

# 2014 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160025  
參展科別 物理與天文學  
作品名稱 相對論性高能電漿孤立子  
得獎獎項 大會獎：四等獎

就讀學校 臺北市立建國高級中學  
指導教師 黃瀟瑩、闕志鴻  
作者姓名 陳毅、羅鈺凱

關鍵字 Plasma、Soliton、Numerical simulations

## 作者簡介



Our team consists of two students, Yi Chen and Yu Kai Lo. Both are from Taiwan. They are Taipei Municipal Jianguo High School students. They have been partners for about 1 year.

Yi Chen lives in Taipei. He has been interested in science since he was a kid. His elementary school teacher described him as a lover of nature. He enjoyed every field trip and was eager to learn everything he found on the trip. His amazing curiosity led him to a lot of pleasant discoveries and huge happiness. He wants to devote himself to the study of science in the future.

Yu Kai Lo has a brilliant mind and shows great talent in science. He is especially interested in physics. Also, Lo takes active part in extracurricular activities. For example, he was the director of drama competition and the designer of classroom decoration competition.

## 摘要

本計畫採用數值模擬進行研究，撰寫一維電漿的物理程式來瞭解電漿孤立子在不均勻背景中的演化。

我們於去年的計畫中，驗證了這個模型的準確性，這次進一步地在系統中，加入相對論的計算，用以觀察孤立子在相對論作用下的傳播及演化。我們可以觀察到不同參數的初始脈衝會影響到所生成的孤立子形狀，並藉由給予不均勻的背景環境，可以發現孤立子演化的準則。

與期刊上發表的論文進行比較時，發現數值吻合，誤差約為 1%。因此我們反向藉由論文中的運算式，解出一個孤立子，將其放入系統中，希望藉由這個方式更順利地了解孤立子在空間中的行為模式。

未來，我們將利用這些結果來制定多維的電漿體數值模擬，其可以解釋現實宇宙中，蟹狀星雲能源運輸的問題。

## **Abstract**

This project utilized numerical simulation models of one-dimensional plasma to understand the evaluation of plasma solitons under non-uniformed background conditions.

In last year's project, we confirmed the accuracy of this model. This time we added in the theory of relativistic to further observe the propagation and evaluation of solitons. We found that different initial pulses will influence the shape of the resulting solitons. And by providing non-uniformed background conditions, we could find the general principle that solitons follow.

Last, by comparing to the paper published on journals, the result from our simulation show high accuracy with only about 1% differential. Therefore, we directly calculated a soliton from the formula in that paper and put it in our system to gain more understanding of the evaluation and movement of solitons.

In the future, we will use these results to create a multi-dimensional plasma numerical simulation model, which will be able to explain the energy transmit in the crab nebulous.

## 壹、前言

In this project, we want to solve an astrophysical problem about an intense energy carrier in Crab Nebula that can transport energy afar from near the central pulsar to its boundary, about 10 light years away. The energy carrier cannot dissipate energy during the transportation until it reaches the target region. The mechanism should be like surface waves in the sea. When they get to the sea shore, the energy is rapidly converted to the random motion of water. This wave break mechanism can generally occur in nonlinear waves and not necessarily only in surface waves. Since in Crab Nebula electrons are heated to a relativistic temperature, the most reasonable guess for such nonlinear wave should be that involves in proton oscillations at relativistic speeds. Once the characteristics of the waves are identified, we test ion waves with and without magnetic field. We find these two kinds of waves have different evolution. At large amplitude, the one without magnetic field develops into a collisionless shock and damps out quickly. This isn't desirable. Another with magnetic field can become solitons retaining its coherency and are good energy carriers.

But now, we want to find a way to make it break at the desired location and let the electrons be heated by acquiring the released energy, like water gets the random motion. As the scale of relativistic soliton stored energy is the protons rest mass energy, the released energy will also be on the same scale. Wave break may be achieved by changing the environment, in which soliton propagates, in such a way that the Mach number increases. A layman's explanation for the surface wave break is that the small-amplitude wave speed becomes smaller near the shore than in the deep water. However, nonlinear wave (soliton) speed may also alter in a changing environment. How the Mach number should increase with changing environment is therefore a

question with no definite answer. This motivated us to conduct numerical simulations to find out the answer in a quantitative way.

Limited by the degrees of sophistication involved in this problem, we confine this project to a 1-dimensional problem in the relativistic situation to gain an idea for a more complicated plasma system.

## 貳、 研究方法及過程

### 一、 構築一維模擬系統：

我們的系統是一個分布在  $x$  方向的一維電荷陣列，因為這是一個電漿系統，所以系統整體而言是電中性，其中正電荷與負電荷相互排列，而每個電荷並不是一個單一的點電荷，而是在空間中具有一個常態分佈的 charge package。(Fig. 2-1)

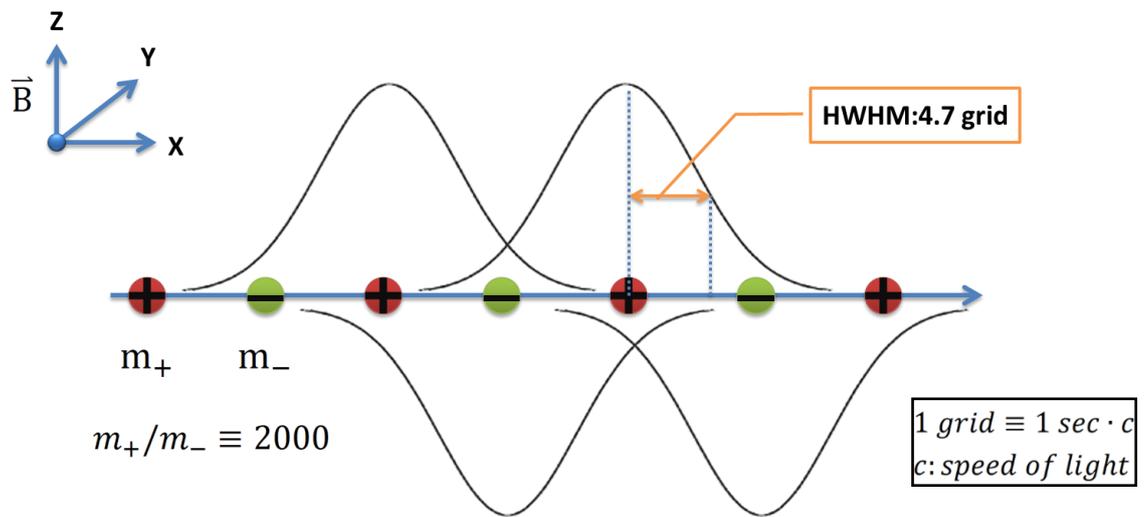


FIGURE 2-1 Charge array of the system

而系統中各處的密度則可依靠下面的式子進行計算

$$\rho(x) = \sum_i e \frac{-(x-x_i)^2}{2\sigma^2}$$

我們的模擬系統中，擁有週期性邊界條件的設定，意即當粒子超出系統邊界，將會從另一端的邊界穿越而出，因此整個系統可以說是不受外力影響，能保持著良好的守恆性。倘若模擬系統設定為受到磁場影響的電漿體，磁場將只會存在於  $z$  方向上。

## 二、方程式概述：

因採用數值模擬，必須將程式中所需使用到的方程式一一列出，並改為差分形式，而模擬結果也需與理論方程進行比較及驗證。

$$1. \text{位置：} \overline{x^{l+1}} = \overline{x^l} + \Delta t \times \overline{v_x^{l+0.5}} \quad [2-1]$$

$$2. \text{速度：} \overline{v_x^{l+0.5}} = \overline{v_x^{l-0.5}} + \frac{\Delta t \cdot q}{m} (\overline{E_x^l} + \overline{v_y^l} \times \overline{B_z^l})$$

$$\overline{v_y^{l+0.5}} = \overline{v_y^{l-0.5}} + \frac{\Delta t \cdot q}{m} (\overline{E_y^l} - \overline{v_x^l} \times \overline{B_z^l}) \quad [2-2]$$

3. 場：包含  $\overline{E_x}$ 、 $\overline{E_y}$  以及  $\overline{B_z}$ 。

(1)  $\overline{E_x}$ ：

根據一維的 Maxwell's equation，我們可以得到密度與電場的間接關係：

$$\nabla \cdot \overline{E_x^l} = 4\pi\rho^l$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{E_x^l}(x) = 4\pi\rho^l(x) \quad [2-3]$$

再將 Eq. [2-3] 經由快速傅立葉轉換(參見「附錄一」)，得到在 Fourier space

下  $\overline{E_x^l}(k)$  與  $\rho^l(k)$  的關係

$$ik\overline{E_x^l}(k) = 4\pi\rho^l(k)$$

$$\overline{E_x^l}(k) = \frac{4\pi\rho^l(k)}{ik} \quad [2-4]$$

最後由快速傅立葉反轉換回 Real space，我們可以得到  $\overline{E_x^l}$ 。

$$\vec{E}_x^i(x) = \int \frac{4\pi\rho^i(k)}{ik} dk \quad [2-5]$$

(2)  $\vec{E}_y$  &  $\vec{B}_z$  :

由馬克士威方程可以得到電場與磁場的相互作用關係

$$-c \nabla \times \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad [2-6]$$

$$c \nabla \times \vec{B} - J = \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad [2-7]$$

經過差分演算以及推導，可以整理出

$$E_y^{i+1} = E_y^i - c\Delta t \nabla B_z^{i+0.5} - \Delta t J_y^{i+0.5} \quad [2-8]$$

$$B_z^{i+0.5} = B_z^{i-0.5} - c\Delta t \nabla E_y^i \quad [2-9]$$

我們可以使用 Eq. [2-8]~[2-9]輕易地算出下個時間點的 y 方向電場以及 z 方向磁場。

### 三、相關理論以及研究：

直到最近，數值模擬才慢慢發展為一種常規的科學方法。而在我們的研究中，其可說是核心所在。由 Charles K. Birdsall 和 A. Bruce Langdon 所著的 *Plasma Physics via Computer Simulation*，通過計算機模擬，在電漿模擬上提出了許多有用的方法。這本書為我們提供了一個不錯的方向。但它於 1985 年出版時，當時電腦科技並不發達，所以我們必須自己設計一些模擬方法，提高在程式中使用的技術與效率。

在完成模擬程式的代碼之後，我們必須先驗證代碼的正確性，而首先模擬了電漿中的五種振盪。由 Nicholas A. Krall 與 Alvin W. Trivelpiece 所著的 *Principles of Plasma Physics* 以及 Chen, Francis F. 所著的 *Introduction to Plasma Physics and*

*Controlled Fusion* 給了我們許多電漿物理的基本原理與處理方式，使得我們能用各種很有效率的方式，比對電漿震盪在我們模型中的正確性。

當驗證完程式的準確性，我們便有信心可以利用這個程式來進行各種模擬，於是我們進入非線性效應以及孤立子的領域。

我們在一個非磁化電漿體中，製造了一個密度脈衝用以產生 Ion acoustic soliton，但在大多數情況下，這個脈衝總是會轉變為 Shock-lets。只有在給予較小幅度的脈衝下，才可以產生小幅度的孤立子。

另一方面，當在一個磁化電漿體中，磁場強大到可以讓電子迴旋頻率遠大於電子自身的電漿震盪頻率，我們就能夠成功地產生孤立子，其行為會隨著脈衝與系統條件的改變而有所變化。有時候，當脈衝過強，脈衝會產生出多個不同能量與速度的孤立子。

為了要研究孤立子的馬赫數是如何隨環境變化，我們去找了一些參考資料：

在某些情況下，孤立子在進入不適合的環境時，它便有機會破裂，並且釋放能量。我們參閱了由 T. Chiueh 所撰寫的 *Charged magnetosonic soliton propagating in gentle density gradients and wave breaking*。這篇論文提到：為了使孤立子的寬度變窄、震幅變高，來導致破裂，其所傳播的背景密度必須有一定幅度上的增加。我們想研究此理論的正確性——這將影響到我們所進行的下一個研究方向：相對論性孤立子。為此，我們在模擬系統中，創建一個密度隨空間改變而上升的坡道，使孤立子爬上斜坡。而孤立子也確實在爬升過程中變得越來越尖銳，其震幅的增長與行為在定性上與論文相符。

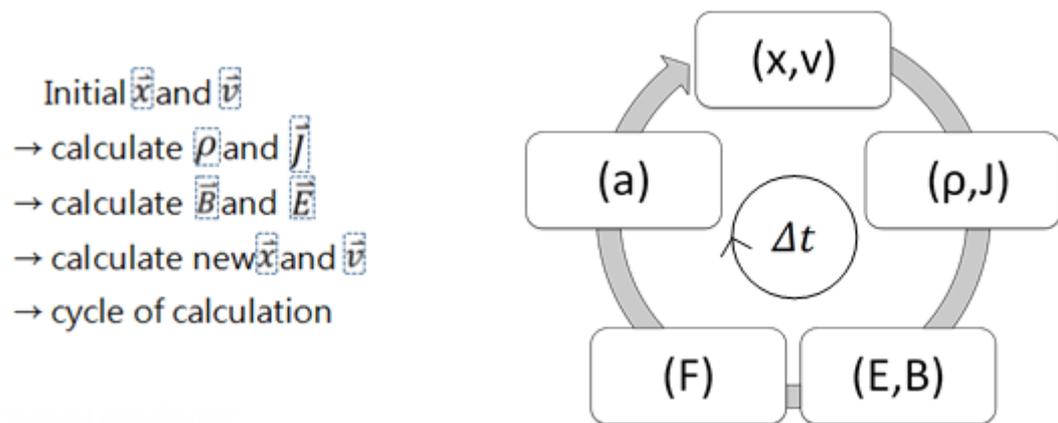
最後，我們將模擬程式修正為符合相對論效應，並且參照了 T. Chiueh 所發表的 *Relativistic Solitons and Shocks in Magnetized  $e^-e^+p$  Fluids* 來比對孤立子的各種行為，並且依照這篇論文理論，成功在系統初始化時，直接給出一個健全

的孤立子，這將有效幫助我們在往後的模擬中，能更直接且快速依照特定參數進行模擬。

在未來，我們將利用這些結果來制定多維的電漿體數值模擬，其將更接近到現實宇宙中蟹狀星雲能源運輸的問題。

#### 四、程式設計：

(一) Procedure of our numerical calculation:



(二) Physical conditions :

1. Number of cycles:  $2 \times 10^5$  cycles

2. Time step of each running:  $0.01 \text{ sec} < \Delta t < 0.1 \text{ sec}$

3. Time scale of system:  $2 \times 10^3 \text{ sec} < \Delta t < 2 \times 10^5 \text{ sec}$

## 參、 研究結果與討論

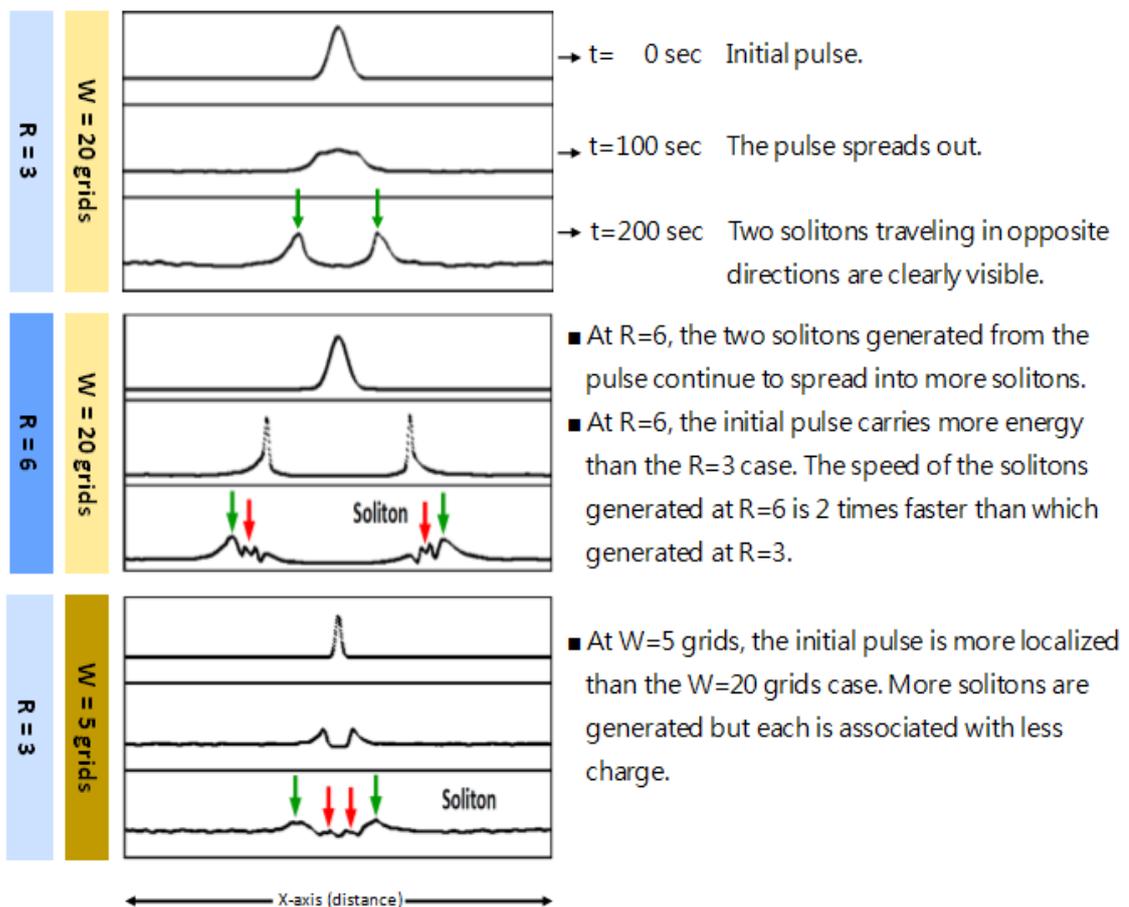
進行非線性效應以及孤立子的模擬研究時，我們會給予系統一個脈衝，這個脈衝在空間中具有一個比背景密度要高的 Gaussian distribution 密度分布。在模擬中，調整這個脈衝的參數，用以觀察不同的演化。

### 一、 Electrostatic solitons：

在這項模擬中，我們主要探討的環境是沒有任何背景磁場，觀察在僅有靜電力的狀況下，孤立子是如何產生的以及不同參數對其的影響。

$R \equiv$  Relative height of the pulse to the background.

$W \equiv$  HWHM of the initial pulse.



若將初始脈衝的參數調整得非常極端，原先要成為孤立子的脈衝因為受不了太高的電位能，會在形成孤立子之前，便破裂成為 Shock wave，並且將其所具有的能量隨著空間中的移動，分散到系統的各個角落。

從觀察數據中發現，電漿中產生的 Shock wave 似乎與流體力學中的 Shock wave 有著相似的現象。

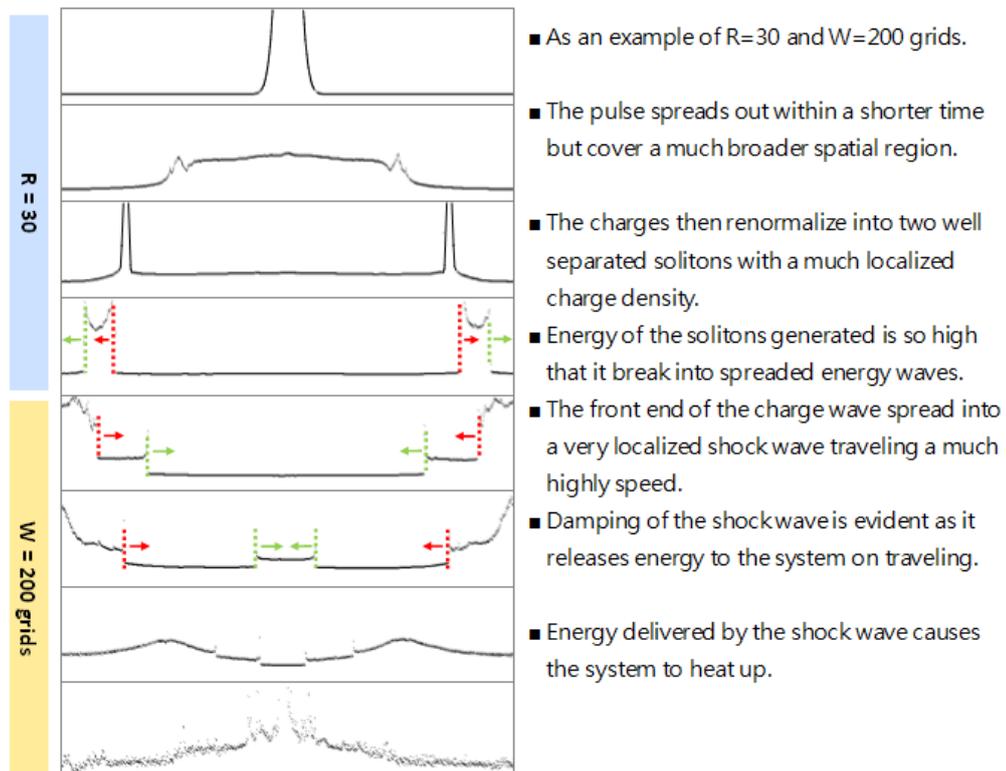
由流體不連續密度界面的質量、動量、能量守恆(Eq. [3-1]~[3-3])，有 Shock Wave 解，其中  $Q$  為游離能，在我們的系統中為 0，因此不需考慮。

$$\rho_1 v_1 = \rho_0 v_0 \equiv I \quad [3-1]$$

$$P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_0 + \rho_0 v_0^2 \quad [3-2]$$

$$Q + \frac{v_1^2}{2} + U_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{v_0^2}{2} + U_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \quad [3-3]$$

將圖中的不連續介面(紅線、綠線)進行分析，對照上述三個守恆方程式，誤差率小於 1%。



## 二、Magneto-solitons：

與 Electrostatic solitons 不同的地方在於，Magneto-solitons 這個模擬中，擁有背景磁場的存在，與之前一樣，我們給予系統一個脈衝，讓它產生孤立子。

當孤立子生成後，與 Electrostatic solitons 進行比較，發現背景擾動消失了(Fig. 3-2-1)。

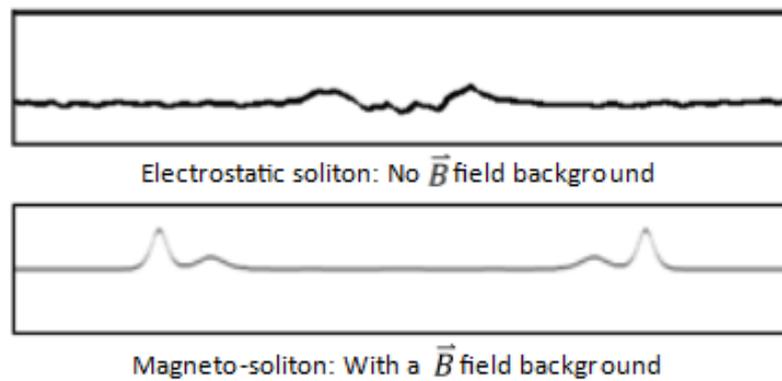


FIGURE 3-2-1

而且產生出來的孤立子形狀更為對稱及完整。

其中，我們發現如果初始脈衝能量過大，產生出來的孤立子會有高度以及速度的差別，仔細分析，會發現孤立子的速度與高度成正相關，而且每個孤立子的速度會發展成穩定的定值(Fig. 3-2-2)。

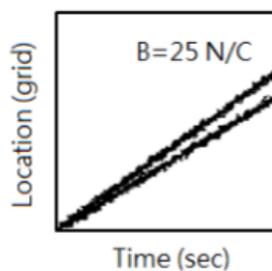


FIGURE 3-2-2 x-t 圖

接著我們改變磁場這個參數，觀察產生出來的孤立子是如何演化。(Fig. 3-2-3)

- The solitons generated are in fact propagate at a constant speed.
- A background magnetic field reduces the numbers of soliton generated.

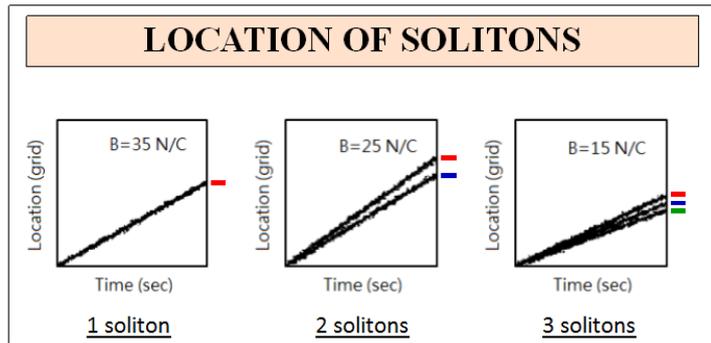
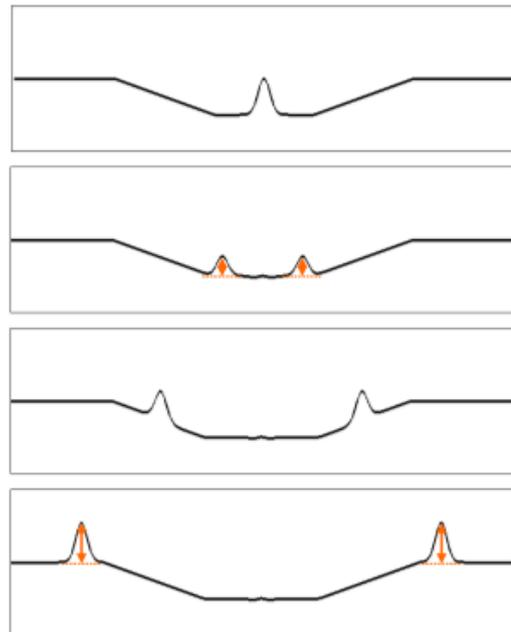


FIGURE 3-2-3

接著，我們引進了另一個試驗：待孤立子行進一段時間後，使其進入一段背景密度緩慢增加的區域，模擬其在宇宙中行進，經過不均勻背景所產生的變化。

- In the case of, there are two ramps at the edge of the system.
- The solitons can still climb up to the ramps on the edges.
- Upon reaching climb the ramps, their peaks will renormalize into a more well-defined and localized solitons.
- The amplitude of renormalize solitons can be twice as height as the original one.
- Breaking of solitons can occur if the background magnetic field is high enough.



### 三、Relativistic solitons：

當系統能量過大時，粒子的速度會非常接近光速，因此我們認為有必要將模擬系統加入相對論的應用。根據相對論修正，我們的運動方程式變為

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{v}/\gamma$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \frac{\vec{B}}{\gamma c})$$

其中，為了計算上不要產生太大的誤差，所以我們的 $\gamma$ 定義為： $\gamma = \sqrt{1 + \vec{v}^2/c^2}$ 。而 $\vec{v}$ 不是一般正常的速度，它是一般速度乘上一個勞倫茲因子 $\gamma$ 。電流的計算方程式修正為

$$\vec{j}(x) = q\left(\frac{n_i \vec{v}_i}{\gamma_i} - \frac{n_e \vec{v}_e}{\gamma_e}\right)$$

使用這些修正出來的方程式，可以保證孤立子行進速度絕對不會超過光速，並且這些孤立子周圍的物理參數與理論上相比較只有 1% 的誤差。接著我們可以根據 *Relativistic Solitons and Shocks in Magnetized  $e^-e^+p^+$  Fluids* 中的理論，了解在相對論的作用下，產生的 soliton 應該要符合 Eq. [3-3-1]。

$$e_x^2 = \frac{1}{\sigma(1+\sigma)} \left[ \frac{d\Phi}{d\xi} \right]^2 = -Q(\Phi) \equiv b^2 - \theta^2 \quad [3-3-1]$$

$$\text{其中 } e_x \equiv \frac{E_x}{B_1}, \quad b \equiv \frac{B_z}{B_1} = \frac{\sigma}{2(1+\sigma)} \left[ \left( \frac{1+\sigma}{\sigma} \right)^2 + \theta^2 - \frac{1/\gamma_1^2 + \Phi_0 - \Phi}{\sigma^2} \right]$$

$$\theta^2 \equiv 1 + \frac{2\beta_1[\beta_1 - (\Phi_0 - \Phi)^{1/2}]}{\sigma}, \quad \sigma \equiv \frac{B_1^2}{4\pi f M_p N_1 c^2 \gamma_1^2} \equiv \frac{U_A^2}{c^2} \equiv \frac{\gamma_1^2 \beta_1^2}{M_A^2}$$

$$\Phi_0 \equiv \beta_1^2, \quad \Phi \equiv \frac{2(1+\sigma)\beta_1\phi}{r_c B_1}, \quad \xi \equiv \frac{2x(1+\sigma)^{1/2}\beta_1}{r_c \sqrt{\sigma}}, \quad \beta_1 \equiv \frac{E_1}{B_1}$$

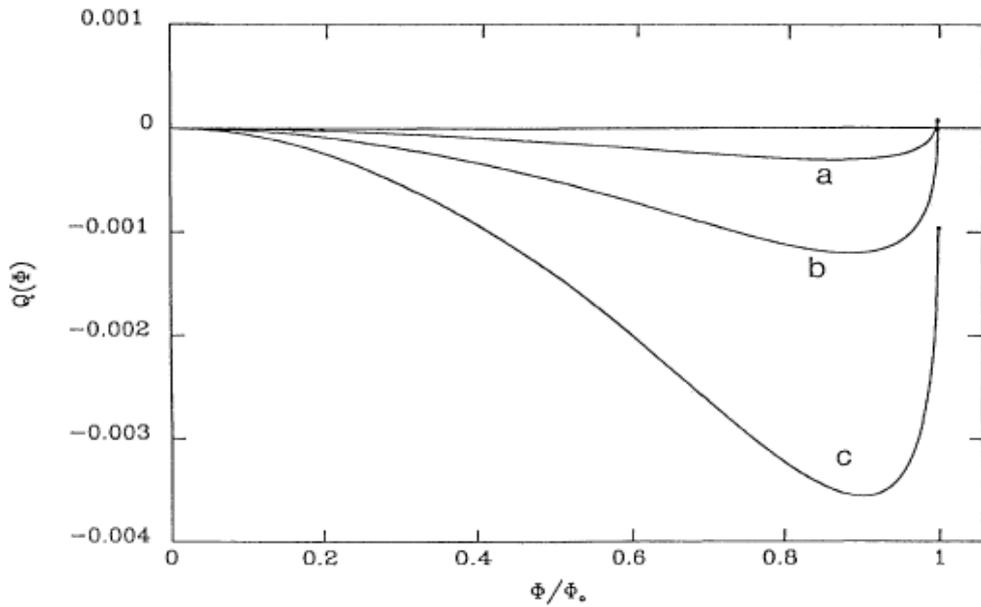
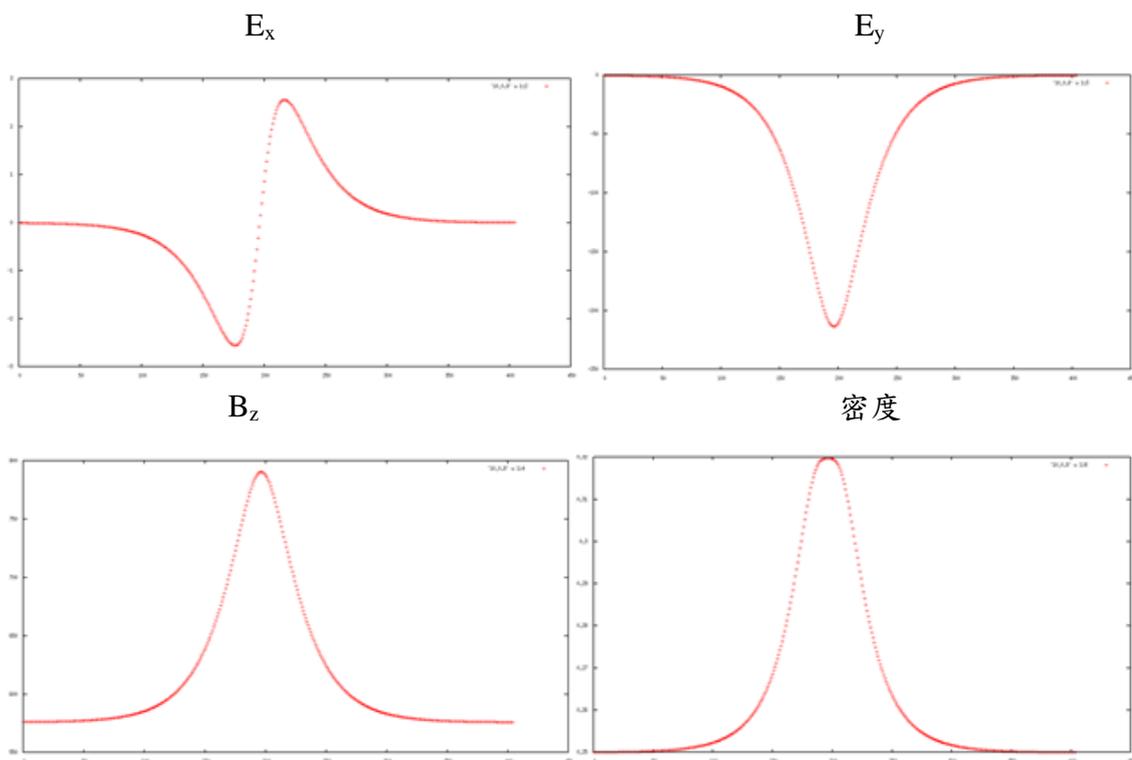


FIGURE 3-3-1

The Sagdeev potential of Eq. [3-3-1] for  $\gamma_1 = 10$  and  $M_A/M_{AC} = 0.8$  (curve a), 1(b), and 1.2(c)

意即根據理論，只要 $M_A/M_{AC}$ 小於1，我們就可以使用 $\gamma_1$ 和 $M_A$ 算出一顆可以傳播的孤立子，我們解出 Eq. [3-3-1]的關係式，使用程式算出初始條件，下列是 $\gamma_1 = 10$ 、 $M_A = 0.8$ 時，我們所算出來的結果。



由公式推導出來的這些數據可以完整準確地跑出一個孤立子，這可以很良好的幫助我們對未來要進行的模擬，因為我們不用再使用嘗試法來跑出我們所需要的孤立子

$$\begin{aligned} \{fM_p\gamma_p + m_e[(1-f)\gamma_+ + \gamma_-]\}N_1U_1c^2 + c\frac{E_1B_z}{4\pi} &= T^{01}, \\ \{fM_pU_p + m_e[(1-f)U_+ + U_-]\}N_1U_1 + \frac{1}{8\pi}(B_z^2 - E_x^2) &= T^{11}, \\ \{fM_pV_p + m_e[(1-f)V_+ + V_-]\}N_1U_1 - \frac{E_1E_x}{4\pi} &= T^{21}. \end{aligned}$$

由於系統在 Soliton frame 下是穩定的，可藉由動量、能量流的守恆確認孤立子的正確性。但 Soliton 在相當高能時趨近光速運動，難以得到準確的 frame。若假設孤立子正確，可藉由調整 gamma 使守恆率成立，反推 gamma 值，進而得到 soliton 的精確能量。

#### 四、2-D model：

二維模型的架構需要將所有的方程式修正，包括運動方程式以及 Maxwell's equation，並且在進行模擬運算時，會運用到比一維模型更多的時間複雜度，假設一維模型的時間複雜度是  $O(n)$ ，在二維模擬下就會變成  $O(n^2)$ 。因此我們要對許多運算進行更佳良好的演算法修正，其中我們亦使用了平行運算(MPI)來加速。

二維 Maxwell's equation 修正：

$$-c \nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad [3-4-1]$$

$$c \nabla \times \vec{B} - J = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad [3-4-2]$$

經過推倒後，可整理出

$$ik_x E_x + ik_y E_y = 4\pi\rho(k) \quad [3-4-3]$$

$$ik_x E_y - ik_y E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z(k)}{\partial t} \quad [3-4-4]$$

$$ik_y B_z - 4\pi j_x = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x(k)}{\partial t} \quad [3-4-5]$$

$$-ik_x B_z - 4\pi j_y = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y(k)}{\partial t} \quad [3-4-6]$$

根據 Eq. [3-4-3]~[3-4-6]，我們可以得到電磁場的時變率，使用這些式子，可以完成二維模型的架構，並進行模型準確性的驗證。

當我們進行完模型的校驗後，進行了初步的實驗，實驗的主要方向有兩個：

- 一、在二維系統中丟出平面脈衝(Fig. 3-4-1)，觀察其所產生的孤波的穩定性。也許能維持平面波的形式向兩旁傳播開來，但也有可能因為平面波各處傳播速度不一，導致不穩定，而在中途形成渦流。這對往後星體輻射模

擬的穩定性給出預見。

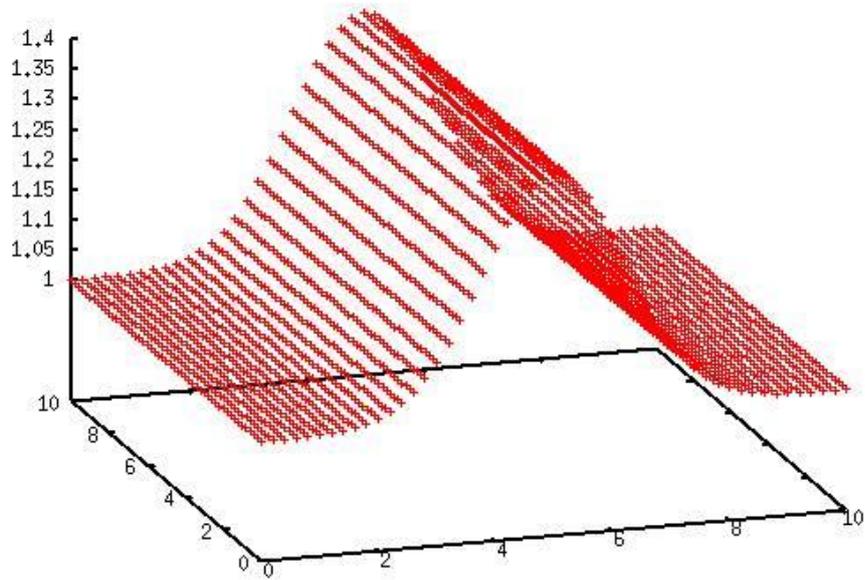


FIGURE 3-4-1 平面脈衝密度分布圖 (縱軸為密度大小)

二、在二維系統中丟出點脈衝(Fig. 3-4-2)，模擬孤波在宇宙中的輻射狀擴散行為。其中須注意的現象包括孤波隨著傳遞距離的強度變化，以及對不均勻背景的加熱。可以觀察到當其擴散時，因為擴散圓的圓周越來越大，導致能量密度越來越小。

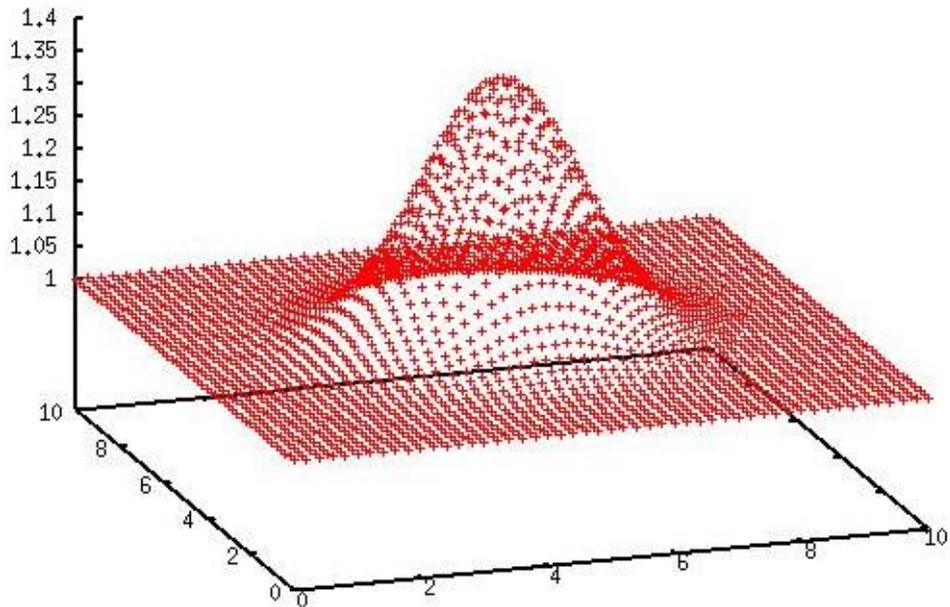


FIGURE 3-4-2 點脈衝密度分布圖 (縱軸為密度大小)

## 肆、 結論與應用

一、一維電荷陣列中的脈衝可以成功產生 Magneto-soliton，而我們也成功以二維電荷陣列模擬出點脈衝以及平面波。

二、孤立子的生成，受到初始的脈衝強度(與高度成正相關、寬度成負相關)與系統環境影響：

1. 將 Electrostatic-soliton 與 Magneto-soliton 進行比較，可得知**磁場對於孤立子系統的穩定性是不可或缺的**。在沒有磁場的 Electrostaticsoliton 系統中，背景充滿了不規則的擾動。而當系統中有了磁場後，磁力線可以控制住背景的電子，讓它可以被限制在局部的區域內，因此在 Magneto-soliton 系統中，背景並無不規則的擾動。
2. 隨著加強初始脈衝的強度，脈衝會漸漸開始無法維持其巨大的能量，在形成孤立子之前就會破散開來，變成 Shock wave。當 Shock wave 在傳播時，它會不斷釋放其所儲存能量，這些能量會把背景系統加熱，導致周圍的粒子運動變得非常活躍。
3. 從 Magneto-soliton 的模擬中，有時因為脈衝過大，系統所產生的孤立子將會不只一個，因此可以看到不同高度的孤立子，我們可以從這個狀況下發現孤立子重要的非線性性質：速度與孤立子形狀的關聯性——**當產生的孤立子密度相對於背景密度越高時，其寬度會越窄，在空間中行進的速度會快**。
4. 當孤立子爬坡時，孤立子的馬赫數會上升，並且變尖變窄，速度也會變慢，當孤立子的馬赫數超過 Critical 值之後，孤立子會破裂並釋放能量。

- 三、模型加上相對論的修正後，此時的系統有了一定的完整性。其中孤立子行為的最明顯差異，就是速度會維持在光速之下。此時引入了期刊論文所計算出的電子、正子、離子相對論性孤立子的守恆性質，對我們所產生出來的孤立子做檢查，幾乎符合理論，誤差約略為 1%。
- 四、二維模型雖已經建構完畢，但尚未進行廣泛的定性實驗。平面波的試驗可以幫助我們確認孤波在多維系統的穩定性，這是一維系統中，無法觀察及測量的現象。
- 五、點脈衝試驗較為接近宇宙中孤波的真實模樣，藉由其強度變化與破裂所導致系統加熱的行為，這將成為未來要定性分析的項目。

## 伍、 參考文獻

- 一、Chen, Francis F. (1984) Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion
- 二、Charles K. Birdsall & A. Bruce Langdon (1985) Plasma Physics via Computer Simulation
- 三、Nicholas A. Krall & Alvin W. Trivelpiece (1973). Principles of Plasma Physics
- 四、T. Chiueh, F. Juang (1997). Phys. Rev. E 55, 1002–1010
- 五、T. Chiueh, C. Li (1992.10). Chinese Journal of Physics, Vol.30 No.5, 603-615

## 陸、 附錄

### 附錄一：FFT 簡介

快速傅立葉變換 (Fast Fourier Transform, FFT)，是離散傅立葉變換的快速演算法，也可用於計算離散傅立葉變換的逆變換。快速傅立葉變換有廣泛的應用，如：數位訊號處理、計算大整數乘法、求解偏微分方程等等。

對於複數序列  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ ，離散傅立葉變換公式為：

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i}{n}jk} x_k \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

直接變換的計算複雜度是  $O(n^2)$ 。快速傅立葉變換可以計算出與直接計算相同的結果，但只需要  $O(n \log n)$  的計算複雜度。通常，快速演算法要求  $n$  能被因數分解，但不是所有的快速傅立葉變換都要求  $n$  是合數，對於所有的整數  $n$ ，都存在複雜度為  $O(n \log n)$  的快速演算法。

除了指數的符號相反、並多了一個  $1/n$  的因子，離散傅立葉變換的正變換與逆變換具有相同的形式。因此所有的離散傅立葉變換的快速演算法同時適用於正逆變換。

在數值模擬中，我們採用 `fftw` 函式庫中的 FFT 函式來幫助我們進行模擬，其本身適用於 C/C++ 以及 Fortran 語言。

一維 FFT 函式定義：

```
fftw_plan fftw_plan_dft_r2c_1d(int n, double *in, fftw_complex *out, unsigned flags);
```

```
fftw_plan fftw_plan_dft_c2r_1d(int n, fftw_complex *in, double *out, unsigned flags);
```

## 附錄二：圖像化

為了觀察孤立子的演化，因此我們將密度的空間變化隨時間記錄下來，並將此作為材料，經過自製程式繪製出每個時間點的 bmp 檔，再將這些圖檔串接，製成 AVI 檔。

製作出來的 bmp 檔分兩種，一種是  $n-x$  圖(Fig. 6-2-1)，另一種則是側視圖(Fig. 6-2-2)。

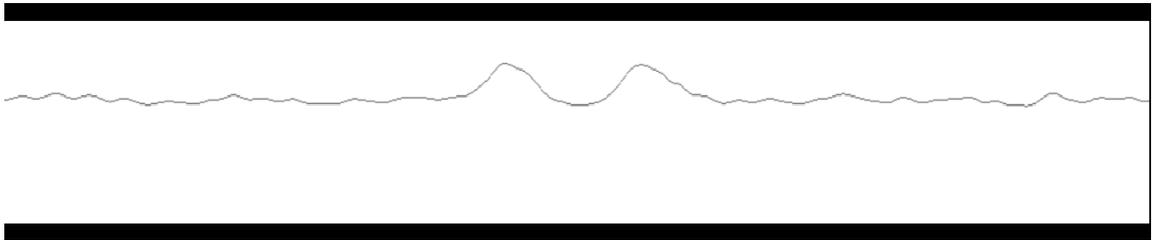


FIGURE 6-2-1

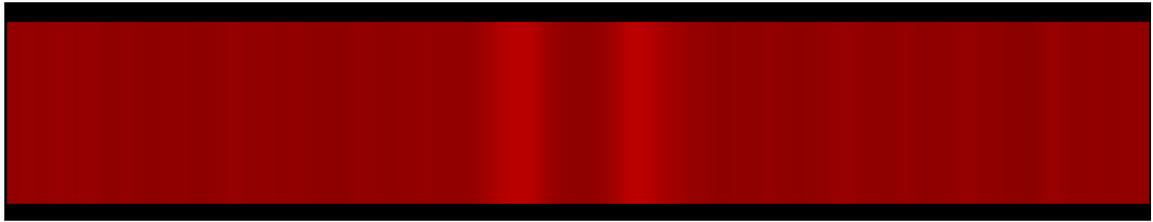


FIGURE 6-2-2

## 評語

本件作品採用數值模擬以研究電漿孤立子在不均勻背景中的演化，本作品藉由解 Maxwell' s equations，並在電場、磁場背景下，直接得出孤立子之解，相當具有物理豐富的意含，為一件非常具有深度的作品。