2014 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010037

參展科別　數學

作品名稱　跳線減距問題探討

得獎獎項　大會獎：三等獎

候補作品：1

就讀學校　臺北市立西松高級中學

指導教師　呂雲瑞、王欣慈

作者姓名　劉穎立

關鍵字　跳線、黏合圖形、直徑

作者簡介

我是劉穎立，目前就讀臺北市立西松高中國中部三年級，從小就對數學方面相當有興並閱讀許多相關書籍，也經常參與各種競賽，雖然成果不一定令人滿意，但也讓我累積許多經驗及知識。參加了呂雲瑞老師指導的自然科學研究社之後，我開始參加科展及進行各種研究，也開始有些成果，從中學到了許多做研究的寶貴經驗。

摘要

線段上距離最遠兩點的距離，稱為此圖形的直徑。如果將線段上某兩點用一條跳線連接起來，使得行走路徑能經由跳線快速移動到另一點，以縮短這個線段的直徑。則跳線要加在哪裡，才能使直徑變得最短？會變成多少？

將線段想像成一條可彎曲的繩子，假設跳線將兩跳點的距離縮短為0，就好像把繩子上的兩個點「黏」起來，變成一個黏合圖形。藉由黏合圖形，我們研究跳線設置的最佳位置(能讓直徑變的最短)以及最短直徑,得出在線段上加1條、2條和3條跳線時，最短直徑分別為$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$，在線段上加k條跳線、黏合圖形中一個和二個節點時，最短直徑皆為$\frac{1}{k+1}$。

Abstract

The distance between two points on a line segment is the length of path along the line from one point to the other. The longest distance is called a "diameter" of the line segment. A "jump-line" added to line segment acts like a shortcut shortens distance between the two points connecting to it. Other distances might be shortened as well if the path travels through the shortcut. We are interested in where to add jump-lines to get the shortest diameter.

Considering a line segment as a rope, we bind together the two points connected by a jump-line to form a "binding graph". Since the graph is made by a single rope, it must be an Eulerian path. We found it is more intuitive working on the binding graph than the original line segment.

We started by adding jump-line one by one. Assume the length of the line segment is 1, we found that the shortest diameter is $\frac{1}{2}$ when adding 1 jump-line, $\frac{1}{3}$ for 2 jump-lines and $\frac{1}{4}$ for 3. Then we utilized the concept of "vertices" on graphs to find the general cases of adding any number of jump-lines. We found that the shortest diameter is $\frac{1}{k+1}$ when adding k jump-lines when the binding graph has one or two vertices.

This research could be used in finding the best locations of fast transportation lines in order to minimize the longest trip between cities. The jump-lines are added to short-circuit points just like fast transportation lines to shorten distance between cities.

壹、　前言

一、　研究動機

我爸爸在北京工作，一年會回臺灣幾次。從前沒有直航班機，所以每次來回都要多次轉換不同交通工具。像是從臺灣到北京，要先從家裡搭計程車至松山機場，再從松山機場搭巴士到桃園機場，再搭飛機到香港，再從香港轉飛機到北京機場，再乘巴士、再轉計程車才能到辦公室，前後要花將近 12 個小時。兩岸開放直航以後，路徑就簡單快捷了許多，只需從家裡搭計程車到松山機場，再搭飛機直飛北京機場，再搭車到辦公室，前後只要花 5~6 個小時，時間竟然縮短了一半以上！(如下表)

	沒有直航	直航
路徑	家 ↓計程車 松山機場 ↓巴士 桃園機場 ↓飛機 香港 ↓飛機 北京機場 ↓巴士、計程車 辦公室	家 ↓計程車 松山機場 ↓飛機 北京機場 ↓巴士、計程車 辦公室
所花的時間	超過12個小時	5~6個小時

這讓我想到一個問題：從一條線段的一端走到另外一端，原本需要經過整條線段，如果在中間加上幾條跳線(好像直航飛機航線)，使得路徑能夠從某一點經過跳線快速移動到另一點，那麼跳線要加在哪裡，才能使得距離變得最短？

於是，我便開始著手研究這個題目，並從中找出一定的規律。最終目標則是實用化，幫助人們找出高速公路、鐵路及飛航路線的最佳地點，或解決如何設置郵局、服務據點，以造福路線上的所有民眾。

二、 研究目的

可以把一條線段想成是一條路，跳線是交通運輸路線(例如：捷運、高架橋、快速道路、飛機航線等)，研究如何加跳線才能讓最遠兩點之間的距離變的最短，就像是要把交通設施建在哪裡、運輸路線如何規劃才能讓陸上任兩地之間的距離縮的最短，此研究可以找出人們在城鎮設置大眾運輸系統的理想方案。

三、 研究問題

研究線段上加跳線的最佳位置及最短直徑

(一) 黏合圖形以及其與跳線圖形的關係

(二) 直徑可能發生情形探討

(三) 研究在線段上加 1 條跳線的最佳跳線位置及最短直徑

(四) 研究在線段上加 k 條跳線、黏合圖形中一個節點的最佳跳線位置及最短直徑

(五) 研究在線段上加 2 條跳線的最佳跳線位置及最短直徑

(六) 研究在線段上加 k 條跳線、黏合圖形中二個節點的最佳跳線位置及最短直徑

(七) 研究在線段上加 3 條跳線的最佳跳線位置及最短直徑

貳、　研究方法或過程

一、　研究方法

(一) 研究設備及器材

電腦、紙、筆、繩子、曬衣夾

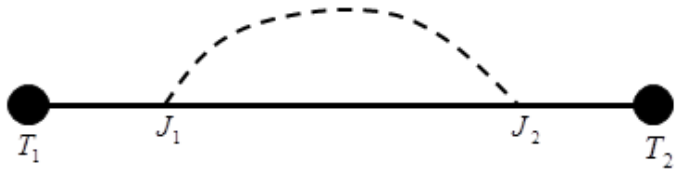
(二) 名詞定義

1. 跳線減距：這個問題稱為「跳線減距」問題。意思是把線段上的兩個點用一條可快速通過的跳線連接起來，以減短線段上各點的距離。

2. 路徑：從一個點沿著線段走到另一個點，所經過的路程稱為一條「路徑」。

3. 距離：線段上兩點間的「距離」，是兩點間最短路徑的長度。

4. **跳線**：一種**可以快速通過的捷徑**。在原有線段上的 2 點加上連線，以改變這兩點的距離，這樣的線稱為「跳線」。為研究方便，設各跳線所連接的兩點距離為 0。其它的兩點間距離也可因路徑經過跳線而改變。如下圖，原本(加跳線前)從 T_1 走到 T_2 只有一種走法，就是直接從 T_1 出發，走直線到達 T_2。但如果在 J_1 和 J_2 二點加上一條跳線(如虛線所示)，連接這二個點，如此一來，從 T_1 走到 T_2 就可以先走至 J_1，再經過跳線到達 J_2，最後走直線到達 T_2，因為走跳線會比直線走來的短，所以加跳線後 T_1 到 T_2 的距離也會縮短。

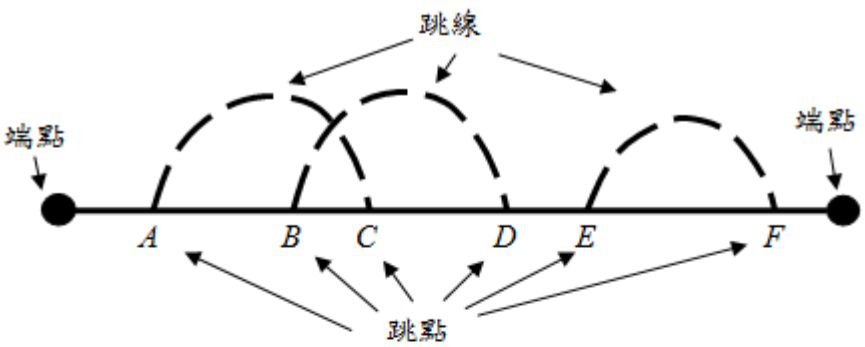


5. 跳點：線段上各跳線所連接的兩個點稱為「跳點」。如上圖，J_1和J_2即為兩跳點。

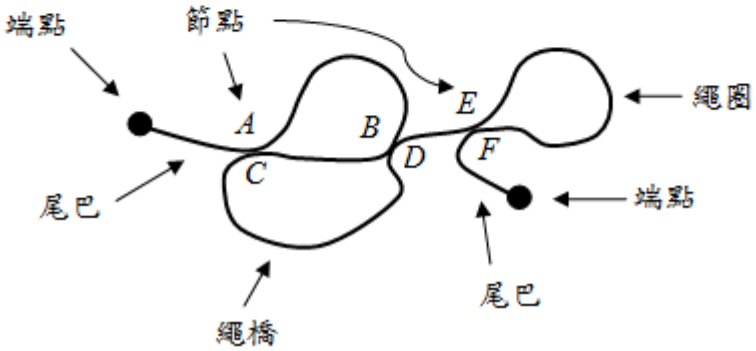
6. 端點：線段的兩端稱為「端點」。如上圖，T_1和T_2即為兩端點。

7. 跳線圖形：在線段上加跳線的圖形，稱為「跳線圖形」。

8. **黏合圖形**：把一線段想像成是一條可彎曲的「繩子」，繩子的兩頭依然稱為「端點」，因為我們設跳線所連接的的兩點距離變為 0，因此可**將每條跳線所連接的兩個跳點分別「黏」起來**，省略跳線所形成的圖形稱為「黏合圖形」。如下圖，將圖中的跳點 A 和 C 黏起來、B 和 D 黏起來、E 和 F 黏起來，就成為一個黏合圖形：



將跳線圖形上每條跳線連接的 2 個跳點分別黏起來，省略跳線，成為黏合圖形。



9. 節點：黏合圖形中，黏合處稱為「節點」。在原跳線圖形中，每條跳線連接 2 個跳點。到了黏合圖形裡，省略了跳線，原跳線所連接的 2 個跳點黏合變成 1 個節點。如上圖，A 和 C 變成同一個節點，B 和 D、E 和 F 亦同。

10. 繩段：一段繩子。

11. 黏合圖形中的路徑：從一個點沿著繩段走到另一個點，所經過的路程稱為一條「路徑」。

12. 黏合圖形中的距離：繩子上兩點間的「距離」，是兩點間最短路徑的長度。

13. 迴路：從一個點經由繩段再回到原出發點所經過的路徑，稱為「迴路」

14. 尾巴：黏合圖形中，若端點不在黏合處，則端點到最近節點之間的繩段稱為「尾巴」，用代號 t 表示。例如上圖中，左邊端點到 AC 節點，及右端點到 EF 節點之間的繩段。

15. 繩圈：黏合圖形中，若有一段由繩段構成的迴路上只有一個節點，則這段繩段就稱為「繩圈」，用代號 c 表示。例如上圖中，從 EF 節點延伸出來的迴路繩段為一個繩圈。

16. 繩橋：黏合圖形中，相鄰兩節點間的繩段稱為「繩橋」，用代號 b 表示。例如上圖中，AC 節點到 BD 節點之間有 3 座繩橋，

    節點到 EF 節點之間有 1 座繩橋。

17. 環：由二座以上的繩橋所圍成的迴路稱為「環」。例如上圖的 AC 節點到 BD 節點之間的任意 2 座繩橋所形成的迴路稱為環。

18. 連線數:黏合圖形中,一個點向外連接的線數稱為該點的「連線數」。除了端點，每個點至少要有 2 個連線數。

19. 總連線數:黏合圖形中,所有節點的連線數總和,稱為「總連線數」。

20. **直徑**：在一個跳線圖形或黏合圖形中最遠的兩點，其距離稱為這個圖形的「直徑」，用代號 d 表示。

21. **最短直徑**：在同一線段上，同一系列的黏合圖形—指定跳線數、指定節點數、指定跳線數及節點數或指定黏合圖形樣式等，**直徑最短的黏合圖形，其直徑稱為「最短直徑」**。用代號 $d_{(k,r)}$ 表示，其中 k 為跳線數，r 為節點數。例如：$d_{(2,1)}$ 就是在線段上加 2 條跳線，黏合圖形中一個節點的最短直徑；$d_{(4,3)}$ 就是在線段上加 4 條跳線，黏合圖形中三個節點的最短直徑。若在相同跳線數、相同節點數又分為好幾種情形，則用代號 $d_{(k,r,m)}$ 表示，m 表示第幾種，例如說：$d_{(3,2,2)}$ 就是在線段上加 3 條跳線，黏合圖形中二個節點、第 2 種情形的最短直徑。

(三) 符號系統：

1. 為了方便辨識,我們通常用 A,B,C,D,E,F 代表跳點和節點；P,Q,R 代表一般點；T_1,T_2 代表端點。

2. 線段上點的位置,我們採用類似數線的表示方法,左邊的端點為 0，右邊端點為 1，右方為正向。

3. 尾巴、繩橋和繩圈的代號分別是用 t 、b 和 c 表示，通常下標是由長度長的排到長度短的，例如說若 2 尾巴在同一節點上，便可設 $t_1 \geq t_2$，若相鄰兩節點間有 3 做繩橋，便可設 $b_1 \geq b_2 \geq b_3$。

4. 直徑可能情形的紀錄方式：

因為黏合圖形中，只會有尾巴(t)、繩圈(c)和繩橋(b)三種繩段，因此直徑發生所在繩段的起訖點一定在尾巴、繩圈或繩橋上，所有排列方式如下(起訖點相反的視為同一種)：

起 / 訖	尾巴（t）	繩圈（c）	繩橋（b）
尾巴（t）	d_{tt}	d_{tc}	d_{tb}
繩圈（c）		d_{cc}	d_{cb}
繩橋（b）			d_{bb}

如果在起訖點相同時有不止一種的直徑可能發生情形，則用代號 $d_{xy,m}$ 表示，m 表示第幾種，例如說 $d_{tt,1}$ 就是尾巴到尾巴的直徑可能情形的第一種，$d_{cb,3}$ 就是繩橋到繩圈(或繩圈到繩橋)的直徑可能情形的第三種。

(四) 基本假設

1. 線段

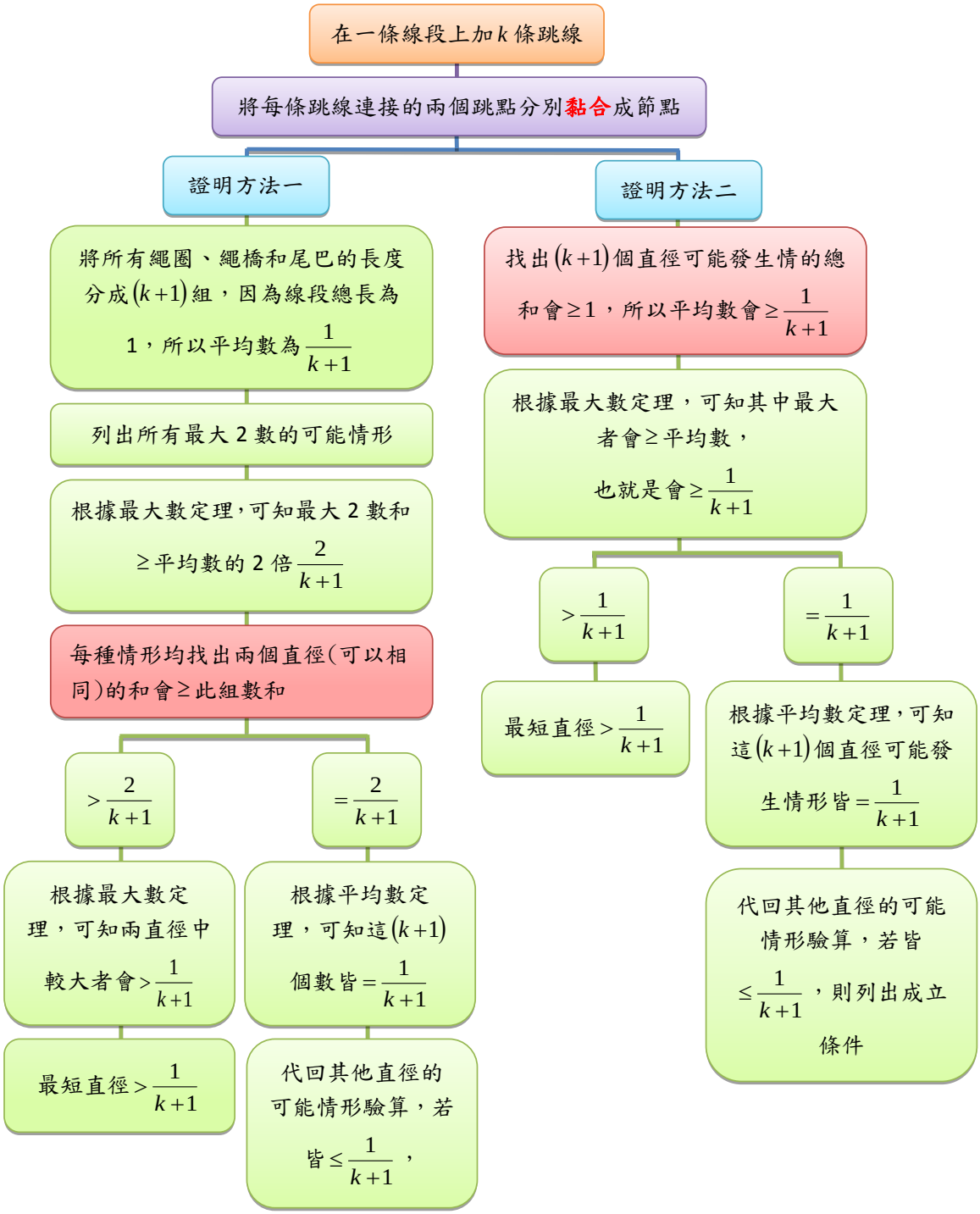
為了研究方便，我們設一線段長度為 1。

2. 跳線

為研究方便，設各跳線所連接的兩點距離變為 0。

二、 研究過程

(一) 推論方法提要



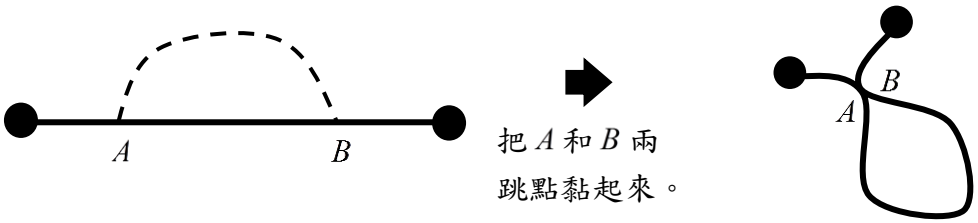
(二) 黏合圖形的初步探討

在名詞定義有提過，把線段想像成是一條可彎曲的繩子，因為我們設跳線所連接的兩點距離變為 0，因此可**將每條跳線所連接的兩個跳點「黏」起來**，省略跳線，形成的圖形稱為「黏合圖形」。

因為黏合圖形是將原線段經過彎曲黏合而成的，線段的長度及跳點在原線段上的相對位置都沒有改變，因此「路徑」、「距離」和「直徑」這些概念在黏合圖形中仍然不變。在黏合圖形中，原跳線圖形中的跳線省略了，原一條跳線所連接的 2 個跳點黏合成 1 個節點。

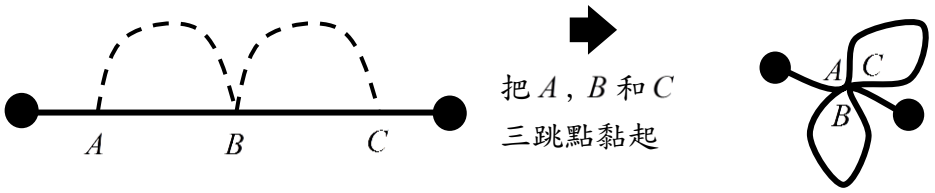
在黏合圖形中，若繩子端點並未與繩子其它部分相連，則端點到最靠近的節點之間的繩段稱為「尾巴」。若有一段由繩段構成的迴路上只有一個節點，則這段繩段就稱為「繩圈」。相鄰兩節點間的繩段則稱為「繩橋」。黏合圖形中的任何一個非節點，一定位在尾巴、繩圈或繩橋這三者之一上，而節點可能同時位於尾巴、繩圈或繩橋這三者之二或之三上。

繩子上任何一個非跳點且非端點的點，可向繩子的一端或另一端走，我們稱這個點有 2 個連線數。當把 1 條跳線的 2 個跳點「黏合」起來的時候，跳線圖形中的 2 個跳點，各有 2 個連線數，到了黏合圖形中，就變成 1 個節點，此節點的連線數是 4。如下圖：



原本 A 和 B 兩跳點各有 2 個連線數，省略跳線，黏合成黏合圖形後，AB 節點就有 2+2=$\boxed{4}$ 個連線數。

如果跳線圖形中兩條跳線的兩跳點都重合的話，這兩條跳線根本就是同一條跳線。所以我們考慮的是兩條不同跳線**其中一個跳點重合**，我們稱這樣的情形叫作「**跳點重合**」，如下圖：



此時 ABC 節點的連線數是 6。在黏合圖形中，每個節點的連線數原本是 4。當兩個節點重合的時候，2 個節點變成 1 個節點，中間減少了一座繩橋，而一座繩橋的連線樹是 2，因此節點總連線數由 $4+4=8$ 變成 6，節點減少 1、總連線數減少 2。

現在考慮繩子的端點：端點原本就只有 1 個連線數，如果跳點恰好在繩子的一個端點上，上面推論中的連線數會少 1 個，也就是黏合圖形中少 1 條尾巴的意思。如果我們在跳線圖形中的線段端點都加上一個大黑點，像是在繩頭打一個大繩結。那麼，跳點在繩子端點上的情形，就像是尾巴縮小到只剩繩結露在外面，我們把這個露在外面的繩結也算 1 個連線數的話，上面關於連線數的推論都成立，不會有例外情形。

因此，**若共加 k 條跳線，所有跳點都不重合，則在黏合圖形中會有 k 個節點，每個節點的連線數都是 4，總連線數是 $4k$**。每當有 1 個跳點與別的跳點重合，節點會減少 1、總連線數減少 2。因此，若 k 條跳線的黏合圖形中，共有 r 個節點（節點數當然不會超過跳線數，所以 $k \geq r$），表示跳點減少了 $(k-r)$ 個，總連線數應該減少 $2(k-r)$ 個，剩下 $4k-2(k-r)=\boxed{2k+2r}$ 個。因此可得到：

總連線數定理：若在線段上加 k 條跳線的黏合圖形中有 r 個節點，則節點總連線數為 $2k+2r$，其中 $k \geq r$，且 k 和 r 皆為正整數。

由總連線數定理，黏合圖形中的總連線數為$(2k+2r)$，兩個尾巴(端點到最近節點間的繩段)各佔 1 個連線數，因此，除兩個尾巴外，繩橋和繩圈共佔連線數$(2k+2r-2)$，每個繩橋(相連兩節點之間的繩段)或繩圈(只有一個節點的繩段迴路)各佔 2 個連線數，因此繩橋數和繩圈數的和為$\dfrac{2k+2r-2}{2}=k+r-1$。

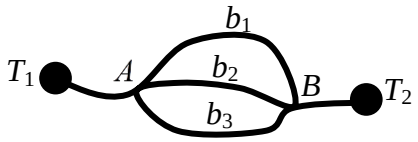
由此可得：

橋圈數定理：若在線段上加k條跳線的黏合圖形中有r個節點，則圖形中繩橋數和繩圈數的和為$k+r-1$，其中$k\geq r$，且k和r皆為正整數。

(三) 黏合圖形的還原

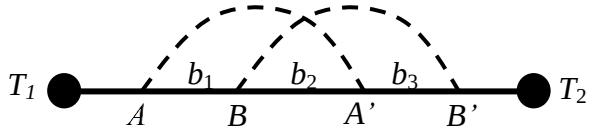
我們發現黏合圖形的還原其實和**一筆畫問題**一樣，因為在繩子黏合之前，本來就是完整的一條線段，黏合圖形一定可以從一個端點開始，走過所有的繩段，最後到達另一個端點。在一筆畫問題中，一個由線構成的圖形中，如果沒有或只有兩個節點的連線數為奇數，其他節點的連線數都是偶數，則必可一筆畫完(參考文獻沒有數字的數學 2010 年)。因此我們想，如果任意畫一個黏合圖形，因為繩圈本來就佔 2 個連線數，是偶數，所以只要**每個節點上連接的尾巴數加上繩橋數都是偶數**，那麼這個黏合圖形一定可以還原成某個跳線圖形。

此外，因同一個黏合圖形可能會有不只一種的一筆畫走法，所以可以還原出不止一種的跳線圖形，反過來說，可能會有不同的跳線圖形，黏合後會變為相同的黏合圖形。例如：

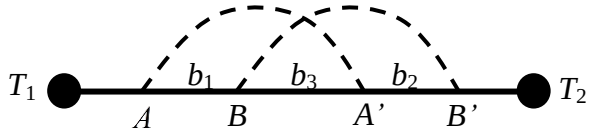


這種黏合圖形在繩橋b_1,b_2,b_3皆不等長時，會有 6 種還原方法(左右對稱的視為同一種)，如下：

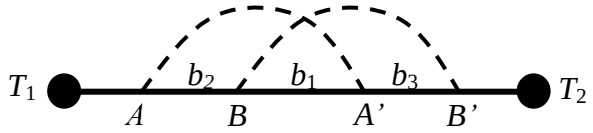
1. 從T_1端點出發，經過A節點，依序走過b_1、b_2以及b_3三座繩橋，再經由B節點走回T_2端點，其還原後的跳線圖形如下：



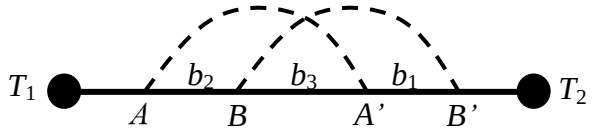
2. 從T_1端點出發，經過A節點，依序走過b_1、b_3以及b_2三座繩橋，再經由B節點走回T_2端點，其還原後的跳線圖形如下：



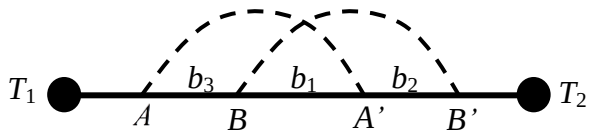
3. 從T_1端點出發，經過A節點，依序走過b_2、b_1以及b_3三座繩橋，再經由B節點走回T_2端點，其還原後的跳線圖形如下：



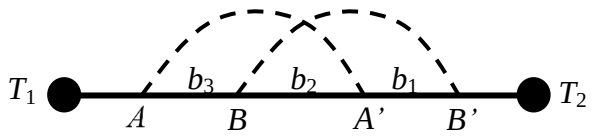
4. 從T_1端點出發，經過A節點，依序走過b_2、b_3以及b_1三座繩橋，再經由B節點走回T_2端點，其還原後的跳線圖形如下：



5. 從 T_1 端點出發，經過 A 節點，依序走過 b_3、b_1 以及 b_2 三座繩橋，再經由 B 節點走回 T_2 端點，其還原後的跳線圖形如下：



6. 從 T_1 端點出發，經過 A 節點，依序走過 b_3、b_2 以及 b_1 三座繩橋，再經由 B 節點走回 T_2 端點，其還原後的跳線圖形如下：



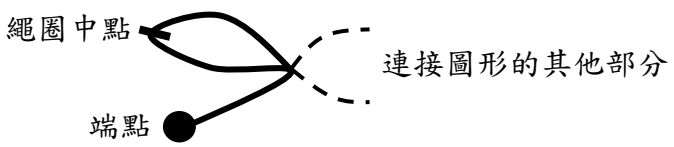
另外，**節點的連線數應該至少是 4**，因為如果有一個點連線數是 2，表示這只是繩子上的一個普通點，並非節點。

(四) 直徑可能發生情形探討

名詞定義中有提到，黏合圖形中的直徑發生所在繩段的起訖點一定在尾巴、繩圈或繩橋上。

假設有一條尾巴的端點為 T_1，這條尾巴上有一非端點 P，黏合圖形的其他地方有一點 Q，因為從 T_1 走到 Q 點一定要先經過 P 點，因此 T_1 到 Q 的距離一定大於 P 到 Q 的距離。或者簡單地說，**尾巴上所有的點中，距離圖形其他部分最遠的點就是端點**。

繩圈的性質和尾巴非常相像，繩圈上所有的點中，距離圖形其他部分最遠的點就是繩圈中點。如下圖：



那麼，黏合圖形中的直徑一定發生在「端點」到「端點」、「端點」到「繩圈中點」、「繩圈中點」到「繩圈中點」、「端點」到「繩橋上某點」、「繩圈中點」到「繩橋上某點」或「繩橋上某點」到「繩橋上某點」。(起訖點相反的情形是為同一種)

1. **「端點」到「端點」**

若直徑發生在「端點」到「端點」，則一定是從端點開始，經由尾巴，再走距離另一個尾巴最短的路徑，最後走過另一個尾巴，抵達另一頭的端點。

2. **「端點」到「繩圈中點」**

若直徑發生在「端點」到「繩圈中點」，則一定是從其中一個端點開始，經由尾巴，再走距離要到達目的地繩圈的最短路徑，再走過半個繩圈，最後到達此繩圈的中點。若黏合圖形中有不只一個尾巴或繩圈，則要每種情形都要考慮或計算，最後選出其中最大的。

3. **「繩圈中點」到「繩圈中點」**

若直徑發生在「繩圈中點」到「繩圈中點」，則一定是以其中一個繩圈中點為起點，經過半個繩圈，再走距離要到達目的地繩圈的最短路徑，最後走過半個繩圈，最後到達此繩圈的中點。若黏合圖形中有不只二個繩圈，則要每種情形都要考慮或計算，最後選出其中最大的。

4. **「端點」到「繩橋上某點」**

若直徑發生在「端點」到「繩橋上某點」，則一定是從其中一個端點開始，經過尾巴，再走至繩橋上距離此尾巴最遠的點。若黏

合圖形中有二個尾巴，則二種情形都要考慮或計算，最後選出其中較大的。在計算方面，可以利用後文中「點到橋距離定理」來計算。

5. **「繩圈中點」到「繩橋上某點」**

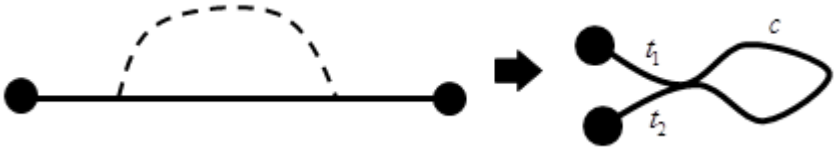
若直徑發生在「繩圈中點」到「繩橋上某點」，則一定是從其中一個繩圈中點開始，經過半個繩圈，最後走至繩橋上距離此繩圈最遠的點。若黏合圖形中有不只一個繩圈，則要每種情形都要考慮或計算，最後選出其中最大的。在計算方面，可以利用後文中「點到橋距離定理」來計算。

6. **「繩橋上某點」到「繩橋上某點」**

若直徑發生在「繩橋上某點」到「繩橋上某點」，則一定在由繩橋組成最大的迴路上，其對面 2 點的距離，長度為此迴路總長的一半。

(五) 加 1 條跳線

在一條線段上加一條跳線，其跳線圖形只有一種形式，如下圖左，其黏合圖形如下圖右：



已知：$t_1 \geq t_2 \geq 0$

$c > 0$

$t_1 + t_2 + c = 1$

求證：最短直徑 $d_{(1,1)}=\frac{1}{2}$

備註：$\frac{1}{2}$ 是由實驗數據而來的，可參考附錄一

證明：

1. 直徑的可能發生情形

$d_{tt,1}=t_1+t_2$

$d_{tc,1}=t_1+\frac{c}{2}$

2. $\because t_1 \geq t_2$ （已知）

$\therefore t_1+\frac{c}{2} \geq t_2+\frac{c}{2}$

又 $\left(t_1+\frac{c}{2}\right)+\left(t_2+\frac{c}{2}\right)=1$ （已知）

$\therefore t_1+\frac{c}{2} \geq \frac{1}{2}$

若想要其為最小值 $\frac{1}{2}$，則

$t_1=t_2$

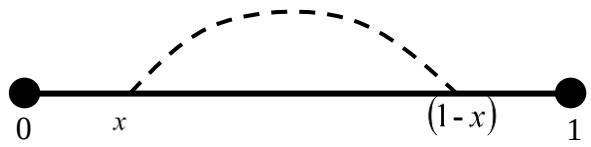
此時 $d_{tc,1}=t_1+\frac{c}{2}=\frac{1}{2}$

另一個直徑不超過 $\frac{1}{2}$，才能使最短直徑 $d_{(1,1)}$ 不超過 $\frac{1}{2}$，

$\therefore d_{tt,1}=t_1+t_2 \leq \frac{1}{2}$

結論：加一條跳線時，最短直徑 $d_{(1,1)}=\frac{1}{2}$。成立條件為：尾巴長各為 x、繩圈長為 $\left(\frac{1}{2}-2x\right)$，$x$ 的範圍為：$0 \leq x \leq \frac{1}{4}$。

接下來還原成跳線圖形，根據一筆畫原理，只會有一種還原方法，就是從其中一個端點，經過繩圈，再走至另一個端點，其跳線圖形如下：



其中 $0 \le x \le \frac{1}{4}$

接下來我想證明在線段上加 k 條跳線、黏合圖形有一個節點的最佳跳線位置及最短直徑，所以先介紹幾個我們自己證出的定理。

(六) 最大數定理：在一串數中，最大的 m 個數之和會大於或等於此串數的平均數的 m 倍。(m 為大於 0、小於此串數項數的正整數)

證明:

設共 n 個數，最大者為 X_{L_1} ，次大者為 X_{L_2} ，第 m 大者為 X_{L_m} ，平均數為 a ，總和為 na 。(m 為大於 0、小於 n 的正整數，n 為大於 0 的正整數)(下列 n 個式中，若右式的 $m+i>n$，則從最大的數、次大的數、第三大的數由大而小重新輪起)

$$X_{L_1}+X_{L_2}+X_{L_3}+\cdots+X_{L_m}=X_{L_1}+X_{L_2}+X_{L_3}+\cdots+X_{L_m}$$

$$X_{L_1}+X_{L_2}+X_{L_3}+\cdots+X_{L_m}=X_{L_2}+X_{L_3}+X_{L_4}+\cdots+X_{L_{m+1}}$$

$$X_{L_1}+X_{L_2}+X_{L_3}+\cdots+X_{L_m}=X_{L_3}+X_{L_4}+X_{L_5}+\cdots+X_{L_{m+2}}$$

$$\cdots$$

$$+)\ X_{L_1}+X_{L_2}+X_{L_3}+\cdots+X_{L_m}=X_{L_n}+X_{L_1}+X_{L_2}+\cdots+X_{L_{m-1}}$$

$$n(X_{L_1}+X_{L_2}+X_{L_3}+\cdots+X_{L_m})\ge m(X_{L_1}+X_{L_2}+X_{L_3}+\cdots X_{L_n})$$

$$n(X_{L_1}+X_{L_2}+X_{L_3}+\cdots+X_{L_m})\ge mna \qquad \text{(式子一)}$$

$$X_{L_1}+X_{L_2}+X_{L_3}+\cdots+X_{L_m}\ge ma \qquad \text{(式子二)}$$

故得證

若式子二的等號成立，則式子一的等號也會成立、上面所有式子的等號也都會成立。

$$X_{L_1}+X_{L_2}+X_{L_3}+\cdots+X_{L_m}$$

$$=X_{L_2}+X_{L_3}+X_{L_4}+\cdots+X_{L_{m+1}}$$

$$=X_{L_3}+X_{L_4}+X_{L_5}+\cdots+X_{L_{m+2}}$$

$$=\cdots=X_{L_n}+X_{L_1}+X_{L_2}+\cdots+X_{L_{m-1}}$$

$$\because X_{L_1}+X_{L_2}+X_{L_3}+\cdots+X_{L_m}=X_{L_2}+X_{L_3}+X_{L_4}+\cdots+X_{L_{m+1}}$$

$$\therefore X_{L_1}=X_{L_{m+1}}$$

$$\therefore X_{L_1}=X_{L_2}=X_{L_3}=\cdots=X_{L_{m+1}}$$

$$\because X_{L_2}+X_{L_3}+X_{L_4}+\cdots+X_{L_{m+1}}=X_{L_3}+X_{L_4}+X_{L_5}+\cdots+X_{L_{m+2}}$$

$$\therefore X_{L_2}=X_{L_{m+2}}$$

$$\therefore X_{L_2}=X_{L_3}=X_{L_4}=\cdots=X_{L_{m+2}}$$

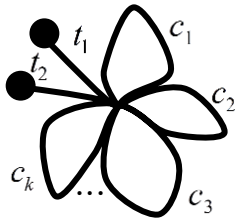
以此類推，$X_{L_1}=X_{L_2}=X_{L_3}=\cdots=X_{L_n}$

因此可知，

(七) 平均數定理：在一串數中，若最大的 m 個數之和等於此串數的平均數的 m 倍，則此串數中所有的數皆與此串數的平均相等。(m 為大於 0、小於此串數項數的正整數)

(八) 加 k 條跳線，黏合圖形中一個節點

根據橋圈數定理，可知繩圈數＋繩橋數$=k+1-1=\boxed{k}$，因為一個節點不會有繩橋，所以會有k個繩圈，其黏合圖形形式如下：



已知：$t_1 \geq t_2 \geq 0$

$c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \cdots \geq c_k > 0$

$t_1 + t_2 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k = 1$

$k \geq 2$

求證：最短直徑$d_{(k,1)} = \dfrac{1}{k+1}$

證明：

1. 直徑的可能發生情形：

$d_{tt,1} = t_1 + t_2$

$d_{tc,1} = t_1 + \dfrac{c_1}{2}$

$d_{cc,1} = \dfrac{c_1 + c_2}{2}$

2. 把$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k, t_1, t_2$這$(k+2)$個數合併為$(k+1)$個數：

$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k, (t_1 + t_2)$，即$t_1$和$t_2$合併。其中最大的 2 個數的可能情形有 2 種：

a. c_1, c_2

b. $c_1, (t_1 + t_2)$

3. 接下來分成 2 種情形：

a. 最大 2 數 $= c_1, c_2$

因為 $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k, (t_1 + t_2)$ 這 $(k+1)$ 個數的總和為 1，所以這 $(k+1)$ 個數的平均為 $\frac{1}{k+1}$

根據最大數定理，可知

$$c_1 + c_2 \geq \frac{1}{k+1} \times 2 = \frac{2}{k+1}$$

$$\because c_1 + c_2 = \frac{c_1 + c_2}{2} \times 2 = 2d_{cc,1}$$

$$\therefore 2d_{cc,1} \geq \frac{2}{k+1}$$

$$\therefore d_{cc,1} \geq \frac{1}{k+1}$$

若 $d_{cc,1} = \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{1}{k+1}$

因為 c_1, c_2 為 $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k, (t_1 + t_2)$ 這 $(k+1)$ 個數中最大 2 數，而它們的和等於這 $(k+1)$ 數的平均數 $\frac{1}{k+1}$ 的 2 倍 $\frac{2}{k+1}$，所以根據平均數定理，可知

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_k = t_1 + t_2 = \frac{1}{k+1}$$

再代回其他直徑驗算

$$d_{tt,1} = t_1 + t_2 = \frac{1}{k+1}$$

$$d_{tc,1} = t_1 + \frac{c_1}{2} \geq \frac{t_1 + t_2 + c_1}{2} = \frac{1}{k+1}$$

等號成立的條件為 $t_1 = t_2$

b. 最大 2 數 $= c_1, (t_1 + t_2)$

根據最大數定理，可知

$$c_1+(t_1+t_2)\geq\frac{1}{k+1}\times 2=\frac{2}{k+1}$$

$$\because c_1+(t_1+t_2)\leq(t_1+\frac{c_1}{2})\times 2=2d_{tc,1}$$

$$\therefore 2d_{tc,1}\geq c_1+(t_1+t_2)\geq\frac{2}{k+1}$$

$$\therefore d_{tc,1}\geq\frac{1}{k+1}$$

若 $d_{tb,1}=t_1+\frac{c_1}{2}=\frac{1}{k+1}$

因為 $c_1,(t_1+t_2)$ 為 $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_k,(t_1+t_2)$ 這 $(k+1)$ 個數中最大 2 數，而它們的和等於這 $(k+1)$ 數的平均數 $\frac{1}{k+1}$ 的 2 倍 $\frac{2}{k+1}$，所以根據平均數定理，可知

$$c_1=c_2=c_3=\cdots=c_k=(t_1+t_2)=\frac{1}{k+1}$$

且 $t_1=t_2$

再代回其它直徑驗算

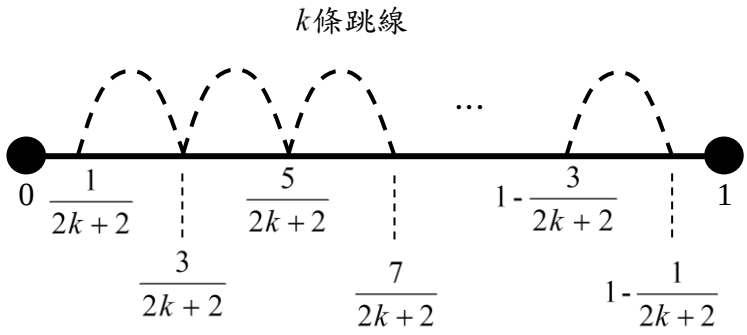
$$d_{tt,1}=t_1+t_2=\frac{1}{k+1}$$

$$d_{cc,1}=\frac{c_1+c_2}{2}=\frac{1}{k+1}$$

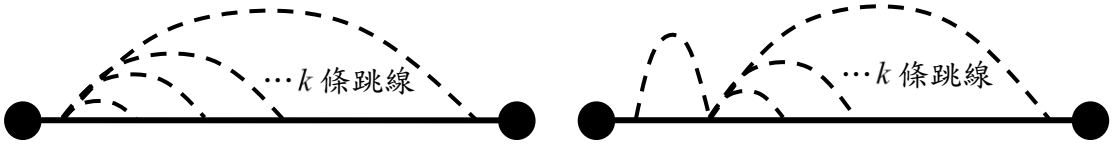
4. 綜合以上 a.b.兩種情形，可知最短直徑 $d_{(k,1)}=\frac{1}{k+1}$。

結論：在加 k 條跳線，$k\geq 2$，黏合圖形中一個節點時，最短直徑 $d_{(k,1)}=\frac{1}{k+1}$。其成立的條件為：k 個繩圈長度各為 $\frac{1}{k+1}$，2 條尾巴長度各為 $\frac{1}{2k+2}$。

接下來還原成跳線圖形，根據一筆畫原理，只會有一種還原方法，就是從其中一個端點，經過所有繩圈，再走至另一個端點，其跳線圖形如下：



除了上圖以外，其實跳線圖形還有許多種情形，像是下面 2 圖(各點的坐標皆與上面相同)。但因為每個跳點都是相通的，所以無論跳線在哪裡，都不會影響其黏合圖形以及直徑。



前面證的加一條跳線，最短直徑$=\frac{1}{2}$，它也屬於一個節點的範圍，但是為了符合最大數定理和平均數定理，k 必須要大於或等於 2，所以在加一條跳線，也就是$k=1$的情形，不能合併在上述加k條跳線，黏合圖形中一個節點的證明中，但最後證明出的最短直徑是相同的：在$k=1$時，$\frac{1}{k+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，跟前面$k=2,3,4\cdots$時所證出的結論相同。

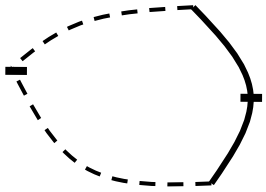
總結論：在線段上加k條跳線，黏合圖形中有一個節點，最短直徑

$d_{(k,1)}=\frac{1}{k+1}$

(九) 點到橋距離定理

對黏合圖形中任意一個點P及任意一個長度為b的繩橋，設點Q為繩橋上距離點P最遠的點。若P到繩橋的一端距離為s_1，到繩橋的另一端距離為s_2（s_1和s_2可重疊），則P到Q的距離$\frac{b+s_1+s_2}{2}$。

證明：



把 s_1+b+s_2 想成是一個起訖點為 P 的迴路，而在這個迴路上離起點最遠的一點離起點的距離必為 $\frac{s_1+b+s_2}{2}$。因為 s_1+b 一定會大於或等於 s_2（不然 s_2 就改為先走 s_1 再走 b 就好了）。同樣的，s_2+b 一定會大於或等於 s_1，所以距離 P 點 $\frac{s_1+b+s_2}{2}$ 的點一定會在 b 橋上。

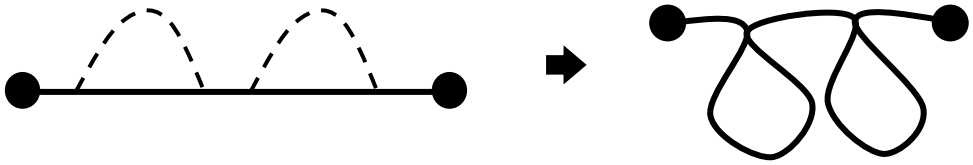
故得證

(十) 加 2 條跳線

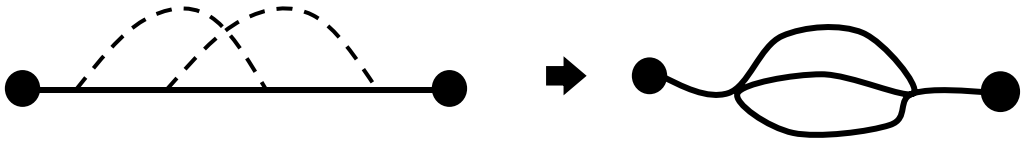
在加 2 條跳線的黏合圖形中，黏合圖形可能有一個或二個節點，其中一個節點的情況我們已證明完畢，所以只需要證出二個節點的情形就好了。

加 2 條跳線，黏合圖形中二個節點有 3 種情形：

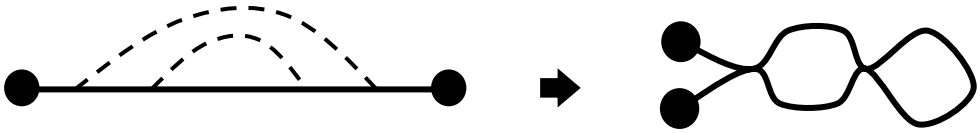
第一種：



第二種：

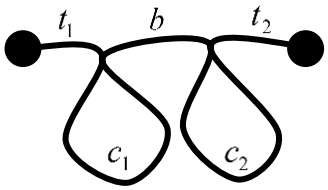


第三種：



因為在 1 個節點時證明出最短直徑 $d_{(k,1)}=\dfrac{1}{k+1}$，所以在 2 個節點時的最短直徑不能大於 $\dfrac{1}{k+1}$，不然 1 個節點就夠了，而加 2 條跳線時最短直徑不能超過 $\dfrac{1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$。

1. 第一種



已知：$t_1 \ge t_2 \ge 0$

$b>0$

$c_1>0$

$c_2>0$

$t_1+t_2+c_1+c_2+b=1$

求證：最短直徑 $d_{(2,2,1)}>\dfrac{1}{3}$

證明：

(1) 直徑可能發生情形：

$d_{tt,1}=t_1+b+t_2$

$d_{tc,1}=t_1+\dfrac{c_1}{2}$

$d_{tc,2}=t_1+b+\dfrac{c_2}{2}$

$d_{tc,3} = t_2 + b + \frac{c_1}{2}$

$d_{cc,1} = \frac{c_1}{2} + b + \frac{c_2}{2}$

(2) 把 t_1, t_2, c_1, c_2, b 這 5 個數合併為 3 個數：$(b + t_1 + t_2), c_1, c_2$，此三數平均為 $\frac{1}{3}$。其中最大 2 數的可能情形有 3 種：

a. c_1, c_2

b. $c_1, (b + t_1 + t_2)$

c. $c_2, (b + t_1 + t_2)$

(3) 接下來分成 3 種情形討論：

a. 最大 2 數 $= c_1, c_2$

根據最大數定理，可知

$c_1 + c_2 \geq \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$

$\because c_1 + c_2 < 2\left(\frac{c_1}{2} + b + \frac{c_2}{2}\right) = 2d_{cc,1}$

$\therefore 2d_{cc,1} > \frac{2}{3}$

$\therefore d_{cc,1} > \frac{1}{3}$

所以這種情形的最短直徑會 $> \frac{1}{3}$

b. 最大 2 數 $= c_1, (b + t_1 + t_2)$

根據最大數定理，可知

$c_1 + (b + t_1 + t_2) \geq \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$

$\because c_1+(b+t_1+t_2)=\left(t_1+\frac{c_1}{2}\right)+\left(t_2+b+\frac{c_1}{2}\right)=d_{tc,1}+d_{tc,2}$

$\therefore d_{tc,1}+d_{tc,3}=\left(t_1+\frac{c_1}{2}\right)+\left(t_2+b+\frac{c_1}{2}\right)\geq\frac{2}{3}$

$\frac{d_{tc,1}+d_{tc,3}}{2}\geq\frac{1}{3}$

根據最大數定理，可知 $d_{tc,1}$ 和 $d_{tc,3}$ 中較大的必 $\geq\frac{1}{3}$

若 $d_{tc,1}=d_{tc,3}=t_1+\frac{c_1}{2}=t_2+b+\frac{c_1}{2}=\frac{1}{3}$

$\left(t_1+\frac{c_1}{2}\right)+\left(t_2+b+\frac{c_1}{2}\right)=c_1+b+t_1+t_2=\frac{2}{3}$

因為 $c_1,(b+t_1+t_2)$ 為 $(b+t_1+t_2),c_1,c_2$ 三數中最大 2 數，而它們的和等於這三數的平均數 $\frac{1}{3}$ 的 2 倍，所以根據平均數定理，可知

$b+t_1+t_2=c_1=\mathrm{c}_2=\frac{1}{3}$

再代回其他直徑驗算，發現

$d_{cc,1}=\frac{c_1}{2}+b+\frac{c_2}{2}>\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}=\frac{1}{3}$

所以這種情形的最短直徑會 $>\frac{1}{3}$

c. 最大 2 數 $=c_2,(b+t_1+t_2)$

根據最大數定理，可知

$c_2+(b+t_1+t_2)\geq\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$

$\because c_2+(b+t_1+t_2)<2\left(t_1+b+\frac{c_2}{2}\right)=2d_{tc,2}$

$\therefore 2d_{tc,2}>\frac{2}{3}$

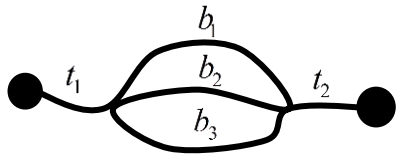
$\therefore d_{tc,2}>\frac{1}{3}$

所以這種情形的最短直徑會 $>\frac{1}{3}$

(4) 綜合以上 a.b.c.三種情形，可得最短直徑 $d_{(2,2,1)} > \frac{1}{3}$

結論：這種情形的最短直徑 $d_{(2,2,1)} > \frac{1}{3}$

2. 第二種



已知：$t_1 \geq t_2 \geq 0$

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 > 0$

$t_1 + t_2 + b_1 + b_2 + b_3 = 1$

求證：最短直徑 $d_{(2,2,2)} = \frac{1}{3}$

證明：直徑可能發生情形：

(1) $d_{tt,1} = t_1 + b_3 + t_2$

$d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_1 + b_3}{2}$

$d_{bb,1} = \frac{b_1 + b_2}{2}$

(2) 把 t_1, t_2, b_1, b_2, b_3 這 5 個數合併為 3 個數：$(b_3 + t_1 + t_2), b_1, b_2$，此三數平均為 $\frac{1}{3}$。其中最大 2 數的可能情形有 2 種：

a. b_1, b_2

b. $b_1, (b_3 + t_1 + t_2)$

(3) 接下來分成 2 種情形討論：

a. 最大 2 數 $= b_1, b_2$

根據最大數定理，可知

$$b_1 + b_2 \geq \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

$$\because b_1 + b_2 = 2\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) = 2d_{bb,1}$$

$$\therefore 2d_{bb,1} \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore d_{bb,1} \geq \frac{1}{3}$$

若 $d_{bb,1} = \dfrac{b_1 + b_2}{2} = \dfrac{1}{3}$

$$b_1 + b_2 = \frac{2}{3}$$

因為 b_1, b_2 為 $(b_3 + t_1 + t_2)$, b_1, b_2 三數中最大 2 數，而它們的和等於這三數的平均數 $\dfrac{1}{3}$ 的 2 倍，所以根據平均數定理，可知

$$b_3 + t_1 + t_2 = b_1 = b_2 = \frac{1}{3}$$

再代回其他直徑驗算

$$d_{tt,1} = t_1 + b_3 + t_2 = \frac{1}{3}$$

$$d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_1 + b_3}{2} \geq \frac{t_1 + t_2 + b_1 + b_3}{2} = \frac{1}{3}$$

等號成立的條件為 $t_1 = t_2$

b. 最大 2 數 $= b_1, (b_3 + t_1 + t_2)$

根據最大數定理，可知

$$b_1 + (b_3 + t_1 + t_2) \geq \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

$$\because b_1 + (b_3 + t_1 + t_2) \leq 2\left(t_1 + \frac{b_1 + b_2}{2}\right) = 2d_{tb,1}$$

$$\therefore 2d_{tb,1} \geq \frac{2}{3}$$

$\therefore d_{tb,1} \geq \frac{1}{3}$

若 $d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_1 + b_3}{2} = \frac{1}{3}$

且 $t_1 = t_2$

因為 $b_1, (b_3 + t_1 + t_2)$ 為 $(b_3 + t_1 + t_2), b_1, b_2$ 三數中最大 2 數，而它們的和等於這三數的平均數 $\frac{1}{3}$ 的 2 倍，所以根據平均數定理，可知

$b_3 + t_1 + t_2 = b_1 = b_2 = \frac{1}{3}$

再代回其他直徑驗算

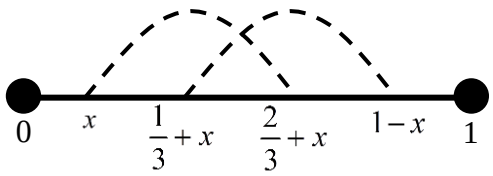
$d_{tt,1} = t_1 + b_3 + t_2 = \frac{1}{3}$

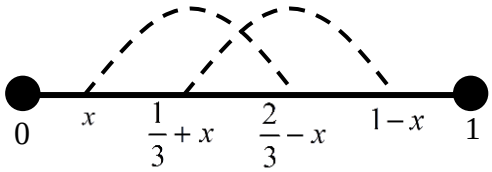
$d_{bb,1} = \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{1}{3}$

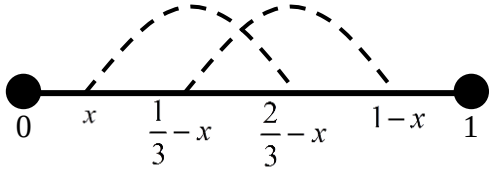
(4) 綜合以上 a.b.兩種情形，可知最短直徑 $d_{(2,2,2)} = \frac{1}{3}$

結論：這種情形的最短直徑 $d_{(2,2,2)} = \frac{1}{3}$。成立的條件為：其中 2 座橋長為 $\frac{1}{3}$，剩下一座橋加上 2 條尾巴的總長為 $\frac{1}{3}$，2 條尾巴要一樣長。

接下來還原成跳線圖形，根據一筆畫問題，會有三種還原方法，就是從其中一個端點，依不同順序經過 3 座繩橋，再走至另一個端點，其跳線圖形如下：

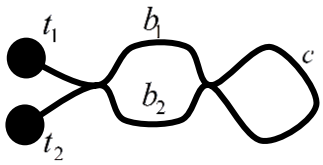






其中 $0 \le x < \frac{1}{6}$

第三種



已知：$t_1 \ge t_2 \ge 0$

$b_1 \ge b_2 > 0$

$c > 0$

$t_1 + t_2 + b_1 + b_2 + c = 1$

求證：最短直徑 $d_{(2,2,3)} > \frac{1}{3}$

證明：

(1) 直徑可能發生情形：

$d_{tt,1} = t_1 + t_2$

$d_{tc,1} = t_1 + b_2 + \frac{c}{2}$

$d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_1 + b_2}{2}$

$d_{cb,1} = \frac{c}{2} + \frac{b_1 + b_2}{2}$

(2) 把t_1,t_2,b_1,b_2,c這 5 個數合併為 3 個數：$(b_2+t_1+t_2),b_1,$c，此三數平均為$\frac{1}{3}$。其中最大 2 數的可能情形有 3 種：

a. b_1,c

b. $b_1,(b_2+t_1+t_2)$

c. $c,(b_2+t_1+t_2)$

(3) 接下來分成 3 種情形：

a. 最大 2 數$=b_1,c$

根據最大數定理，可知

$$b_1+c\geq\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$$

$$\because b_1+c<2\left(\frac{c_1}{2}+\frac{b_1+b_2}{2}\right)=2d_{cb,1}$$

$$\therefore 2d_{cb,1}>\frac{2}{3}$$

$$\therefore d_{cb,1}>\frac{1}{3}$$

所以這種情形的最短直徑會$>\frac{1}{3}$

b. 最大 2 數$=b_1,(b_2+t_1+t_2)$

根據最大數定理，可知

$$b_1+(b_2+t_1+t_2)\geq\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$$

$$\because b_1+(b_2+t_1+t_2)\leq 2\left(t_1+\frac{b_1+b_2}{2}\right)=2d_{tb,1}$$

$$\therefore 2d_{tb,1}=2\left(t_1+\frac{b_1+b_2}{2}\right)\geq b_1+(b_2+t_1+t_2)\geq\frac{2}{3}$$

$$\therefore d_{tb,1}\geq\frac{1}{3}$$

若 $d_{tb,1}=t_1+\dfrac{b_1+b_2}{2}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore 2t_1+b_1+b_2=\dfrac{2}{3}$

$\therefore t_1+t_2+b_1+b_2\le\dfrac{2}{3}$

因為 $b_1,(b_2+t_1+t_2)$ 為 $(b_2+t_1+t_2),b_1,c$ 三數中最大 2 數，所以他們的何一定要大於或等於平均數 $\dfrac{1}{3}$ 的 2 倍 $\dfrac{2}{3}$，而它們的和等於這三數的平均數 $\dfrac{1}{3}$ 的 2 倍 $\dfrac{2}{3}$，所以根據平均數定理，可知

$b_2+t_1+t_2=b_1=c=\dfrac{1}{3}$

再代回其他直徑驗算，發現

$d_{cb,1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{b_1+b_2}{2}>\dfrac{c}{2}+\dfrac{b_1}{2}=\dfrac{1}{3}$

所以這種情形的最短直徑會 $>\dfrac{1}{3}$

c. 最大 2 數 $=c,(b_2+t_1+t_2)$

根據最大數定理，可知

$c+(b_2+t_1+t_2)\ge\dfrac{1}{3}\times 2=\dfrac{2}{3}$

$\because c+(b_2+t_1+t_2)<2\left(t_1+b_2+\dfrac{c}{2}\right)=2d_{tc,1}$

$\therefore 2d_{tc,1}>\dfrac{2}{3}$

$\therefore d_{tc,1}>\dfrac{1}{3}$

所以這種情形的最短直徑會 $>\dfrac{1}{3}$

(4) 綜合以上 a.b.c.三種情形，可知最短直徑 $d_{(2,2,3)}>\dfrac{1}{3}$

結論：這種情形的最短直徑 $d_{(2,2,3)}>\dfrac{1}{3}$

綜合以上三種情形，可得

總結論：在線段上加2條跳線，黏合圖形中有二個節點，最短直徑

$d_{(2,2)}=\frac{1}{3}$

(十一)　證明方法整理

我將在線段上加k條跳線，黏合圖形中一個節點和在線段上加 2 條跳線所使用的證明方法做了整理：

1. 把所有數分成$(k+1)$組，因為所有數的總和為 1，所以這$(k+1)$組數的平均為$\frac{1}{k+1}$。

2. 列出在這$(k+1)$組數中所有最大兩數的可能情形，根據最大數定理可知，其最大兩數和必大於或等於這$(k+1)$組數的平均$\frac{1}{k+1}$的 2 倍，也就是$\frac{2}{k+1}$。

3. 每一種最大兩數的可能情形均找出兩個直徑(可以相同)的和會大於或等於此組數，如此便可推知兩個直徑中較大的必$\geq\frac{1}{k+1}$。

4. 因為我們已證出在一個節點時，最短直徑為$\frac{1}{k+1}$。所以在黏合圖形中有多於一個節點時，無論加幾條跳線，最短直徑都不能$>\frac{1}{k+1}$，否則一個節點就夠了，所以所有在 3.中所選到的直徑皆等於$\frac{1}{k+1}$，所有最大 2 數的和也皆等於$\frac{1}{k+1}$

5. 根據平均數定理可推出所有$(k+1)$個數都相等

6. 代回其它直徑的可能情形驗算，並列出直徑為最小值$\frac{1}{k+1}$的成立條件

公式：$(d_x + d_y) \geq (L_1 + L_2) \geq (\frac{1}{k+1} \times 2)$ (可相同)

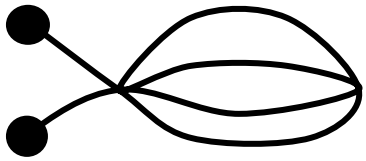
*L_1 和 L_2 為最大 2 數，d_x, d_y 為任兩個直徑

(十二)　加 k 條跳線，黏合圖形中二個節點

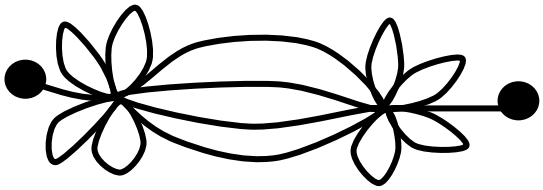
根據橋圈數定理，可知在加 k 條跳線、黏合圖形中二個節點時，會有 $k+2-1=\boxed{k+1}$ 個繩橋加繩圈，而黏合圖形中會有 8 種情形：

第一種：

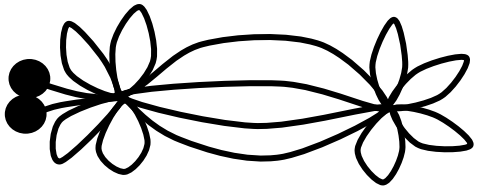
第二種：



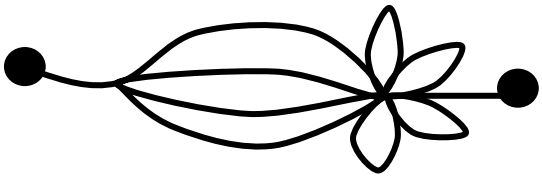
第三種：



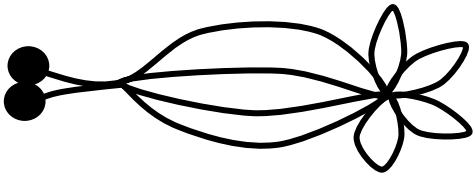
第四種：



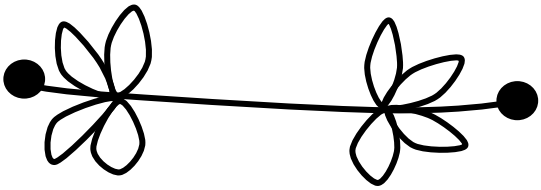
第五種：



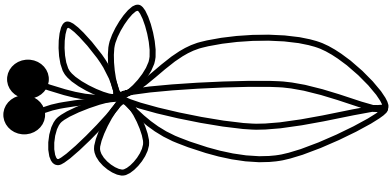
第六種：



第七種：

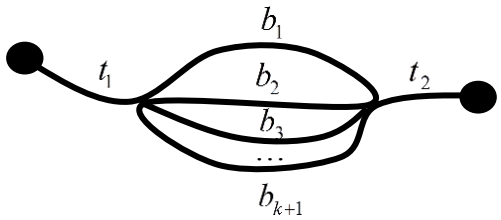


第八種：



因為在 1 個節點時證明出最短直徑為 $\frac{1}{k+1}$，所以在 2 個節點時的最短直徑不能 $> \frac{1}{k+1}$，不然 1 個節點就夠了。

1. 第一種：沒有繩圈，尾巴在不同邊，其中 k 為偶數



已知：$t_1 \geq t_2 \geq 0$

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_{k+1} > 0$

$t_1 + t_2 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{k+1} = 1$

$k \geq 2$

k 為偶數

求證：最短直徑 $d_{(k,2,1)} = \dfrac{1}{k+1}$

證明：

(1) 直徑的可能發生情形：

$d_{tt,1} = b_{k+1} + t_1 + t_2$

$d_{tb,1} = t_1 + \dfrac{b_1 + b_{k+1}}{2}$

$d_{bb,1} = \dfrac{b_1 + b_2}{2}$

(2) 把 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{k+1}, t_1, t_2$ 這 $(k+3)$ 個數合併為 $(k+1)$ 個數

$b_1, b_2, b_3, \cdots, b_k, (b_{k+1} + t_1 + t_2)$。其中最大 2 數的可能情形有 2 種：

a. b_1, b_2

b. $b_1, (b_{k+1} + t_1 + t_2)$

(3) 接下來分成 2 種情形：

a. 最大 2 數 $= b_1, b_2$

根據最大數定理，可知

$$b_1 + b_2 \geq \frac{1}{k+1} \times 2 = \frac{2}{k+1}$$

$$\because b_1 + b_2 = \frac{b_1 + b_2}{2} \times 2 = 2d_{bb,1}$$

$$\therefore 2d_{bb,1} \geq \frac{2}{k+1}$$

$$\therefore d_{bb,1} \geq \frac{1}{k+1}$$

若 $d_{bb,1} = \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{1}{k+1}$

因為 b_1, b_2 為 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_k, (b_{k+1} + t_1 + t_2)$ 這 $(k+1)$ 個數中最大的 2 數，而它們的和等於這 $(k+1)$ 數的平均數 $\frac{1}{k+1}$ 的 2 倍 $\frac{2}{k+1}$，所以根據平均數定理，可知

$$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_k = b_{k+1} + t_1 + t_2 = \frac{1}{k+1}$$

再代回其他直徑驗算

$$d_{tt,1} = b_{k+1} + t_1 + t_2 = \frac{1}{k+1}$$

$$d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_1 + b_{k+1}}{2} \geq \frac{t_1 + t_2 + b_1 + b_{k+1}}{2} = \frac{1}{k+1}$$

等號成立的條件為 $t_1 = t_2$

b. 最大 2 數 $= b_1, (b_{k+1} + t_1 + t_2)$

根據最大數定理，可知

$$b_1 + (b_{k+1} + t_1 + t_2) \geq \frac{1}{k+1} \times 2 = \frac{2}{k+1}$$

$$\because b_1 + (b_{k+1} + t_1 + t_2) \leq (t_1 + \frac{b_1 + b_{k+1}}{2}) \times 2 = 2d_{tb,1}$$

$\therefore 2d_{tb,1} \geq b_1 + (b_{k+1} + t_1 + t_2) \geq \dfrac{2}{k+1}$

$\therefore d_{tb,1} \geq \dfrac{1}{k+1}$

若 $d_{tb,1} = t_1 + \dfrac{b_1 + b_{k+1}}{2} = \dfrac{1}{k+1}$

因為 $b_1, (b_{k+1} + t_1 + t_2)$ 為 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_k, (b_{k+1} + t_1 + t_2)$ 這 $(k+1)$ 個數中的最大 2 數，而它們的和等於這 $(k+1)$ 數的平均數 $\dfrac{1}{k+1}$ 的 2 倍 $\dfrac{2}{k+1}$，所以根據平均數定理，可知

$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_k = b_{k+1} + t_1 + t_2 = \dfrac{1}{k+1}$ 且 $t_1 = t_2$

再代回其他直徑驗算

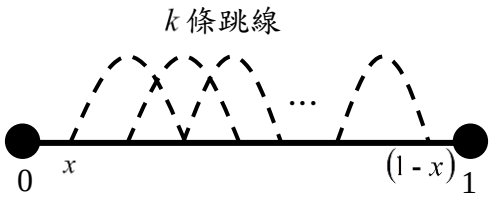
$d_{tt,1} = b_{k+1} + t_1 + t_2 = \dfrac{1}{k+1}$

$d_{bb,1} = \dfrac{b_1 + b_2}{2} = \dfrac{1}{k+1}$

(4) 綜合以上 a. b. 兩種情形，可知最短直徑 $d_{(k,2,1)} = \dfrac{1}{k+1}$

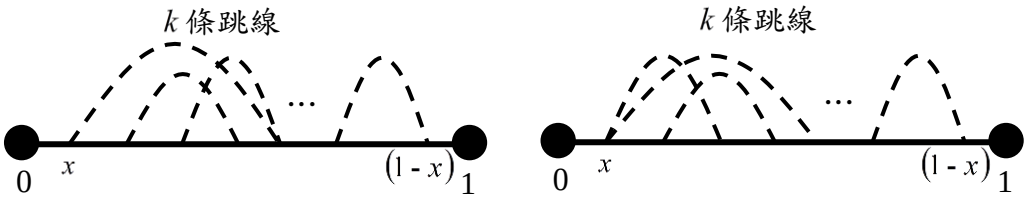
結論：這種情形的最短直徑 $d_{(k,2,1)} = \dfrac{1}{k+1}$。成立條件為：其中 k 座橋長度皆為 $\dfrac{1}{k+1}$，剩下一座橋再加上 2 條尾巴的總長為 $\dfrac{1}{k+1}$，2 條尾巴要等長。

接下來還原成跳線圖形，根據一筆畫原理，會有許多種還原方法，就是從其中一個端點，依不同順序經過 $(k+1)$ 座繩橋，再走至另一個端點，其跳線圖形如下：

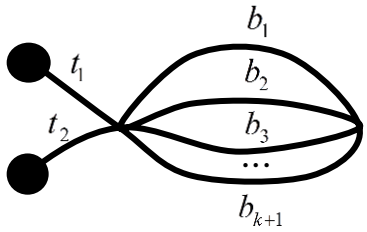


其中 $0 \leq x < \dfrac{1}{2k+2}$，

此外，其實跳線圖形還有許多種情形，像是下面 2 圖：



2. 第二種：沒有繩圈，尾巴在同一邊，其中 k 為奇數



已知：$t_1 \geq t_2 > 0$

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_{k+1} > 0$

$t_1 + t_2 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{k+1} = 1$

$k \geq 3$

k 為奇數

求證：最短直徑 $d_{(k,2,2)} = \dfrac{1}{k+1}$

證明：

(1) 直徑的可能發生情形：

$d_{tt,1} = t_1 + t_2$

$d_{tb,1} = t_1 + \dfrac{b_1 + b_{k+1}}{2}$

$d_{bb,1} = \dfrac{b_1 + b_2}{2}$

(2) 把 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_k,b_{k+1},t_1,t_2$ 這 $(k+3)$ 個數合併為 $(k+1)$ 個數：

$b_1,b_2,b_3,\cdots,b_k,(b_{k+1}+t_1+t_2)$。其中最大 2 數的可能情形有 2 種：

a. b_1,b_2

b. $b_1,b_{k+1}+t_1+t_2$

(3) 接下來分成 2 種情形：

a. 最大 2 數 $=b_1,b_2$

根據最大數定理，可知

$$b_1+b_2\geq\frac{1}{k+1}\times 2=\frac{2}{k+1}$$

$$\because b_1+b_2=\frac{b_1+b_2}{2}\times 2=2d_{bb,1}$$

$$\therefore 2d_{bb,1}\geq\frac{2}{k+1}$$

$$\therefore d_{bb,1}\geq\frac{1}{k+1}$$

若 $d_{bb,1}=\dfrac{b_1+b_2}{2}=\dfrac{1}{k+1}$

因為 b_1,b_2 為 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_k,(b_{k+1}+t_1+t_2)$ 這 $(k+1)$ 個數中的最大 2 數，而它們的和等於這 $(k+1)$ 數的平均數 $\dfrac{1}{k+1}$ 的 2 倍 $\dfrac{2}{k+1}$，所以根據平均數定理，可知

$$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_k=b_{k+1}+t_1+t_2=\frac{1}{k+1}$$

再代回其它直徑驗算

$$d_{tt,1}=t_1+t_2<\frac{1}{k+1}$$

$$d_{tb,1}=t_1+\frac{b_1+b_{k+1}}{2}\geq\frac{t_1+t_2+b_1+b_{k+1}}{2}=\frac{1}{k+1}$$

等號成立的條件為 $t_1=t_2$

b. 最大 2 數 $=b_1,(b_{k+1}+t_1+t_2)$

根據最大數定理，可知

$$b_1+(b_{k+1}+t_1+t_2)\geq\frac{1}{k+1}\times 2=\frac{2}{k+1}$$

$$\because b_1+(b_{k+1}+t_1+t_2)\leq(t_1+\frac{b_1+b_{k+1}}{2})\times 2=2d_{tb,1}$$

$$\therefore 2d_{tb,1}\geq b_1+(b_{k+1}+t_1+t_2)\geq\frac{2}{k+1}$$

$$\therefore d_{tb,1}\geq\frac{1}{k+1}$$

若 $d_{tb,1}=t_1+\frac{b_1+b_{k+1}}{2}=\frac{1}{k+1}$

因為 $b_1,(b_{k+1}+t_1+t_2)$ 為 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_k,(b_{k+1}+t_1+t_2)$ 這 $(k+1)$ 個數中的最大 2 數，而它們的和等於這 $(k+1)$ 數的平均數 $\frac{1}{k+1}$ 的 2 倍 $\frac{2}{k+1}$，所以根據平均數定理，可知

$$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_k=b_{k+1}+t_1+t_2=\frac{1}{k+1}$$

且 $t_1=t_2$

再代回其它直徑驗算

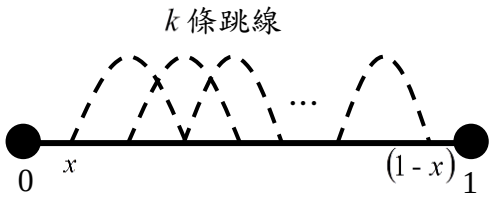
$$d_{tt,1}=t_1+t_2<\frac{1}{k+1}$$

$$d_{bb,1}=\frac{b_1+b_2}{2}=\frac{1}{k+1}$$

(4) 綜合以上 a.b.兩種情形，可知最短直徑 $d_{(k,2,2)}=\dfrac{1}{k+1}$

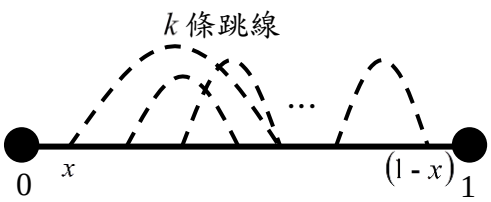
結論：這種情形的最短直徑 $d_{(k,2,2)}=\dfrac{1}{k+1}$。成立條件為：其中 k 座橋長度皆為 $\dfrac{1}{k+1}$，剩下一座橋再加上 2 條尾巴的總長為 $\dfrac{1}{k+1}$。

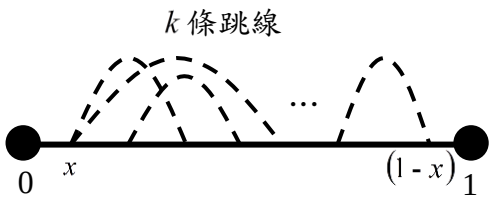
接下來還原成跳線圖形，根據一筆畫原理，會有許多種還原方法，就是從其中一個端點，依不同順序經過 $(k+1)$ 座繩橋，再走至另一個端點，其跳線圖形如下：



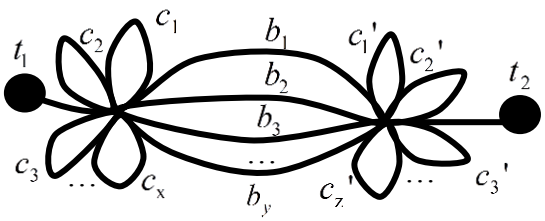
其中 $0\le x<\dfrac{1}{2k+2}$，

此外，其實跳線圖形還有許多種情形，像是下面 2 圖：





3. 第三種：兩節點上皆有繩圈，尾巴在不同邊，橋有奇數座



已知：$c_1\ge c_2\ge c_3\ge\cdots\ge c_x>0$

$b_1\ge b_2\ge b_3\ge\cdots\ge b_y>0$

$c_1'\ge c_2'\ge c_3'\ge\cdots\ge c_z'>0$

$c_1 \geq c_1'$

$t_1 \geq 0$

$t_2 \geq 0$

$x \geq 1$

$y \geq 3$

$z \geq 1$

$x + y + z = k + 1$

$t_1 + t_2 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_x + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_y + c_1' + c_2' + c_3' + \cdots + c_z' = 1$

$k \geq 3$

y 為奇數

求證：最短直徑 $d_{(k,2,3)} > \dfrac{1}{k+1}$

證明：

(1) 直徑的可能發生情形：

$d_{tt,1} = t_1 + b_y + t_2$

$d_{tc,1} = t_1 + \dfrac{c_1}{2}$

$d_{tc,2} = t_1 + b_y + \dfrac{c_1'}{2}$

$d_{tc,3} = t_2 + \dfrac{c_1'}{2}$

$d_{tc,4} = t_2 + b_y + \dfrac{c_1}{2}$

$d_{tb,1} = t_1 + \dfrac{b_1 + b_y}{2}$

$d_{tb,2} = t_2 + \dfrac{b_1 + b_y}{2}$

$d_{cc,1} = \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{2}$

$d_{cc,2} = \dfrac{c_1'}{2} + \dfrac{c_2'}{2}$

$$d_{cc,3}=\frac{c_1}{2}+b_y+\frac{c_1'}{2}$$

$$d_{cb,1}=\frac{c_1}{2}+\frac{b_1+b_y}{2}$$

$$d_{bb,1}=\frac{b_1+b_2}{2}$$

(2) 把$t_1,t_2,c_1,c_2,c_3,\cdots,c_x,b_1,b_2,b_3,\cdots,b_y,c_1',c_2',c_3',\cdots,c_z'$這$(k+3)$個數合併為$(k+1)$個數：

$c_1,c_2,c_3,\cdots,c_x,b_1,b_2,b_3,\cdots,b_{y-1},c_1',c_2',c_3',\cdots,c_z',(b_y+t_1+t_2)$。其中最大 2 數的可能情形有 6 種：

a. b_1,b_2

b. b_1,c_1

c. $b_1,b_y+t_1+t_2$

d. c_1,c_2

e. c_1,c_1'

f. $c_1,b_y+t_1+t_2$

(3) 接下來分成 6 種情形：

a. 最大 2 數$=b_1,b_2$

根據最大數定理，可知

$$b_1+b_2\geq\frac{1}{k+1}\times 2=\frac{2}{k+1}$$

$$\because b_1+b_2=\frac{b_1+b_2}{2}\times 2=2d_{bb,1}$$

$\therefore 2d_{bb,1} \geq \dfrac{2}{k+1}$

$\therefore d_{bb,1} \geq \dfrac{1}{k+1}$

若 $d_{bb,1} = \dfrac{b_1 + b_2}{2} = \dfrac{1}{k+1}$

因為 b_1, b_2 為

$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_x, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{y-1}, c_1', c_2', c_3', \cdots, c_z', (b_y + t_1 + t_2)$ 這

$(k+1)$ 個數中的最大 2 數，而它們的和等於這 $(k+1)$ 數的平均

數 $\dfrac{1}{k+1}$ 的 2 倍 $\dfrac{2}{k+1}$ ，所以根據平均數定理，可知

$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_x = b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_{y-1} = c_1' = c_2' = c_3' = \cdots = c_z' = (b_y + t_1 + t_2) = \dfrac{1}{k+1}$

代回其它直徑驗算，發現

$d_{cc,2} = \dfrac{c_1}{2} + b_y + \dfrac{c_1'}{2} > \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_1'}{2} = \dfrac{1}{k+1}$

所以這種情形的最短直徑 $> \dfrac{1}{k+1}$

b. 最大 2 數 $= b_1, c_1$

根據最大數定理，可知

$b_1 + c_1 \geq \dfrac{1}{k+1} \times 2 = \dfrac{2}{k+1}$

$\because b_1 + c_1 < (\dfrac{c_1}{2} + \dfrac{b_1 + b_y}{2}) \times 2 = 2d_{cb,1}$

$\therefore 2d_{cb,1} > b_1 + c_1 \geq \dfrac{2}{k+1}$

$\therefore d_{cb,1} > \dfrac{1}{k+1}$

所以這種情形的最短直徑 $> \dfrac{1}{k+1}$

c. 最大 2 數 $= b_1, (b_y + t_1 + t_2)$

根據最大數定理，可知

$$b_1+(b_y+t_1+t_2)\geq\frac{1}{k+1}\times 2=\frac{2}{k+1}$$

$$\because b_1+(b_y+t_1+t_2)=\left(t_1+\frac{b_1+b_y}{2}\right)+\left(t_2+\frac{b_1+b_y}{2}\right)=d_{tb,1}+d_{tb,2}$$

$$\therefore d_{tb,1}+d_{tb,2}\geq\frac{2}{k+1}$$

$$\therefore\frac{d_{tb,1}+d_{tb,2}}{2}\geq\frac{1}{k+1}$$

所以 $d_{tb,1}$ 和 $d_{tb,2}$ 其中較大的必 $\geq\frac{1}{k+1}$

若 $d_{tb,1}=d_{tb,2}=t_1+\frac{b_1+b_y}{2}=t_2+\frac{b_1+b_y}{2}=\frac{1}{k+1}$

因為 $b_1,(b_y+t_1+t_2)$ 為

$c_1,c_2,c_3,\cdots,c_x,b_1,b_2,b_3,\cdots,b_{y-1},c_1',c_2',c_3',\cdots,c_z',(b_y+t_1+t_2)$ 這

$(k+1)$ 個數中的最大 2 數，而它們的和等於這 $(k+1)$ 數的平均

數 $\frac{1}{k+1}$ 的 2 倍 $\frac{2}{k+1}$ ，所以根據平均數定理，可知

$$c_1=c_2=c_3=\cdots=c_x=b_1=b_2=b_3=\cdots=b_{y-1}=c_1'=c_2'=c_3'=\cdots=c_z'=(b_y+t_1+t_2)=\frac{1}{k+1}$$

代回其它直徑驗算，發現

$$d_{cc,2}=\frac{c_1}{2}+b_y+\frac{c_1'}{2}>\frac{c_1}{2}+\frac{c_1'}{2}=\frac{1}{k+1}$$

所以這種情形的最短直徑 $>\frac{1}{k+1}$

d. 最大 2 數 $=c_1,c_2$

根據最大數定理，可知

$$c_1+c_2\geq\frac{1}{k+1}\times 2=\frac{2}{k+1}$$

$$\because c_1+c_2=\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}\right)\times 2=2d_{cc,1}$$

$$\therefore 2d_{cc,1}\geq\frac{2}{k+1}$$

$\therefore d_{cc,1} \geq \dfrac{1}{k+1}$

若 $d_{cc,1} = \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{2} = \dfrac{1}{k+1}$

因為 c_1, c_2 為

$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_x, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{y-1}, c_1', c_2', c_3', \cdots, c_z', (b_y + t_1 + t_2)$ 這

$(k+1)$ 個數中的最大 2 數，而它們的和等於這 $(k+1)$ 數的平均

數 $\dfrac{1}{k+1}$ 的 2 倍 $\dfrac{2}{k+1}$ ，所以根據平均數定理，可知

$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_x = b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_{y-1} = c_1' = c_2' = c_3' = \cdots = c_z' = (b_y + t_1 + t_2) = \dfrac{1}{k+1}$

代回其它直徑驗算，發現

$d_{cc,2} = \dfrac{c_1}{2} + b_y + \dfrac{c_1'}{2} > \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_1'}{2} = \dfrac{1}{k+1}$

所以這種情形的最短直徑 $> \dfrac{1}{k+1}$

e. 最大 2 數 $= c_1, c_1'$

根據最大數定理，可知

$c_1 + c_1' \geq \dfrac{1}{k+1} \times 2 = \dfrac{2}{k+1}$

$\because c_1 + c_1' < (\dfrac{c_1}{2} + b_y + \dfrac{c_1'}{2}) \times 2 = 2d_{cc,2}$

$\therefore 2d_{cc,2} > c_1 + c_1' \geq \dfrac{2}{k+1}$

$\therefore d_{cc,2} > \dfrac{1}{k+1}$

所以這種情形的最短直徑 $> \dfrac{1}{k+1}$

f. 最大 2 數 $= c_1, (b_y + t_1 + t_2)$

根據最大數定理，可知

$c_1 + (b_y + t_1 + t_2) \geq \dfrac{1}{k+1} \times 2 = \dfrac{2}{k+1}$

$\because c_1+(b_y+t_1+t_2)=\left(t_1+\frac{c_1}{2}\right)+\left(t_2+b_y+\frac{c_1}{2}\right)=d_{tc,1}+d_{tc,2}$

$\therefore d_{2,1}+d_{2,2}\geq\frac{2}{k+1}$

$\therefore\frac{d_{tc,1}+d_{tc,2}}{2}\geq\frac{1}{k+1}$

所以 $d_{tc,1}$ 和 $d_{tc,2}$ 其中較大的必 $\geq\frac{1}{k+1}$

若 $d_{tc,1}=d_{tc,2}$

則 $t_1+\frac{c_1}{2}=t_2+b_y+\frac{c_1}{2}=\frac{1}{k+1}$

因為 $c_1,(b_y+t_1+t_2)$ 為

$c_1,c_2,c_3,\cdots,c_x,b_1,b_2,b_3,\cdots,b_{y-1},c_1',c_2',c_3',\cdots,c_z',(b_y+t_1+t_2)$ 這 $(k+1)$ 個數中的最大 2 數，而它們的和等於這 $(k+1)$ 數的平均數 $\frac{1}{k+1}$ 的 2 倍 $\frac{2}{k+1}$ ，所以根據平均數定理，可知

$c_1=c_2=c_3=\cdots=c_x=b_1=b_2=b_3=\cdots=b_{y-1}=c_1'=c_2'=c_3'=\cdots=c_z'=(b_y+t_1+t_2)=\frac{1}{k+1}$

代回其它直徑驗算，發現

$d_{,2}=\frac{c_1}{2}+b_y+\frac{c_1'}{2}>\frac{c_1}{2}+\frac{c_1'}{2}=\frac{1}{k+1}$

所以這種情形的最短直徑 $>\frac{1}{k+1}$

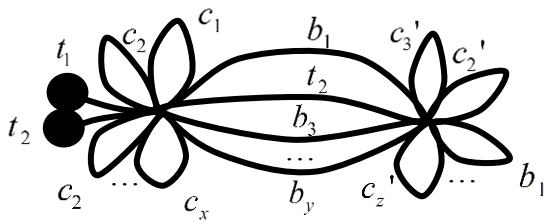
(4) 綜合以上 a.b.c.d.e.f.六種情形，可知最短直徑 $d_{(k,2,3)}>\frac{1}{k+1}$

結論：這種情形的最短直徑 $d_{(k,2,3)}>\frac{1}{k+1}$ 。

在加 1 條跳線、加 k 條跳線黏合圖形中一個節點、加 2 條跳線、加 k 條跳線黏合圖形中二個節點的前三種，我們都用上文的證明方法證出，但我在證加 k 條跳線黏合圖形中二個節點的第四種時，發

現會有幾組的最大 2 數找不到直徑會大於或等於它，所以我們決定尋找新的研究方法。

4. 第四種：兩節點上皆有繩圈，尾巴在同一邊，橋有偶數座



已知：$c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \cdots \geq c_x > 0$

$c_1' \geq c_2' \geq c_3' \geq \cdots \geq c_z' > 0$

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_y > 0$

$x + y + z = k + 1$

$t_1 \geq t_2 \geq 0$

$t_1 + t_2 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_x + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_y + c_1' + c_2' + c_3' + \cdots + c_z' = 1$

$x \geq 1$

$y \geq 2$

$z \geq 1$

y 為偶數

求證：最短直徑 $d_{(k,2,4)} > \dfrac{1}{k+1}$

證明：

(1) 直徑的可能發生情形：

$d_{tt,1} = t_1 + t_2$

$d_{tc,1} = t_1 + \dfrac{c_1}{2}$

$d_{tc,2} = t_1 + b_y + \dfrac{c_1'}{2}$

$$d_{tb,1}=t_1+\frac{b_1+b_y}{2}$$

$$d_{cc,1}=\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}$$

$$d_{cc,2}=\frac{c_1'}{2}+\frac{c_2'}{2}$$

$$d_{cc,3}=\frac{c_1}{2}+b_y+\frac{c_1'}{2}$$

$$d_{cb,1}=\frac{c_1}{2}+\frac{b_1+b_y}{2}$$

$$d_{cb,2}=\frac{c_1'}{2}+\frac{b_1+b_y}{2}$$

$$d_{bb,1}=\frac{b_1+b_2}{2}$$

(2) $2d_{cc,3}+2d_{tb,1}+(x-1)d_{cc,1}+(y-2)d_{bb,1}+(z-1)d_{cc,2}$

$$=2\left(\frac{c_1}{2}+b_y+\frac{c_1'}{2}\right)+2\left(t_1+\frac{b_1+b_y}{2}\right)+(x-1)\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}\right)+(y-2)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)+(z-1)\left(\frac{c_1'}{2}+\frac{c_2'}{2}\right)$$

$$=c_1+2b_y+c_1'+2t_1+b_1+b_y+(x-1)\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}\right)+(y-2)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)+(z-1)\left(\frac{c_1'}{2}+\frac{c_2'}{2}\right)$$

$$=c_1+c_1'+2t_1+b_1+3b_y+(x-1)\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}\right)+(y-2)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)+(z-1)\left(\frac{c_1'}{2}+\frac{c_2'}{2}\right)$$

因為左邊共有 x 個繩圈，而 $\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}$ 會大於或等於除了 c_1 以外左邊所有的繩圈，所以 $(x-1)\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}\right)\geq c_2+c_3+c_4+\cdots+c_x$。同理，右邊 $(z-1)\left(\frac{c_1'}{2}+\frac{c_2'}{2}\right)\geq c_2'+c_3'+c_4'+\cdots.+c_z'$ 也會成立。

繩橋也一樣，共有 y 座繩橋，而 $\frac{b_1+b_2}{2}$ 會大於或等於除了 b_1 以外所有的繩橋，所以 $(y-2)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)\geq b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{y-1}$

綜合以上三點，可知

$$(x-1)\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}\right)+(y-2)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)+(z-1)\left(\frac{c_1'}{2}+\frac{c_2'}{2}\right)$$

$$\geq c_2+c_3+c_4+\cdots+c_x+c_2'+c_3'+c_4'+\cdots+c_z'+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{y-1}$$

又

$$c_2+c_3+c_4+\cdots+c_x+c_2'+c_3'+c_4'+\cdots+c_z'+b_2+b_3+b_4+\cdots$$

$$b_{y-1}+c_1+b_1+b_y+c_1'+t_1+t_2=1$$

$t_1 \geq t_2$

所以

$$c_1+c_1'+2t_1+b_1+3b_y+(x-1)\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}\right)+(y-2)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)+(z-1)\left(\frac{c_1'}{2}+\frac{c_2'}{2}\right)$$

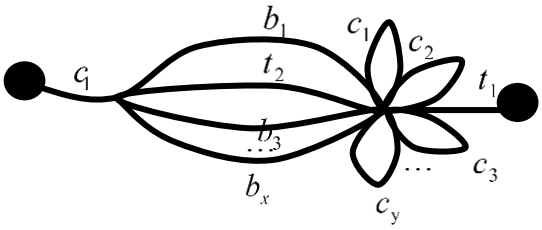
$$\geq 1+2b_y \quad >1$$

(3) 根據最大數定理，可知在

$2d_{cc,3}, 2d_{tb,1}, (x-1)d_{cc,1}, (y-2)d_{bb,1}, (z-1)d_{cc,2}$ 這 $(k+1)$ 個數中，最大者必 $> \dfrac{1}{k+1}$，所以 $d_{cc,3}, d_{tb,1}, d_{cc,1}, d_{bb,1}, d_{cc,2}$ 這 5 個直徑可能發生情形中，最大者必 $> \dfrac{1}{k+1}$。

結論：這種情形的最短直徑 $d_{(k,2,4)} > \dfrac{1}{k+1}$

5. 第五種：繩圈僅在一個節點上，尾巴在不同邊，橋有奇數座



已知：$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_x > 0$

$c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \cdots \geq c_y > 0$

$t_1 \geq 0$

$t_2 \geq 0$

$$t_1+t_2+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_x+c_1+c_2+c_3+\cdots+c_y=1$$

$$x+y=k+1$$

$$x\geq 3$$

$$y\geq 1$$

x 為奇數

求證：最短直徑 $d_{(k,2,5)}>\dfrac{1}{k+1}$

證明：

(1) 直徑的可能發生情形：

$$d_{tt,1}=t_1+b_x+t_2$$

$$d_{tc,1}=t_2+\frac{c_1}{2}$$

$$d_{tc,2}=t_1+b_x+\frac{c_1}{2}$$

$$d_{tb,1}=t_1+\frac{b_1+b_x}{2}$$

$$d_{tb,2}=t_2+\frac{b_1+b_x}{2}$$

$$d_{cc,1}=\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}$$

$$d_{cb,1}=\frac{c_1}{2}+\frac{b_1+b_x}{2}$$

$$d_{bb,1}=\frac{b_1+b_2}{2}$$

(2) $d_{tt,1}+2d_{cb,1}+(x-2)d_{bb,1}+(y-1)d_{cc,1}$

$$=(t_1+b_x+t_2)+2\left(\frac{c_1}{2}+\frac{b_1+b_x}{2}\right)+(x-2)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)+(y-1)\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}\right)$$

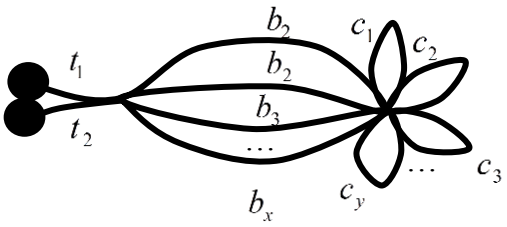
$$\geq t_1+b_x+t_2+c_1+b_1+b_x+(b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{x-1})$$

$$+(c_2+c_3+c_4+\cdots+c_y)=1+b_x>1$$

(3) 根據最大數定理，可知在 $d_{tt,1}, 2d_{cb,1}, (x-1)d_{cc,1}, (y-2)d_{bb,1}$ 這 $(k+1)$ 個數中，最大者必 $> \dfrac{1}{k+1}$，所以 $d_{tt,1}, d_{cb,1}, d_{cc,1}, d_{bb,1}$ 這 4 個直徑可能發生情形中，最大者必 $> \dfrac{1}{k+1}$。

結論：這種情形的最短直徑 $d_{(k,2,5)} > \dfrac{1}{k+1}$。

6. 第六種：繩圈僅在距離尾巴較遠的節點上，尾巴在同一邊，橋有偶數座



已知：$b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \cdots \ge b_x > 0$

$c_1 \ge c_2 \ge c_3 \ge \cdots \ge c_y > 0$

$t_1 \ge t_2 \ge 0$

$t_1 + t_2 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_x + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_y = 1$

$x + y = k + 1$

$x \ge 2$

$y \ge 1$

x 為偶數

求證：最短直徑 $d_{(k,2,6)} > \dfrac{1}{k+1}$

證明：

(1) 直徑的可能發生情形：

$d_{tt,1} = t_1 + t_2$

$$d_{tc,1}=t_1+b_x+\frac{c_1}{2}$$

$$d_{tb,1}=t_1+\frac{b_1+b_x}{2}$$

$$d_{cc,1}=\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}$$

$$d_{cb,1}=\frac{c_1}{2}+\frac{b_1+b_x}{2}$$

$$d_{bb,1}=\frac{b_1+b_2}{2}$$

(2) $d_{tc,1}+d_{tb,1}+d_{cb,1}+(x-2)d_{bb,1}+(y-1)d_{cc,1}$

$$\left(t_1+b_x+\frac{c_1}{2}\right)+\left(t_1+\frac{b_1+b_x}{2}\right)+\left(\frac{c_1}{2}+\frac{b_1+b_x}{2}\right)+(x-2)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)+(y-1)\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}\right)$$

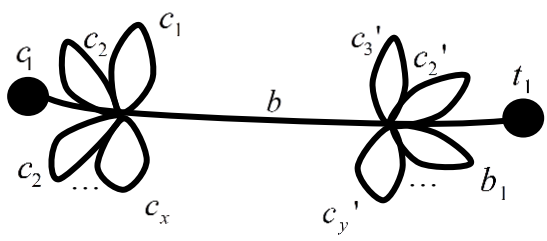
$$\geq 2t_1+2b_x+c_1+b_1+(b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{x-1})+(c_2+c_3+c_4+\cdots+c_y)$$

$$\geq 1+b_y>1$$

(3) 根據最大數定理，可知在 $d_{tc,1},d_{tb,1},d_{cb,1},(x-2)d_{bb,1},(y-1)d_{cc,1}$ 這 $(k+1)$ 個數中，最大者必 $>\frac{1}{k+1}$，所以 $d_{tc,1},d_{tb,1},d_{cb,1},d_{bb,1},d_{cc,1}$ 這 4 個直徑可能發生情形中，最大者必 $>\frac{1}{k+1}$。

結論：這種情形的最短直徑 $d_{(k,2,6)}>\frac{1}{k+1}$。

7. 第七種：兩節點上若有繩圈，尾巴在不同邊，僅有一座橋



已知：$c_1\geq c_2\geq c_3\geq\cdots\geq c_x>0$

$$c_1' \geq c_2' \geq c_3' \geq \cdots \geq c_y' > 0$$

$$b > 0$$

$$t_1 \geq t_2 \geq 0$$

$$t_1 + t_2 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_x + b + c_1' + c_2' + c_3' + \cdots + c_y' = 1$$

$$x + y = k + 1$$

$$x \geq 1$$

$$y \geq 1$$

求證：最短直徑 $d_{(k,2,7)} > \dfrac{1}{k+1}$

證明：

(1) 直徑的可能發生情形：

$$d_{tt,1} = t_1 + b + t_2$$

$$d_{tc,1} = t_1 + \frac{c_1}{2}$$

$$d_{tc,2} = t_1 + b + \frac{c_1'}{2}$$

$$d_{tc,3} = t_2 + b + \frac{c_1}{2}$$

$$d_{cc,1} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2}$$

$$d_{cc,2} = \frac{c_1'}{2} + \frac{c_2'}{2}$$

$$d_{cc,3} = \frac{c_1}{2} + b + \frac{c_1'}{2}$$

$$d_{tc,2} + d_{tc,3} + d_{cc,3} + (x-1)d_{cc,1} + (y-1)d_{cc,2}$$

$$\left(t_1 + b + \frac{c_1'}{2}\right) + \left(t_2 + b + \frac{c_1}{2}\right) + \left(\frac{c_1}{2} + b + \frac{c_1'}{2}\right) + (x-1)\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2}\right) + (y-1)\left(\frac{c_1'}{2} + \frac{c_2'}{2}\right)$$

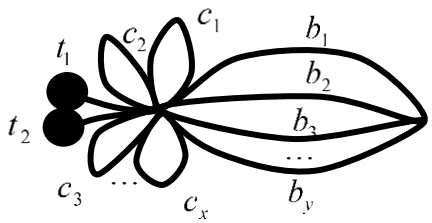
$\geq t_1+t_2+3b+c_1+c_1'+(c_2+c_3+c_4+\cdots+c_x)+(c_2'+c_3'+c_4'+\cdots+c_y')$

$=1+2b>1$

(2) 根據最大數定理，可知在 $d_{tc,2},d_{tc,3},d_{cc,3},(x-1)d_{cc,1},(y-1)d_{cc,2}$ 這 $(k+1)$ 個數中，最大者必 $>\dfrac{1}{k+1}$，所以 $d_{tc,2},d_{tc,3},d_{cc,3},d_{cc,1},d_{cc,2}$ 這 4 個直徑可能發生情形中，最大者必 $>\dfrac{1}{k+1}$。

結論：這種情形的最短直徑 $d_{(k,2,7)}>\dfrac{1}{k+1}$。

8. 第八種：繩圈僅在距離尾巴較近的節點上，尾巴在同一邊，橋有偶數座



已知：$c_1\geq c_2\geq c_3\geq\cdots\geq c_x>0$

$b_1\geq b_2\geq b_3\geq\cdots\geq b_y>0$

$t_1\geq t_2\geq 0$

$t_1+t_2+c_1+c_2+c_3+\cdots+c_x+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_y=1$

$x+y=k+1$

$x\geq 1$

$y\geq 4$

y 為偶數

求證：最短直徑 $d_{(k,2,8)}>\dfrac{1}{k+1}$

證明：

(1) 直徑的可能發生情形：

$$d_{tt,1}=t_1+t_2$$

$$d_{tc,1}=t_1+\frac{c_1}{2}$$

$$d_{tb,1}=t_1+\frac{b_1+b_y}{2}$$

$$d_{cc,1}=\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}$$

$$d_{cb,1}=\frac{c_1}{2}+\frac{b_1+b_y}{2}$$

$$d_{bb,1}=\frac{b_1+b_2}{2}$$

(2) $2d_{tb,1}+2d_{cb,1}+(x-1)d_{cc,1}+(y-3)d_{bb,1}$

$$2\left(t_1+\frac{b_1+b_y}{2}\right)+2\left(\frac{c_1}{2}+\frac{b_1+b_y}{2}\right)+(x-1)\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}\right)+(y-3)\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)$$

$$\geq t_1+t_2+2b_1+2b_y+(c_1+c_2+c_3+\cdots+c_x)+(b_3+b_4+b_5+\cdots+b_{y-1})$$

$$\geq 1+b_1>1$$

(3) 根據最大數定理，可知在 $2d_{tb,1},2d_{cb,1},(x-1)d_{cc,1},(y-3)d_{bb,1}$ 這 $(k+1)$ 個數中，最大者必 $>\frac{1}{k+1}$，所以 $d_{tb,1},d_{cb,1},d_{cc,1},d_{bb,1}$ 這 4 個直徑可能發生情形中，最大者必 $>\frac{1}{k+1}$。

結論：這種情形的最短直徑 $d_{(k,2,8)}>\frac{1}{k+1}$。

綜合以上八種情形，可得

總結論：在線段上加 k 條跳線，黏合圖形中有二個節點，最短直徑 $d_{(k,2)}=\frac{1}{k+1}$

(十三)　新的證明方法整理

若要證明加 k 條跳線時直徑會 $\geq \frac{1}{k+1}$，可以嘗試**找到 $(k+1)$ 個直徑的可能情形(可以重複)，而且這些直徑的和** ≥ 1，這樣的話，根據最大數定理，這些直徑裡的最大值就會 $\geq \frac{1}{k+1}$ 了。

如果這 $(k+1)$ 個直徑的和 >1，就可直接推論說一定有直徑 $> \frac{1}{k+1}$，所以此圖形的最短直徑會 $> \frac{1}{k+1}$。

如果這些直徑的和 $=1$，就可直接推說一定有直徑 $\geq \frac{1}{k+1}$，因為在 1 個節點時證明出最短直徑 $= \frac{1}{k+1}$，所以在 2 個節點以上時的最短直徑不能 $> \frac{1}{k+1}$，不然 1 個節點就夠了，所以根據平均數定理，所找出的 $(k+1)$ 個可能的直徑皆 $= \frac{1}{k+1}$，再分析等號成立的條件並檢驗，最後還原成跳線圖形。

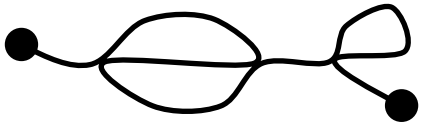
(十四)　加 3 條跳線

在加三條跳線的黏合圖形中，有一個、二個和三個節點三種情形，其中一個和二個節點我們都已證明完畢，所以只需要證出三個節點的情形就好了。

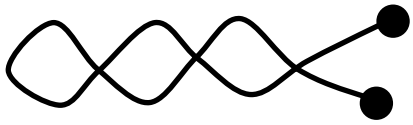
根據橋圈數定理，可知在加三條跳線、黏合圖形中有三個節點時，會有 3+3-1=$\boxed{5}$ 個繩橋加繩圈，而總共可排列出 130 種不同的圖形(只有繩橋的 20 種；4 座繩橋、1 個繩圈的 38 種；3 座繩橋、2 個繩圈的 44 種；2 座繩橋、3 個繩圈的 28 種。20+38+44+28=$\boxed{130}$，其來源可參考附錄二)，去掉不符合一筆劃定理的情況(因為二個端點各只有一個連線數，

因此所 1 有節點的連線數都須是偶數，被去掉的就是有連線數是奇數的節點的情形)，還剩下 8 種：

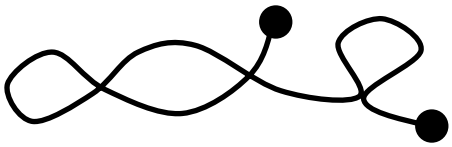
第一種：



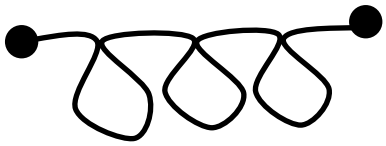
第二種：



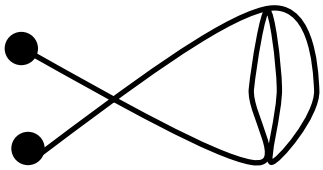
第三種：



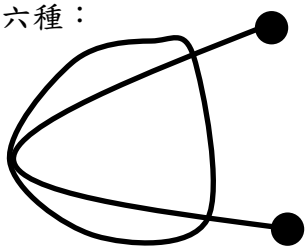
第四種：



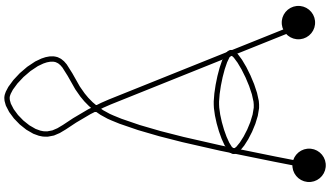
第五種：



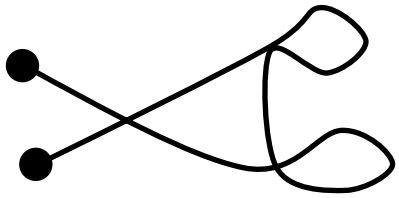
第六種：



第七種：

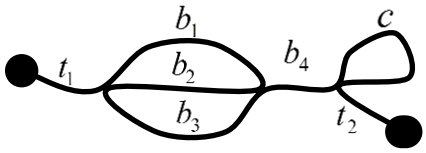


第八種：



接下來我們一種一種分別證明：

1. 第一種



已知：$b_1 \geq b_2 \geq b_3 > 0$

$b_4 > 0$

$c > 0$

$t_1 \geq 0$

$t_2 \geq 0$

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + c + t_1 + t_2 = 1$

求證：最短直徑 $d_{(3,3,1)} > \frac{1}{4}$

證明：

(1) 直徑可能發生情形：

$d_{tt,1} = t_1 + b_3 + b_4 + t_2$

$d_{tc,1} = t_1 + b_3 + b_4 + \frac{c}{2}$

$d_{tc,2} = t_2 + \frac{c}{2}$

$d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_1 + b_3}{2}$

$d_{tb,2} = t_2 + b_4 + \frac{b_1 + b_3}{2}$

$d_{cb,1} = \frac{c}{2} + b_4 + \frac{b_1 + b_3}{2}$

$d_{bb,1} = \frac{b_1 + b_2}{2}$

(2) $d_{tc,1} + d_{tb,2} + d_{cb,1} + d_{bb,1}$

$$= \left(t_1 + b_3 + b_4 + \frac{c}{2}\right) + \left(t_2 + b_4 + \frac{b_1 + b_3}{2}\right) + \left(\frac{c}{2} + b_4 + \frac{b_1 + b_3}{2}\right) + \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)$$

$$= (t_1 + t_2 + b_1 + b_3 + b_4 + c) + b_3 + 2b_4 + \frac{b_1 + b_2}{2}$$

(3) $\because$ 已知 $b_1 \geq b_2 \geq b_3 > 0$

$\therefore \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \frac{b_2 + b_2}{2} = b_2$

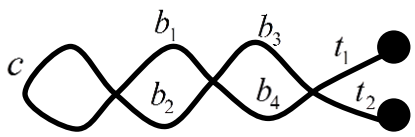
$$\therefore (t_1+t_2+b_1+b_3+b_4+c)+\frac{b_1+b_2}{2} \geq (t_1+t_2+b_1+b_3+b_4+c)+b_2=1$$

$$\left(t_1+t_2+b_1+b_3+b_4+c+\frac{b_1+b_2}{2}\right)+b_3+2b_4>1$$

根據最大數定理，可知在 $d_{tc,1}, d_{tb,2}, d_{cb,1}, d_{bb,1}$ 這 4 個直徑可能發生情形中，最大者必 $>\frac{1}{4}$

結論：這種情形最短直徑 $d_{(3,3,1)}>\frac{1}{4}$

2. 第二種



已知：$b_1 \geq b_2 > 0$

$b_3 \geq b_4 > 0$

$c > 0$

$t_1 \geq t_2 \geq 0$

$b_1+b_2+b_3+b_4+c+t_1+t_2=1$

求證：最短直徑 $d_{(3,3,2)}>\frac{1}{4}$

證明：

(1) 直徑可能發生情形：

$d_{tt,1}=t_1+t_2$

$d_{tc,1}=t_1+b_4+b_2+\frac{c}{2}$

$d_{tb,1}=t_1+\frac{b_3+b_4}{2}$

$d_{tb,2}=t_1+b_4+\frac{b_1+b_2}{2}$

$$d_{cb,1}=\frac{c}{2}+\frac{b_1+b_2}{2}$$

$$d_{cb,2}=\frac{c}{2}+b_2+\frac{b_3+b_4}{2}$$

(2) $2d_{tb,2}+2d_{cb,2}$

$$=2\left(t_1+b_4+\frac{b_1+b_2}{2}\right)+2\left(\frac{c}{2}+b_2+\frac{b_3+b_4}{2}\right)$$

$$=2t_1+b_1+3b_2+b_3+3b_4+c$$

又∵ 已知 $t_1\geq t_2$

$\therefore 2t_1+b_1+3b_2+b_3+3b_4+c\geq t_1+t_2+b_1+3b_2+b_3+3b_4+c$

又∵ 已知 $b_1+b_2+b_3+b_4+c+t_1+t_2=1$ 且 $b_2>0$ 、 $b_4>0$

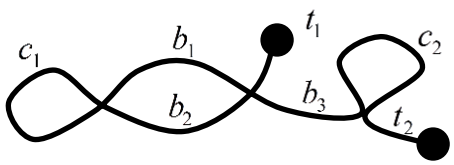
$t_1+t_2+b_1+3b_2+b_3+3b_4+c=1+2b_2+2b_4>1$

$\therefore 2d_{tb,2}+2d_{cb,2}>1$

根據最大數定理，可知在 $d_{tb,2},d_{tb,2},d_{cb,2},d_{cb,2}$ 這 4 個數中，最大者必 $>\frac{1}{4}$，所以在 $d_{tb,2},d_{cb,2}$ 這 2 個直徑可能發生情形中，最大者必 $>\frac{1}{4}$

結論：這種情形最短直徑 $d_{(3,3,2)}>\frac{1}{4}$

3. 第三種



已知： $b_1\geq b_2>0$

$b_3>0$

$c_1>0$

$c_2 > 0$

$t_1 \geq 0$

$t_2 \geq 0$

$b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + t_1 + t_2 = 1$

求證：最短直徑 $d_{(3,3,3)} > \frac{1}{4}$

證明：

(1) 直徑可能發生情形：

$d_{tt,1} = t_1 + b_3 + t_2$

$d_{tc,1} = t_1 + b_2 + \frac{c_1}{2}$

$d_{tc,2} = t_1 + b_3 + \frac{c_2}{2}$

$d_{tc,3} = t_2 + \frac{c_2}{2}$

$d_{tc,4} = t_2 + b_3 + b_2 + \frac{c_1}{2}$

$d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_1 + b_2}{2}$

$d_{tb,2} = t_2 + b_3 + \frac{b_1 + b_2}{2}$

$d_{cc,1} = \frac{c_1}{2} + b_2 + b_3 + \frac{c_2}{2}$

$d_{cb,1} = \frac{c_1}{2} + \frac{b_1 + b_2}{2}$

$d_{cb,2} = \frac{c_2}{2} + b_3 + \frac{b_1 + b_2}{2}$

(2) $d_{tt,1} + d_{cc,1} + d_{cb,1} + d_{cb,2}$

$$= (t_1 + b_3 + t_2) + \left(\frac{c_1}{2} + b_2 + b_3 + \frac{c_2}{2}\right) + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{b_1 + b_2}{2}\right) + \left(\frac{c_2}{2} + b_3 + \frac{b_1 + b_2}{2}\right)$$

$=(t_1+t_2+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2)+b_2+2b_3$

$\because$ 已知 $b_1+b_2+b_3+c_1+c_2+t_1+t_2=1$

$\therefore (t_1+t_2+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2)+b_2+2b_3=1+b_2+2b_3$

$\because$ 已知 $b_1 \geq b_2 > 0$ 、 $b_3 > 0$

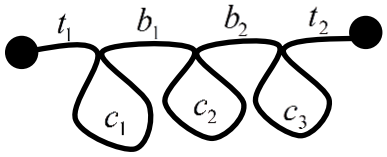
$\therefore 1+b_2+2b_3>1$

$\therefore d_{tt,1}+d_{cc,1}+d_{cb,1}+d_{cb,2}=1+b_2+2b_3>1$

根據最大數定理，可知在 $d_{tt,1},d_{cc,1},d_{cb,1},d_{cb,2}$ 這 4 個直徑可能發生情形中，最大者必 $>\frac{1}{4}$

結論：這種情形最短直徑 $d_{(3,3,3)}>\frac{1}{4}$

4. 第四種



已知：$t_1 \geq t_2 \geq 0$

$b_1>0$

$b_2>0$

$c_1>0$

$c_2>0$

$c_3>0$

$b_1+b_2+c_1+c_2+c_3+t_1+t_2=1$

求證：最短直徑 $d_{(3,3,4)}>\frac{1}{4}$

證明：

(3) 直徑可能發生情形：

$$d_{tt,1}=t_1+b_1+b_2+t_2$$

$$d_{tc,1}=t_1+\frac{c_1}{2}$$

$$d_{tc,2}=t_1+b_1+\frac{c_2}{2}$$

$$d_{tc,3}=t_1+b_1+b_2+\frac{c_3}{2}$$

$$d_{tc,4}=t_2+b_2+\frac{c_2}{2}$$

$$d_{tc,5}=t_2+b_2+b_1+\frac{c_1}{2}$$

$$d_{cc,1}=\frac{c_1}{2}+b_1+\frac{c_2}{2}$$

$$d_{cc,2}=\frac{c_1}{2}+b_1+b_2+\frac{c_3}{2}$$

$$d_{cc,3}=\frac{c_2}{2}+b_2+\frac{c_3}{2}$$

(4) $d_{tt,1}+d_{cc,1}+d_{cc,2}+d_{cc,3}$

$$=\left(t_1+b_1+b_2+t_2\right)+\left(\frac{c_1}{2}+b_1+\frac{c_2}{2}\right)+\left(\frac{c_1}{2}+b_1+b_2+\frac{c_3}{2}\right)+\left(\frac{c_2}{2}+b_2+\frac{c_3}{2}\right)$$

$$=\left(t_1+t_2+b_1+b_2+c_1+c_2+c_3\right)+2b_1+2b_2$$

$\because$ 已知 $b_1+b_2+c_1+c_2+c_3+t_1+t_2=1$

$$\therefore\left(t_1+t_2+b_1+b_2+c_1+c_2+c_3\right)+2b_1+2b_2=1+2b_1+2b_2$$

$\because$ 已知 $b_1>0$ 、 $b_2>0$

$$\therefore 1+2b_1+2b_2>1$$

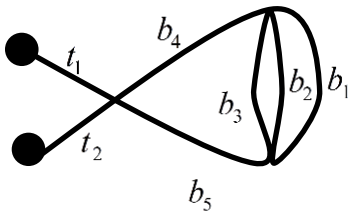
$$\therefore d_{tt,1}+d_{cc,1}+d_{cc,2}+d_{cc,3}=1+2b_1+2b_2>1$$

根據最大數定理，可知在 $d_{tt,1},d_{cc,1},d_{cc,2},d_{cc,3}$ 這 4 個直徑可能發生

情形中，最大者必 $> \frac{1}{4}$

結論：這種情形最短直徑 $d_{(3,3,4)} > \frac{1}{4}$

5. 第五種



已知：$b_1 \geq b_2 \geq b_3 > 0$

$b_4 \geq b_5 > 0$

$t_1 \geq t_2 \geq 0$

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + t_1 + t_2 = 1$

求證：最短直徑 $d_{(3,3,4)} = \frac{1}{4}$

證明：

(1) 無論各橋長度如何，直徑的可能發生情形：

$d_{tt,1} = t_1 + t_2$

$d_{bb,1} = \frac{b_1 + b_2}{2}$

$d_{bb,2} = \frac{b_1 + b_4 + b_5}{2}$

(2) 在 d_{tb} 方面，因為會因橋長而有所變動，底下分成 a.距離 t_1 最遠的點在 b_1 上、b.距離 t_1 最遠的點在 b_4 上 2 種情形討論：

a. 距離 t_1 最遠的點在 b_1 上($b_1 + b_5 \geq b_4$ 時)

根據點到橋定理，可知

$$d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_1 + b_5 + \min(b_4, b_3 + b_5)}{2}$$

接下來再分成 2 種情形

(a) $d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_1 + b_4 + b_5}{2}$ $(b_3 + b_5 \geq b_4$ 時)

$2d_{tb,1} + 2d_{bb,1}$

$= 2\left(t_1 + \frac{b_1 + b_4 + b_5}{2}\right) + 2\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)$

$= 2t_1 + b_1 + b_4 + b_5 + b_1 + b_2$

$\geq t_1 + t_2 + b_1 + b_4 + b_5 + b_3 + b_2 = 1$

等號成立的條件為 $t_1 = t_2$, $b_1 = b_2 = b_3$ (*)

根據最大數定理，可知在 $d_{tb,1}, d_{tb,1}, d_{bb,1}, d_{bb,1}$ 這 4 個數中，最大者必 $\geq \frac{1}{4}$，所以在 $d_{tb,1}, d_{bb,1}$ 這 2 個直徑可能發生情形中，最大者必 $\geq \frac{1}{4}$。

因為在 1 和 2 個節點時證明出最短直徑為 $\frac{1}{k+1}$，所以在 3 個節點時的最短直徑不能 $> \frac{1}{k+1}$，不然一個或二個節點就夠了，而加 3 條跳線時最短直徑不能超過 $\frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$。

$\therefore$ 令 $d_{tb,1} = d_{bb,1} = \frac{1}{4}$

此時 $d_{tb,1} = d_{bb,1}$

$\left(t_1 + \frac{b_1 + b_4 + b_5}{2}\right) = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)$

$2t_1 + b_1 + b_4 + b_5 = b_1 + b_2$

$2t_1 + b_4 + b_5 = b_2$

又$\because b_1 = b_2 = b_3$(*), $t_1 = t_2$

$\therefore t_1 + t_2 + b_4 + b_5 = b_2 = b_1 = b_3$

$\because b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + t_1 + t_2 = 1$

$\therefore t_1 + t_2 + b_4 + b_5 = b_2 = b_1 = b_3 = \frac{1}{4}$

再代回其它直徑驗算

$d_{tt,1} = t_1 + t_2 < \frac{1}{4}$

$d_{bb,2} = \frac{b_1 + b_4 + b_5}{2} \le \frac{1}{4}$

(b) $d_{tb,1} = t_1 + b_5 + \frac{b_1 + b_3}{2}$ 時　（$b_3 + b_5 \le b_4$ 時）

$2d_{tb,1} + 2d_{bb,2}$

$= 2\left(t_1 + b_5 + \frac{b_1 + b_3}{2}\right) + 2\left(\frac{b_1 + b_4 + b_5}{2}\right)$

$= 2t_1 + 2b_5 + b_1 + b_3 + b_1 + b_4 + b_5$

$\ge (t_1 + t_2 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) + 2b_5 = 1 + 2b_5 > 1$

根據最大數定理，可知在$d_{tb,1}, d_{tb,1}, d_{bb,2}, d_{bb,2}$這 4 個數中，最大者必$> \frac{1}{4}$，所以在$d_{tb,1}, d_{bb,2}$這 2 個直徑可能發生情形中，最大者必$> \frac{1}{4}$

b. 距離t_1最遠的點在b_4上（$b_1 + b_5 \le b_4$時）

$d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_3 + b_4 + b_5}{2}$

$2d_{tb,1} + 2d_{bb,1}$

$= 2\left(t_1 + \frac{b_3 + b_4 + b_5}{2}\right) + 2\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)$

$= 2t_1 + b_3 + b_4 + b_5 + b_1 + b_2$

$\geq t_1 + t_2 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 1$

等號成立的條件為 $t_1 = t_2$

根據最大數定理，可知在 $d_{tb,1}, d_{tb,1}, d_{bb,1}, d_{bb,1}$ 這 4 個數中，最大者必 $\geq \frac{1}{4}$。所以在 $d_{tb,1}, d_{bb,1}$ 這 2 個直徑可能發生情形中，最大者必 $\geq \frac{1}{4}$。

因為在 1 和 2 個節點時證明出最短直徑為 $\frac{1}{k+1}$，所以在 3 個節點時的最短直徑不能大於 $\frac{1}{k+1}$，不然一個或二個節點就夠了，而加 3 條跳線時最短直徑不能超過 $\frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$。

$\therefore$ 令 $d_{tb,1} = d_{bb,1} = \frac{1}{4}$

同理 $d_{bb,2} = \frac{b_1 + b_4 + b_5}{2}$ 也不能大於 $\frac{1}{4}$

$\therefore d_{bb,2} = \frac{b_1 + b_4 + b_5}{2} \leq \frac{1}{4}$

$b_1 + b_4 + b_5 \leq \frac{1}{2}$ （式子三）

$\because d_{bb,1} = \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{1}{4}$

根據最大數定理可知，

$b_1 \geq \frac{1}{4}$ （式子四）

回到式子三，可知

$b_4 + b_5 \leq \frac{1}{4}$

$b_4 \leq \frac{1}{4} - b_5$

又 $\because b_1 + b_5 \leq b_4$

$$b_1 + b_5 \le b_4 \le \frac{1}{4} - b_5$$

$$\therefore b_1 + b_5 \le \frac{1}{4} - b_5$$

$$b_1 + 2b_5 \le \frac{1}{4}$$

$\therefore b_1 < \frac{1}{4}$ 與式子四矛盾

$\therefore$ 此情形不會有 $\frac{1}{4}$ 的最短直徑

(3) 綜合以上 2 種情形：

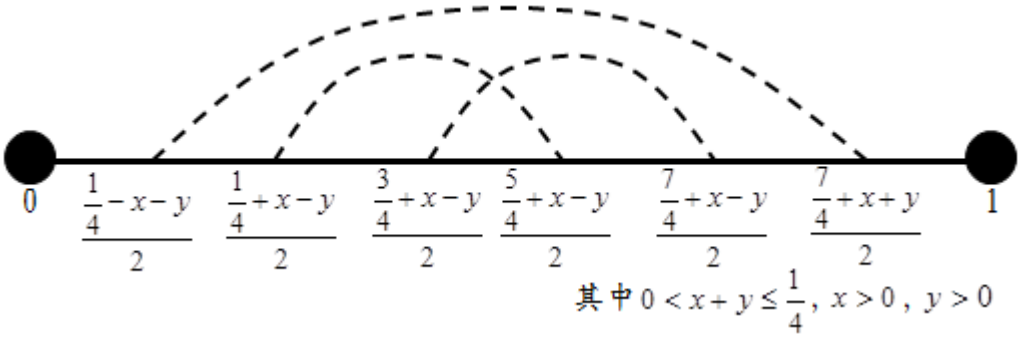
a. 情形有 $\frac{1}{4}$ 的最短直徑

b. 情形不會有 $\frac{1}{4}$ 的最短直徑

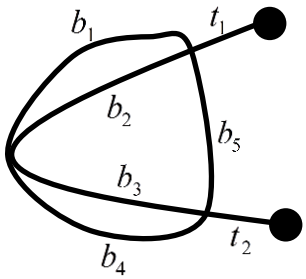
因此可知，這種情形的最短直徑 $d_{(3,3,5)} = \frac{1}{4}$

結論：這種情形最短直徑 $d_{(3,3,5)} = \frac{1}{4}$，成立的條件為：其中 2 個節點間有 3 條長度為 $\frac{1}{4}$ 的繩橋，剩下 2 座短橋分別位於第 3 個節點和上述 2 個節點之間，其長度和再加上 2 條尾巴的總長度為 $\frac{1}{4}$，且 2 條尾巴要等長。

接下來還原成跳線圖形，根據一筆畫原理，會有三種還原方法，就是從其中一個端點，依不同順序經過 5 座繩橋，再走至另一個端點，其中一種跳線圖形如下：



6. 第六種



已知：$b_1 \ge b_2 > 0$

$b_3 \ge b_4 > 0$

$b_5 > 0$

$t_1 \ge t_2 \ge 0$

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + t_1 + t_2 = 1$

求證：最短直徑 $d_{(3,3,6)} > \frac{1}{4}$

證明：

(1) 無論各橋長度如何，直徑的可能發生情形：

$$d_{tt,1} = t_1 + \min(b_5, b_2 + b_4) + t_2$$

$$d_{bb,1} = \frac{b_1 + b_4 + b_5}{2}$$

$$d_{bb,2} = \frac{b_3 + b_2 + b_5}{2}$$

$$d_{bb,3} = \frac{b_1 + b_3 + \min(b_5, b_2 + b_4)}{2}$$

$$d_{bb,4}=\frac{b_1+b_2}{2}$$

$$d_{bb,5}=\frac{b_3+b_4}{2}$$

(2) 在在d_{tb}方面，因為會因橋長而有所變動，底下分成 a.距離t_1最遠的點在b_1上、b.距離t_1最遠的點在b_4上、c.距離t_1最遠的點在b_5上 3 種情形討論：

a. 距離t_1最遠的點在b_1上（$b_1 \ge b_4+b_5$時(*)）

$$d_{tb,1}=t_1+\frac{b_1+\min(b_2,b_4+b_5)}{2}$$

接下來再分成 2 種情形

(a) $d_{tb,1}=t_1+\frac{b_1+b_2}{2}$ （$b_2 \le b_4+b_5$時）

$$2d_{tb,1}+2d_{bb,3}$$

$$=2\left(t_1+\frac{b_1+b_2}{2}\right)+2\left(\frac{b_1+b_3+\min(b_5,b_2+b_4)}{2}\right)$$

$$=2t_1+2b_1+b_2+b_3+\min(b_5,b_2+b_4)$$

$\because$ (*)$b_1 \ge b_4+b_5$ 且 $t_1 \ge t_2$

$$\therefore 2t_1+2b_1+b_2+b_3+\min(b_5,b_2+b_4)$$

$$\ge t_1+t_2+b_1+b_4+b_5+b_2+b_3+\min(b_5,b_2+b_4)$$

$$=1+\min(b_5,b_2+b_4)>1$$

根據最大數定理，可知在$d_{tb,1},d_{tb,1},d_{bb,3},d_{bb,3}$這 4 個數中，最大者必$>\frac{1}{4}$，所以在$d_{tb,1},d_{bb,3}$這 2 個直徑可能發生情形中，最大者必$>\frac{1}{4}$。

(b) $d_{tb,1} = t_1 + \dfrac{b_1 + b_4 + b_5}{2}$ （$b_2 \geq b_4 + b_5$ 時）

$2d_{tb,1} + 2d_{bb,2}$

$= 2\left(t_1 + \dfrac{b_1 + b_4 + b_5}{2}\right) + 2\left(\dfrac{b_3 + b_2 + b_5}{2}\right)$

$= 2t_1 + b_1 + b_4 + b_5 + b_3 + b_2 + b_5$

$\geq (t_1 + t_2 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) + b_5 = 1 + b_5 > 1$

根據最大數定理，可知在 $d_{tb,1}, d_{tb,1}, d_{bb,2}, d_{bb,2}$ 這4個數中，最大者必 $> \dfrac{1}{4}$，所以在 $d_{tb,1}, d_{bb,1}$ 這 2 個直徑可能發生情形中，最大者必 $> \dfrac{1}{4}$。

b. 距離 t_1 最遠的點在 b_3 上($b_3 \geq b_2 + b_5$ 時)

$$d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_3 + \min(b_2, b_4 + b_5) + \min(b_5, b_2 + b_4)}{2}$$

接下來再分成 3 種情形

(a) $d_{tb,1} = t_1 + \dfrac{b_3 + b_2 + b_5}{2}$ （$b_2 \leq b_4 + b_5, b_5 \leq b_2 + b_4$ 時）

$2d_{tb,1} + 2d_{bb,1}$

$= 2\left(t_1 + \dfrac{b_3 + b_2 + b_5}{2}\right) + 2\left(\dfrac{b_1 + b_4 + b_5}{2}\right)$

$= 2t_1 + b_3 + b_2 + b_5 + b_1 + b_4 + b_5$

$\geq (t_1 + t_2 + b_3 + b_2 + b_5 + b_1 + b_4) + b_5 = 1 + b_5 > 1$

根據最大數定理，可知在 $d_{tb,1}, d_{tb,1}, d_{bb,1}, d_{bb,1}$ 這4個數中，最大者必 $> \dfrac{1}{4}$，所以在 $d_{tb,1}, d_{tb,1}$ 這 2 個直徑可能發生情形中，最大者必 $> \dfrac{1}{4}$。

(b) $d_{tb,1}=t_1+\dfrac{b_3+b_2+b_2+b_4}{2}=t_1+b_2+\dfrac{b_3+b_4}{2}$

（$b_2\le b_4+b_5, b_5\ge b_2+b_4$ 時）

$2d_{tb,1}+2d_{bb,1}$

$=2\left(t_1+b_2+\dfrac{b_3+b_4}{2}\right)+2\left(\dfrac{b_1+b_4+b_5}{2}\right)$

$=2t_1+2b_2+b_3+b_4+b_1+b_4+b_5$

$\ge\left(t_1+t_2+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5\right)+b_2+b_4=1+b_2+b_4>1$

根據最大數定理，可知在 $d_{tb,1}, d_{tb,1}, d_{bb,1}, d_{bb,1}$ 這4個數中，

最大者必大於 $\dfrac{1}{4}$ ，所以在 $d_{tb,1}, d_{bb,1}$ 這 2 個直徑可能發生

情形中，最大者必大於 $\dfrac{1}{4}$

(c) $d_{tb,1}=t_1+\dfrac{b_3+b_4+b_5+b_5}{2}=t_1+b_5+\dfrac{b_3+b_4}{2}$

（$b_2\ge b_4+b_5, b_5\le b_2+b_4$ 時）

$2d_{tb,1}+2d_{bb,4}$

$=2\left(t_1+b_5+\dfrac{b_3+b_4}{2}\right)+2\left(\dfrac{b_1+b_2}{2}\right)$

$=2t_1+2b_5+b_3+b_4+b_1+b_2$

$\ge\left(t_1+t_2+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5\right)+b_5=1+b_5>1$

根據最大數定理，可知在 $d_{tb,1}, d_{tb,1}, d_{bb,4}, d_{bb,4}$ 這 4 個數中，

最大者必 $>\dfrac{1}{4}$ ，所以在 $d_{tb,1}, d_{bb,4}$ 這 2 個直徑可能發生情

形中，最大者必 $>\dfrac{1}{4}$

c. 距離t_1最遠的點在b_5上

（$b_1 \le b_4 + b_5$且$b_5 \ge b_2 + b_3$, $b_5 \ge b_1 + b_4$ 時）

$$d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_5 + \min(b_5, b_2 + b_4)}{2}$$

接下來再分成 2 種情形

(a) $d_{tb,1} = t_1 + \dfrac{b_5 + b_5}{2} = t_1 + b_5$ （$b_5 \le b_2 + b_4$ 時）

$4d_{tb,1}$

$= 4(t_1 + b_5)$

$= 4t_1 + 4b_5$

$\because b_5 \ge b_2 + b_3$, $b_5 \ge b_1 + b_4$且$t_1 \ge t_2$

$\therefore 4t_1 + 4b_5 \ge 2t_1 + 2t_2 + b_2 + b_3 + b_1 + b_4 + 2b_5$

$= (t_1 + t_2 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) + t_1 + t_2 + b_5 = 1 + t_1 + t_2 + b_5 > 1$

$\because 4d_{tb,1} > 1$

$\therefore d_{tb,1} > \dfrac{1}{4}$

(b) $d_{tb,1} = t_1 + \dfrac{b_5 + b_2 + b_4}{2}$ （$b_5 \ge b_2 + b_4$ 時）

$2d_{tb,1} + 2d_{bb,3}$

$= 2\left(t_1 + \dfrac{b_5 + b_2 + b_4}{2}\right) + 2\left(\dfrac{b_1 + b_3 + \min(b_5, b_2 + b_4)}{2}\right)$

$= 2t_1 + b_5 + b_2 + b_4 + b_1 + b_3 + \min(b_5, b_2 + b_4)$

$\ge (t_1 + t_2 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) + \min(b_5, b_2 + b_4) = 1 + \min(b_5, b_2 + b_4) > 1$

根據最大數定理，可知在$d_{tb,1}, d_{tb,1}, d_{bb,3}, d_{bb,3}$這4個數中，

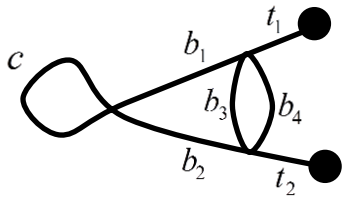
最大者必$>\frac{1}{4}$，所以在$d_{tb,1}, d_{bb,3}$這 2 個直徑可能發生情形中，最大者必$>\frac{1}{4}$

(3) 綜合以上三種情形，可知最短直徑會$d_{(3,3,6)} > \frac{1}{4}$

註：可能還會有以t_2為起點的直徑可能發生情形，但因用上述的直徑可能發生情形便可證出此種情形不會有$\frac{1}{4}$的最短直徑，所以，以t_2為起點的直徑可能發生情形就不在此列出。

結論：這種情形最短直徑$d_{(3,3,6)} > \frac{1}{4}$

7. 第七種



已知：$b_1 \geq b_2 > 0$

$b_3 \geq b_4 > 0$

$c > 0$

$t_1 \geq 0$

$t_2 \geq 0$

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + c + t_1 + t_2 = 1$

求證：最短直徑$d_{(3,3,7)} > \frac{1}{4}$

證明：

(1) 無論各橋長度如何，直徑的可能發生情形：

$d_{tt,1} = t_1 + \min(b_1 + b_2, b_4) + t_2$

$$d_{tc,1} = t_1 + \min(b_1, b_2 + b_4) + \frac{c}{2}$$

$$d_{tc,2} = t_2 + b_2 + \frac{c}{2}$$

$$d_{tb,1} = t_1 + \frac{\min(b_1 + b_2, b_4) + \max(b_1 + b_2, b_3)}{2}$$

$$d_{tb,2} = t_2 + \frac{\min(b_1 + b_2, b_4) + \max(b_1 + b_2, b_3)}{2}$$

$$d_{bb,1} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{2}$$

$$d_{bb,2} = \frac{b_3 + b_4}{2}$$

(2) 在 d_{cb} 方面，因為會因橋長而有所變動，底下分成 a.距離 c 最遠的點在 b_1 上、b.距離 c 最遠的點在 b_3 上 2 種情形討論：

a. 距離 c 最遠的點在 b_1 上($b_1 \geq b_2 + b_3$ 時)

(a) $d_{cb,1} = \frac{c}{2} + \frac{b_1 + b_2 + b_4}{2}$

$\because b_1 \geq b_2 + b_3$

$\therefore b_1 + b_2 > b_3$

又 $\because b_3 \geq b_4$

$\therefore d_{tb,1} = t_1 + \frac{b_4 + b_1 + b_2}{2}$

$\therefore d_{tb,2} = t_2 + \frac{b_4 + b_1 + b_2}{2}$

(b) $2d_{cb,1} + d_{tb,1} + d_{tb,2}$

$$= 2\left(\frac{c}{2} + \frac{b_1 + b_2 + b_4}{2}\right) + \left(t_1 + \frac{b_4 + b_1 + b_2}{2}\right) + \left(t_2 + \frac{b_4 + b_1 + b_2}{2}\right)$$

$$= c + t_1 + t_2 + 2b_1 + 2b_2 + 2b_4$$

$\because b_1 + b_2 > b_3$

$\therefore c+t_1+t_2+2b_1+2b_2+2b_4 > c+t_1+t_2+b_1+b_2+b_3+2b_4$

$=1+b_4>1$

(c) 根據最大數定理，可知在 $2d_{cb,1},d_{tb,1},d_{tb,2}$ 這 4 個數中，最大者必 $>\frac{1}{4}$，所以在 $d_{cb,1},d_{tb,1},d_{tb,2}$ 這 3 個直徑可能發生情形中，最大者必 $>\frac{1}{4}$

b. 距離 c 最遠的點在 b_3 上($b_1 \le b_2+b_3$ 時)

$$d_{cb,1}=\frac{c}{2}+\frac{b_3+b_2+\min(b_1,b_2+b_4)}{2}$$

(a) $d_{cb,1}=\frac{c}{2}+\frac{b_3+b_2+b_1}{2}$ （$b_1 \le b_2+b_4$ 時）

$2d_{cb,1}+d_{tt,1}+d_{bb,2}$

$=2\left(\frac{c}{2}+\frac{b_3+b_2+b_1}{2}\right)+\left(t_1+\min(b_1+b_2,b_4)+t_2\right)+\left(\frac{b_3+b_4}{2}\right)$

$\ge c+t_1+t_2+b_1+b_2+b_3+b_4+\min(b_1+b_2,b_4)$

$=1+\min(b_1+b_2,b_4)>1$

根據最大數定理，可知在 $2d_{cb,1},d_{tt,1},d_{bb,2}$ 這 4 個數中，最大者必 $>\frac{1}{4}$，所以在 $d_{cb,1},d_{tt,1},d_{bb,2}$ 這 3 個直徑可能發生情形中，最大者必 $>\frac{1}{4}$

(b) $d_{cb,1}=\frac{c}{2}+\frac{b_3+b_2+b_2+b_4}{2}=\frac{c}{2}+b_2+\frac{b_3+b_4}{2}$（$b_1 \ge b_2+b_4$ 時）

$\because b_1 \ge b_2+b_4$

$d_{tc,1}=t_1+b_2+b_4+\frac{c}{2}$

$d_{tc,1}+d_{tc,2}+2d_{bb,1}$

$$=\left(t_1+b_2+b_4+\frac{c}{2}\right)+\left(t_2+b_2+\frac{c}{2}\right)+2\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{2}\right)$$

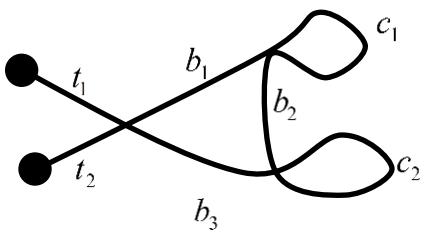
$$=c+t_1+t_2+b_1+3b_2+b_3+b_4$$

$$=1+2b_2>1$$

根據最大數定理，可知在 $d_{tc,1},d_{tc,2},2d_{bb,1}$ 這 4 個數中，最大者必 $>\frac{1}{4}$，所以在 $d_{tc,1},d_{tc,2},d_{bb,1}$ 這 3 個直徑可能發生情形中，最大者必 $>\frac{1}{4}$

結論：這種情形最短直徑 $d_{(3,3,7)}>\frac{1}{4}$

8. 第八種



已知：$b_1\geq b_3>0$

$b_2>0$

$c_1>0$

$c_2>0$

$t_1\geq t_2\geq 0$

求證：最短直徑 $d_{(3,3,8)}>\frac{1}{4}$

證明：

(1) 直徑可能發生情形：

$d_{tt,1}=t_1+t_2$

$$d_{tc,1}=t_1+\min(b_1,b_2+b_3)+\frac{c_1}{2}$$

$$d_{tc,2}=t_1+\min(b_3,b_1+b_2)+\frac{c_2}{2}$$

$$d_{tb,1}=t_1+\frac{b_1+b_2+b_3}{2}$$

$$d_{cc,1}=\frac{c_1}{2}+\min(b_2,b_1+b_3)+\frac{c_2}{2}$$

$$d_{cc,1}=\frac{c_1}{2}+\frac{b_1+b_2+b_3}{2}$$

(2) $2d_{tb,1}+2d_{cc,1}$

$$=2\left(t_1+\frac{b_1+b_2+b_3}{2}\right)+2\left(\frac{c_1}{2}+\min(b_2,b_1+b_3)+\frac{c_2}{2}\right)$$

$$=2t_1+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2+2\min(b_2,b_1+b_3)$$

又$\because$ 已知 $t_1\geq t_2$

$\therefore 2t_1+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2\geq t_1+t_2+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2$

又$\because$ 已知 $b_1+b_2+b_3+b_4+c+t_1+t_2=1$ 且 $b_1>0$、$b_2>0$、$b_3>0$

$2t_1+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2+2\min(b_2,b_1+b_3)>t_1+t_2+b_1+b_2+b_3+b_4+c=1$

$\therefore 2d_{tb,1}+2d_{cc,1}>1$

根據最大數定理，可知在 $d_{tb,1},d_{tb,1},d_{cc,1},d_{cc,1}$ 這 4 個數中，最大者必 $>\frac{1}{4}$，所以在 $d_{tb,1},d_{cc,1}$ 這 2 個直徑可發生情形中，最大者必 $>\frac{1}{4}$

結論：這種情形最短直徑 $d_{(3,3,8)}>\frac{1}{4}$

綜合以上八種情形，可得

總結論：在線段上加3條跳線，黏合圖形中有三個節點時，最短直徑 $d_{(3,3)}=\frac{1}{4}$

參、 研究結果與討論

一、 研究結果

(一) 定理

1. 總連線數定理：若在線段上加 k 條跳線的黏合圖形中有 r 個節點，則節點總連線數為 $2k+2r$ ，其中 $k \geq r > 0$ ，且 k 和 r 皆為正整數。

2. 橋圈數定理：若在線段上加 k 條跳線的黏合圖形中有 r 個節點，則圖形中繩橋數和繩圈數的和為 $k+r-1$，其中 $k \geq r > 0$，且 k 和 r 皆為正整數。

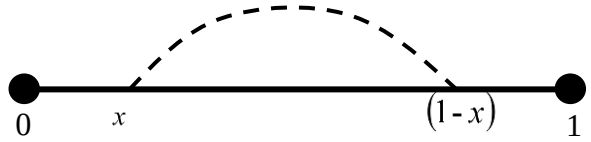
3. 最大數定理：在一串數中，最大的 m 個數之和會大於或等於此串數的平均的 m 倍。(m 為大於 0、小於此串數項數的正整數)

4. 平均數定理：在一串數中，若最大的 m 個數之和等於此串數的平均數的 m 倍，則此串數中所有的數皆與此串數的平均相等。(m 為大於 0、小於此串數項數的正整數)

5. 點到橋距離定理：對黏合圖形中任意一個點 P 及任意一個長度為 b 的繩橋，設點 Q 為繩橋上距離點 P 最遠的點。若 P 到繩橋的一端距離為 s_1，到繩橋的另一端距離為 s_2 (s_1 和 s_2 可重疊)，則 P 到 Q 的距離 $\dfrac{b+s_1+s_2}{2}$ 。

(二) 最短直徑

1. 在線段上加 1 條跳線時，最短直徑 $d_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}$ 。其成立條件為：尾巴長各為 x 、繩圈長為 $\left(\dfrac{1}{2}-2x\right)$ ，x 的範圍為：$0 \leq x \leq \dfrac{1}{4}$ 。其跳線圖形如下圖：

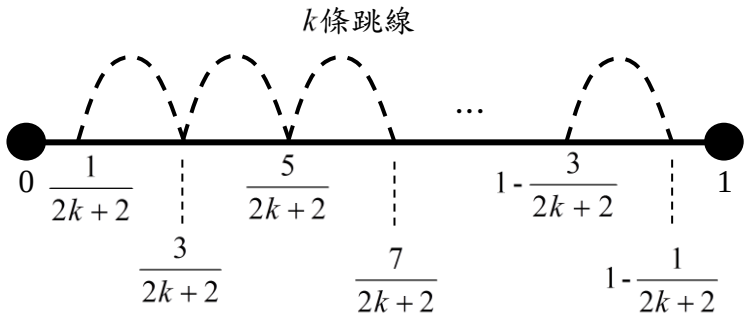


其中 $0 \le x \le \frac{1}{4}$

2. 在線段上加 k 條跳線、黏合圖形中一個節點時，最短直徑 $d_{(k,1)} = \frac{1}{k+1}$ 。

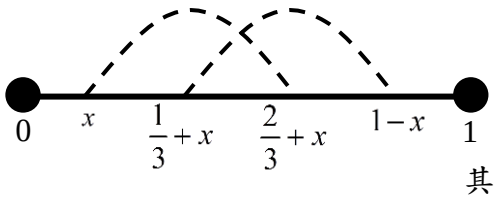
其成立的條件為：k 個繩圈長度各為 $\frac{1}{k+1}$，2 條尾巴長度各為 $\frac{1}{2k+2}$ 。

其跳線圖形如下圖(擇一)：



3. 在線段上加 2 條跳線，黏合圖形中二個節點時，最短直徑 $d_{(2,2)} = \frac{1}{3}$ 。

成立的條件為：在二節點間有 3 座橋，其中 2 座橋長為 $\frac{1}{3}$ ，剩下一座橋加上 2 條尾巴的總長為 $\frac{1}{3}$ ，2 條尾巴要一樣長。其跳線圖形如下圖(擇一)：

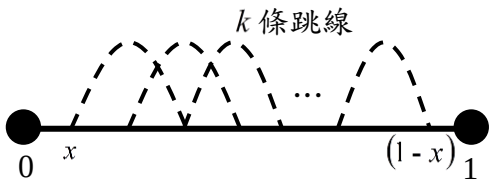


其中 $0 \le x < \frac{1}{6}$

4. 在線段上加 k 條跳線、黏合圖形中二個節點時，最短直徑

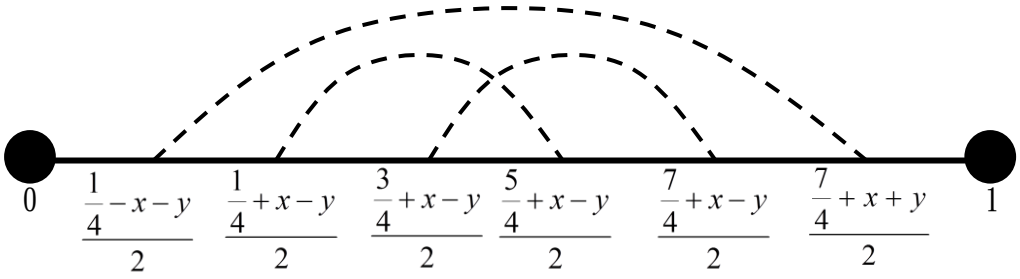
$d_{(k,2)} = \frac{1}{k+1}$。其成立條件為：在 2 個節點之間，有 k 條長度為 $\frac{1}{k+1}$

的繩橋，剩餘 1 條繩橋較短，可以是小於 $\frac{1}{k+1}$ 的任意長度，只要其與 2 條尾巴的長度和為 $\frac{1}{k+1}$ 即可，2 條尾巴要一樣長。當 k 為奇數時，2 條尾巴在同一個節點上；k 為偶數時，2 條尾巴分開在 2 個節點上。其跳線圖形如下圖：



其中 $0 \le x < \frac{1}{2k+2}$

5. 在線段上加 3 條跳線時，最短直徑 $d_{(3,3)} = \frac{1}{4}$。其成立的條件為：其中 2 個節點間有 3 條長度為 $\frac{1}{4}$ 的繩橋，剩下 2 座短橋分別位於第 3 個節點和上述 2 個節點之間，其長度和再加上 2 條尾巴的總長度為 $\frac{1}{4}$，且 2 條尾巴要等長。其跳線圖形如下圖：



其中 $0 < x + y \le \frac{1}{4},\ x > 0,\ y > 0$

(三) 證明方法

1. 第一種

(1) 把所有數分成$(k+1)$組，因為所有數的總和為 1，所以這$(k+1)$組數的平均為$\frac{1}{k+1}$。

(2) 列出在這$(k+1)$組數中所有最大兩數的可能情形，根據最大數定理可知，其最大兩數和必大於或等於這$(k+1)$組數的平均$\frac{1}{k+1}$的 2 倍，也就是$\frac{2}{k+1}$。

(3) 每一種最大兩數的可能情形均找出兩個直徑(可以相同)的和會大於或等於此組數，如此便可推知兩個直徑中較大的必$\geq\frac{1}{k+1}$。

(4) 因為無論加幾條跳線，黏合圖形中幾個節點，最短直徑都不能$>\frac{1}{k+1}$，否則一個節點就夠了，所以所有在 3.中所選到的直徑皆等於$\frac{1}{k+1}$，所有最大 2 數的和也皆等於$\frac{1}{k+1}$

(5) 根據平均數定理可推出所有$(k+1)$個數都相等

(6) 代回其它直徑的可能情形驗算，並列出直徑為最小值$\frac{1}{k+1}$的成立條件

公式：$(d_x+d_y)\geq(L_1+L_2)\geq(\frac{1}{k+1}\times 2)$

2. 證明方法之二

若要證明加k條跳線時直徑會$\geq\frac{1}{k+1}$，可以嘗試找到$(k+1)$個直徑的可能情形(可以重複)，而且這些直徑的和≥ 1，這樣的話，根據最大數定理，這些直徑裡的最大值就會$\geq\frac{1}{k+1}$了。

如果這些直徑的和>1，就可直接推說一定有直徑$>\frac{1}{k+1}$，因為在 1 個節點時證明出最短直徑$=\frac{1}{k+1}$，所以在 2 個節點以上時的最短直徑不能$>\frac{1}{k+1}$，不然 1 個節點就夠了，所以就可直接說此圖形的最短直徑會$>\frac{1}{k+1}$。

如果這些直徑的和=1，就可直接推說一定有直徑$\geq\frac{1}{k+1}$因為在 1 個節點時證明出最短直徑$=\frac{1}{k+1}$，所以在 2 個節點以上時的最短直徑不能$>\frac{1}{k+1}$，不然 1 個節點就夠了，所以找出的$(k+1)$個可能的直徑皆$=\frac{1}{k+1}$，再分析等號成立的條件，最後還原成跳線圖形。

二、 討論

(一) 繩圈的有無與最短直徑的關係

我在研究時發現，除了一個節點不會有繩橋之外，在二個節點(含)以上的情形，無論加幾條跳線，最短直徑$\frac{1}{k+1}$發生的情形都沒有繩圈，於是我就想：是不是在二個節點(含)以上的情形，只要有繩圈，最短直徑就會$>\frac{1}{k+1}$?

我試著將有繩圈的情形和只有橋的情形作比較：假設一個有繩圈的黏合圖形，將其繩圈全部拆成繩橋，這樣它的最短直徑會不會變小?但因為其直徑的形式不同，且有部分直徑無法證明拆成橋後不會變長，所以還需要再進一步的研究。

(二) 推論

我把目前研究出來的最短直徑整理如下：

跳線數 / 節點數	1	2	3	…	k
1	$=\frac{1}{2}$	$=\frac{1}{3}$	$=\frac{1}{4}$	…	$=\frac{1}{k+1}$
2		$=\frac{1}{3}$	$=\frac{1}{4}$	…	$=\frac{1}{k+1}$
3			$=\frac{1}{4}$	…	待完成

依證明結果以及實驗數據推論最短直徑：

跳線數 / 節點數	1	2	3	…	k
1	$=\frac{1}{2}$	$=\frac{1}{3}$	$=\frac{1}{4}$	…	$=\frac{1}{k+1}$
2		$=\frac{1}{3}$	$=\frac{1}{4}$	…	$=\frac{1}{k+1}$
3			$=\frac{1}{4}$	…	$\begin{cases} >\frac{1}{k+1} & k\text{ 為偶數} \\ =\frac{1}{k+1} & k\text{ 為奇數} \end{cases}$
4 以上				…	$>\frac{1}{k+1}$

我推論在節點數>3時，就不會有$\frac{1}{k+1}$的最短直徑發生，但還缺乏完整的證明，需要再進一步的研究。

(三) 跳線的長度

前面雖然為了方便研究都把跳線的距離縮減為 0，但其實跳線也是有長度的，所以在相同最遠距離的情況下，應該選擇跳線最短的方法。

以後可以研究若把跳線的長度加進去，例如說原本路徑長度的 $\frac{1}{10}$ 或 $\frac{1}{20}$，再觀察結果是否改變。

(四) 轉乘次數

我們把跳線設想成飛機航線、高架橋等交通運輸建設，所以也要考慮到轉乘問題，跳線加的太多，就像是機場和機場間的距離愈近，才剛搭上去就要下來轉機了，沒有人想要一趟旅遊中轉很多次機吧，火車也是，若每一站都停，速度會比只停起點和終點的直達車要慢上許多，所以在加跳線時，也要考慮到轉乘次數的問題，要想辦法在種種影響因素下達到平衡，才會是設置交通建設的最佳地點。

(五) 坐標平面

在本篇研究報告是在討論在線段上加跳線的情形，以後希望可以延伸至坐標平面，一樣是可以在任意 2 點間加上跳線，但在平面上就無法用黏合圖形的方法來研究，所以還要另尋覓新方法。

(六) $1\times n$ 線段與格子點平面

在歐氏幾何(*Euclidean Geometry*)中，2 點間最短的距離指的是直線距離，但若在城市中，由於許多城市都是以棋盤式的規劃，道路只有直的和橫的，並無法直線到達，如此一來，2 點間的距離變成了要沿著道路走，最短距離就是許多種走法中最短的一個，而在這種距離的計算方式，便要用到一門稱作「計程車幾何」（*Taxicab Geometry*）的數

學分支。在計程車幾何中，每個點只能往上、下、左、右四個方向走(參考文獻一條線有多長 2008 年)，而我們想研究的是：在一個格子點平面中，每個點只能往上、下、左、右四個方向走，可以在任意 2 點間加上跳線，那麼當所加的跳線數固定時，要將跳線加在哪裡，才能使最遠兩點距離變得最短？而會變成多少？

要研究格子點平面的問題，就須先從$1\times n$線段(n個點排成一排，線段長度為$n-1$)著手，不知道$1\times n$線段與本報告所研究的線段有沒有關聯?我有嘗試實驗了幾種情形，發現因為本研究報告所得出的最短直徑$\frac{n-1}{k+1}$可能為分數，而在$1\times n$線段時，有時最短直徑是比$\frac{n-1}{k+1}$大的最小整數，有時是比$\frac{n-1}{k+1}$小的最大整數，好像沒有什麼規律，還需再進一步的研究。

(七) 小世界理論與六度分隔現象

「小世界現象（又稱小世界效應），也稱六度分隔理論（英文：*Six Degrees of Separation*）。假設世界上所有互不相識的人只需要很少中間人就能建立起聯繫。後來 1967 年哈佛大學的心理學教授斯坦利·米爾格拉姆根據這概念做過一次連鎖信實驗，嘗試證明平均只需要 6 個人就可以聯繫任何兩個互不相識的美國人。

這種現象，並不是說任何人與人之間的聯繫都必須要通過 6 個層次才會產生聯繫，而是表達了這樣一個重要的概念：任何兩位素不相識的人之間，通過一定的聯繫方式，總能夠產生必然聯繫或關係。顯然，隨著聯繫方式和聯繫能力的不同，實現個人期望的機遇將產生明顯的區別。」(參考文獻連結 2003 年)

本研究的跳線減距問題就像是在廣大的世界中，二個距離很遠的人認識了，像是拉了一條長長的跳線，可以使得 2 地的各個人的距離變短，若世界上真的像是小世界理論所說的，只需要 6 個人就可以聯繫任何兩個互不相識的美國人，美國那麼大，一定是有許多各種長度的跳線連結，才能讓人與人之間的距離變得那麼短。

肆、　結論與應用

一、　結論

在線段上加 1 條、2 條和 3 條跳線時，最短直徑分別為 $\frac{1}{2}$ 、$\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ ，在線段上加 k 條跳線、黏合圖形中一個和二個節點時，最短直徑皆為 $\frac{1}{k+1}$ 。

二、　應用

走跳線和走直線就像顯微鏡中的粗調節輪和細調節輪，要先將粗調節輪轉至適當的位置，才能用細調節輪慢慢調整至畫面清楚。其中的跳線就像是粗調節輪、而直線就像是細調節輪，要先走跳線到適當的位置，才慢慢走直線到達目的地。其中跳線不能太短，否則就和直線所走的距離差不多；也不能太長，否則走完跳線還要經過很長的直線才能到達目的地。

跳線的長度和直線的長度比例就像是所用的現金面額大小，為何一定要是 1 元、5 元、10 元，不能是 1 元接跳到 100 元？也像是算盤的算珠數目、十進位和各種測量單位。那些本來很大、很多的東西，需要用一些較大的單位，才能方便計算與溝通。

本研究可以應用在蓋高架橋、規劃飛機航線、建高鐵、捷運、高速公路等交通設施。或解決如何設置郵局、服務據點，以造福路線上的所有民眾。例如說要增設郵局，每個郵局就像是一個跳點，而所有郵局間郵件都是相通的就像是黏合圖形中只有一個節點。

例如說在一條路上，想要設一路公車，此路公車共停靠 6 個站牌，這個問題就像是要在一條線段上加 5 條跳線，黏合圖形中有一個節點的問題，

依據研究結果，可以在這段路上$\frac{1}{12}$、$\frac{3}{12}$、$\frac{5}{12}$、$\frac{7}{12}$、$\frac{9}{12}$和$\frac{11}{12}$的 6 個點上設站牌，如此可將這條路上最遠兩戶人家互相往來的通車時間縮減至最短。

若要設 2 路公車，各停靠 6 個站牌，又不想要有站牌重疊，這個問題就像是要在一條線段上加 10 條跳線，黏合圖形中有二個節點的問題，依據研究結果，會有許多種設法。例如說：可以在這段路上的起點和終點以及 10 個等分點上設站牌，一路車停靠這條路的起點和第偶數的站牌，另一路車停靠第奇數的站牌和終點，如此可將這條路上最遠兩戶人家互相往來的通車時間縮減至最短。

伍、 參考文獻

一、徐立行 沒有數字的數學 第一版第8次 臺灣臺北 天下遠見 213頁 2010年

二、A. S. Solodovnikov 線性不等式組 第一版 臺灣臺北 九章出版社 111頁 1997年

三、布侃南(Mark Buchanan) 連結 第一版第1次 臺灣臺北 天下遠見 342頁 2003年

四、羅勃・伊斯威(Rob Eastaway)、傑瑞米・溫德漢(Jeremy Wyndham) 一條線有多長 初版 臺灣臺北 臉譜：城邦文化出版 326頁 2008年

附錄一-線段上加 1 條跳線時，線段上各點間的距離

1. 在 0.0 和 1.0 上加一條跳線

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0
0.1		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
0.2			0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.4	0.3	0.2
0.3				0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.4	0.3
0.4					0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.4
0.5						0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.6							0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.7								0.0	0.1	0.2	0.3
0.8									0.0	0.1	0.2
0.9										0.0	0.1
1.0											0.0

直徑=0.5

2. 在 0.1 和 0.9 上加一條跳線

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.4	0.3	0.2	0.3	0.4
0.1		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.3	0.2	0.1	0.2	0.3
0.2			0.0	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.0	0.1	0.2
0.3				0.0	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.2	0.3
0.4					0.0	0.1	0.2	0.3	0.2	0.3	0.4
0.5						0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.6							0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.7								0.0	0.1	0.2	0.3
0.8									0.0	0.1	0.2
0.9										0.0	0.1
1.0											0.0

直徑=0.5

3. 在 0.2 和 0.8 上加一條跳線

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.2
0.1		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	0.1
0.2			0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.3	0.2	0.1	0.2
0.3				0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.3	0.2	0.3
0.4					0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.3	0.4
0.5						0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.6							0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.7								0.0	0.1	0.2	0.3
0.8									0.0	0.1	0.2
0.9										0.0	0.1
1.0											0.0

直徑=0.5

4. 在 0.3 和 0.7 上加一條跳線

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.4	0.3	0.4	0.5	0.6
0.1		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.3	0.2	0.3	0.4	0.5
0.2			0.0	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.2	0.3	0.4
0.3				0.0	0.1	0.2	0.1	0.0	0.1	0.2	0.3
0.4					0.0	0.1	0.2	0.1	0.2	0.3	0.4
0.5						0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.6							0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.7								0.0	0.1	0.2	0.3
0.8									0.0	0.1	0.2
0.9										0.0	0.1
1.0											0.0

直徑=0.6

5. 在 0.4 和 0.6 上加一條跳線

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0.1		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0.2			0.0	0.1	0.2	0.3	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.3				0.0	0.1	0.2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.4					0.0	0.1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.5						0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.6							0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.7								0.0	0.1	0.2	0.3
0.8									0.0	0.1	0.2
0.9										0.0	0.1
1.0											0.0

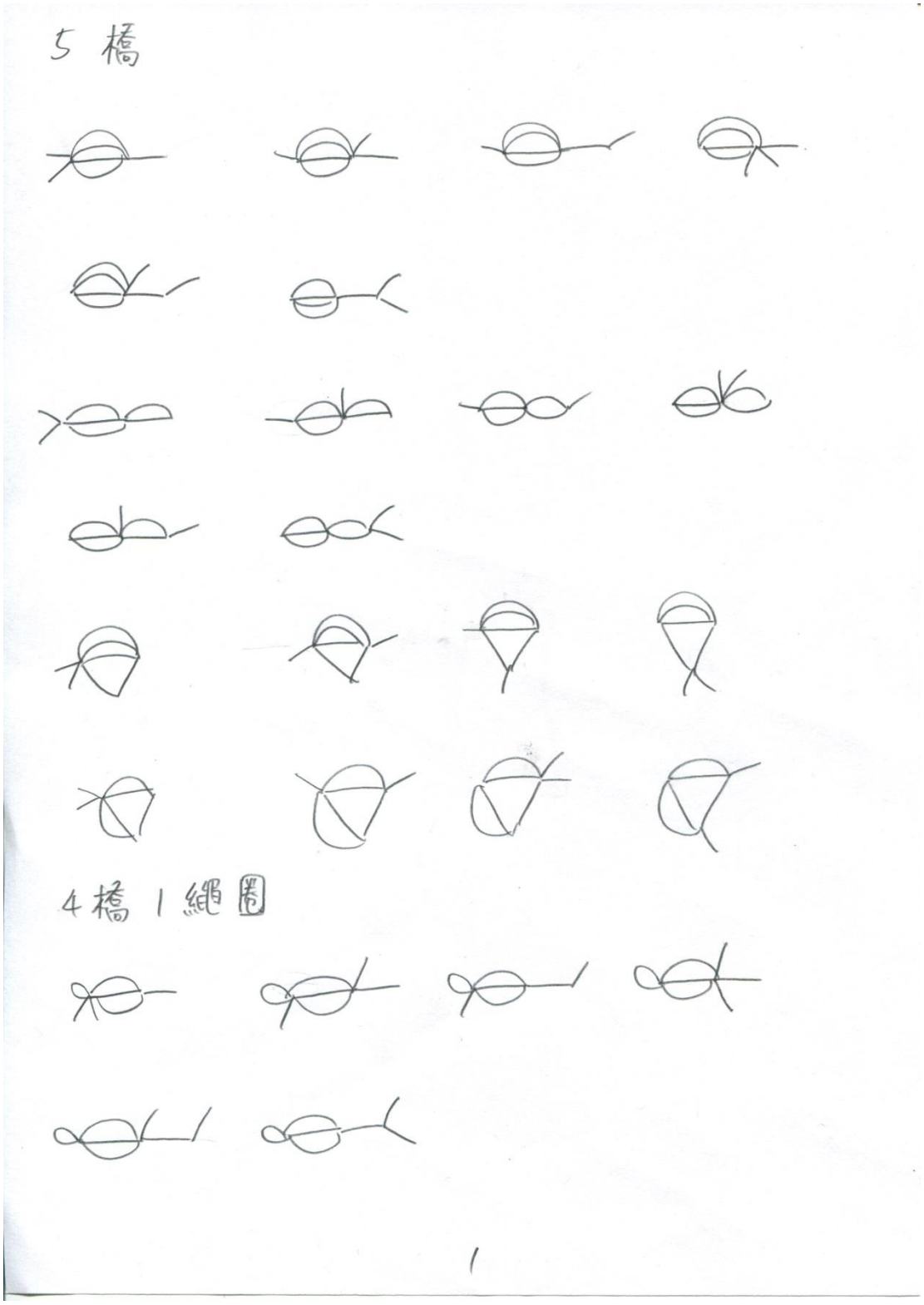
直徑=0.8

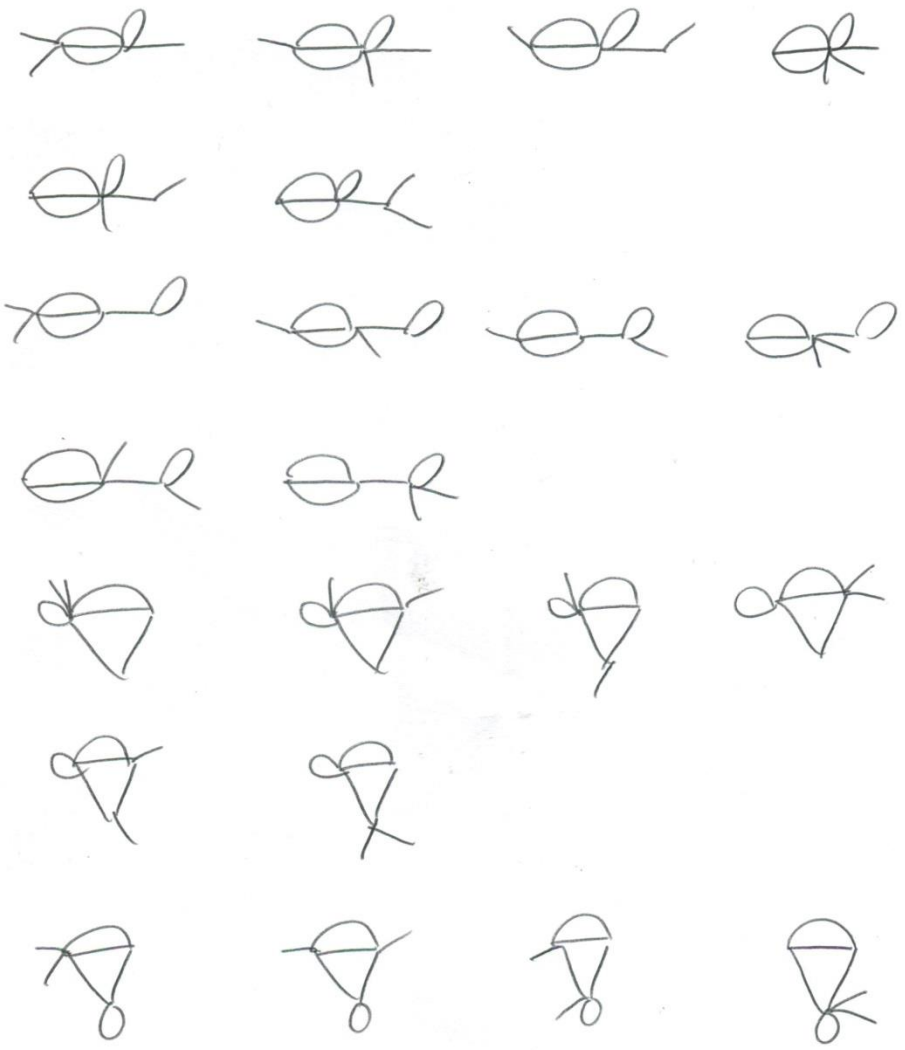
6. 在 0.2 和 0.7 上加一條跳線

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.3	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1		0.0	0.1	0.2	0.3	0.3	0.2	0.1	0.2	0.3	0.4
0.2			0.0	0.1	0.2	0.2	0.1	0.0	0.1	0.2	0.3
0.3				0.0	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2	0.3	0.4
0.4					0.0	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5
0.5						0.0	0.1	0.1	0.3	0.4	0.5
0.6							0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.7								0.0	0.1	0.2	0.3
0.8									0.0	0.1	0.2
0.9										0.0	0.1
1.0											0.0

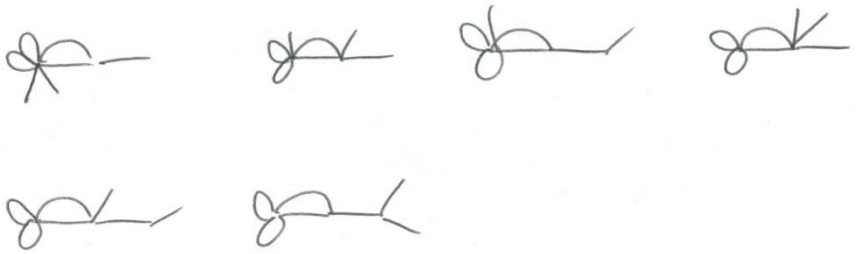
直徑=0.5

附錄二-在線段上加 3 條跳線時的所有圖形

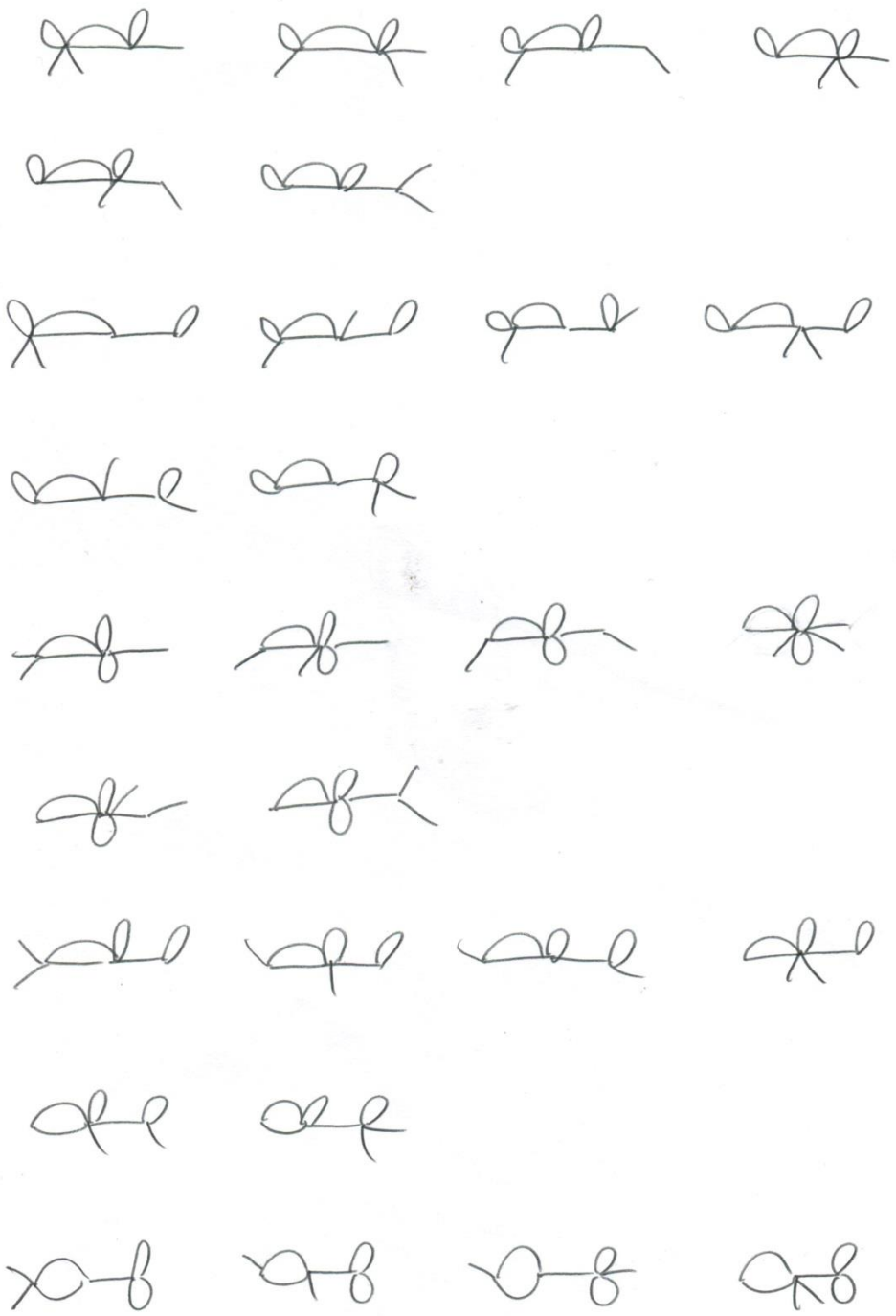




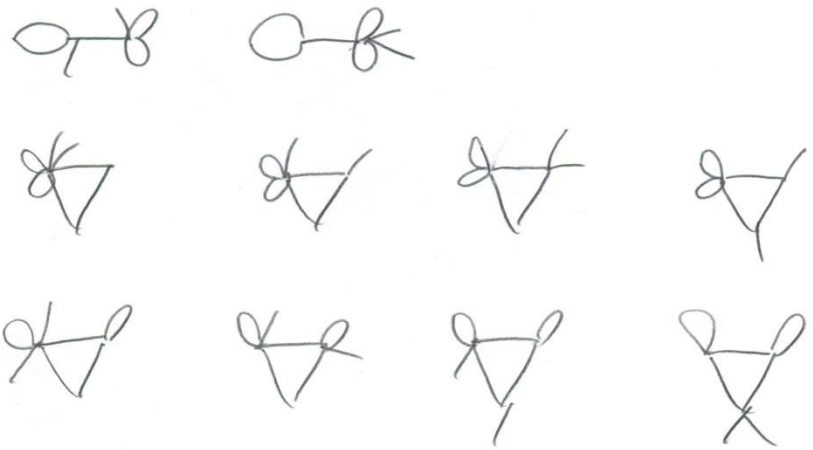
3 橋 2 繩圈



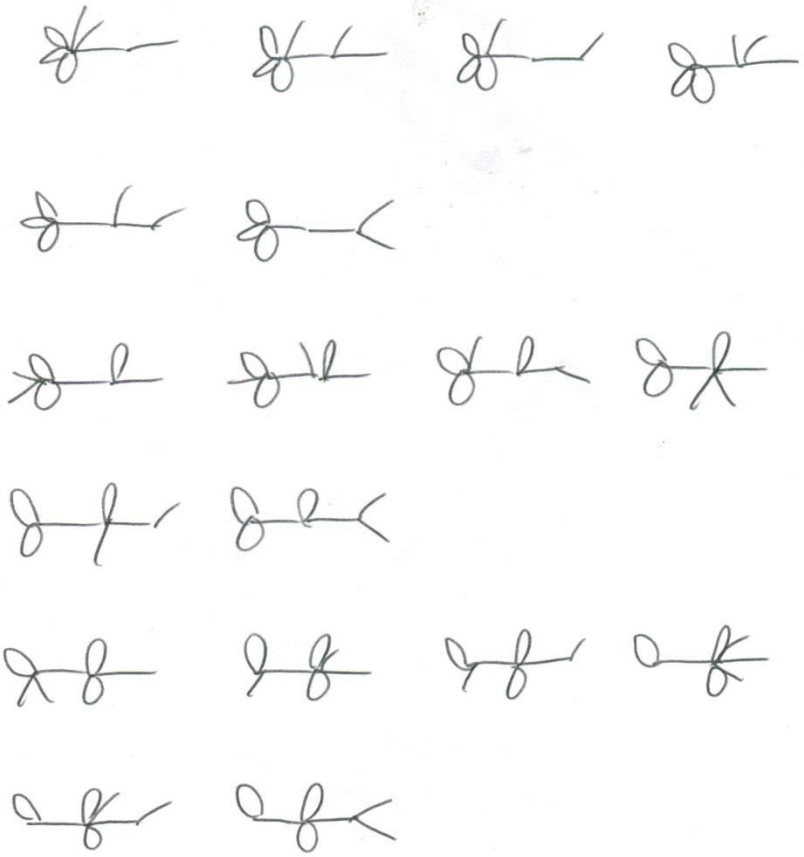
2



3



2橋 3繩圈



4

4橋1縄圏(補)

評語

本作品從生活上的實例出發，而研究的問題可以透過具體物的操作以協助思考，探討的過程運用了拓樸學的觀念，討論的範圍亦頗廣，作品具一定的深度及廣度。本作品所用跳線一詞，讓人聯想到電路中的情況，加上問題的具體性，數學的處理上運用了拓樸觀念卻並未明言，感學上頗有數學科普的味道，建議本作品可再做延伸，加入更多生活上實際層面的考量，例如考慮跳線的長度及位置等層面，作進一步的探討。