

2014 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010038

參展科別 數學

作品名稱 連續正整數的鈍角三角形分割

得獎獎項 大會獎：二等獎

候補作品：1

就讀學校 臺北市立建國高級中學

指導教師 李宗憲

作者姓名 呂彥德

關鍵字 三元子集、平方和

作者簡介



我是呂彥德。興趣是看書、打打排球、偶爾放學在學校跑步，也喜歡下棋。平常在家閒著沒事做就喜歡看數學，不知不覺就過了三四個小時，可能大部分的人都會覺得這樣的人根本就是瘋子，但我還是喜歡沉浸在這樣的世界裡。這次做科展，雖然作品沒有做得很好，也不夠成熟，但還是學到了不少東西。

摘要

對於集合 $S = \{k, k + 1, \dots, k + 3n - 1\}$ ，考慮其所有三元子集的劃分，我們研究在其中所有子集皆含有的一致性：鈍角三角形。文中給出了對於初始值 k 尋找 n 的方法，並證明其存在性。對於所有 k 我們都能給出 n 的範圍。在文末我們期望能夠從解析方面來對這問題進行更深的剖析，所以對於部分鈍角三角形的劃分方式給出了其必要條件的限制，並且同時作出關於全體鈍角三角形的等價類分組方式。

Abstract

For the set $S = \{k, k + 1, \dots, k + 3n - 1\}$, we consider the sets which have the properties: (i) It is the union of S 's ternary subsets (ii) Each of its element forms an acute triangle. This paper shows the existence of n for given k , and gives the method for searching the minimum of n , even gives the bound of n for each k . We hope to approach this problem by an analytical way, hence give some restrictions on the necessity of some types of the acute triangles, and find a way to partite the acute triangles into equivalence classes.

壹、 研究動機

一次偶然的機會在書上(參考文獻[2])看到這樣的題目：考慮集合 $S = \{2, 3, \dots, 3n + 1\}$ ，試證明：可將其分成 n 個兩兩不相交的三元子集，使得任一子集中的三個數恰好是某鈍角三角形之三邊長。這題目相當有趣，我們打算研究還擁有這樣性質的集合，本文中，我們將先證明原命題並將其推廣至另外的集合： $\{k, k + 1, \dots, 3n + k - 1\}$ ，我們好奇的是什麼樣的 k 值會使得這樣的集合也能分出鈍角三角形的子集。

貳、 研究目的

- 一、給定 n 值求出 k 的最小值的上下界。
- 二、給定 n 值求出 k 的所有值的上下界。
- 三、給定 n, k 時構造出其鈍角三角形的劃分。

參、 研究設備及器材

筆、紙

肆、 研究方法

4.1 名詞定義

給定正整數 k ，如果可以將 $S_{k,n} = \{k, k+1, \dots, 3n+k-1\}$ 分割成 n 個兩兩互斥的三元子集，使得任一子集中的三個數恰好是某鈍角三角形之三邊長(簡稱為鈍角三角形劃分)。將所有這樣的 n 所成集合記為 A_k ，且定義：

1. M_k 為 A_k 中的最小正整數。
2. U_k 為使得其後的整數都在 A_k 中的最小正整數。

3. 為方便我們定義集合：

$$A_{k,n} = \{k, k+1, \dots, k+n-1\}$$

$$B_{k,n} = \{k+n, k+n+1, \dots, k+2n-1\}$$

$$C_{k,n} = \{k+2n, k+2n+1, \dots, k+3n-1\}$$

4. 正規劃分：對劃分中所有三角形滿足： $\{(a_i, b_i, c_i) \mid a_i \in A_{k,n}, b_i \in B_{k,n}, c_i \in C_{k,n}, \forall i=1,2,\dots,n\}$
5. 數 d_D ：其值為鈍角三角形劃分集合 D 中所有三角形最長邊的平方減去另兩邊平方的總和。
6. 數 L_a ：其值為以正整數 a 為鈍角三角形最短邊長的所有可能三角形中最長邊的平方減去另兩邊平方的最小值。
7. 對給定的非負整數 a, y ($y < a$)，稱 $(a, a+x+y, 2a+x)$ 是 (a, y) 本原解，其中 x 是使其為鈍角三角形且使 x 不小於 $-y$ 的最小整數。
8. O_a ：為以正整數 a 為最短邊的所有以兩兩相異的三個正整數為邊長的鈍角三角形的三邊長構成之三元集所形成之集合。

4.2 原始命題

引理 0: 首先我們注意到 (a, b, c) (其中 $a < b < c$) 構成鈍角三角形的充要條件為: (1) $a + b > c$, (2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta > a^2 + b^2$ 。

下面我們會一直用到這兩個條件，因此不再贅述。

接著，我們還需要引理：

引理 1: 若 (a_i, b_i, c_i) (c_i 最大) 是鈍角三角形，則 $(a_i, b_i + k, c_i + k)$ 亦是。

[證明] 顯然 $a_i + (b_i + k) > (c_i + k)$ ，且 $(c_i + k)^2 > a_i^2 + (b_i + k)^2$ ，故得證。

最後要提一下後面我們會一直用到的 Archimedes' theorem: 給定兩正實數 a, b ，則存在正整數 M ，使得對所有正整數 $n \geq M$ ，總有 $an > b$ 。並且這個正整數 M 就是使得 $aM > b$ 的最小正整數。

以及 well ordering principle: 任意非負整數的非空集合必定有最小元素。

接著我們開始證明原命題：

首先 $n = 1, 2, 3$ 時，

我們易驗證 $\{(2, 3, 4)\}, \{(2, 4, 5), (3, 6, 7)\}, \{(2, 5, 6), (3, 7, 8), (4, 9, 10)\}$ 滿足

現在考慮 $n \geq 4$ 時：

■ $2 \mid n$

考慮 $D = \{2 + \frac{1}{2}n, 2 + \frac{1}{2}n + 1, \dots, 2 + n - 1,$

$2 + 2n, 2 + 2n + 1, \dots, 2 + \frac{5}{2}n - 1,$

$2 + \frac{5}{2}n, 2 + \frac{5}{2}n + 1, \dots, 2 + 3n - 1\}$

分成三元子集 $\{(2 + \frac{1}{2}n + k, 2 + 2n + k, 2 + \frac{5}{2}n + k)\}$

由於 $(2 + \frac{1}{2}n + k) + (2 + 2n + k) > (2 + \frac{5}{2}n + k)$ ，故能形成三角形

能形成鈍角等價於 $\left(2 + \frac{5}{2}n + k\right)^2 > \left(2 + \frac{1}{2}n + k\right)^2 + (2 + 2n + k)^2$

又等價於 $2n^2 > (2 + k)^2 \quad \forall 0 \leq k \leq \frac{1}{2}n - 1$ ，這只需 $\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)n > 1$ ，

由Archimedes' theorem 成立。故 D 可構成鈍角三角形的劃分。

■ $2 \nmid n$

考慮 $D = \{2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \dots, 2 + n - 1,$

$$2 + 2n - 1, 2 + 2n + 1, \dots, 2 + \frac{5}{2}n - \frac{3}{2},$$

$$2 + \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}, 2 + \frac{5}{2}n + \frac{1}{2}, \dots, 2 + 3n - 1\}$$

分成三元子集 $\{(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}n + k, 1 + 2n + k, \frac{3}{2} + \frac{5}{2}n + k)\}$

由於 $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}n + k) + (1 + 2n + k) > (\frac{3}{2} + \frac{5}{2}n + k)$ ，故能形成三角形

能形成鈍角等價於 $\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}n + k\right)^2 > \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}n + k\right)^2 + (1 + 2n + k)^2$

又等價於 $2n^2 + 2n > (1 + k)^2 \quad \forall 0 \leq k \leq \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$ ，只需 $\frac{7}{4}n^2 + \frac{3}{2}n >$

$\frac{1}{4}$ ，由Archimedes' theorem 成立。故 D 可構成鈍角三角形的劃分。

接著，我們將 S 中剩下的數看作是

S' (當 n 為偶數時， $S' = S_{k, \frac{1}{2}n}$ 。當 n 為奇數時， $S' = S_{k, \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}}$ 。)中的

較大 a 個數(當 n 為偶數時 $a = n$ 、當 n 為奇數時 $a = n - 1$)同時加上某

正數 c (當 n 為偶數時 $c = \frac{1}{2}n + 1$ 、當 n 為奇數時 $c = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$)，再一次進

行討論，而劃分必在有限步內結束。最後，我們將遞降到 $n = 1, 2, 3$ 時的

情況，再來由引理 1 將其他三元數對變換回 S 中，我們便得到了

$S = \{2, 3, \dots, 3n + 1\}$ 的鈍角三角形的劃分。綜上，我們證明了 $n \geq 4$ 時 $S_{2,n}$

必存在鈍角三角形的劃分。又在一開始給出 $S_{2,1}$ 、 $S_{2,2}$ 、 $S_{2,3}$ 的鈍角三角形的劃分，故 $\forall n$, $S_{2,n}$ 必存在鈍角三角形的劃分

為方便理解，在這邊我們給出一個例子： $S = \{2, 3, \dots, 37\}$

首先由於 $n (= 12)$ 為偶數，我們考慮

$$D = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, \\ 26, 27, 28, 29, 30, 31, \\ 32, 33, 34, 35, 36, 37\}$$

將其分成三元子集

$$\{(8, 26, 32), (9, 27, 33), (10, 28, 34), (11, 29, 35), (12, 30, 36), (13, 31, 37)\}$$

易驗證此時所有三元數對皆能形成鈍角三角形。接下來將

$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 14, 15, 16, \dots, 25\}$ 看作是

$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots, 19\}$ 的後 12 數每數都加上 6，再一次對

$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots, 19\}$ 進行討論。

同上分成 $\{(5, 14, 17), (6, 15, 18), (7, 16, 19)\}$ ，接下來將

$$\{2, 3, 4, 8, 9, \dots, 13\}$$

看作是 $\{2, 3, 4, 5, 6, \dots, 10\}$ 的後 6 數每數都加上 3，再一次對

$\{2, 3, 4, 5, 6, \dots, 10\}$ 進行討論。現在變回 $n = 3$ 的作法：分成

$\{(2, 5, 6), (3, 7, 8), (4, 9, 10)\}$ 。最終我們得到了

$\{(5, 14, 17), (6, 15, 18), (7, 16, 19)\}$ 及 $\{(2, 5, 6), (3, 7, 8), (4, 9, 10)\}$ 這兩組

不在 S 中的三元數對集，現在要用 **引理 1** 將其變換回 S 中，會變成

$\{(5, 14 + 6, 17 + 6), (6, 15 + 6, 18 + 6), (7, 16 + 6, 19 + 6)\}$ 以及

$\{(2, 5 + 6 + 3, 6 + 6 + 3), (3, 7 + 6 + 3, 8 + 6 + 3), (4, 9 + 6 + 3, 10 + 6 + 3)\}$ 。最後我們就得到了原集的鈍角三角形的劃分：

$\{(2, 14, 15), (3, 16, 17), (4, 18, 19), (5, 20, 23), (6, 21, 24), (7, 22, 25), (8, 26, 32),$
 $(9, 27, 33), (10, 28, 34), (11, 29, 35), (12, 30, 36), (13, 31, 37)\}。$

4.3 推廣命題

4.3.1 存在性以及上下界估計

引理 2: $\{k, k+1, \dots, k+m-1\} \cup \{k+2m, k+2m+1, \dots, k+4m-1\}$ 存在某一正整數 W
 使 $m \geq W$ 時總存在鈍角三角形的劃分。

[證明]

(1) $2 \mid m$

考慮 $D = \{k + \frac{1}{2}m, k + \frac{1}{2}m + 1, \dots, k + m - 1,$

$k + 3m, k + 3m + 1, \dots, k + \frac{7}{2}m - 1,$

$k + \frac{7}{2}m, k + \frac{7}{2}m + 1, \dots, k + 4m - 1\}$

分成三元子集 $\{(k + \frac{1}{2}m + t, k + 3m + t, k + \frac{7}{2}m + t)\}$

由於 $(k + \frac{1}{2}m + t) + (k + 3m + t) > (k + \frac{7}{2}m + t)$ ，故能形成三角形。

能形成鈍角等價於 $(k + \frac{7}{2}m + t)^2 > (k + \frac{1}{2}m + t)^2 + (k + 3m + t)^2$

又等價於 $3m^2 > (k + t)^2 \quad \forall 0 \leq t \leq \frac{1}{2}m - 1$ ，只需 $(\sqrt{3} - \frac{1}{2})m > k -$

1。……條件式*

由Archimedes' theorem知存在某一數 X 使得當 $m \geq X$ 時此式必成立。此
 時 D 可構成鈍角三角形的劃分。

(2) $2 \nmid m$

考慮 $D = \{k + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}, \dots, k + m - 1,$

$$k + 3m - 1, \quad k + 3m, \quad \dots, k + \frac{7}{2}m - \frac{3}{2},$$

$$k + \frac{7}{2}m - \frac{1}{2}, k + \frac{7}{2}m + \frac{1}{2}, \dots, k + 4m - 1\}$$

分成三元子集 $\{(k + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} + t, k + 3m - 1 + t, k + \frac{7}{2}m - \frac{1}{2} + t)\}$

因 $(k + \frac{m-1}{2} + t) + (k + 3m - 1 + t) > (k + \frac{7m-1}{2} + t)$ 故能形成三角形

能成鈍角等價於 $(k + \frac{7m-1}{2} + t)^2 > (k + \frac{m-1}{2} + t)^2 + (k + 3m - 1 + t)^2$ 又等價於 $3m^2 + 3m > (k + t - 1)^2 \quad \forall 0 \leq t \leq \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}$ 。

我們只需證： $3m^2 > (k + t - 1)^2$ ，而此式等價於 $(\sqrt{3} - \frac{1}{2})m > k - \frac{3}{2}$ 。……條件式**

由 Archimedes' theorem 知存在某一數 Y 使得當 $m \geq Y$ 時此式必成立。此時 D 可構出鈍角三角形的劃分。接著，我們將 S 中剩下的數看作是 S' (取法與原命題證明時同理) 中的最大 a 個數加上一正數，再一次進行討論，而劃分必在有限步內結束。最後，我們將得到集合 $\{k, k + 1, \dots, k + s\} \cup \{k + 2m, k + 2m + 1, \dots, k + 2m + 2s + 1\}$ ，將其分成 $\{(k + t, k + 2m + 2t, k + 2m + 2t + 1)\}$ ，存在某數 Z 使得當 $m \geq Z$ 時這之中任一個集合都能形成鈍角三角形的劃分。由於每次劃分完後討論的集合 S' 都會回到上述討論的情況(分 n 為奇偶數)，故知 m 為不小於 $\max \{X, Y, Z\}$ 之整數時，原集合存在鈍角三角形的劃分。

有了這個引理，便可以開始證明 U_k 的存在性了

定理 1: $\forall k \geq 2$, U_k 及 M_k 都是存在的。

[證明]

(3) 當我們取 $2 \mid n$ 時

$$\begin{aligned} \text{考慮 } D = \{ & k + \frac{1}{2}n, k + \frac{1}{2}n + 1, \dots, k + n - 1, \\ & k + 2n, k + 2n + 1, \dots, k + \frac{5}{2}n - 1, \\ & k + \frac{5}{2}n, k + \frac{5}{2}n + 1, \dots, k + 3n - 1 \} \end{aligned}$$

分成三元子集 $\{(k + \frac{1}{2}n + t, k + 2n + t, k + \frac{5}{2}n + t)\}$

由於 $(k + \frac{1}{2}n + t) + (k + 2n + t) > (k + \frac{5}{2}n + t)$ ，故必能形成三角形

能形成鈍角等價於 $(k + \frac{5}{2}n + t)^2 > (k + \frac{1}{2}n + t)^2 + (k + 2n + t)^2$ ，又

等價於 $2n^2 > (k + t)^2 \quad \forall \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}n - 1$ ，這只需 $(\sqrt{2} - \frac{1}{2})n > k$ ，由

Archimedes' theorem 知

存在 X 使得當 $n \geq X$ 時此式必成立。此時 D 可構出鈍角三角形的劃分。

剩下 $\{k, k + 1, \dots, k + \frac{1}{2}n - 1\} \cup \{k + n, k + n + 1, \dots, k + 2n - 1\}$ ，

將其看作是 $S_{k, \frac{n}{2}}$ 的較大 n 個數同時都加 $\frac{n}{2}$ 。由引理2知存在某一數

X' 使得當 $n \geq X'$ 時此集合存在鈍角三角形的劃分。

綜上，當 n 為不小於 $\max \{X, X'\}$ 之偶數時， $S_{k, n}$ 存在鈍角三角形的劃分。

(4) 當我們取 $2 \nmid n$ 時

$$\begin{aligned} \text{考慮 } D = \{ & k + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \dots, k + n - 1, k + 2n - 1, \\ & k + 2n, \dots, k + \frac{5}{2}n - \frac{3}{2}, k + \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}, k + \frac{5}{2}n + \frac{1}{2}, \dots, \\ & k + 3n - 1 \} \end{aligned}$$

分成三元集 $\{((k - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}n + t, (k - 1) + 2n + t, (k - \frac{1}{2}) + \frac{5}{2}n + t)\}$

因 $((k - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}n + t) + ((k - 1) + 2n + t) > ((k - \frac{1}{2}) + \frac{5}{2}n + t)$ ，故
必能形成三角形。

$$\text{又} \left((k - \frac{1}{2}) + \frac{5}{2}n + t \right)^2 > \left((k - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}n + t \right)^2 + ((k - 1) + 2n + t)^2$$

等價於 $2n^2 + 2n > (k + t - 1)^2 \quad \forall \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$ ，我們知 $2n^2 >$

$(k + t - 1)^2$ 時此式成立。再化簡為 $(\sqrt{2} - \frac{1}{2})n > k - \frac{3}{2}$ 。.....條件式***

由 Archimedes' theorem 存在某一數 Y 使得當 $n \geq Y$ 時此式必成立。此時
 D 可構成鈍角三角形的劃分。

剩下 $\{k, k + 1, \dots, k + \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}\} \cup \{k + n, k + n + 1, \dots, k + 2n - 2\}$ ，將其

看作是 $S_{k, \frac{n-1}{2}}$ 的較大 $n - 1$ 個數同時都加 $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ 。綜合 **引理 1** 以及 **引理 2**，

知存在某一數 Y' 使得當 $n \geq Y'$ 時此集合能構成鈍角三角形的劃分。

綜上，當 n 為不小於 $\max\{Y, Y'\}$ 之奇數時， $S_{k,n}$ 存在鈍角三角形的劃分。

綜上，首先我們證明了 A_k 是非空的，故由 well ordering principle 知道

A_k 中有最小元素，所以 M_k 是存在的。再來，如果我們令集合

$B_k = \{n \mid \forall m \geq n, \text{ 都有 } m \in A_k\}$ ，我們又已證明了當

$n \geq \max\{\max\{X, X'\}, \max\{Y, Y'\}\}$ 時， $S_{k,n}$ 存在鈍角三角形的劃分。因

此 B_k 也是非空的，故同理 B_k 中有最小元素，即 U_k 是存在的。

我們現在知道了 U_k 的存在性，而以下將給出 M_k 、 U_k 的範圍估計：

引理 3: 若 $S_{k,n}$ 可構成鈍角三角形的劃分，則

$$\sum_{a=k+2n}^{k+3n-1} a^2 \geq \sum_{a=k}^{k+2n-1} a^2 + n$$

[證明]

設 $D = \{\{a_i, b_i, c_i\} | i = 1, 2, \dots, n\}$ ($c_i > a_i, b_i$) 為其鈍角三角形的劃分，則

$c_i^2 > a_i^2 + b_i^2$ ，故 $c_i^2 \geq a_i^2 + b_i^2 + 1$ ，兩邊求和得到

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 \geq \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 + n$$

，並且由於

$$\sum_{a=k+2n}^{k+3n-1} a^2 \geq \sum_{i=1}^n c_i^2, \text{ 以及 } \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 \geq \sum_{a=k}^{k+2n-1} a^2$$

將兩式代換即得。

在此引理中我們將原式化簡有

$$\sum_{a=1}^{k+3n-1} a^2 - \sum_{a=k}^{k+2n-1} a^2 \geq \sum_{a=1}^{k+2n-1} a^2 - \sum_{a=1}^{k-1} a^2 + n$$

移項可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{(k+3n-1)(k+3n)(2k+6n-1)}{6} + \frac{(k-1)(k)(2k-1)}{6} \\ & \geq 2 \frac{(k+2n-1)(k+2n)(2k+4n-1)}{6} + n \end{aligned}$$

兩邊同乘 6 得到

$$\begin{aligned} & (2k^3 + 18nk^2 + 54n^2k + 54n^3 - 8k^2 - 18nk - 27n^2 + k + 3n) + \\ & (2k^3 - 3k^2 + k) \end{aligned}$$

$$\geq 2(2k^3 + 12nk^2 + 24n^2k + 16n^3 - 3k^2 - 12nk - 12n^2 + k + 2n) + 6(n)$$

有 $(22n^2 + (6k - 3)n + (-6k^2 + 6k - 7))n \geq 0$ ，即 $22n^2 + (6k - 3)n + (-6k^2 + 6k - 7) \geq 0$ 。解二次方程式，並且由 n 是正數，可以得到

$n \geq \frac{-(6k-3) + \sqrt{141(2k-1)^2 + 484}}{44}$ 。而這是對於所有使 $S_{k,n}$ 可構出鈍角三角形的劃分的 n 都必須成立的不等式，因此 $n = M_k$ 時也必須成立，即有 M_k 的範圍。

在我們嘗試估計 U_k 的最大可能值之前，必須要先證明**引理2**的強化：

引理2 (強形式): $\{k, k+1, \dots, k+m-1\} \cup \{k+2m, k+2m+1, \dots, k+$

$4m-1\}$ 當 $m \geq \left\lceil \frac{k}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ 時總存在鈍角三角形的劃分

[證明]

在原本**引理2**證明過程所分的第一種情況： $2 \mid m$ 時只要 $m \geq \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ ，就

能讓 D 構出鈍角三角形的劃分(代入條件式*)，而在 $2 \nmid m$ 時當

$m \geq \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ 代入條件式**中亦可知 D 能構出鈍角三角形的劃分，所以

知道對所有 $m \geq \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ ， D 都能構出鈍角三角形的劃分，此時將原集

合作出的劃分最後將遞降回集合 $\{k, k+1, \dots, k+s\} \cup \{k+2m, k+$

$2m+1, \dots, k+2m+2s+1\}$ $\left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil - 1 \leq s \leq \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil - 1 \right)$ ，這就有

$s < k-1$ ，將其分成 $\{(k+t, k+2m+t, k+2m+t+s+1)\}$ ($t =$

$0, 1, \dots, s)$ 。

能形成三角形等價於 $(k+t) + (k+2m+t) > (k+2m+t+s+1)$ ，

即 $k+t > s+1$ ($\forall 0 \leq t \leq s$)，這由 $s < k-1$ 可知其必成立。

能形成鈍角等價於 $(k+2m+t+s+1)^2 > (k+t)^2 + (k+2m+t)^2$ ，展

開將其視作關於 t 的二次方程： $(4s+4)m > t^2 + (2k-2s-2)t +$

$f(k, s)$ 其中 $f(k, s)$ 只與 k, s 有關)，由於領導係數及一次項係數為正，故

右式在 $t=s$ 時取到最大值。將 $t=s$ 代入此式得 $(4s+4)m > k^2 - 2k -$

$(2s^2 + 4s + 1)$ ，又等價於 $m > \frac{(k-1)^2}{4(s+1)} - \frac{s+1}{2}$ 。... (1) 式

由於 k 為定值，故右式在 s 最小時取到最大值。

將左式 s 以 $\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor - 1$ 代入、右式 m 以 $\left\lfloor \frac{k}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rfloor$ 代入，並用天花板函數

基本性質

化簡得(1)式的充分條件為 $\frac{k}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} > \frac{(\sqrt{3}-\frac{1}{2})(k-1)^2}{2(k-\frac{3}{2}+\sqrt{3})} - \frac{k-\frac{3}{2}+\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-\frac{1}{2})}$ 。

(因為(1)式的充分條件為 $\left\lfloor \frac{k}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rfloor > \frac{(k-1)^2}{4(s+1)} - \frac{s+1}{2}$ (其中 $s = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor -$

1) ... (2) 式

又 $s = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor - 1 \geq \frac{\left\lfloor \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rfloor + 1}{2} - 1 \geq \frac{(k-1) + (\sqrt{3}-\frac{1}{2})}{2(\sqrt{3}-\frac{1}{2})} - 1$ ，即 $-\frac{s+1}{2} \leq -\frac{k-\frac{3}{2}+\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-\frac{1}{2})}$

以及 $\frac{(k-1)^2}{4(s+1)} \leq \frac{(\sqrt{3}-\frac{1}{2})(k-1)^2}{2(k-\frac{3}{2}+\sqrt{3})}$ ，將這兩條件代回(2)式即得所要求。)

又可再化簡為 $(2\sqrt{3} - \frac{3}{2})k^2 + (2\sqrt{3} + 4)k + (-\sqrt{3} - \frac{5}{4}) > 0$ ，將其視作關

於 k 的二次方程會得到判別式是負數，因此此式恆成立。得證。

定理 2： $U_k \leq 2 \left\lfloor \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rfloor + 1$

[證明]

我們只需證 $S_{k,c} \left(\forall c \geq 2 \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil + 1 \right)$ 可以劃分出鈍角三角形劃分即可。先

讓我們回顧一下 **定理 1**：在證明過程所分的第一種情況： $2 \mid c$ 時我們只須

$c \geq \left\lceil \frac{k}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ ，就能讓 D 構出鈍角三角形的劃分，剩下 $\{k, k+1, \dots, k +$

$\frac{1}{2}c - 1\} \cup \{k+c, k+c+1, \dots, k+2c-1\}$ ，將其看作是 $S_{k, \frac{c}{2}}$ 的較大 c

個數同時加上 $\frac{c}{2}$ 。由**引理 2** 知當 $\frac{c}{2} \geq \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ 此集合可構出鈍角三角形的

劃分，即當 c 為不小於 $2 \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ 之偶數時 $S_{k,c}$ 存在鈍角三角形的劃分。而

在第二種情況 $2 \nmid c$ 時當 $c \geq \left\lceil \frac{k}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ 帶入條件式***中亦可知 D 能構出

鈍角三角形的劃分，剩下 $\{k, k+1, \dots, k + \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}\} \cup \{k+c, k+c +$

$1, \dots, k+2c-2\}$ ，將其看作是 $S_{k, \frac{c-1}{2}}$ 的較大 $c-1$ 個數同時加上 $\frac{c}{2} + \frac{1}{2}$ 。

綜合**引理 2 (強形式)** 以及 **引理 1**，知當 $\frac{c-1}{2} \geq \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil$ 此集可構出鈍角三

角形的劃分，即 c 為不小於 $2 \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil + 1$ 之奇數時， $S_{k,c}$ 存在鈍角三角形

的劃分。

綜上所述， $\forall c \geq 2 \left\lceil \frac{k-1}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}} \right\rceil + 1$ ， $S_{k,c}$ 可以劃分出鈍角三角形。

定理 3: $U_k \leq \frac{10-\sqrt{20}}{\sqrt{20}-1} k$

[證明]

在 **定理 2** 的取法中，我們可以看作是將 $A_{k,n}, B_{k,n}, C_{k,n}$ 各分成三組，依序取 $\{(0, 2, 3), (1, 4, 5)\}$ 進行歸納。現在改成各分成四組，接著依序取 $\{(0, 4, 5), (1, 10, 11), (2, 6, 8), (3, 7, 9)\}$ 進行歸納。也就是考慮以下：

設 $n = 4m$ 代入：

(1) 考慮 $D_1 = \{k + m, k + m + 1, \dots, k + 2m - 1,$

$$k + 10m, k + 10m + 1, \dots, k + 11m - 1,$$

$$k + 11m, k + 11m + 1, \dots, k + 12m - 1\}$$

$$\{(k + m + t, k + 10m + t, k + 11m + t)\}$$

由於 $(k + m + t) + (k + 10m + t) > (k + 11m + t)$ ，故能形成三角形。

能形成鈍角等價於 $20m^2 > (k + t)^2 \quad \forall 0 \leq t \leq m - 1$ 。

(2) 考慮 $D_2 = \{k + 2m, k + 2m + 1, \dots, k + 3m - 1,$

$$k + 6m, k + 6m + 1, \dots, k + 7m - 1,$$

$$k + 8m, k + 8m + 1, \dots, k + 9m - 1\}$$

分成三元子集 $\{(k + 2m + t, k + 6m + t, k + 8m + t)\}$

由於 $(k + 2m + t) + (k + 6m + t) > (k + 8m + t)$ ，故能形成三角形。

能形成鈍角等價於 $24m^2 > (k + t)^2 \quad \forall 0 \leq t \leq m - 1$ 。

(3) 考慮 $D_3 = \{k + 3m, k + 3m + 1, \dots, k + 4m - 1,$

$$k + 7m, k + 7m + 1, \dots, k + 8m - 1,$$

$$k + 9m, k + 9m + 1, \dots, k + 10m - 1\}$$

分成三元子集 $\{(k + 3m + t, k + 7m + t, k + 9m + t)\}$

由於 $(k + 3m + t) + (k + 7m + t) > (k + 9m + t)$ ，故能形成三角形。

能形成鈍角只需 $(44 - \sqrt{96})m > (2 + \sqrt{96})k$ 。

(4) 考慮 $D_4 = \{k, k+1, \dots, k+m-1,$

$$k+4m, k+4m+1, \dots, k+5m-1,$$

$$k+5m, k+5m+1, \dots, k+5m-1\}$$

再令 $m = 2u$ 代入：

分成三元子集 $\{(k+u+t, k+10u+t, k+11u+t)\}$

由於 $(k+u+t) + (k+10u+t) > (k+11u+t)$ ，故能形成三角形。

能形成鈍角只需 $20u^2 > (k+t)^2 \quad \forall 0 \leq t \leq u-1$ 。

遞降回 $\{k, k+1, \dots, k+s\} \cup \{k+8u, k+8u+1, \dots, k+8u+2s+1\}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{20}-1}k - 1 \leq s \leq \frac{2}{\sqrt{20}-1}k, \text{ 這就有 } s < k-1\right),$$

將其分成 $\{(k+t, k+8u+t, k+8u+t+s+1)\} \quad (t = 0, 1, \dots, s)$ 。

能形成三角形等價於 $(k+t) + (k+8u+t) > (k+8u+t+s+1)$ ，

鈍角： $s^2 + (2k+16u+2t+2)s + (2k+16u+2t+1 - (k+t)^2) > 0$ ，

左式在 t 最大時取得最小值，故帶入 $t = s$ ，可以得到 $16u > \frac{(k-1)^2}{s+1} - (s +$

$1)$ ，右式在 s 最小時取得最大值，故帶入 $s = \frac{1}{\sqrt{20}-1}k - 1$ ，化簡可以得到

$$\text{僅需 } 16u > (\sqrt{20}-1)k - \frac{1}{\sqrt{20}-1}k。$$

以上條件式僅需 $n > \frac{10-\sqrt{20}}{\sqrt{20}-1}k$ 即可成立。

4.3.2. 實際值以及構造

首先我們由 **引理 3** 給出的不等式先估計，並給出構造：

$$(1) \quad M_3, M_4 \geq 2$$

$S_{3,2}$ 可做出如 $\{(3, 5, 7), (4, 6, 8)\}$ 的鈍角三角形劃分

$S_{4,2}$ 可做出如 $\{(4, 6, 8), (5, 7, 9)\}$ 的鈍角三角形劃分

(2) $M_5 \geq 2$

雖然不等式推得下界為 2，但我們發現 $S_{5,2}$ 是不存在鈍角三角形的劃分的。

考慮 $S_{5,2}$ 的任一三元集劃分：

(I) 5, 6 被分至同一組

由於 5, 6, 7 不能形成鈍角三角形，故 7 被分在另一組

但此時另一組最短兩邊平方和至少是 $49 + 56 > 100$ ，不能形成鈍角

(II) 5, 6 不在同一組

此時 6 那組最短兩邊平方和至少是 $36 + 49 > 81$ ，知只能是 6, 7, 10

另一組為 5, 8, 9 不能形成鈍角

綜上得 $M_5 \geq 3$

(3) $M_5, M_6, M_7 \geq 3$

$S_{5,3}$ 可做出如 $\{(5, 10, 12), (6, 8, 11), (7, 9, 13)\}$ 的鈍角三角形劃分

$S_{6,3}$ 可做出如 $\{(6, 11, 13), (7, 9, 12), (8, 10, 14)\}$ 的鈍角三角形劃分

$S_{7,3}$ 可做出如 $\{(7, 12, 14), (8, 10, 13), (9, 11, 15)\}$ 的鈍角三角形劃分

(4) $M_8, M_9, M_{10} \geq 4$

我們沿用構造 $S_{5,3}$ 時的劃分的想法易做出：

$S_{8,4} : \{(8, 12, 16), (9, 15, 18), (10, 13, 17), (11, 14, 19)\}$

$S_{9,4} : \{(9, 13, 17), (10, 16, 19), (11, 14, 18), (12, 15, 20)\}$

而劃分 $S_{10,4}$ 時必須改變模式：

$S_{10,4} : \{(10, 16, 19), (11, 14, 18), (12, 17, 21), (13, 15, 20)\}$

(5) $M_{11}, M_{12} \geq 5$

我們沿用構造 $S_{10,4}$ 時的劃分的想法易做出：

$S_{11,5} : \{(11, 16, 21), (12, 19, 23), (13, 17, 22), (14, 20, 25), (15, 18, 24)\}$

$$S_{12,5}: \{ (12, 17, 22), (13, 20, 24), (14, 18, 23), (15, 21, 26), (16, 19, 25) \}$$

$$(6) \quad M_{13}, M_{14}, M_{15} \geq 6$$

一樣沿用構造 $S_{10,4}$ 時的劃分的想法易做出：

$$S_{13,6}: \left\{ \begin{array}{l} (13, 19, 25), (14, 20, 26), (15, 23, 28), (16, 21, 27) \\ (17, 24, 30), (18, 22, 29) \end{array} \right\}$$

$$S_{14,6}: \left\{ \begin{array}{l} (14, 20, 26), (15, 21, 27), (16, 24, 29), (17, 22, 28) \\ (18, 25, 31), (19, 23, 30) \end{array} \right\}$$

雖然不等式推得 $M_{15} \geq 6$ ，但我們發現 $S_{15,6}$ 是不存在鈍角三角形的劃分的。

為方便證明，在此先引入數 $d_{D'}$ ：其值為集合 D' 中所有三角形最長邊的平方減去另兩邊平方的總和。數 L_a ：其值為以 a 為鈍角三角形最短邊長的所有可能三角形中最長邊的平方減去另兩邊平方的最小值。易知若 T 是鈍角三角形的劃分，則對其任一子集 T' ，都必須要有 $d_{T'} \geq |T'|$ 以及 $\sum_{a \in T'} L_a \leq 3d_{T'}$ 。

考慮 $S_{15,6}$ 的任一三元集劃分：

(I) 存在某一組數不為 (A, B, C) 的形式

易驗證不可能有 $(B, B, C), (B, C, C)$ 形式的組，此時不為

(A, B, C) 的組，其形式只能為 $(A, A, B), (A, A, C), (A, B, B), (A, C, C)$ ，

由於 A, B, C 元素各數相等，易計算知只能為 $(A, B, B), (A, C, C)$ 此二

種形式。考慮 (A, B, B) 這組數，易算出其只能為 $(15, 21, 26)$ ，再考

慮 (A, C, C) 這組數，此時易算出其只能為 $(16, 27, 32)$ 或 $(17, 27, 32)$ 。

我們考慮剩下的數組所定義出的 $d_{D'}$ 值，計算知其 < 0 ，矛盾！

(II) 任一組數皆為 (A, B, C) 的形式

則我們有 $\sum_{a=15}^{20} L_a = d_T$ ，但計算知 $L_{20}=16, L_{19}=10, L_{18}=12, L_{17}=11,$

$L_{16}=9$ ，而 $d_T = (27^2 + 28^2 + \dots + 32^2) - (15^2 + 16^2 + \dots + 26^2) =$

$53 < \sum_{a=15}^{20} L_a$ ，矛盾！

$$S_{15,7} : \left\{ (15, 22, 29), (16, 23, 30), (17, 24, 31), (18, 27, 33) \right\} \\ , (19, 25, 32), (20, 28, 35), (21, 26, 34) \right\}$$

$$(7) \quad M_{16}, M_{17} \geq 7$$

沿用構造 $S_{15,7}$ 時的劃分的想法易做出：

$$S_{16,7} : \left\{ (16, 23, 30), (17, 24, 31), (18, 25, 32), (19, 28, 34) \right\} \\ , (20, 26, 33), (21, 29, 36), (22, 27, 35) \right\}$$

$S_{17,7}$ 時我們人工構造出：

$$S_{17,7} : \left\{ (17, 29, 34), (18, 31, 36), (19, 23, 30), (20, 28, 35) \right\} \\ , (21, 24, 32), (22, 26, 33), (25, 27, 37) \right\}$$

要注意到 $S_{17,7}$ 的劃分法相當特殊，這原因可合理推測是因為 d_T 值太小且無法找到良好的匹配。

由於更大的集合想要構造出鈍角三角形的劃分是不容易的，我們在此定義：對集合 $S_{k,n}$ 的某組三元子集劃分，若其中恰有 r 組三元子集裡的三個數不能構成鈍角三角形的三邊長，則稱這組劃分為 r -偽劃分。原始命題即是要找出有 0-偽劃分的所有 n 值。

然後為方便接下來討論，我們考慮了不一樣的刻劃鈍角三角形的方式，我們希望找的是一個能夠分類並有效計算鈍角三角形的定義，所以自然有以下定義：對給定的非負整數 a, y ($y < a$)，若存在整數 x 使得 $(a, a+x+y, 2a+x)$ 為鈍角三角形，我們取 $x = \max\{-y+1, \text{使得 } (a, a+x'+y, 2a+x') \text{ 為鈍角三角形的最小整數 } x'\}$ ，並稱這三元數對為 (a, y) 本原解。

引理 4: O_a 中所有元素可由 **引理 1** 及所有 (a, y) 本原解生成，亦即對任意 O_a 中所有元素 (a, b, c) ，總可找到非負整數 y ($y < a$) 以及正整數 k 使得 $a+x+y+k=b$, $2a+k=c$ (而稱這種鈍角三角形的三元數對為 (a, y) 生成解)。

並且若 $(a, y) \neq (a', y')$ ，則任一 (a, y) 生成解都與任一 (a', y') 生成解相異。

我們同時宣稱 $x = \max\{-y+1, \left\lceil \frac{y^2 + 2ay - 2a^2}{2a - 2y} \right\rceil + 1\}$ 。

[證明]

第一個宣稱由 (a, y) 本原解的定義直接得到。

首先若 $(a, y) \neq (a', y')$ ，但有某一組 (a, y) 生成解 $= (a', y')$ 生成解，亦即存在 x, x' 使 $(a, a+x+y, 2a+x) = (a', a'+x'+y', 2a'+x')$ ，但由 $a=a'$ 和 $2a+x=2a'+x'$ 得到 $(a, x, y) = (a', x', y')$ ，矛盾。我們定義：鈍角三角形 $(a, b, c) \sim$ 鈍角三角形 (a, d, e) 若且唯若：如果兩鈍角三角形最長兩邊差 $c-b = e-d$ 。那麼由此引理可以把全體鈍角三角形分成等價類(equivalent class)：

- 1) (reflexivity) 明顯鈍角三角形 $(a, b, c) \sim$ 鈍角三角形 (a, b, c) 。
- 2) (symmetry) 如果鈍角三角形 $(a, b, c) \sim$ 鈍角三角形 (a, d, e) ，這代表最長兩邊差 $c-b = e-d$ ，所以 $e-d = c-b$ ，故也有鈍角三角形 $(a, d, e) \sim$ 鈍角三角形 (a, b, c) 。
- 3) (transitivity) 如果鈍角三角形 $(a, b, c) \sim$ 鈍角三角形 (a, d, e) ，鈍角三角形 $(a, d, e) \sim$ 鈍角三角形 (a, f, g) ，代表最長兩邊差 $c-b = e-d = g-f$ ，故鈍角三角形 $(a, b, c) \sim$ 鈍角三角形 (a, f, g) 。

另外由 $(2a+x)^2 > (a+x+y)^2 + (a)^2$ ，以及 $a+x+y > a$ 得到 x 的值。

定理 4: 給定 k, n ，若 $S_{k,n}$ 存在正規劃分，則存在非負整數 $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ ，使得

$$y_i < k + i \text{ (對所有 } i), \sum y_i = \frac{(k-2n-1)n}{2}, \sum x_i \leq \frac{(-2k+3n-1)n}{2}。$$

[證明]

我們考慮 $S_{k,n}$ 的這組正規劃分，注意到 (a,y) 生成解的最長兩邊差即為 $a-y$ ，因此會有 $\sum(k+i-y_i) = C$ 中數總和 $- B$ 中數總和。並且由於我們取本原解時 x 是使其為鈍角三角形的最小整數，再由引理 1 我們知道必定有

$$\sum x_i \leq \frac{(-2k+3n-1)n}{2} \quad (\text{否則由鴿籠原理將有至少一個 } x_i \text{ 不是 } (k+i, y_i))$$

本原解對應到的 x 值，這時這組數不可能是鈍角三角形)。

$$(8) \quad M_{18}, M_{19}, M_{20} \geq 8$$

$$S_{18,8} : \left\{ (18, 28, 35), (19, 26, 34), (20, 29, 37), (21, 27, 36), \right. \\ \left. , (22, 32, 39), (23, 30, 38), (24, 33, 41), (25, 31, 40) \right\}$$

$$S_{19,8} : \left\{ (19, 29, 36), (20, 27, 35), (21, 30, 38), (22, 28, 37) \right. \\ \left. , (23, 33, 40), (24, 31, 39), (25, 34, 42), (26, 32, 41) \right\}$$

$S_{20,8}$ 我們目前證明出其不存在正規劃分：這邊要先使用到定理 3。我們

使用歸謬法，假設有正規劃分，先計算出本原解：

$y \backslash a$	20	21	22	23	24	25	26	27
17							26,34,43	27,32,42
16				23,35,42	24,33,41	25,31,40	26,29,39	27,28,39
15	20,38,43	21,34,40	22,32,39	23,30,38	24,28,37	25,27,37	26,27,38	27,28,40
14	20,31,37	21,29,36	22,27,35	23,25,34	24,25,35	25,26,37	26,27,39	27,28,41
13	20,28,35	21,24,32	22,23,32	23,24,34	24,25,36	25,26,38		
12	20,22,30	21,22,31	22,23,33					

其中表格劃掉者代表此格對應到的本原解最長邊已大於 43 (另外 $y \geq 18$ 的橫列所有對應到的本原解最長邊都大於 43，故略去)。我們計算每個 a (指正規劃分中的鈍角三角形最短邊) 對應到的最大可能 y 值，並且由於所有 y_i 總和為 124，可以知道個別對應到的最小可能 y 值。因此正規劃分中所有鈍角三角形必由表中所生成。

下面以 y_i' 表示 $y_i - 15$ 的值，那麼所有 y_i' 總和為 4。接著討論如下：

- (I) 正的 y_i' 總和為 7。此時代表正規劃分中最短邊為 23, 24, ..., 27 的鈍角三角形由 (23, 35, 42), (24, 33, 41), (25, 31, 40), (26, 34, 43), (27, 32, 42) 生成，但這是不可能的，因為 (23, 35, 42), (26, 34, 43), (27, 32, 42) 這兩組鈍角三角

形最長邊已為 43，這代表最後生成的鈍角三角形必有三組其最長邊至少為 42，矛盾。

(II) 正的 y_i '總和為 6。

此時考慮正規劃分中最短邊為 23,24,...,27 的鈍角三角形，再分以下情況：

(i) 它們由(23,30,38),(24,33,41),(25,31,40),(26,34,43),(27,32,42)生成。

那麼正規劃分中所有最長邊為 40,41,42,43 之一的鈍角三角形就是(24,33,41),(25,31,40),(26,34,43),(27,32,42)這四組，因此正規劃分中最短邊為 20,21 的鈍角三角形不可能由(20,38,43),(21,34,40)生成，這代表這兩組鈍角三角形對應到的 y_i '值都不超過-1。又所有 y_i '總和為 4，故這兩組鈍角三角形對應到的 y_i '值都是-1。因此正規劃分中所有三角形由(20,31,37), (21,29,36), (22,32,39), (23,30,38),(24,33,41),(25,31,40),(26,34,43),(27,32,42) 生成，並由最長邊的關係可看出正規劃分必正好是這幾組鈍角三角形，但(20,31,37),(25,31,40)有一個邊長重複，矛盾。

(ii) 它們由(23,35,42),(24,28,37),(25,31,40),(26,34,43),(27,32,42)生成。

那正規劃分中所有最短邊為 23,26,27 之一的鈍角三角形就是(23,35,42), (26,34,43),(27,32,42)，這代表最後生成的鈍角三角形必有三組其最長邊至少為 42，矛盾。

(iii) 它們由(23,35,42),(24,33,41),(25,27,37),(26,34,43),(27,32,42)生成。

那正規劃分中所有最短邊為 23,26,27 之一的鈍角三角形就是(23,35,42), (26,34,43),(27,32,42)，這代表最後生成的鈍角三角形必有三組其最長邊至少為 42，矛盾。

(iv) 它們由(23,35,42),(24,33,41),(25,31,40),(26,29,39),(27,32,42)生成。

那麼正規劃分中所有最長邊為 39,40,41,42,43 之一的鈍角三角形

就是由(23,35,42),(24,33,41),(25,31,40),(26,29,39),(27,32,42)生成。

此時由於所有 y_i' 總和為 4，因此非正的 y_i' 總和為 -2，這代表因

此正規劃分中至少有一組鈍角三角形由

(20,38,43),(21,34,40),(22,32,39)所生成，但造成又多出一組最長

邊不小於 39 的鈍角三角形，矛盾。

(v) 它們由(23,35,42),(24,33,41),(25,31,40),(26,34,43),(27,28,39)生成。

那麼正規劃分中所有最長邊為 39,40,41,42,43 之一的鈍角三角形

就是由 (23,35,42),(24,33,41),(25,31,40),(26,34,43),(27,28,39)生成。

同(iv)討論，矛盾。

(III) 正的 y_i' 總和為 5。

此時非正的 y_i' 總和為 -1。又由於正規劃分有一組鈍角三角形最長邊

為 36，此時這組鈍角三角形必由(21,29,36)生成。這代表正規劃分中

所有最短邊為 20,22 的鈍角三角形就是由(20,38,43),(22,32,39)生成。

這時(20,38,43)必在正規劃分中，因此正規劃分中最短邊為 26 者必不

為(26,34,43)生成。再分以下情況：

(i) 正規劃分中最短邊為 26 者為(26,29,39)生成。

此時考慮正規劃分中鈍角三角形最長邊分別為 37,38 的那兩組，

他們不可能被生成(否則所有 y_i' 總和小於為 4)。

(ii) 正規劃分中最短邊為 26 者為(26,27,37)生成。

此時由所有 y_i' 總和為 4 可知正規劃分恰由(20,38,43), (21,29,36),

(22,32,39),(23,35,42),(24,33,41),(25,31,40), (26,27,37),(27,32,42)

生成，這代表最後生成的鈍角三角形必有三組其最長邊至少為 42，矛盾。

(IV) 正的 y_i 總和為 4。

此時非正的 y_i 總和為 0。但是這代表正規劃分中最長邊為 36 者不可能被生成，矛盾。

綜上， $S_{20,8}$ 不存在正規劃分。並且由上面證明我們馬上可得到 $S_{20,8}$ 的一組 1-偽劃分(非鈍角三角形者標示紅色)：

$$S_{25,10} : \left\{ (20, 28, 37), (21, 29, 36), (22, 32, 39), (23, 30, 38) \right. \\ \left. , (24, 33, 41), (25, 31, 40), (26, 34, 43), (27, 35, 42) \right\}$$

(9) $M_{21}, M_{22} \geq 9$

$$S_{21,9} : \left\{ (21, 30, 39), (22, 36, 43), (23, 32, 40), (24, 34, 42), (25, 38, 46) \right. \\ \left. , (26, 31, 41), (27, 35, 45), (28, 37, 47), (29, 33, 44) \right\}$$

$S_{21,9}$ 我們僅能給出一組 1-偽劃分(非鈍角三角形者標示紅色)：

$$S_{21,9} : \left\{ (22, 37, 43), (23, 32, 40), (24, 33, 41), (25, 36, 44), (26, 39, 47) \right. \\ \left. , (27, 31, 42), (28, 35, 46), (29, 34, 45), (30, 38, 48) \right\}$$

(10) $M_{23}, M_{24}, M_{25} \geq 10$

$$S_{23,10} : \left\{ (23, 33, 43), (24, 34, 44), (25, 40, 48), (26, 36, 45), (27, 38, 47) \right. \\ \left. , (28, 42, 51), (29, 35, 46), (30, 39, 50), (31, 41, 52), (32, 37, 49) \right\}$$

$$S_{24,10} : \left\{ (24, 41, 48), (25, 38, 46), (26, 34, 44), (27, 35, 45), (28, 39, 49) \right. \\ \left. , (29, 43, 52), (30, 36, 47), (31, 40, 51), (32, 42, 53), (33, 37, 50) \right\}$$

$S_{25,10}$ 我們僅能給出一組 1-偽劃分(非鈍角三角形者標示紅色)：

$$S_{25,10} : \left\{ (25, 42, 49), (26, 39, 47), (27, 35, 45), (28, 36, 46), (29, 40, 50) \right. \\ \left. , (30, 44, 54), (31, 37, 52), (32, 38, 51), (33, 41, 53), (34, 43, 48) \right\}$$

(11) $M_{26} \geq 11$

$S_{26,11}$:

$$\left\{ (26, 37, 48), (27, 43, 51), (28, 39, 49), (29, 44, 53), (30, 45, 55), (31, 38, 50) \right. \\ \left. , (32, 47, 57), (33, 40, 52), (34, 41, 54), (35, 46, 58), (36, 42, 56) \right\}$$

再來更大的集合想要構造出鈍角三角形的劃分是難的，所以討論暫到此為止。

定理 5: $M_k \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$

[證明]

對集合 $S_{k,n}$ ，我們證明 $n = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ 時此集合必有鈍角三角形的劃分

考慮 $\{(k+t, k+n+t, k+2n+t)\} (0 \leq t \leq n-1)$ 。

因 $(k+t) + (k+n+t) > (k+2n+t)$ ，能形成三角形。

為鈍角等價於 $(k+2n+t)^2 > (k+n+t)^2 + (k+t)^2$ ，又等價於

$$(3n - (k+t))(n + (k+t)) > 0$$

這要求 $3n - (k+t) > 0$ ，即 $2n+1 > k$ ，就是 $n \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ ，故上式成立，

因此此劃分必是鈍角三角形劃分。

(1) $U_3, U_4 = 2$

首先 $S_{3,2}$ 以及 $S_{4,2}$ 我們已於上方給出了構造，而 $n=3$ 時分別可以給出：

$\{(3, 8, 10), (4, 6, 9), (5, 7, 11)\}$ 以及 $\{(4, 9, 11), (5, 7, 10), (6, 8, 12)\}$ 。

我們用數學歸納法證明當 n 不小於 2 時 $S_{k,n}$ 有鈍角三角形劃分，其中 $k=3$ 或 4。

考慮 $n \geq 4$ 時：分成 $\{(k + \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor + t, k+n+2\left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor + t, k + \left\lfloor \frac{5}{2}n \right\rfloor + t)\}$

其中 $k=3$ 或 4, $t=0, \dots, \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor - 1$ 。

因 $(k + \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor + t) + (k+n+2\left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor + t) > (k + \left\lfloor \frac{5}{2}n \right\rfloor + t)$ ，故均為三角形能形成鈍角：

$$(k + \left\lfloor \frac{5}{2}n \right\rfloor + t)^2 > (k + \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor + t)^2 + (k+n+2\left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor + t)^2。$$

在 n 為偶數時又等價於 $(k + \frac{5}{2}n + t)^2 > (k + \frac{1}{2}n + t)^2 + (k+2n+t)^2$ ，

又等價於 $2n^2 > (k+t)^2 \forall 0 \leq t \leq \frac{1}{2}n - 1$ ，這只需 $(\sqrt{2} - \frac{1}{2})n + 1 > k$ ，

由 Archimedes' theorem 知 D 可構出鈍角三角形的劃分。

n 為奇數：

$$\left((k - \frac{1}{2}) + \frac{5}{2}n + t\right)^2 > \left((k - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}n + t\right)^2 + ((k - 1) + 2n + t)^2 \text{ 又等}$$

價於 $2n^2 + 2n > (k+t-1)^2 \forall 0 \leq t \leq \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$ ，計算知 $n \geq 5$ 時此式

能成立。故 D 可構出鈍角三角形的劃分。

接著我們由歸納假設知 $S_{k, \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor}$ 有鈍角三角形劃分，將他們用 **引理 1** 將其

他三元數對變換回 $S_{k,n}$ 中(取引裡中的 $k = \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$)，我們便得到了

$\{k, k+1, \dots, k+3n-1\}$ ($k = 3$ 或 4) 的鈍角三角形的劃分。

(2) $U_5, U_6, U_7 = 3$

首先我們先證明一個引理：

引理 5: 給定 k ，若存在 $x \leq k-1$ ，使得 $S_{k,x}$ 存在正規劃分，則對所有 $x \leq x' \leq k-1$ ， $S_{k,x'}$ 均存在正規劃分。

[證明]

我們只須證明若對於 $y \leq k-2$ ， $S_{k,y}$ 存在滿足鈍角三角形劃分，則

$S_{k,y+1}$ 亦是即可。假設 $D = \{(a_i, b_i, c_i) | i = 1 \sim y\}$ 是 $S_{k,y}$ 一組滿足性質的鈍角三角形的劃分，我們考慮： $D' = \{(a_i + 1, b_i + 2, c_i + 3) | i = 1, \dots, y \cup \{(k, k+y+1, k+2y+2)\}$ ，易見他構成了 $S_{k,y+1}$ 的一組滿足性質的鈍角三角形的劃分，故得證。

在上面的例子中，我們對於 $S_{5,3}, S_{6,3}, S_{7,3}$ 所給出的鈍角三角形的劃分都是正規劃分，所以我們可用 **引理 5** 給出 $S_{5,4}, S_{6,4}, S_{6,5}, S_{7,4}, S_{7,5}, S_{7,6}$ 的鈍角三角形的劃分。而

$\{(5, 11, 15), (6, 13, 17), (7, 10, 16), (8, 14, 19), (9, 12, 18)\}$ 、

$\{(5, 16, 20), (6, 13, 18), (7, 11, 17), (8, 12, 19), (9, 14, 21), (10, 15, 22)\}$ 、

$\{(6, 14, 19), (7, 14, 20), (8, 12, 19), (9, 15, 21), (10, 17, 22), (11, 16, 20)\}$ 、

分別是 $S_{5,5}, S_{5,6}, S_{6,6}$ 的鈍角三角形的分割。以下仍用數學歸納法：

接下來我們考慮 $n \geq 7$ 的情形：

分成 $\{(k + \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor + t, k + n + 2\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor + t, k + \lfloor \frac{5}{2}n \rfloor + t)\}$

其中 $k = 5$ 或 6 或 $7, t = 0, \dots, \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor - 1$ 。

因 $(k + \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor + t) + (k + n + 2\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor + t) > (k + \lfloor \frac{5}{2}n \rfloor + t)$ ，故均為三角形能形成鈍角：

$$(k + \lfloor \frac{5}{2}n \rfloor + t)^2 > (k + \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor + t)^2 + (k + n + 2\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor + t)^2。$$

在 n 為偶數時又等價於 $(k + \frac{5}{2}n + t)^2 > (k + \frac{1}{2}n + t)^2 + (k + 2n + t)^2$ ，

又等價於 $2n^2 > (k + t)^2 \forall 0 \leq t \leq \frac{1}{2}n - 1$ ，這只需 $(\sqrt{2} - \frac{1}{2})n + 1 > k$ ，

由 Archimedes' theorem 知 D 可構出鈍角三角形的劃分。

n 為奇數：

$$\left((k - \frac{1}{2}) + \frac{5}{2}n + t\right)^2 > \left((k - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}n + t\right)^2 + ((k - 1) + 2n + t)^2$$

又等價於 $2n^2 + 2n > (k + t - 1)^2 \forall 0 \leq t \leq \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$ ，計算知 $n \geq 7$ 時

此式能成立。故 D 可構出鈍角三角形的劃分。

接著我們由歸納假設知 $S_{k, \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor}$ 有鈍角三角形劃分，將他們用 **引理 1** 將其

他三元數對變換回 $S_{k, n}$ 中(取引裡中的 $k = \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$)，我們便得到了

$\{k, k + 1, \dots, k + 3n - 1\}$ ($k = 5$ 或 6 或 7) 的鈍角三角形的劃分，綜上得證。

伍、 研究結果

一、給出原題證明並且構造。

$$\text{二、} \frac{-(6k-3)+\sqrt{141(2k-1)^2+484}}{44} \leq M_k \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

$$\text{三、} \frac{-(6k-3)+\sqrt{141(2k-1)^2+484}}{44} \leq U_k \leq \frac{10-\sqrt{20}}{\sqrt{20}-1} k$$

四、利用引理給出的不等式找出前幾個 M_k 的值，給出了 $M_2 \sim M_{17}$ 的值，並且最大作出到 M_{26} 的值。

五、利用引理和定理給出前幾個 U_k 的值($k=2,3,\dots,7$)。

六、給出全體鈍角三角形的一個等價類劃分，針對正規劃分給出限制。

陸、 討論

一、目前有個直觀的想法： U_k 、 M_k 都遞增。

現在發現當以不等式估出的 M_k 增加時，對於其第一個增大的值 k ， S_{k, M_k} 都較易構造出來，如果我們證明出遞增性，那麼馬上把許多 M_k 值的範圍誤差之差壓到只剩 1。

二、計算 M_k 。

由於當我們將原命題轉化為圖論形式時，發現其為 3-dimensional matching 的某類特例，而這命題的一般情況是 NP 完全的，因此實難用計算機輔助證明。

三、研究 $S_{k,n}$ 可構成幾種相異的鈍角三角形劃分。

當我們把 $S_{k,1}$ 、 $S_{k,2}$ 、...、 $S_{k,n}$ 、... 的值列出，則第一個不為零的值即是 M_k ， U_k 則是使後無窮項皆不為零的最小值，雖然這讓難度增大許多，不過卻可以觀察一整個數列的規律。

柒、 結論

目前的研究我們已估計出， U_k 、 M_k 的範圍，但是兩者是以不同方法解出，這可能刻畫出 U_k 的複雜程度，也可能暗示出 U_k 的劃分方法是固定的，所以他的範圍沒辦法做到下修。

在給出 M_k 得更好的上界時，我們使用的是另一種不同的劃分方法，雖然他無法推到更大的情況，卻仍大幅的降低了範圍大小，這讓我們開始探討： U_k 、 M_k 是否在夠大的數時會不相等？

捌、 參考資料

- [1] 解題的藝術網站 <http://www.artofproblemsolving.com/>。
- [2] Imo-official, 52nd IMO Problem Shortlist with Solutions, 76pages, 2012。

評語

本件作品由一個競賽問題出發，討論其推廣後的結果。本主題有相當的難度，並有相當的數學味道。作者的數學有成熟度，解決問題的技巧也相當漂亮。然目前所得的估計上下界之間仍有差距，建議可以試圖尋找特別的類，使得可以真正達到上界或下界。