\overline{PP_{99}}}{\overline{A_{11}P_{99}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_3}}{b}+\frac{\overline{PH_4}}{c}+\frac{\overline{PH_5}}{b}+\frac{\overline{PH_7}}{a}+\frac{\overline{PH_8}}{a}+\frac{\overline{PH_9}}{c}+\frac{\overline{PH_{10}}}{b}+\frac{\overline{PH_{11}}}{c}+\frac{\overline{PH_{12}}}{a}\right)+$$

$$\left(\frac{\overline{PH_9}}{b}+\frac{\overline{PH_{10}}}{c}+\frac{\overline{PH_{11}}}{b}+\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{c}+\frac{\overline{PH_4}}{b}+\frac{\overline{PH_5}}{c}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{\overline{PH_3}}{b}+\frac{\overline{PH_9}}{b}\right)+\left(\frac{\overline{PH_4}}{c}+\frac{\overline{PH_{10}}}{c}\right)+\left(\frac{\overline{PH_5}}{b}+\frac{\overline{PH_{11}}}{b}\right)+\left(\frac{\overline{PH_7}}{a}+\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_8}}{a}+\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+$$

$$\left(\frac{\overline{PH_9}}{c}+\frac{\overline{PH_3}}{c}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{10}}}{b}+\frac{\overline{PH_4}}{b}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{11}}}{c}+\frac{\overline{PH_5}}{c}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{12}}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{a}\right)$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{a}{a}+\frac{a}{a}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{a}=\frac{3a}{b}+\frac{3a}{c}+3=3a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\text{。}$$

亦即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+9(11-1)}}}{\overline{A_{11}P_{i+9(11-1)}}}=3a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 。

(iii) 對於 $k\in\{2,3,\cdots,10\}$ ，同理可證 $\displaystyle\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+9(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+9(k-1)}}}+\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+9((k+10)-1)}}}{\overline{A_{k+10}P_{i+9((k+10)-1)}}}=3a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 。

(iv) 將上述所得到的十個等式相加得

$$\left(\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+9(11-1)}}}{\overline{A_{11}P_{i+9(11-1)}}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+9(2-1)}}}{\overline{A_2P_{i+9(2-1)}}}+\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+9(12-1)}}}{\overline{A_{12}P_{i+9(12-1)}}}\right)+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+9(10-1)}}}{\overline{A_{10}P_{i+9(10-1)}}}+\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+9(20-1)}}}{\overline{A_{20}P_{i+9(20-1)}}}\right)$$

$$=\underbrace{3a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\cdots+3a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}_{10\text{項}}=30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

亦即 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+9(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+9(k-1)}}}=30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 。

(v) 設正十二面體的稜長為 u 且其兩相鄰平面之銳夾角為 θ ，則由 a,b,c 之定義知

1 $b=\left(u\times\sin 72^\circ\right)\times\sin\theta$ ，

2 $c=\left(\dfrac{u}{2}\times\tan 72^\circ\right)\times\sin\theta$ ，

3 $b+c=a$ ，

由上述1與2知，$b:c=\sin 72^\circ:\dfrac{\tan 72^\circ}{2}=1:\dfrac{1}{2\cos 72^\circ}\Rightarrow b=2c\times\cos 72^\circ$ 代入3得

$$2c\times\cos 72^{\circ}+c=a\Rightarrow c=\frac{a}{1+2\cos 72^{\circ}}=\frac{a}{1+2\sin 18^{\circ}}$$，所以$b=\left(\frac{2\sin 18^{\circ}}{1+2\sin 18^{\circ}}\right)a$。

由此推知，

$$30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\left(\frac{2\sin 18^{\circ}}{1+2\sin 18^{\circ}}\right)a}+\frac{1}{\left(\frac{a}{1+2\sin 18^{\circ}}\right)}\right)$$

$$=30\left(1+\frac{1+2\sin 18^{\circ}}{2\sin 18^{\circ}}+\left(1+2\sin 18^{\circ}\right)\right)$$

$$=90+30\left(\frac{1}{2\sin 18^{\circ}}+2\sin 18^{\circ}\right)$$

$$=90+30\left(\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}}+2\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

$$=90+30\sqrt{5}$$

，故得證原命題成立。

Q.E.D.

試著將『**定理十五**』中的定點P移至正十二面體的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理十六:

同『**定理十五**』之前提，僅將『P點為正十二面體Γ內部一點』改為『點P為空間中異於正十二面體Γ之二十個頂點的一定點』，

試證:

$$\sum_{k=1}^{20}\sum_{i=1}^{9}\frac{\overrightarrow{PP_{i+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+9(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+9(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+9(k-1)}}}+\cdots+\frac{\overrightarrow{PP_{9+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{9+9(k-1)}}}\right)=30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=90+30\sqrt{5}$$。

證明:

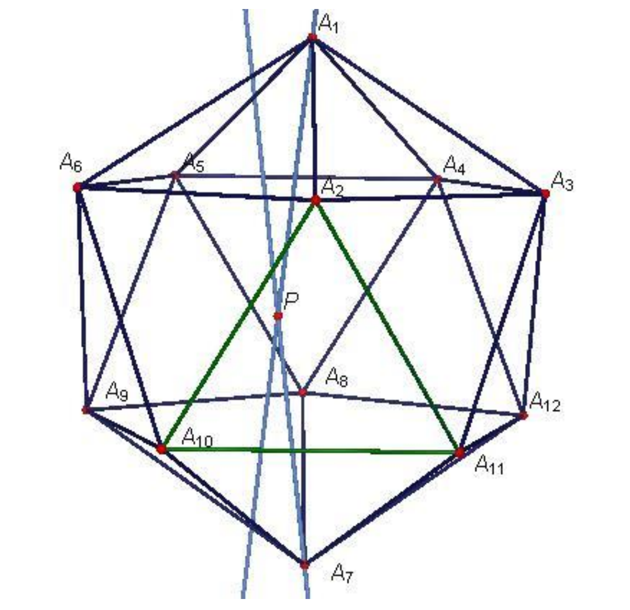
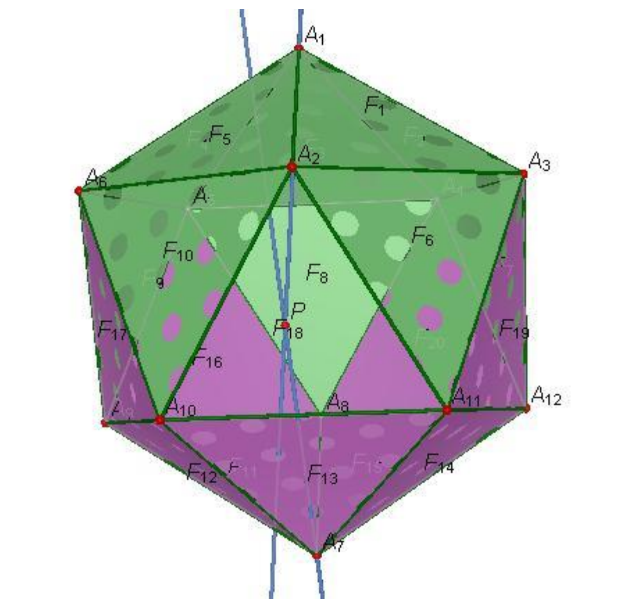
仿『定理十五』之證法，就P點所在之位置分類討論，再利用『定義二』與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。

Q.E.D.

完成『引理三』在『正十二面體』的推論之後，我們接著去考慮『引理三』在『正二十面體』的推論，於是有了如下的結果。

定理十七：

已知正二十面體$\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$，且$P$點為正二十面體$\Gamma$內部一點，如下圖 T17-1 與圖 T17-2 所示，

 圖 T17-1	 圖 T17-2

若平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{20}$ 分別表示包含正二十面體 Γ 之二十個面 $F_1,F_2,\cdots,F_{20}$ 的二十個平面，如圖 T17-2 所示，此二十個平面通過之頂點詳列如下，

$\pi_1=\pi_{1,2,3}$ 表示過 A_1 、 A_2 與 A_3 三點之平面，	$\pi_{11}=\pi_{7,8,9}$ 表示過 A_7 、 A_8 與 A_9 三點之平面，
$\pi_2=\pi_{1,3,4}$ 表通過 A_1 、 A_3 與 A_4 三點之平面，	$\pi_{12}=\pi_{7,9,10}$ 表示過 A_7 、 A_9 與 A_{10} 三點之平面，
$\pi_3=\pi_{1,4,5}$ 表示過 A_1 、 A_4 與 A_5 三點之平面，	$\pi_{13}=\pi_{7,10,11}$ 表示過 A_7 、 A_{10} 與 A_{11} 三點之平面，
$\pi_4=\pi_{1,5,6}$ 表示過 A_1 、 A_5 與 A_6 三點之平面，	$\pi_{14}=\pi_{7,11,12}$ 表示過 A_7 、 A_{11} 與 A_{12} 三點之平面，
$\pi_5=\pi_{1,6,2}$ 表示過 A_1 、 A_6 與 A_2 三點之平面，	$\pi_{15}=\pi_{7,12,8}$ 表示過 A_7 、 A_{12} 與 A_8 三點之平面，
$\pi_6=\pi_{2,3,11}$ 表示過 A_2 、 A_3 與 A_{11} 三點之平面，	$\pi_{16}=\pi_{8,9,5}$ 表示過 A_8 、 A_9 與 A_5 三點之平面，
$\pi_7=\pi_{3,4,12}$ 表示過 A_3 、 A_4 與 A_{12} 三點之平面，	$\pi_{17}=\pi_{9,10,6}$ 表示過 A_9 、 A_{10} 與 A_6 三點之平面，
$\pi_8=\pi_{4,5,8}$ 表示過 A_4 、 A_5 與 A_8 三點之平面，	$\pi_{18}=\pi_{10,11,2}$ 表示過 A_{10} 、 A_{11} 與 A_2 三點之平面，
$\pi_9=\pi_{5,6,9}$ 表示過 A_5 、 A_6 與 A_9 三點之平面，	$\pi_{19}=\pi_{11,12,3}$ 表示過 A_{11} 、 A_{12} 與 A_3 三點之平面，
$\pi_{10}=\pi_{6,2,10}$ 表示過 A_6 、 A_2 與 A_{10} 三點之平面，	$\pi_{20}=\pi_{12,8,4}$ 表示過 A_{12} 、 A_8 與 A_4 三點之平面，

且

頂點 A_1 到平面 π_{11} 的垂直距離為 a ，頂點 A_1 到平面 π_6 的垂直距離為 b ，頂點 A_1 到平面 π_{16} 的垂直距離為 c ，又

直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交平面 π_6 、 π_7 、 π_8 、 π_9 、 π_{10} 、 π_{11} 、 π_{12} 、 π_{13} 、 π_{14} 、 π_{15} 、 π_{16} 、 π_{17} 、 π_{18} 、 π_{19} 與 π_{20} 於 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 、 P_6 、 P_7 、 P_8 、 P_9 、 P_{10} 、 P_{11} 、 P_{12} 、 P_{13} 、 P_{14} 與 P_{15} 十五點，

直線 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交平面 π_2 、 π_4 、 π_{17} 、 π_{13} 、 π_{19} 、 π_8 、 π_{16} 、 π_{11} 、 π_{15} 、 π_{20} 、 π_3 、 π_9 、 π_{12} 、 π_{14} 與 π_7 於 P_{16} 、 P_{17} 、 P_{18} 、 P_{19} 、 P_{20} 、 P_{21} 、 P_{22} 、 P_{23} 、 P_{24} 、 P_{25} 、 P_{26} 、 P_{27} 、 P_{28} 、 P_{29} 與 P_{30} 十五點，

直線 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交平面 π_3 、 π_5 、 π_{18} 、 π_{14} 、 π_{20} 、 π_{12} 、 π_{11} 、 π_{16} 、 π_9 、 π_{17} 、 π_{13} 、 π_{15} 、 π_8 、 π_4 與 π_{10} 於 P_{31} 、 P_{32} 、 P_{33} 、 P_{34} 、 P_{35} 、 P_{36} 、 P_{37} 、 P_{38} 、 P_{39} 、 P_{40} 、 P_{41} 、 P_{42} 、 P_{43} 、 P_{44} 與 P_{45} 十五點，

直線 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交平面 π_1 、 π_{19} 、 π_{15} 、 π_{16} 、 π_4 、 π_{12} 、 π_{17} 、 π_{10} 、 π_{18} 、 π_{13} 、 π_{11} 、 π_9 、 π_5 、 π_6 與 π_{14} 於 P_{46} 、 P_{47} 、 P_{48} 、 P_{49} 、 P_{50} 、 P_{51} 、 P_{52} 、 P_{53} 、 P_{54} 、 P_{55} 、 P_{56} 、 P_{57} 、 P_{58} 、 P_{59} 與 P_{60} 十五點，

直線 $\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交平面 π_2 、 π_{20} 、 π_{11} 、 π_{17} 、 π_5 、 π_{13} 、 π_{18} 、 π_6 、 π_{19} 、 π_{14} 、 π_{12} 、 π_{10} 、 π_1 、 π_7 與

π_{15} 於 P_{61}、P_{62}、P_{63}、P_{64}、P_{65}、P_{66}、P_{67}、P_{68}、P_{69}、P_{70}、P_{71}、P_{72}、P_{73}、P_{74} 與 P_{75} 十五點，
直線 $\overleftrightarrow{A_6P}$ 分別交平面 π_3、π_{16}、π_{12}、π_{18}、π_1、π_{14}、π_{19}、π_7、π_{20}、π_{15}、π_{13}、π_6、π_2、π_8 與 π_{11} 於 P_{76}、P_{77}、P_{78}、P_{79}、P_{80}、P_{81}、P_{82}、P_{83}、P_{84}、P_{85}、P_{86}、P_{87}、P_{88}、P_{89} 與 P_{90} 十五點，
直線 $\overleftrightarrow{A_7P}$ 分別交平面 π_{16}、π_{17}、π_{18}、π_{19}、π_{20}、π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6、π_7、π_8、π_9 與 π_{10} 於 P_{91}、P_{92}、P_{93}、P_{94}、P_{95}、P_{96}、P_{97}、P_{98}、P_{99}、P_{100}、P_{101}、P_{102}、P_{103}、P_{104} 與 P_{105} 十五點，
直線 $\overleftrightarrow{A_8P}$ 分別交平面 π_{12}、π_{14}、π_7、π_3、π_9、π_{18}、π_6、π_1、π_5、π_{10}、π_{13}、π_{19}、π_2、π_4 與 π_{17} 於 P_{106}、P_{107}、P_{108}、P_{109}、P_{110}、P_{111}、P_{112}、P_{113}、P_{114}、P_{115}、P_{116}、P_{117}、P_{118}、P_{119} 與 P_{120} 十五點，
直線 $\overleftrightarrow{A_9P}$ 分別交平面 π_{13}、π_{15}、π_8、π_4、π_{10}、π_2、π_1、π_6、π_{19}、π_7、π_3、π_5、π_{18}、π_{14} 與 π_{20} 於 P_{121}、P_{122}、P_{123}、P_{124}、P_{125}、P_{126}、P_{127}、P_{128}、P_{129}、P_{130}、P_{131}、P_{132}、P_{133}、P_{134} 與 P_{135} 十五點，
直線 $\overleftrightarrow{A_{10}P}$ 分別交平面 π_{11}、π_9、π_5、π_6、π_{14}、π_2、π_7、π_{20}、π_8、π_3、π_1、π_{19}、π_{15}、π_{16} 與 π_4 於 P_{136}、P_{137}、P_{138}、P_{139}、P_{140}、P_{141}、P_{142}、P_{143}、P_{144}、P_{145}、P_{146}、P_{147}、P_{148}、P_{149} 與 P_{150} 十五點，
直線 $\overleftrightarrow{A_{11}P}$ 分別交平面 π_{12}、π_{10}、π_1、π_7、π_{15}、π_3、π_8、π_{16}、π_9、π_4、π_2、π_{20}、π_{11}、π_{17} 與 π_5 於 P_{151}、P_{152}、P_{153}、P_{154}、P_{155}、P_{156}、P_{157}、P_{158}、P_{159}、P_{160}、P_{161}、P_{162}、P_{163}、P_{164} 與 P_{165} 十五點，
直線 $\overleftrightarrow{A_{12}P}$ 分別交平面 π_{13}、π_6、π_2、π_8、π_{11}、π_4、π_9、π_{17}、π_{10}、π_5、π_3、π_{16}、π_{12}、π_{18} 與 π_1 於 P_{166}、P_{167}、P_{168}、P_{169}、P_{170}、P_{171}、P_{172}、P_{173}、P_{174}、P_{175}、P_{176}、P_{177}、P_{178}、P_{179} 與 P_{180} 十五點，
如圖 T17-3 與圖 T17-4 所示，

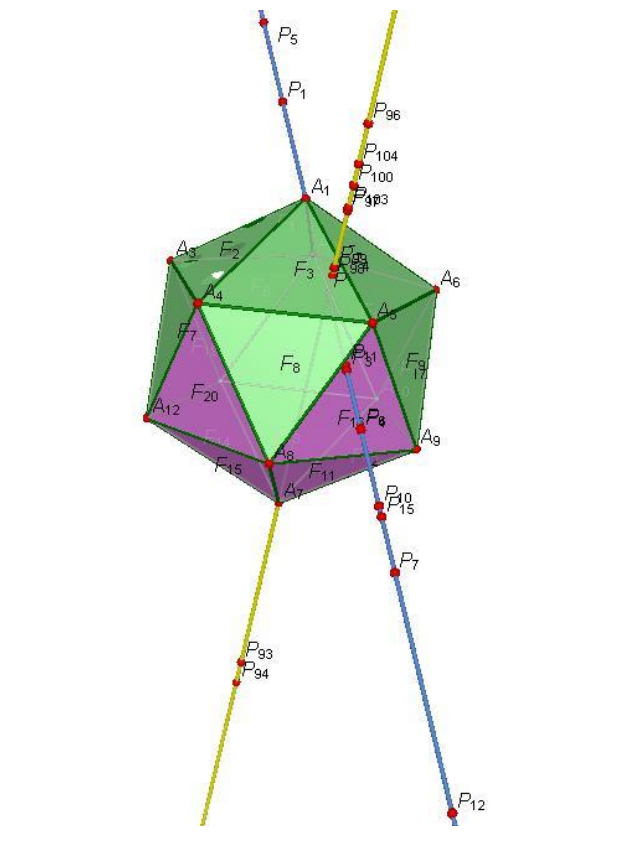


圖 T17-3

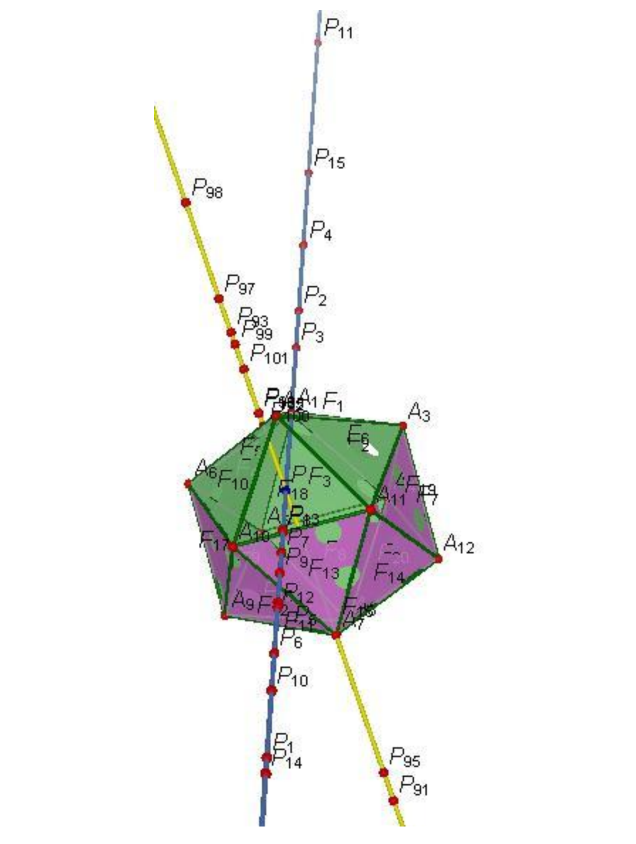


圖 T17-4(換個角度且縮小圖形)

試證:

$$\sum_{k=1}^{12}\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_{i+15(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+15(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{\overline{PP_{1+15(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+15(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{2+15(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+15(k-1)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{15+15(k-1)}}}{\overline{A_kP_{15+15(k-1)}}}\right)=30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=90+30\sqrt{5}\text{ 。}$$

證明:

(i) 過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_1}$、$\overleftrightarrow{PH_2}$、$\overleftrightarrow{PH_3}$、$\overleftrightarrow{PH_4}$、$\overleftrightarrow{PH_5}$、$\overleftrightarrow{PH_6}$、$\overleftrightarrow{PH_7}$、$\overleftrightarrow{PH_8}$、$\overleftrightarrow{PH_9}$、$\overleftrightarrow{PH_{10}}$、$\overleftrightarrow{PH_{11}}$、$\overleftrightarrow{PH_{12}}$、$\overleftrightarrow{PH_{13}}$、$\overleftrightarrow{PH_{14}}$、$\overleftrightarrow{PH_{15}}$、$\overleftrightarrow{PH_{16}}$、$\overleftrightarrow{PH_{17}}$、$\overleftrightarrow{PH_{18}}$、$\overleftrightarrow{PH_{19}}$、$\overleftrightarrow{PH_{20}}$ 分別垂直於平面 π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6、π_7、π_8、π_9、π_{10}、π_{11}、π_{12}、π_{13}、π_{14}、π_{15}、π_{16}、π_{17}、π_{18}、π_{19}、π_{20} 且分別交平面 π_1、π_2、π_3、π_4、π_5、π_6、π_7、π_8、π_9、π_{10}、π_{11}、π_{12}、π_{13}、π_{14}、π_{15}、π_{16}、π_{17}、π_{18}、π_{19}、π_{20} 於 H_1、H_2、H_3、H_4、H_5、H_6、H_7、H_8、H_9、H_{10}、H_{11}、H_{12}、H_{13}、H_{14}、H_{15}、H_{16}、H_{17}、H_{18}、H_{19}、H_{20} 等二十點。

(ii) 由三角形相似性質知，

$$\left(\frac{\overline{PP_1}}{A_1P_1}+\frac{\overline{PP_2}}{A_1P_2}+\frac{\overline{PP_3}}{A_1P_3}+\frac{\overline{PP_4}}{A_1P_4}+\frac{\overline{PP_5}}{A_1P_5}+\frac{\overline{PP_6}}{A_1P_6}+\frac{\overline{PP_7}}{A_1P_7}+\frac{\overline{PP_8}}{A_1P_8}+\frac{\overline{PP_9}}{A_1P_9}+\frac{\overline{PP_{10}}}{A_1P_{10}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{A_1P_{11}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{A_1P_{12}}+\frac{\overline{PP_{13}}}{A_1P_{13}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{A_1P_{14}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{A_1P_{15}}\right)+$$
$$\left(\frac{\overline{PP_{91}}}{A_7P_{91}}+\frac{\overline{PP_{92}}}{A_7P_{92}}+\frac{\overline{PP_{93}}}{A_7P_{93}}+\frac{\overline{PP_{94}}}{A_7P_{94}}+\frac{\overline{PP_{95}}}{A_7P_{95}}+\frac{\overline{PP_{96}}}{A_7P_{96}}+\frac{\overline{PP_{97}}}{A_7P_{97}}+\frac{\overline{PP_{98}}}{A_7P_{98}}+\frac{\overline{PP_{99}}}{A_7P_{99}}+\frac{\overline{PP_{100}}}{A_7P_{100}}+\frac{\overline{PP_{101}}}{A_7P_{101}}+\frac{\overline{PP_{102}}}{A_7P_{102}}+\frac{\overline{PP_{103}}}{A_7P_{103}}+\frac{\overline{PP_{104}}}{A_7P_{104}}+\frac{\overline{PP_{105}}}{A_7P_{105}}\right)$$
$$=\left(\frac{\overline{PH_6}}{b}+\frac{\overline{PH_7}}{b}+\frac{\overline{PH_8}}{b}+\frac{\overline{PH_9}}{b}+\frac{\overline{PH_{10}}}{b}+\frac{\overline{PH_{11}}}{a}+\frac{\overline{PH_{12}}}{a}+\frac{\overline{PH_{13}}}{a}+\frac{\overline{PH_{14}}}{a}+\frac{\overline{PH_{15}}}{a}+\frac{\overline{PH_{16}}}{c}+\frac{\overline{PH_{17}}}{c}+\frac{\overline{PH_{18}}}{c}+\frac{\overline{PH_{19}}}{c}+\frac{\overline{PH_{20}}}{c}\right)+$$
$$\left(\frac{\overline{PH_{16}}}{b}+\frac{\overline{PH_{17}}}{b}+\frac{\overline{PH_{18}}}{b}+\frac{\overline{PH_{19}}}{b}+\frac{\overline{PH_{20}}}{b}+\frac{\overline{PH_1}}{a}+\frac{\overline{PH_2}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}+\frac{\overline{PH_6}}{c}+\frac{\overline{PH_7}}{c}+\frac{\overline{PH_8}}{c}+\frac{\overline{PH_9}}{c}+\frac{\overline{PH_{10}}}{c}\right)$$
$$=\left(\frac{\overline{PH_6}}{b}+\frac{\overline{PH_{16}}}{b}\right)+\left(\frac{\overline{PH_7}}{b}+\frac{\overline{PH_{17}}}{b}\right)+\left(\frac{\overline{PH_8}}{b}+\frac{\overline{PH_{18}}}{b}\right)+\left(\frac{\overline{PH_9}}{b}+\frac{\overline{PH_{19}}}{b}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{10}}}{b}+\frac{\overline{PH_{20}}}{b}\right)+$$
$$\left(\frac{\overline{PH_{11}}}{a}+\frac{\overline{PH_1}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{12}}}{a}+\frac{\overline{PH_2}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{13}}}{a}+\frac{\overline{PH_3}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{14}}}{a}+\frac{\overline{PH_4}}{a}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{15}}}{a}+\frac{\overline{PH_5}}{a}\right)+$$
$$\left(\frac{\overline{PH_{16}}}{c}+\frac{\overline{PH_6}}{c}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{17}}}{c}+\frac{\overline{PH_7}}{c}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{18}}}{c}+\frac{\overline{PH_8}}{c}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{19}}}{c}+\frac{\overline{PH_9}}{c}\right)+\left(\frac{\overline{PH_{20}}}{c}+\frac{\overline{PH_{10}}}{c}\right)$$
$$=\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{a}+\frac{a}{a}+\frac{a}{a}+\frac{a}{a}+\frac{a}{a}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}$$
$$=\frac{5a}{b}+5+\frac{5a}{c}=5a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\text{。}$$

亦即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_i}}{A_1P_i}+\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_{i+15(7-1)}}}{A_7P_{i+15(7-1)}}=5a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$。

(iii) 對於 $k\in\{2,3,\cdots,6\}$，同理可證 $\displaystyle\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_{i+15(k-1)}}}{A_kP_{i+15(k-1)}}+\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_{i+15((k+6)-1)}}}{A_{k+6}P_{i+15((k+6)-1)}}=5a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 。

(vi) 將上述所得到的六個等式相加得

$$\left(\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_i}}{A_1P_i}+\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_{i+15(7-1)}}}{A_7P_{i+15(7-1)}}\right)+\left(\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_{i+15(2-1)}}}{A_2P_{i+15(2-1)}}+\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_{i+15(8-1)}}}{A_8P_{i+15(8-1)}}\right)+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_{i+15(6-1)}}}{A_6P_{i+15(6-1)}}+\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_{i+15(12-1)}}}{A_{12}P_{i+15(12-1)}}\right)$$
$$=\underbrace{5a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\cdots+5a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}_{6\text{項}}=30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

亦即 $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\sum_{i=1}^{15}\frac{\overline{PP_{i+15(k-1)}}}{A_kP_{i+15(k-1)}}=30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$。

(vii)

(1) 設正二十面體的稜長為u且其兩相鄰平面之鈍夾角為θ，則由二面角之定義與餘弦定理知

$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)^2-\left(2u\times\cos 36^\circ\right)^2}{2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)}=1-\frac{8}{3}\times\cos^2 36^\circ=1-\frac{8}{3}\times\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=-\frac{\sqrt{5}}{3}\text{，}$$

所以$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$，

又b表示頂點A_1到平面π_6的垂直距離，所以

$$b=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)\times\sin\left(180^\circ-\theta\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)\times\sin\theta=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}u\text{。}$$

(2)

①設正三角形$\Delta A_1A_2A_3$在正三角形$\Delta A_5A_{10}A_{12}$所在平面上的投影為正三角形$\Delta A_1'A_2'A_3'$，且正三角形$\Delta A_1A_2A_3$的重心G在正三角形$\Delta A_5A_{10}A_{12}$所在平面上的投影為正三角形$\Delta A_1'A_2'A_3'$之重心G'，如下圖 T17-5、圖 T17-6、圖 T17-7 與圖 T17-8 所示，

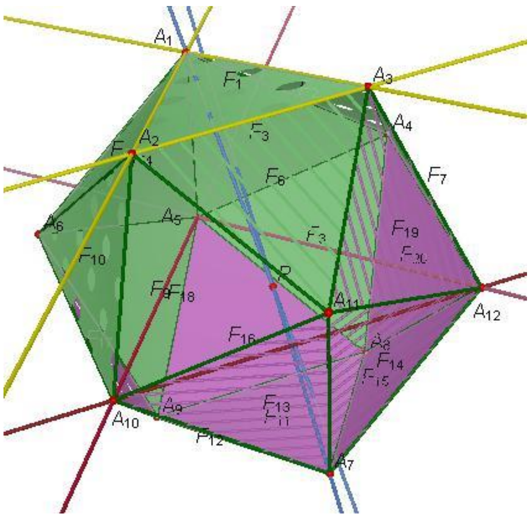


圖 T17-5

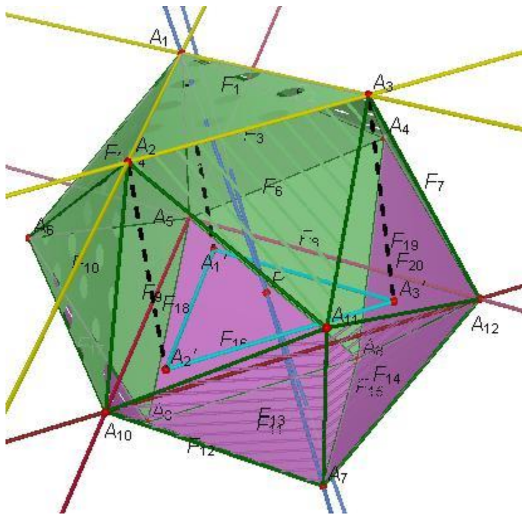


圖 T17-6

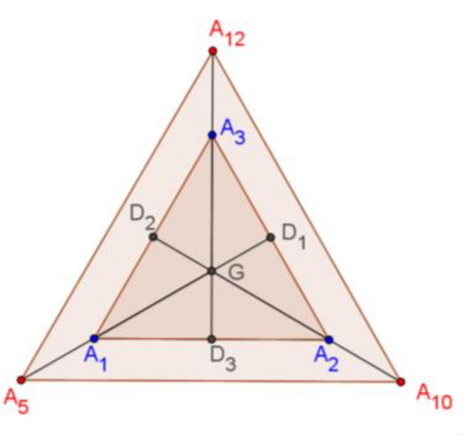


圖 T17-7

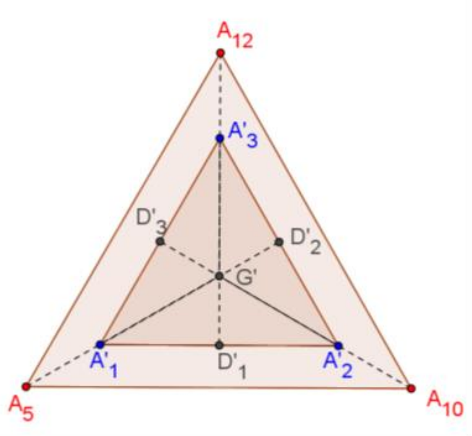


圖 T17-8

因為 G 與 G' 分別為正三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 與正三角形 $\Delta A_1'A_2'A_3'$ 的重心，所以

$\overline{A_1'G'}=\overline{A_1G}=\frac{\sqrt{3}}{3}u$ 。

②因為 $\overline{A_5A_{10}}$ 為邊長為 u 的正五邊形之對角線，所以 $\overline{A_5A_{10}}=2u\times\cos 36^\circ$，又 G' 亦為正三角形 $\Delta A_5A_{10}A_{12}$ 之重心，所以 $\overline{A_5G'}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(2u\cos 36^\circ\right)$ 。

③由上述①與②推知，

$$\overline{A_1'A_5}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(2u\cos 36^\circ\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}u=\frac{\sqrt{3}}{3}u\left(2\cos 36^\circ-1\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}u\left(2\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}-1\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}u\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \text{。}$$

④因為 $\Delta A_1A_5A_1'$ 為一直角三角形（其中 $\angle A_1A_1'A_5=90^\circ$），所以

$$\overline{A_1A_1'}=\sqrt{\overline{A_1A_5}^2-\overline{A_1'A_5}^2}=\sqrt{u^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}u\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right)^2}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}u \text{，}$$

又 c 表示頂點 A_1 到平面 π_{16} 的垂直距離，由正二十面體之對稱性知，c 亦表示頂點 A_5 到平面 π_1 的垂直距離，所以 $c=\overline{A_1A_1'}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}u$ 。

(3) 因為頂點 A_1 到平面 π_{11} 的垂直距離為 a，頂點 A_1 到平面 π_6 的垂直距離為 b，頂點 A_1 到平面 π_{16} 的垂直距離為 c，所以由正二十面體圖形得知 $a=b+c=\frac{\sqrt{3}}{3}u+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}u$ 。

(4) $30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=30+30a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=30+30a\left(\frac{c+b}{bc}\right)=30+30a\times\frac{a}{bc}=30+30\times\frac{a^2}{bc}$

$$=30+30\times\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}u+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}u\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{3}u\times\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}u}=30+30\times\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}}$$

$$=30+30\times\frac{\left(\frac{1}{3}+2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}+\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}}$$

$$=30+30\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{\frac{6}{3+\sqrt{5}}}+2+\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}\right)$$

$$=30+30\times\left(\sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{5}}}+2+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

$$=30+30\times\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}+2+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2}\right)$$

$$=30+30\times\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}+2+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2}\right)$$

$$=30+30\times\left(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right)$$

$=90+30\sqrt{5}$ ，故得證原命題成立。

Q.E.D.

試著將『定理十七』中的定點 P 移至正二十面體的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理十八:

同『定理十七』之前提，僅將『 P 點為正二十面體 Γ 內部一點』改為『點 P 為空間中異於正二十面體 Γ 之十二個頂點的一定點』，

試證:

$$\sum_{k=1}^{12}\sum_{i=1}^{15}\frac{\overrightarrow{PP_{i+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+15(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+15(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+15(k-1)}}}+\cdots+\frac{\overrightarrow{PP_{15+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{15+15(k-1)}}}\right)=30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=90+30\sqrt{5}$$ 。

證明:

仿『定理十七』之證法，就 P 點所在之位置分類討論，再利用『定義二』與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。

Q.E.D.

伍、 研究成果

1. 在平面上，已知 ΔABC 外部有一點 P ，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交三邊所在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_1 、P_2 與 P_3 三點，過 A 點作平行直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線 L_A 、過 B 點作平行直線 $\overleftrightarrow{CA}$ 的直線 L_B 及過 C 點作平行直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線 L_C ，使得 L_B 與 L_C 交於點 A' 、L_C 與 L_A 交於點 B' 及 L_A 與 L_B 交於點 C' ，則

   (1) 若 P 點落在 $\Delta A'BC$ 內部，如圖 1-1 所示，則 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=1$ 。

   (2) 若 P 點落在 $\Delta AB'C$ 內部，如圖 1-2 所示，則 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}=1$ 。

   (3) 若 P 點落在 $\Delta ABC'$ 內部，如圖 1-3 所示，則 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 。

   (4) 若 P 點不落在 $\Delta A'BC$ 、 $\Delta AB'C$ 與 $\Delta ABC'$ 內部，如圖 1-4、1-5 與 1-6 所示，則
   $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$ ，$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1$ 且 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}>1$ 。

2. 承『問題一』，在平面上，已知ΔABC外部有一點P，連接直線$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$與$\overleftrightarrow{CP}$分別交三邊所在直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{AB}$於P_1、P_2與P_3三點，過A點作平行直線$\overleftrightarrow{BC}$的直線L_A、過B點作平行直線$\overleftrightarrow{CA}$的直線L_B及過C點作平行直線$\overleftrightarrow{AB}$的直線L_C，使得L_B與L_C交於點A'、L_C與L_A交於點B'及L_A與L_B交於點C'，承『定義一』中各符號之定義，於此又定義

$$R:=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}},\ R_A:=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}},\ R_B:=\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}},\ R_C:=\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}},$$

則

(1) 當$P\in I_A$或$P\in-\overrightarrow{AB}$或$P\in-\overrightarrow{AC}$時，$R=R_B=R_C>1$且$R_A=R+2$。
(2) 當$P\in I_{A'}$時，$R=R_B=R_C>1$且$R_A=R-2$。
(3) 當$P\in I_B$或$P\in-\overrightarrow{BC}$或$P\in-\overrightarrow{BA}$時，$R=R_A=R_C>1$且$R_B=R+2$。
(4) 當$P\in I_{B'}$時，$R=R_A=R_C>1$且$R_B=R-2$。
(5) 當$P\in I_C$或$P\in-\overrightarrow{CA}$或$P\in-\overrightarrow{CB}$時，$R=R_A=R_B>1$且$R_C=R+2$。
(6) 當$P\in I_{C'}$時，$R=R_A=R_B>1$且$R_C=R-2$。
(7) 當$P\in I_{AB'}$時，$R=R_C>1$且$R_A-R_B=2$。
(8) 當$P\in I_{AC'}$時，$R=R_B>1$且$R_A-R_C=2$。
(9) 當$P\in I_{BC'}$時，$R=R_A>1$且$R_B-R_C=2$。
(10) 當$P\in I_{BA'}$時，$R=R_C>1$且$R_B-R_A=2$。
(11) 當$P\in I_{CA'}$時，$R=R_B>1$且$R_C-R_A=2$。
(12) 當$P\in I_{CB'}$時，$R=R_A>1$且$R_C-R_B=2$。

3. 給定平面上一個三角形ΔABC，且P為平面上異於ΔABC三頂點之一定點，又連接直線$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$與$\overleftrightarrow{CP}$分別交三邊所在直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{AB}$於P_1、P_2與P_3三點，則

$$\frac{\overrightharpoon{PP_1}}{\overrightharpoon{AP_1}}+\frac{\overrightharpoon{PP_2}}{\overrightharpoon{BP_2}}+\frac{\overrightharpoon{PP_3}}{\overrightharpoon{CP_3}}=1。$$

4. 已知$ABCD$為平面上一平行四邊形，點P為平面上不落在平行四邊形$ABCD$四邊所在直線的一定點，連接直線$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$與$\overleftrightarrow{DP}$，$\overleftrightarrow{AP}$分別交$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{CD}$於P_1與P_2兩點、$\overleftrightarrow{BP}$分別交$\overleftrightarrow{CD}$與$\overleftrightarrow{DA}$於P_3與P_4兩點、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\overleftrightarrow{DA}$與$\overleftrightarrow{AB}$於P_5與P_6兩點、$\overleftrightarrow{DP}$分別交$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{BC}$於P_7與P_8兩點，則

(1) $$\frac{\overrightharpoon{PP_1}}{\overrightharpoon{AP_1}}+\frac{\overrightharpoon{PP_3}}{\overrightharpoon{BP_3}}+\frac{\overrightharpoon{PP_5}}{\overrightharpoon{CP_5}}+\frac{\overrightharpoon{PP_7}}{\overrightharpoon{DP_7}}=\frac{\overrightharpoon{PP_2}}{\overrightharpoon{AP_2}}+\frac{\overrightharpoon{PP_4}}{\overrightharpoon{BP_4}}+\frac{\overrightharpoon{PP_6}}{\overrightharpoon{CP_6}}+\frac{\overrightharpoon{PP_8}}{\overrightharpoon{DP_8}}=2。$$

(2) $$\frac{\overrightharpoon{PP_1}}{\overrightharpoon{AP_1}}+\frac{\overrightharpoon{PP_2}}{\overrightharpoon{AP_2}}+\frac{\overrightharpoon{PP_3}}{\overrightharpoon{BP_3}}+\frac{\overrightharpoon{PP_4}}{\overrightharpoon{BP_4}}+\frac{\overrightharpoon{PP_5}}{\overrightharpoon{CP_5}}+\frac{\overrightharpoon{PP_6}}{\overrightharpoon{CP_6}}+\frac{\overrightharpoon{PP_7}}{\overrightharpoon{DP_7}}+\frac{\overrightharpoon{PP_8}}{\overrightharpoon{DP_8}}=4。$$

5. 已知$\Gamma:A_1A_2A_3A_4A_5$為平面上一正五邊形，點P為平面上異於正五邊形Γ五頂點之一定點，連接直線$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_5P}$，$\overleftrightarrow{A_1P}$分別交$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{A_4A_5}$於$P_1$、$P_2$與$P_3$三點，$\overleftrightarrow{A_2P}$分別交$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$於$P_4$、$P_5$與$P_6$三點，$\overleftrightarrow{A_3P}$分別交$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_1}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$於$P_7$、$P_8$與$P_9$三點，$\overleftrightarrow{A_4P}$分別交$\overleftrightarrow{A_5A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$於$P_{10}$、$P_{11}$與$P_{12}$三點，$\overleftrightarrow{A_5P}$分別交$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{A_3A_4}$於$P_{13}$、$P_{14}$與$P_{15}$三點，如圖 T3-1、圖 T3-2 與圖 T3-3 所示，則

(1) $\dfrac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$。

(2) $\dfrac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}=\sqrt{5}$。

(3) $\dfrac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$。

(4)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}+$$

$$\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=5+2\sqrt{5}$$

。

6. 已知$\Gamma:A_1A_2A_3A_4A_5A_6$為一正六邊形，點$P$為平面上異於正六邊形$\Gamma$六頂點之一定點，連接直線$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$與$\overleftrightarrow{A_6P}$，$\overleftrightarrow{A_1P}$分別交$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$與$\overleftrightarrow{A_5A_6}$於$P_1$、$P_2$、$P_3$與$P_4$四點，$\overleftrightarrow{A_2P}$分別交$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$與$\overleftrightarrow{A_6A_1}$於$P_5$、$P_6$、$P_7$與$P_8$四點，$\overleftrightarrow{A_3P}$分別交$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_1}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$於$P_9$、$P_{10}$、$P_{11}$與$P_{12}$四點，$\overleftrightarrow{A_4P}$分別交$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$於$P_{13}$、$P_{14}$、$P_{15}$與$P_{16}$四點，$\overleftrightarrow{A_5P}$分別交$\overleftrightarrow{A_6A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{A_3A_4}$於$P_{17}$、$P_{18}$、$P_{19}$與$P_{20}$四點，$\overleftrightarrow{A_6P}$分別交$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{A_4A_5}$於$P_{21}$、$P_{22}$、$P_{23}$與$P_{24}$四點如圖 7-1 所示，則

(1) $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{1+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_4P_{13}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{17}}}{\overrightarrow{A_5P_{17}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{21}}}{\overrightarrow{A_6P_{21}}}=6$。

(2) $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{2+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_3P_{10}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_4P_{14}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{18}}}{\overrightarrow{A_5P_{18}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{22}}}{\overrightarrow{A_6P_{22}}}=3$。

(3) $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{3+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_2P_7}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_3P_{11}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_4P_{15}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{19}}}{\overrightarrow{A_5P_{19}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{23}}}{\overrightarrow{A_6P_{23}}}=3$。

(4) $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{4+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_1P_4}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_2P_8}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_3P_{12}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{16}}}{\overrightarrow{A_4P_{16}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{20}}}{\overrightarrow{A_5P_{20}}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_{24}}}{\overrightarrow{A_6P_{24}}}=6$。

(5) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{i+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{1+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{2+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{3+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+4(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{6}\frac{\overrightarrow{PP_{4+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=18$。

7. 已知$\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$為一正八邊形，點 P 為平面上異於正八邊形Γ八頂點之一定點，連接直線$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$、$\overleftrightarrow{A_6P}$、$\overleftrightarrow{A_7P}$與$\overleftrightarrow{A_8P}$，又

$\overleftrightarrow{A_1P}$分別交$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$與$\overleftrightarrow{A_7A_8}$於$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$與$P_6$六點，

$\overleftrightarrow{A_2P}$分別交$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$與$\overleftrightarrow{A_8A_1}$於$P_7$、$P_8$、$P_9$、$P_{10}$、$P_{11}$與$P_{12}$六點，

$\overleftrightarrow{A_3P}$分別交$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$於$P_{13}$、$P_{14}$、$P_{15}$、$P_{16}$、$P_{17}$與$P_{18}$六點，

$\overleftrightarrow{A_4P}$分別交$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$於$P_{19}$、$P_{20}$、$P_{21}$、$P_{22}$、$P_{23}$與$P_{24}$六點，

$\overleftrightarrow{A_5P}$分別交$\overleftrightarrow{A_6A_7}$、$\overleftrightarrow{A_7A_8}$、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{A_3A_4}$於$P_{25}$、$P_{26}$、$P_{27}$、$P_{28}$、$P_{29}$與$P_{30}$六點，

$\overleftrightarrow{A_6P}$分別交$\overleftrightarrow{A_7A_8}$、$\overleftrightarrow{A_8A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與$\overleftrightarrow{A_4A_5}$於$P_{31}$、$P_{32}$、$P_{33}$、$P_{34}$、$P_{35}$與$P_{36}$六點，

$\overleftrightarrow{A_7P}$分別交$\overleftrightarrow{A_8A_1}$、$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$與$\overleftrightarrow{A_5A_6}$於$P_{37}$、$P_{38}$、$P_{39}$、$P_{40}$、$P_{41}$與$P_{42}$六點

$\overleftrightarrow{A_8P}$分別交$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$與$\overleftrightarrow{A_6A_7}$於$P_{43}$、$P_{44}$、$P_{45}$、$P_{46}$、$P_{47}$與$P_{48}$六點，

如圖 8-1 所示，則

(1) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{1+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_2P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_3P_{13}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{19}}}{\overrightarrow{A_4P_{19}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{25}}}{\overrightarrow{A_5P_{25}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{31}}}{\overrightarrow{A_6P_{31}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{37}}}{\overrightarrow{A_7P_{37}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{43}}}{\overrightarrow{A_8P_{43}}}=\left(8+4\sqrt{2}\right)$。

(2) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{2+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_2P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_3P_{14}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{20}}}{\overrightarrow{A_4P_{20}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{26}}}{\overrightarrow{A_5P_{26}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{32}}}{\overrightarrow{A_6P_{32}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{38}}}{\overrightarrow{A_7P_{38}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{44}}}{\overrightarrow{A_8P_{44}}}=4\sqrt{2}$。

(3) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{3+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_2P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_3P_{15}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{21}}}{\overrightarrow{A_4P_{21}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{27}}}{\overrightarrow{A_5P_{27}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{33}}}{\overrightarrow{A_6P_{33}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{39}}}{\overrightarrow{A_7P_{39}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{45}}}{\overrightarrow{A_8P_{45}}}=4$。

(4) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{4+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{4+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_1P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_2P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{16}}}{\overrightarrow{A_3P_{16}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{22}}}{\overrightarrow{A_4P_{22}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{28}}}{\overrightarrow{A_5P_{28}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{34}}}{\overrightarrow{A_6P_{34}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{40}}}{\overrightarrow{A_7P_{40}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{46}}}{\overrightarrow{A_8P_{46}}}=4$。

(5) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{5+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{5+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_1P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_2P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{17}}}{\overrightarrow{A_3P_{17}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{23}}}{\overrightarrow{A_4P_{23}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{29}}}{\overrightarrow{A_5P_{29}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{35}}}{\overrightarrow{A_6P_{35}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{41}}}{\overrightarrow{A_7P_{41}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{47}}}{\overrightarrow{A_8P_{47}}}=4\sqrt{2}$。

(6) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{6+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{6+6(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_1P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_2P_{12}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{18}}}{\overrightarrow{A_3P_{18}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{24}}}{\overrightarrow{A_4P_{24}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{30}}}{\overrightarrow{A_5P_{30}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{36}}}{\overrightarrow{A_6P_{36}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{42}}}{\overrightarrow{A_7P_{42}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{48}}}{\overrightarrow{A_8P_{48}}}=\left(8+4\sqrt{2}\right)$。

(7) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{8}\frac{\overrightarrow{PP_{i+6(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+6(k-1)}}}=24+16\sqrt{2}$。

8. 已知$\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n}$為一正$2n$邊形，點$P$為平面上異於正 2n 邊形$\Gamma$的 2n 個頂點之一定點，對於$i\in\{1,2,\cdots,2n\}$，連接直線$\overleftrightarrow{A_iP}$分別交$\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$、$\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$、$\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$、…、$\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$與$\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$於$P_{1+(i-1)(2n-2)}$、$P_{2+(i-1)(2n-2)}$、$P_{3+(i-1)(2n-2)}$、…、$P_{(2n-3)+(i-1)(2n-2)}$與$P_{i(2n-2)}$等$(2n-2)$個點，則

(1) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$。(令$N=2n$，則(1)中的左式=$\dfrac{\frac{N}{2}\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})}{\sin\frac{2\pi}{N}}$)

(2) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{2+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}$。(令$N=2n$，則(2)中的左式=$\dfrac{\frac{N}{2}\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

(3) ①當$i\in\{1,2,\cdots,\frac{2n-2}{2}\}$時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n}}$$
。(令$N=2n$，則①中的左式=$\dfrac{\frac{N}{2}\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

②當$i\in\{n,n+1,\cdots,2n-2\}$時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{(2n-2)-(i-1)}\sin\frac{k\pi}{n}}$$
。(令$N=2n$，則②中的左式=$\dfrac{\frac{N}{2}\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})}{\sum_{k=1}^{(N-2)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

(4) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n-2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}=\left(2n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{j}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$。

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}$。(令$N=2n$，則(5)中的右式=$\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})$)

9. 已知$\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n-1}$為平面上一正$2n-1$邊形，點$P$為平面上異於正$2n-1$邊形$\Gamma$之$2n-1$個頂點的一定點，對於$i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}$，連接直線$\overleftrightarrow{A_iP}$分別交$\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$、$\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$、$\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$、…、$\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$與$\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$於$P_{1+(i-1)(2n-3)}$、$P_{2+(i-1)(2n-3)}$、$P_{3+(i-1)(2n-3)}$、…、$P_{(2n-4)+(i-1)(2n-3)}$與$P_{i(2n-3)}$等$(2n-3)$個點，則

(1) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overrightarrow{PP_{1+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}}$。(令$N=2n-1$，則(1)中的左式=$\dfrac{\frac{N}{2}\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})}{\sin\frac{2\pi}{N}}$)

(2) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overrightarrow{PP_{2+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)})}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$。(令$N=2n-1$，則(2)中的左式=$\dfrac{\frac{N}{2}\tan(\frac{(N-2)\pi}{2N})}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

(3) ①當$i\in\{1,2,3,\cdots,n-1\}$時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$ 。(令 $N=2n-1$，則①中的左式$=\dfrac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{(N-2)\pi}{2N}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

②當 $i\in\{n,n+1,n+2,\cdots,2n-3\}$ 時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$ 。(令 $N=2n-1$，則②中的左式$=\dfrac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{(N-2)\pi}{2N}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{(N-2)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{N}}$)

(4) $$\sum_{i=1}^{2n-3}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)+\sum_{i=n}^{2n-3}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$

$$=\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}+2\times\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{\frac{(2n-1)}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$ 。

10. 假設 $\Gamma: A-BCD$ 為空間中一四面體，點 P 為空間中異於四面體 Γ 之四個頂點的一定點，又直線 $\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$、$\overleftrightarrow{DP}$ 分別與平面 E_{BCD}、E_{ACD}、E_{ABD}、E_{ABC} 交於 P_1、P_2、P_3、P_4 四點，如圖 III-1 與 III-2 所示，則 $\dfrac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{DP_4}}=1$ 。

11. 已知正立方體 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$，點 P 為空間中異於正立方體 Γ 之八個頂點的一定點，若 Γ 之稜長 $\overline{A_1A_2}=a$ 且

$\pi_1=\pi_{1265}$ 表示過 A_1、A_2、A_6 與 A_5 四點之平面，$\pi_2=\pi_{2376}$ 表通過 A_2、A_3、A_7 與 A_6 四點之平面，

$\pi_3=\pi_{3487}$ 表示過 A_3、A_4、A_8 與 A_7 四點之平面，$\pi_4=\pi_{1485}$ 表通過 A_1、A_4、A_8 與 A_5 四點之平面，

$\pi_5=\pi_{1234}$ 表示過 A_1、A_2、A_3 與 A_4 四點之平面，$\pi_6=\pi_{5678}$ 表通過 A_5、A_6、A_7 與 A_8 四點之平面，

又

直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交平面 π_2、π_3 與 π_6 於 P_1、P_2 與 P_3 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交平面 π_3、π_4 與 π_6 於 P_4、P_5 與 P_6 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交平面 π_4、π_1 與 π_6 於 P_7、P_8 與 P_9 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交平面 π_1、π_2 與 π_6 於 P_{10}、P_{11} 與 P_{12} 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交平面 π_2、π_3 與 π_5 於 P_{13}、P_{14} 與 P_{15} 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_6P}$ 分別交平面 π_3、π_4 與 π_5 於 P_{16}、P_{17} 與 P_{18} 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_7P}$ 分別交平面 π_4、π_1 與 π_5 於 P_{19}、P_{20} 與 P_{21} 三點，

直線 $\overleftrightarrow{A_8P}$ 分別交平面 π_1、π_2 與 π_5 於 P_{22}、P_{23} 與 P_{24} 三點，

如圖 T11-1 所示，

則 $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=12$ 。

12. 已知正八面體$\Gamma:A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，點$P$為空間中異於正八面體$\Gamma$之六個頂點的一定點，若頂點$A_i$到$\Gamma$不通過頂點$A_i$的四個平面的垂直距離為$a$，且
$\pi_1=\pi_{123}$表示過A_1、A_2與A_3三點之平面，$\pi_2=\pi_{134}$表通過A_1、A_3與A_4三點之平面，
$\pi_3=\pi_{145}$表示過A_1、A_4與A_5三點之平面，$\pi_4=\pi_{152}$表通過A_1、A_5與A_2三點之平面，
$\pi_5=\pi_{623}$表示過A_6、A_2與A_3三點之平面，$\pi_6=\pi_{634}$表通過A_6、A_3與A_4三點之平面，
$\pi_7=\pi_{645}$表通過A_6、A_4與A_5三點之平面，$\pi_8=\pi_{652}$表通過A_6、A_5與A_2三點之平面，
又
直線$\overleftrightarrow{A_1P}$分別交平面$\pi_6$、$\pi_5$、$\pi_8$與$\pi_7$於$P_1$、$P_2$、$P_3$與$P_4$四點，
直線$\overleftrightarrow{A_2P}$分別交平面$\pi_2$、$\pi_3$、$\pi_7$與$\pi_6$於$P_5$、$P_6$、$P_7$與$P_8$四點，
直線$\overleftrightarrow{A_3P}$分別交平面$\pi_3$、$\pi_4$、$\pi_8$與$\pi_7$於$P_9$、$P_{10}$、$P_{11}$與$P_{12}$四點，
直線$\overleftrightarrow{A_4P}$分別交平面$\pi_1$、$\pi_5$、$\pi_8$與$\pi_4$於$P_{13}$、$P_{14}$、$P_{15}$與$P_{16}$四點，
直線$\overleftrightarrow{A_5P}$分別交平面$\pi_2$、$\pi_6$、$\pi_5$與$\pi_1$於$P_{17}$、$P_{18}$、$P_{19}$與$P_{20}$四點，
直線$\overleftrightarrow{A_6P}$分別交平面$\pi_2$、$\pi_3$、$\pi_4$與$\pi_1$於$P_{21}$、$P_{22}$、$P_{23}$與$P_{24}$四點，
如圖 T13-1 與圖 T13-2 所示，

則 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{4}\frac{\overrightarrow{PP_{i+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+4(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+4(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{3+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+4(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{4+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=12$ 。

13. 已知正十二面體$\Gamma:A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}A_{15}A_{16}A_{17}A_{18}A_{19}A_{20}$，且點$P$為空間中異於正十二面體$\Gamma$之二十個頂點的一定點，如圖 T15-1 與圖 T15-2 所示，若平面$\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{12}$分別表示包含正十二面體$\Gamma$之十二個面$F_1,F_2,\cdots,F_{12}$的十二個平面，如圖 T15-2 所示，對於$k\in\{1,2,\cdots,20\}$，直線$\overleftrightarrow{A_kP}$分別交不通過點$A_k$的正十二面體$\Gamma$之九個平面於$P_{1+9(k-1)}$、$P_{2+9(k-1)}$、…、$P_{9+9(k-1)}$等九點，則

$$\sum_{k=1}^{20}\sum_{i=1}^{9}\frac{\overrightarrow{PP_{i+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+9(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+9(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+9(k-1)}}}+\cdots+\frac{\overrightarrow{PP_{9+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{9+9(k-1)}}}\right)=30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=90+30\sqrt{5}$$

，其中a,b,c之值的定義請參閱『定理十五』。

14. 已知正二十面體$\Gamma:A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$，且點$P$為空間中異於正二十面體$\Gamma$之十二個頂點的一定點，如圖 T17-1 與圖 T17-2 所示，若平面$\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{20}$分別表示包含正二十面體$\Gamma$之二十個面$F_1,F_2,\cdots,F_{20}$的二十個平面，如圖 T17-2 所示，此二十個平面通過之頂點詳見『定理十七』之前提敘述，對於$k\in\{1,2,\cdots,12\}$，直線$\overleftrightarrow{A_kP}$分別交不通過點$A_k$的正二十面體$\Gamma$之 15 個平面於$P_{1+15(k-1)}$、$P_{2+15(k-1)}$、…、$P_{15+15(k-1)}$等十五點，則

$$\sum_{k=1}^{12}\sum_{i=1}^{15}\frac{\overrightarrow{PP_{i+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+15(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+15(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+15(k-1)}}}+\cdots+\frac{\overrightarrow{PP_{15+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{15+15(k-1)}}}\right)=30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=90+30\sqrt{5}\text{ 。}$$

，其中 a,b,c 之值的定義請參閱『定理十七』。

陸、　討論

本篇文章主要從『引理一』出發，找到它**在平面上三角形與正多邊形及空間中四面體與正多面體的相應結果，且讓『引理一』中的點 P 可以從多邊形與多面體的內部移至外部**，並將**線段比值和**替換成**有向線段比值和**，很幸運地，我們得到一些美妙的結果，只美中不足的是對於任意的凸、凹多邊形與任意的凸、凹多面體仍然所知有限，我們曾試圖找出任意四邊形的有向線段比值和為定值的一般表示式，雖有一些小發現，但還不夠完整，盼望在不久的將來可以完成心中這份深切的期待。

柒、　結論與展望

在我們的論證過程中，首先將『引理一』三角形內的定點移至三角形外找出其定性幾何性質。接著讓定點在正多邊形的內部，也有類似的結論，我們主要從邊數較少的正多邊形開始著手，從正方形、正五邊形、正六邊形、正七邊形與正八邊形，一直到一般化的正 $2n$ 邊形與正 $2n-1$ 邊形，邊數不同，則數個線段比值相加後的定值也不同，所得到的結論大致上可以分成正偶數邊形與正奇數邊形這兩大類，『正偶數邊形所得到的數個線段比值相加後之定值』與『正奇數邊形所得到的數個線段比值相加後之定值』雖然不盡相同，但其證明過程有些想法是類似的。研究過程中，利用 GeoGebra 去畫出各個圖形檢驗結果的正確性，每當發現結果如自己的猜測一般，就感到相當開心，然而電腦程式試驗的結果只能是輔助，最後仍然要用紙筆驗證自己猜測的規律，這些我們都一一如實的辦到了。

我們亦嘗試了**『引理一』在任意四邊形中的推論，即讓點 P 落在任意四邊形內部，發現線段比值和將不再是定值**。另外，**若讓點 P 落在正多邊形的外部，則我們發現『問題四』、『問題六』、『問題七』、『問題八』、『定理六』與『定理八』中之線段比值和亦不再是定值**。

在進行『引理一』在三角形與正多邊形中的推論時，一開始我們只將點 P 限制在三角形或正多邊形的內部，至於點 P 在三角形或正多邊形的外部時，則因為原數個線段比值和不再是定值而沒有詳細討論，然而經過進一步的觀察與數學實驗，我們發現如果將其中幾個線段比值變號，則該數個線段比值加總起來的和仍為定值，在這樣的發現啟發下，**我們嘗試將所有的線段比值均改變成向量比值，結果我們驗證得數個有向線段比值和不管點 P 在三角形與正多邊形的內部或外部，其值均為定值，而且此定值與一開始只考慮線段比值和的結果是一樣的，因此我們可以將原發現的所有結果改寫成向量比值和的形式**。

延續在平面上的思維與方法，**我們又陸續完成『引理一』在空間中『任意四面體』與『正多面體』的推論，首先一樣先考慮點 P 在『任意四面體』與『正多面體』內部的情形，發現並驗證數個線段比值和為定值；接著我們試著將點 P 移至『任意四面體』與『正多面體』外**

部，並將原來的線段比值和替換成有向線段比值和，發現該比值和仍為定值。

由於任意四邊形不再保有『引理一』的定性性質，所以接下來我們希望可以找出任意多邊形內具有這定性性質的所有 P 點所形成的軌跡圖形，更甚者，我們希望在未來可以對任意的凸、凹多邊形找到相對應的結果；至於立體空間中，『引理一』在任意凸、凹多面體中的推廣應該會是更艱鉅的工程，盼望可以有達成的一天。

捌、 參考資料

[1] 初等幾何研究，左銓如‧季素月 編著，九章出版社，1998。

[2] 平面幾何新路解題研究，張景中 著，九章出版社，2002。

[3] 中華民國第五十三屆中小學科學展覽優勝作品專輯高中組，國立台灣科學教育館彙編，作品名稱:『孟氏定理與西瓦定理在多邊形中的推廣』,作者:許喬婷,指導老師:鄭仕豐。

[4] 2014 年臺灣國際科學展覽優勝作品專輯高中組，國立台灣科學教育館彙編，作品名稱:『孟氏定理與西瓦定理在多邊形與多面體中的推廣』,作者:許喬婷,指導老師:鄭仕豐。

【評語】010008

本件作品四平八穩，作者充分利用數學軟體 Geogebra，驗證有向線段和的定性性質，每個結果都附有嚴格的數學證明，文章流暢細緻，容易閱讀。

作者列出了一大串結果，大同小異。數學除了精確外，它也是高度精煉、抽象化與最大化的學問。在定性的這個問題上作者已經走得很遠，可是對於四邊形以上的問題，正多邊形是很大的限制。在最簡單的四邊形問題上，有向線段和會落在哪一個範圍內？滿足線段和是某個常數的 P 點，它的軌跡為何？