2014 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　160002

參展科別　物理與天文學

作品名稱　簡易方法測量勞侖茲力

得獎獎項　大會獎：四等獎

就讀學校　國立嘉義高級中學

指導教師　林芳妃、李文堂

作者姓名　孫培文

關鍵字　漩渦偶極子、勞侖茲力、動量通量

作者簡介

我是孫培文，就讀於嘉義高中二年級。

從小我就對科學特別有興趣，也參加了一些科學專題的研究活動，讓我對科學問題的探討更有熱忱，國中階段參加了科展，雖然沒有獲獎，卻讓我對科學的研究與成果發表有更進一步的認識。於高一時再次參加科展，順利進入全國賽並獲得第二名，因此在李文堂老師以及林芳妃老師的帶領下，繼續參加國際科展，希望能將我的實驗與更多人分享，並從中學習更多新知。

簡易方法測量勞侖茲力

摘要

在一個壓克力製的長方形盒中放入兩層濃度不同的食鹽水，將一隻尖端磨平的針頭水平置放在盒中，針頭出水口恰沒入上層濃度較小的食鹽水中，針頭以橡皮管和滴定管相連，滴定管灌滿染料水溶液，打開活栓瞬間，染料在食鹽水中形成漩渦偶極子，由漩渦偶極子移動距離隨時間的變化，可求得染料作用於食鹽水的慣性力。

等位線與電場實驗的電場形成盤放入兩層濃度不同的食鹽水，用兩片平行金屬板做電極，在食鹽水面上放一磁鐵，磁鐵下方滴入數滴染料，食鹽水中的離子受電力、勞侖茲力及黏滯力作用亦形成漩渦偶極子，由漩渦偶極子移動的距離隨時間的變化可求得勞侖茲力。

A novel measurement of the Lorentz force with vortical dipole flows

Abstract

A rectangular container is filled with two layers of different concentrations of salt water, and a sheet of plotting paper is placed underneath the container where it cannot get wet.

The flow of salt ions in the container is forced electromagnetically by electrical currents and a magnetic field. This creates a horizontal flow known as the vortex dipole. A power supply connected by two copper plates, which are placed on the sides of the container, creates the electrical current. A rare earth magnet is placed above the surface of the salt water, which produces a magnetic field. The interaction of the magnetic field with the electrical current results in a horizontal Lorentz force on the ions of the salt water in the direction perpendicular to the electrical current of salt ions. This localized force generates a vortex dipole.

The vortex dipole created by the Lorentz force is visualized and recorded by using a dye and a digital video camera placed above the container. Using camera software, individual frames of the vortex dipole displacement and its time can be measured. By plotting the displacement of the vortex dipole, which is characterized by time dependencies, we can obtain the momentum flux of the vortex dipole. We can measure the Lorentz force of salt ions by using the momentum flux of the vortex dipole and the top layer of the salt water that is in the container.

The apparatus required for the experiment is inexpensive and easy to construct.

壹、　研究動機

作者以『實驗探討離子在磁場中的受力』參加第 53 屆全國科展，僥倖獲獎，經修訂部份內容後，參加臺灣國際科展活動。

貳、　研究目的

一、實驗探討噴流在分層液體中的受力狀況。

二、實驗測量離子在磁場中所受的勞侖茲力。

參、　研究設備及器材

一、壓克力盒長 50cm，寬 20cm，高 5cm 二個

二、銅片 10cm×5cm 二片(焊接導線)

三、21 號針頭(針頭磨平)內徑 0.8mm 一枝

四、圓柱形鈸鐵硼磁鐵(0.5T) 直徑 0.49cm 一個

五、高斯計一具

六、安培計(三用電表) 一具

七、電源供應器(可調伏特值) 一具

八、數位攝影機、電腦(附 KMPlayer 程式)、方格紙

九、溴瑞香草藍、氫氧化鈉、鹽酸、蒸餾水

十、滴定管(50c.c.)一個、乳頭滴管二個、燒杯 500(c.c.)三個

肆、　研究過程或方法

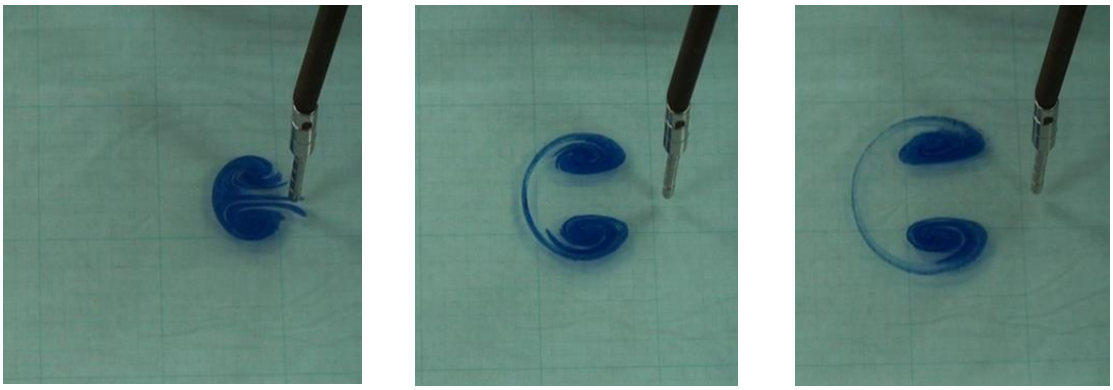
一、研究過程(一)

電場形成盤盛食鹽水溶液，離子電量 q，在電場($\vec{E}$)中受靜電力 $\overrightarrow{F_e} = q\vec{E}$ 。

高中物理實驗中兩電極電位差 12 伏特，用平行板電極實驗時，兩板相距 15 公分，兩板間均勻電場 E=12 伏特/0.15 公尺=80 伏特/公尺，電荷 q 受靜電力 F_e=80q 牛頓。鈷鐵硼磁鐵最強磁場約 B=0.5 特士拉，離子在食鹽水中漂移速率約 10^{-4} 公尺/秒，在磁場中受勞侖茲力 $\overrightarrow{F_m} = q\vec{v} \times \vec{B}$，磁力的方向分別和漂移速度以及磁場方向垂直，$F_m$=q×$10^{-4}$×0.5 牛頓=5×$10^{-5}$q 牛頓。磁力遠小於靜電力，所以等位線沒有受到磁場顯著的影響。

二、研究過程(二)

在電場形成盤兩平行金屬板間的液面上方放置磁鐵，使磁場方向向下，兩平行板接直流電源，使 Na^+向北方運動，Na^+及 Cl^-同時受到向西方的勞侖茲力。在磁鐵下方的液面上滴入一滴染料(溴瑞香草藍鹼性水溶液)，電力、勞侖茲力及食鹽水的黏滯力共同作用下，液面上呈現一隨時間改變的蘑菇狀圖樣向西移動，如(圖 1)所示，查詢流體力學的資料，得知此圖樣稱為漩渦偶極子(vortex dipole)。



(a)　　(b)　　(c)

圖 1：電場形成盤上方置放磁鐵，液面的染料形成漩渦偶極子，由(a)至(c)分別為染料滴入後 5 秒，6 秒，以及 7 秒的圖樣

三、研究過程(三)

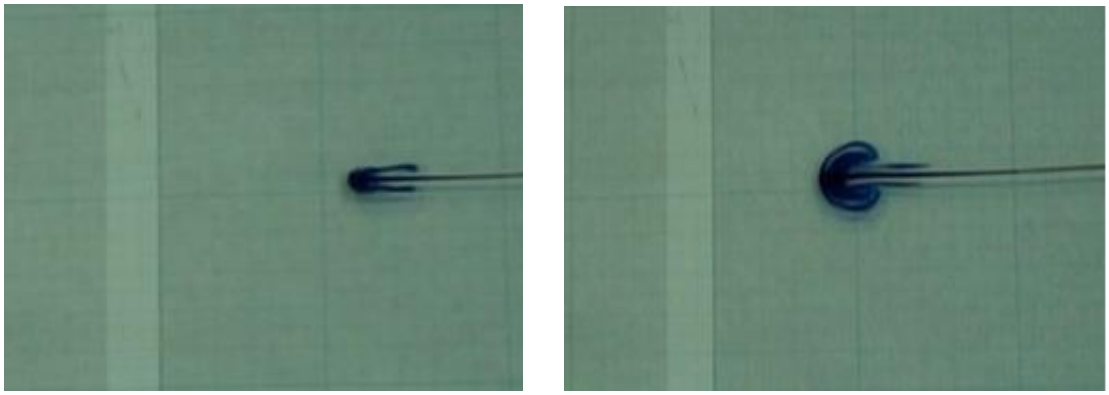
在一方型盒中放入兩層不同濃度的食鹽水，針尖磨平的針頭用橡皮管和滴管相連，且針頭水平置放於上層食鹽水中。染料(溴瑞香草藍鹼性水溶液)由滴定管經橡皮管由針頭噴出。噴流受滴定管及部分橡皮管中內染料水溶液的重力作用，水平噴入食鹽水中，噴流受食鹽水的黏滯力作用，形成漩渦偶極子，如(圖 2)所示。由動量守恆及連續方程式可得到漩渦偶極子平移的距離 ℓ 隨時間的變化為

$$\ell = \left(\frac{3J}{4\pi}\right)^{1/3} t^{2/3} \quad (1)$$

J:噴流的運動動量通量(kinematic momentum flux)，單位因次為 $[J]=L^3T^{-2}$。食鹽水的密度 ρ，ρJ 即為噴流對單位深度的食鹽水的作用力。

四、研究過程(四)：

我們假設單位深度的食鹽水中 Na^+ 及 Cl^- 在磁場中受到的勞侖茲力 F_m 等於 ρJ。用實驗測量 J，以求得離子在磁場中所受的勞侖茲力。



(a) (b)

圖 2：噴流受食鹽水的黏滯力作用，形成漩渦偶極子(依序由 a 至 b)

伍、 研究結果

一、實驗一：

(一)目的：

探討噴流在分層液中的受力狀況。

(二)原理：

1. 流過圓管的流體流速 v，圓管內徑 D，面積 $A=\pi D^2/4$，流體在時間 t 流過圓管(針頭)的體積 V，流量 $Q=V/t$，流體動黏滯係數 ν

   雷諾數 $R_E=\dfrac{vD}{\nu}=\dfrac{4Q}{\pi D\nu}\cdots(2)$ (水 ν=0.01cm^2/s；Re<2300：穩流，2000<Re<4000：過渡流，4000<Re：紊流)。

2. 滴定管中的染料水溶液經橡皮管由針頭水平噴入食鹽水中，若流體在針頭中以 v 運動，在 dt 秒內由針頭流出 dm，則依牛頓第二運動定律，噴流對食鹽水的作用力

$$F=\frac{d(mv)}{dt}=ma+v\frac{dm}{dt}\cdots(3)$$

3. 噴流在食鹽水中受黏滯力作用，形成漩渦偶極子，由動量守恆及連續方程式可得 $\ell=(\dfrac{3J}{4\pi})^{1/3}t^{2/3}\cdots(1)$ ℓ：為針頭出水口至漩渦偶極子頂端距離，J 為噴流的運動動量通量，ρJ 則為單位深度的食鹽水受到噴流的作用力，ρ 為食鹽水密度。

4. 測量不同時間(t)下，ℓ 的長度，作 $\ell-t^{2/3}$ 圖，由斜率可得 J，算出 ρJ 可得單位深度的食鹽水，受到噴流的作用力。食鹽水高 h，$F=\rho Jh$ 等於食鹽水受到噴流的作用力。

(三)實驗裝置及實驗步驟：

1. (圖 3)所示，在方形盒中先置放水平的針頭，加入 350g/ℓ的食鹽水，至針頭出水口下方為止。

2. 沿著盒壁緩緩注入 30g/ℓ的稀食鹽水。至針頭出水口上緣。食鹽水因密度不同而分成上下兩層，噴流由針孔噴出後可在上層平面運動(食鹽水分兩層，可減少噴流在鉛直方向上的運動)。

3. 滴定管注入染料(溴瑞香草藍鹼性水溶液)，數位攝影機由方形盒上方開始拍攝，打開滴定管活栓，記錄在時間 t 內，染料流出 V。

4. 攝影機連接電腦，用 KPM player 播放程式直接在螢幕上量出漩渦偶極子最前端至針孔的距離ℓ隨時間 t 的變化。

5. 改變滴定管高度，重作步驟(3)及(4)。

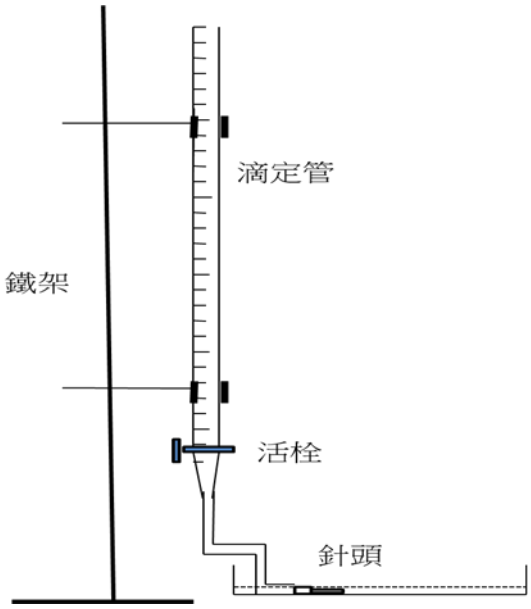


圖 3：實驗一的實驗裝置示意圖

(四)實驗結果及討論：

1. (表 1)為針孔在三種不同流量下，漩渦偶極子長度ℓ隨時間 t 的變化。

表 1：漩渦偶極子ℓ隨時間 *t* 的變化

	t (s)	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50
$Q=0.046cm^3/s$	ℓ (cm)	3.06	4.02	4.89	5.63	6.41	7.05	7.74	8.37	9.00	9.53
$Q=0.056cm^3/s$	ℓ (cm)	3.20	4.21	5.10	5.87	6.66	7.36	8.04	8.71	9.31	10.02
$Q=0.072cm^3/s$	ℓ (cm)	3.35	4.40	5.24	6.45	6.97	7.70	8.42	9.12	9.75	10.50

2. (圖 4)為三種不同流量下的漩渦偶極子 $\ell - t^{2/3}$ 的關係圖，其斜率依次為 3.07、3.19、及 3.34。由公式 $\ell = (\frac{3J}{4\pi})^{1/3} t^{2/3}$，$\ell$ 對 $t^{2/3}$ 圖的斜率 $= (\frac{3J}{4\pi})^{1/3}$，可求得 J 依次為：$121 cm^3/s^2$、$136 cm^3/s^2$、及 $156 cm^3/s^2$。食鹽水 $\rho \approx 1 g/cm^3$，食鹽水深度 h=0.08 公分，食鹽水受到噴流的作用力 $F = \rho J h$，依次為：9.68 達因、10.9 達因、及 12.5 達因。

3. 滴定管中的染料水溶液經橡皮管由針頭水平噴入食鹽水中，由公式(3) $F = \frac{d(mv)}{dt} = ma + v\frac{dm}{dt}$，若假設噴流為等速運動時，噴流對食鹽水的作用力 $F = \frac{d(mv)}{dt} = v\frac{dm}{dt} = \frac{\rho Q^2}{A}$ 依次為 0.421 達因，0.624 達因，及 1.03 達因，顯見噴流非等速運動。

4. 本實驗的雷諾數依次為：73.2、89.2、及 114.7。雷諾數小於 20 時，噴流由針頭噴出時，慣性力不足，染料水溶液只在食鹽水中前進及擴散，沒有漩渦偶極子產生。雷諾數大於 2300 的噴流，染料水溶液呈紊流狀態，亦無穩定的漩渦偶極子產生。

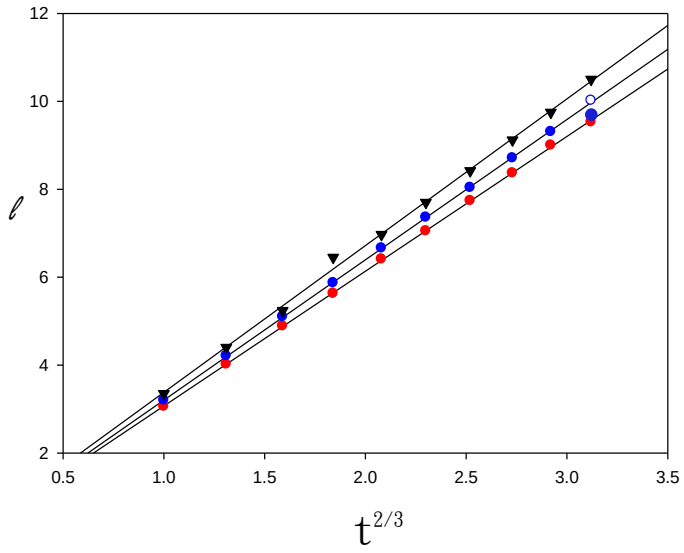


圖 4：同流量下的漩渦偶極子 $\ell - t^{2/3}$ 的關係圖

二、實驗二：

(一)目的：

探討離子在磁場中的受力狀況。

(二)原理：

1. 食鹽水溶液中 Na+ 及 Cl- 反方向運動，電流 $i=\frac{q_{+}+q_{-}}{t}$，磁場 B 作用時，勞侖茲力 $\overrightarrow{F_m}=q\vec{v}\times\vec{B}$，因 Na+ 及 Cl- 反方向運動，依右手開掌定則，Na+ 及 Cl- 受 Fm 同方向。且$\overrightarrow{F_m}$，$\vec{v}$，$\vec{B}$互相垂直。

2. 假設 Na+向北運動，磁場向下，則勞侖茲力向西，此勞侖茲力以食鹽水的黏滯力使 Na+ 及 Cl- 形成漩渦偶極子。

3. 由公式 $\ell=(\frac{3J}{4\pi})^{1/3}t^{2/3}$，測量不同時間下的$\ell$，可得 J，ρJ 為單位深度的食鹽水所受的勞侖茲力。

(三)實驗裝置及實驗步驟：

1. (圖 5)所示，壓克力盒相距 20cm 的兩側各放置 15cm×5cm 的銅片為電極，連接安培計及電源供應器。

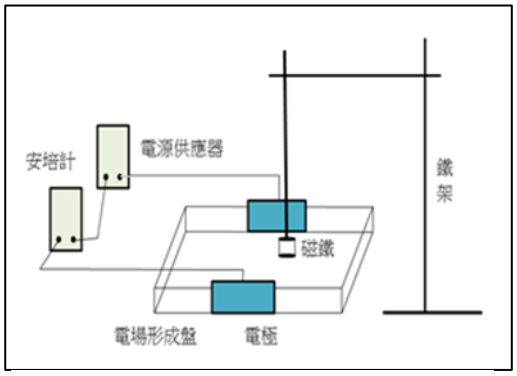


圖 5：實驗二的實驗裝置示意圖

2. 盒中先放入 350g/ℓ 的食鹽水 0.5cm 深，30g/ℓ食鹽水加入 1 毫升的 0.5M 氫氧化鈉水溶液，緩緩加入盒中，高度 h=0.3cm。且盒中食鹽水分成二層。

3. 磁鐵 N 極距液面 0.5cm，用高斯計量出液面磁場強度。

4. 在磁鐵下方滴入 3 滴溴瑞香草藍水溶液，按下開關，用數位攝影機拍下液面，並記錄電流大小。

5. 改變磁鐵距液面高度，重作步驟(4)，以探討磁場大小對離子受力的影響。

6. 磁鐵距液面維持 0.5cm，改變電源的電壓，重作步驟(4)的實驗，以探討電流大小對離子受力的影響。

(四)結果及討論：

1. (表 2)為固定磁場，三種不同電流下勞侖茲力作用下的ℓ隨時間的變化

表 2：勞侖茲力作用下的ℓ隨時間的變化(磁場 1340 高斯)

i(A)	t(s)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.055	ℓ (cm	3.25	3.45	3.64	3.82	4.00	4.18	4.35	4.52	4.68	4.85
0.205	ℓ (cm)	5.04	5.35	5.62	5.92	6.20	6.48	6.74	6.99	7.26	7.51
0.400	ℓ (cm)	6.36	6.74	7.10	7.46	7.82	8.16	8.49	8.83	9.15	9.46

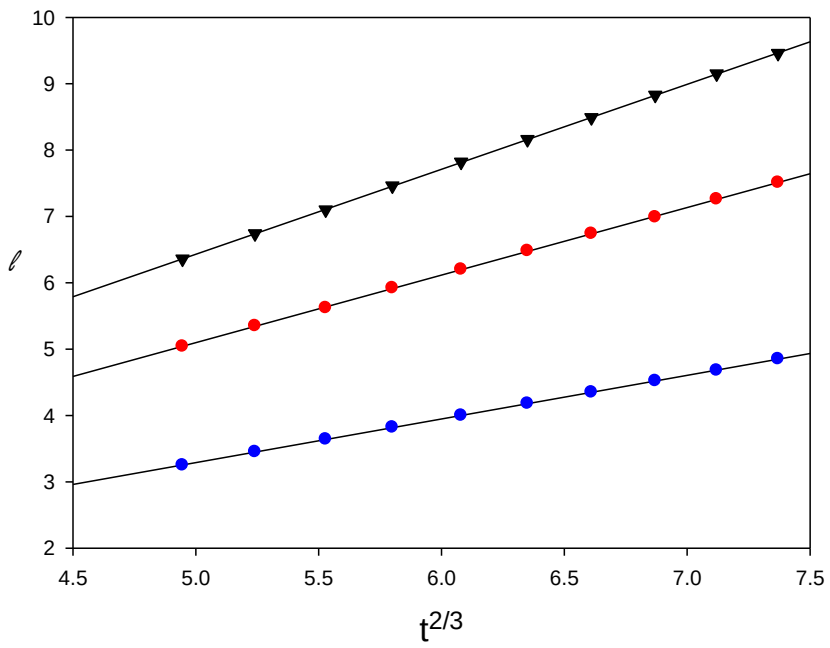


圖 6：勞侖茲力作用下的ℓ隨時間的變化(磁場 1340 高斯)

2. (圖 6)為(表 2)中，磁場固定(0.134T)，電流依次為 0.055A、0.205A、及 0.400A 三個不同電流下的ℓ對$t^{\frac{2}{3}}$關係圖，斜率依次為 0.691、1.048、及 1.32。由公式(1) $\ell=(\frac{3J}{4\pi})^{1/3}t^{2/3}$ 中可得：ℓ 和$t^{\frac{2}{3}}$的比值圖等於$(\frac{3J}{4\pi})^{1/3}$，換言之：$(\frac{3J}{4\pi})^{1/3}$的大小依次為 0.691、1.048 及 1.32，可算出 J 值分別為：$1.38cm^3/s^2$、$4.82cm^3/s^2$ 及 $9.63cm^3/s^2$。又食鹽水的密度 $\rho\approx 1g/cm^3$，高度 h=0.3cm，亦即食鹽水中的離子所受磁力 $F=\rho Jh$ 依次為 0.414 達因，1.45 達因，及 2.89 達因。且磁力的比 0.414：1.45：2.89 和電流的比 0.055：0.205：0.400 亦相同。

3. (表 3)為固定電流，三種不同磁場下勞侖茲力作用下的ℓ隨時間的變化

表 3：勞侖茲力作用下的ℓ隨時間的變化(電流 0.21 安培)

B(G)	t(s)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
272	ℓ (cm)	3.02	3.20	3.37	3.54	3.70	3.87	4.03	4.19	4.34	4.50
487	ℓ (cm)	3.66	3.88	4.10	4.30	4.51	4.71	4.90	5.09	5.28	5.46
788	ℓ (cm)	4.30	4.56	4.81	5.04	5.29	5.52	5.75	5.98	6.19	6.41

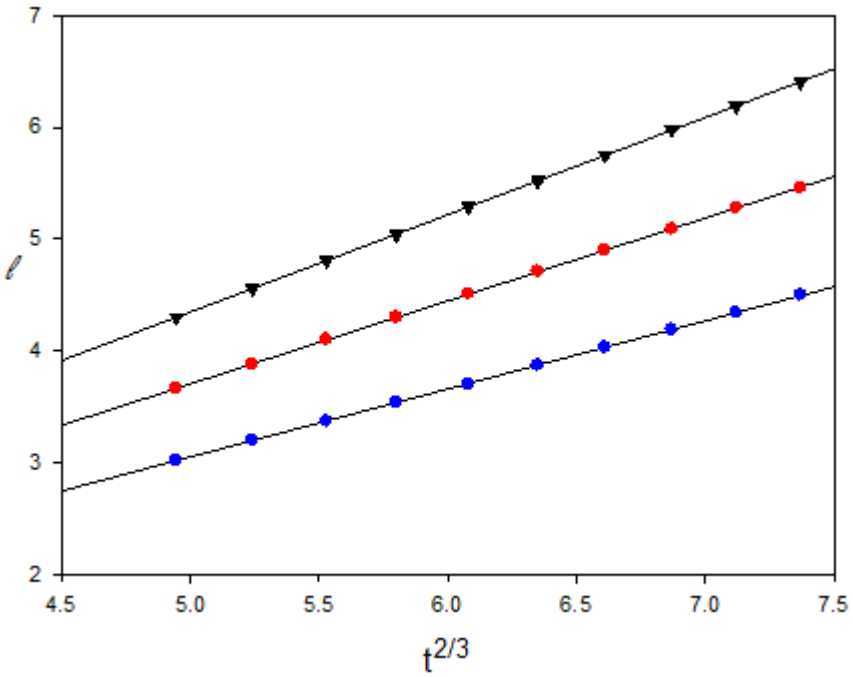


圖 7：勞侖茲力作用下的ℓ隨時間的變化(電流 0.21 安培)

4. (圖 7)為(表 3)中，電流固定(0.210A)，磁場依次為：0.0272T、0.0487T 及 0.0788T 三個不同磁場大小的作用下的ℓ對$t^{\frac{2}{3}}$關係圖，斜率依次為 0.548、0.708 及 0.892，J 依次為：$0.689cm^3/s^2$ 、$1.99cm^3/s^2$ 及 $2.78cm^3/s^2$ ，可得食鹽水中的離子所受磁力依次為 0.21 達因，0.60，及 0.83 達因，磁力的比值亦和磁場比值相同。

5. 實驗時，i的大小直接由安培計讀取，液面最大磁場直接由高斯計讀取，但磁場作用的範圍內的磁力無法直接量得，必須用本實驗步驟(2)、(4)計算而得。

6. 電場對離子產生之電力遠大於磁場造成之磁力，但只可觀察到離子在磁場中受力而顯著的移動，因正負離子在電場中受到的電力同大小但反方向，而染料移動需藉由離子帶動，兩種離子受力方向相反，淨力為零，染料的運動未受電力影響。外加磁場後，正負離子之運動反方向，但形成的電流同方向；在相同的磁場作用下，所受之磁力方向為同向，此時便會帶動染料移動形成漩渦偶極子。

7. 將測得離子受磁力大小與理論估算比較：受作用力的離子莫耳數為磁鐵正下方所涵蓋體積乘以食鹽體積莫耳濃度。以知食鹽水濃度為 30g/ℓ(即正負離子總濃度為 1.03x10-3mol/cm3)，而磁鐵半徑約為 0.25cm，水深 0.3cm。可得離子數為$0.25^2\pi \times 0.3 \times (1.03 \times 10^{-3}) \times (6 \times 10^{23}) = 3.62 \times 10^{19}$(個)，代入而得(表 4)。

8. 由勞侖茲力的公式$\overrightarrow{F_m} = q\vec{v} \times \vec{B}$，其中 q 為 1.6x10-19 庫倫，v 為漂移速率$= \frac{i}{nAe}$，A 為面積$= 0.3cm \times 10cm = 3cm^2$，e$= 1.6 \times 10^{-19}$庫倫，n$= 6.18 \times 10^{20}$個/cm3。代入而得(表 5)

表 4：以漩渦偶極子方式所得受力大小

電流	0.055A	0.205A	0.400A
總受力(達因)	0.27	1.01	1.97
每一離子受力(達因))	7.46×10^{-21}	27.9×10^{-21}	54.4×10^{-21}

表 5：以勞侖茲力公式所得受力大小

電流	0.055A	0.205A	0.400A
漂移速率(cm/s)	1.85×10^{-4}	6.91×10^{-4}	13.5×10^{-4}
總受力(達因)	0.14	0.54	1.05
每一離子受力(達因))	3.98×10^{-21}	14.8×10^{-21}	28.9×10^{-21}

9. 比較(表 4)、(表 5)，可得其數量級相近，但以勞侖茲力公式求得之磁力較不準確。是因為勞侖茲力公式中的磁場值是以最大磁場值代入，而離子在不同位置所受的磁場大小並不同。因此以漩渦偶極子方式測得較準確。

陸、　討論

一、實驗誤差分析：

(一)系統誤差分析：

1. 銅片(形成電場之電極)：由於純度不可能達到百分之百，且有部分氧化的現象。雖已用砂紙將其磨至光滑，並用濾紙包覆浸於溶液部分，避免情況惡化。不過本實驗中加之電場只用於產生離子飄移速度，且另有安培計測量電流，故此部分之誤差並不影響實驗結果。

2. 電子儀器：

(1) 高斯計：有效數字可取到小數點後一位(即 0.1 高斯)，而本實驗數據已取到個位(即 1 高斯)，故磁力表示部分並不取誤差槓。

(2) 安培計：有效數字可取到小數點後一位(即 0.1 毫安培)，而本實驗數據有效位數需求亦為個位(即 1 毫安培)，故所取之電流數據可視為準確值。

(3) 電源供應器：本實驗中主要依據安培計作以數據比對，而非由伏特計讀取並反推數據，故伏特數值基本上是不需列出。但經測量後，此電源供應器所產生之電壓十分穩定，經由伏特計測量，在數分鐘內變化不到±0.01 伏特(即伏特計無法讀取差異)。

3. 桌面不平整：觀測噴流實驗中所得到的漩渦偶極子，發現走向略有向旁偏的現象，且每次實驗皆偏同一方向，這是實驗桌面並非完全水平所造成的結果，食鹽水較深處，噴流受到的黏滯力大，整個蘑菇狀的圖樣向較深的一方偏。

(二)隨機誤差分析：

1. 數據選取方法：本實驗之數據以及圖表製作，皆已從數次重複實驗中挑取最適合的範圍，故數據部分不列出誤差槓以方便比較不同條件下的情況和理論計算。

2. 數值量取採用：

(1) 長度(ℓ)：因為測量方法為由影片底下之方格紙，在放大倍數後以比例換算長度，故可達到 0.001mm，而數據表示僅到 0.1mm。並不需列出誤差槓。

(2) 時間(t)：實驗中所取用之時間秒數皆為固定，亦即為絕對值，故並無誤差。

二、實驗中無法直接測量之數據：

(一)*J*:噴流的運動動量通量：

由於噴流出口在溶液中，且無法收集已噴出的溶液。因此我們改以測量溶液在滴定管中的下滑速率、滴定管口徑和高度，以及針頭口徑，再配合已知的常數便可計算出噴流的運動動量通量之量值。

(二)漂移速度(drift velocity)：

由公式$v_d = \frac{i}{nAe}$ (v_d 為漂移速度，n 為單位體積的自由電子(離子)，且已知 e 為 1.6×10^{-9} 庫倫)，本實驗估算得漂移速度約為 10^{-4}m/s。

(三)離子所受磁力：

雖然勞侖茲力已有固定的公式和算法，但經實驗後，所得數據和理論值相差甚大。推測其可能原因在於磁場並非只有在一點，而是有一定範圍。故不能用已知的最大磁場代入公式$\overrightarrow{F_m} = q\vec{v}\times\vec{B}$。況且其並無相對應的實驗可以對照數據。故本

實驗以流體受力的模式，求出真正的磁力，而準確度可到達因以下的位數值。以此簡易測量方法和運算，便可得到相對較難測得之物理量。

柒、　結論

溴瑞香草藍水溶液由針頭水平噴流入分層的食鹽水中，雷諾數介於 20 至 2300 才會形成漩渦偶極子，由漩渦偶極子長度(ℓ)對時間(t)的變化及食鹽水密度可求得單位深度的食鹽水所受噴流的作用力。

電場形成盤中離子受到的勞侖茲力，可利用離子在勞侖茲力及黏滯力形成的漩渦偶極子ℓ隨 t 的變化求得食鹽水單位深度中離子受到勞侖茲力的大小。

捌、　參考資料及其他

1. 普通高級中學選修物理(上)實驗活動手冊。南一書局。民國 101 年。

2. S.L. Voropayev and Y.D. Afanaryev.*Vortex structure in a stratified field*. Chapman and Hall, London, (1994)

評語

作品內容雖完整，但若能在理論討論時，再考慮進磁場之不均勻度，從實驗上改進或從理論上考量，應可再進一步提昇其描述的精準度。