

2014 年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

作品編號 010036

參展科別 數學

作品名稱 潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密

得獎獎項 大會獎：三等獎

候補作品：1

就讀學校 桃園縣私立新興高級中學(附設國中)

指導教師 陳怡君

作者姓名 游垚騰

關鍵字 賦值法、最小上界、最大下界

作者簡介



圖片來源：Yao-Teng “Thomas” You holding his award at Broadcom MASTERS International in Phoenix, Ariz. For more photos, visit [Facebook Album](#).

我喜歡看與科學、技術、工程、數學方面有關的書籍，除了吸收知識和增廣見聞外，也可以應用這些知識，做一些有趣的探討與設計。週六或週日，經常和有相同興趣的同學一起討論數學，這些活動讓我覺得非常有趣，並且生活也過得充實。

我考慮從事一些與科學有關的工作，例如工程師或是科學研究者。這類性質的工作，一方面可以造福人類，使人們生活更為舒適與方便，另一方面也符合自己本身的興趣。

關於完成此研究，我額外學習到鍥而不捨求精確、求準確、求完美的科學研究精神。當一個人面臨困難與障礙時，需要有耐心及毅力進行更細部的解析、分類與歸納問題所呈現的徵候，以找到解決問題的有效方法。在求解過程中，我嘗試使用簡單和新穎的數學模型求解，以獲取更為簡明的證明過程。

About the Author



Photo Source: Yao-Teng "Thomas" You holding his award at Broadcom MASTERS International in Phoenix, Ariz. For more photos, visit [Facebook Album](#).

I like to read the books related to science, technology, engineering, and mathematics, because I can apply what I have learned to absorb more knowledge broaden their horizons, and do some interesting discussion and designs. On weekends, I often discuss and solve mathematics problems with my friends who have the same interest. I find these activities are interesting to me and fulfilling my life now.

I am interested in science-related works, such as engineers or scientific researchers as my future career. These kinds of jobs on the one hand, can benefit mankind, and make people's lives more comfortable and convenient; on the other hand, meet my own interest.

With the completion of this project, I have learned the perseverance of seeking

precise, accurate, and seeking perfection the spirit of scientific research. When facing difficulties and obstacles, one needs to have patience and perseverance symptoms presented by more detailed parsing, classification, and induction to find out an effective way to solve the problem. During the discussing about the solving methodology and the process of finishing this project, I really want to try my best to describe this problem with simple and novel mathematical models in order to obtain a more concise proof process.

潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密

中文摘要

本研究探討正凸多邊形正則鑲嵌及阿基米德鑲嵌，在限制每一格相鄰格子中至多(或至少)有 x 格被塗色的情形下的最大(或最小)塗色格子數問題。研究利用塗色格子位於邊線角落、非角落的邊線、鑲嵌內部的共用邊數差異、及與塗色格子總數間的限制條件，採用賦值法解析塗色格子數的最小上界或最大下界。接著建構具最大(或最小)塗色格子數的塗色方式，以歸納法推導塗色格子數，證明其與賦值法解析結果相同，證得存在該塗色格子數。研究結果可應用至貼磚或印染鑲嵌圖案設計、LED 點燈遊戲設計、供給-需求組合配置最佳化、LED 廣告面板或色差控制等。

英文摘要

This study investigated the maximum number of colored cells for square, equilateral triangle, regular hexagon, and several kinds of Archimedean tessellations under the constraints that each adjacent cell would have at most x cells been colored. Similar cases were studied to find out the minimum number of colored cells under the constraints that each adjacent cell would have at least x cells been colored.

In this study, the methods of valuation and inequality analysis were adopted to find out the minimum upper bound (or the maximum lower bound) of colored cells. It could be fully solved by using the differences and restrictions in sharing edges of colored cells which located on the corners, on the outermost layer, and in the interior layers of a tessellation. The maximum (or the minimum) number of colored cells could be calculated from the construction of different coloring results. The existence of the maximum (or the minimum) number of colored cells and coloring results was further proved by using the mathematical induction. The results showed that it is the same as the minimum upper bound (or the maximum lower bound) obtained from the previous analyses. Therefore, such kind of coloring problems has been studied completely.

The results of this study can be further applied to the following areas: tiling or dyeing basic pattern design, LED lighting puzzle game design, supply-demand optimal portfolio allocation, LED advertising panel or control and adjustment, etc.

壹、前言

一、研究動機：

在練習 2011 年澳洲數學競賽(Australian Mathematics Competition, AMC)中學中級卷、高級卷第 30 題時^[8]，依題意要求需要「在一個 40×40 的格子方陣中，對任意一個格子塗上紅色，但限制每一個格子其無論是否被塗上紅色，與其相鄰共用邊的四個格子至多有一個格子是紅色的，求解在 40×40 的格子方陣中最大有多少個的格子可被塗上紅色？」

文獻探討顯示類似此問題曾出現在 1999 年的國際數學奧林匹亞(International Mathematical Olympiad, IMO)競賽試題 A3^[6]，也被收錄在 2005 年馮躍峰編著，華東師範大學出版社出版的數學奧林匹克小叢書—高中卷(第 16 冊)第七章、例 7、第 40~41 頁^[7]。

最近，一個類似的問題出現在 2013 年南非數學奧林匹亞(The South African Mathematical Olympiad)第三輪競賽試題五：「在一個 20×13 的板子上放一些硬幣。如果兩枚硬幣是在同一行或同一列、且它們之間沒有其他硬幣，則稱之為鄰居。假如沒有任何一枚硬幣可以被允許有兩個以上的鄰居(每枚硬幣最多僅允許有兩個鄰居)，請問最多可以放多少枚硬幣在板子上？」^[2]

正則多邊型鑲嵌已廣泛被討論及研究，也有許多實質的生活與工程應用^[9,10,11]。這題的求解過程引發我的興趣，想進一步利用中學數學的基本方法和技巧，延伸推廣至類似的塗色問題探討。

二、研究目的：

本研究擬利用數學分析、賦值法解析技巧、和歸納方法，並引用一元二次不等式、數列與級數、極限、二次函數等基本數學技巧，求解由正方形、

正三角形、正六邊形正則鑲嵌、及數種阿基米德鑲嵌，在限制每一格相鄰格子中至多有 x 格被塗色的情形下的最大塗色格子數和至少有 x 格被塗色的情形下的最小塗色格子數問題。

貳、研究方法或過程

一、名詞定義：

- (一) 正則鑲嵌(Regular Tessellation)：使用全等的正凸多邊形，以緊密無縫隙的方式覆蓋一個平面。
- (二) 半正則鑲嵌(Semi-regular Tessellation)：使用數種正凸多邊形，以緊密無縫隙的方式覆蓋一個平面。
- (三) 以頂點為中心(Vertex-centred)的正則鑲嵌：在正則鑲嵌中，使具備全等形狀多邊形的共用頂點居中心排列，並沿著邊(Edge)與頂點(Vertex)逐次向外擴展進行鑲嵌。令 $T_v(k)$ 、 $S_v(k)$ 、 $H_v(k)$ 分別代表由正三角形、正方形、和正六邊形覆蓋，形成的以頂點為中心的 k 層正則鑲嵌。下表^[9]分別舉例說明 $T_v(k)$ 、 $S_v(k)$ 、 $H_v(k)$ 在 $k = 1, 2$ 的情況：

$T_v(1)$	$S_v(1)$	$H_v(1)$
$T_v(2)$	$S_v(2)$	$H_v(2)$

- (四) 以多邊形為中心(Polygon-centred)的正則鑲嵌：在正則鑲嵌中，使具備全等形狀的多邊形居中心排列，並沿著邊與頂點逐次向外擴展進行鑲嵌。令 $T_c(k)$ 、 $S_c(k)$ 、 $H_c(k)$ 分別代表由正三角形、正方形、和正六邊形覆蓋，形成的以多邊形為中心的 k 層正則鑲嵌。下表^[9]分別舉例說明 $T_c(k)$ 、 $S_c(k)$ 、 $H_c(k)$ 在 $k = 1, 2, 3$ 的情況：

$T_c(1)$	$S_c(1)$	$H_c(1)$

$T_c(2)$	$S_c(2)$	$H_c(2)$
$T_c(3)$	$S_c(3)$	$H_c(3)$

(五) $M(P, k, x)$ ：表示在以多邊形 P 組成的正則鑲嵌或半正則鑲嵌圖中，當圖形有 k 層、且限制每一格的相鄰格子中至多有 x 格被塗色的情形下，最大的塗色格子數。

(六) $m(P, k, x)$ ：表示在以多邊形 P 組成的正則鑲嵌或半正則鑲嵌圖中，當圖形有 k 層、且限制每一格的相鄰格子中至少有 x 格被塗色的情形下，最小的塗色格子數。

(七) $C(P, k)$ ：表示在以多邊形 P 組成的正則鑲嵌或半正則鑲嵌圖中，當圖形有 k 層的格子數。

二、文獻探討：

(一) 正則多邊形鑲嵌組合可能性分析：

在鑲嵌中，圍繞共用頂點的凸多邊形內角和必為 360° ，因此僅存在三種正多邊形滿足正則鑲嵌，即正三角形、正方形、和正六邊形。除此之外，由一種或數種正凸多邊形組成全等形狀的半正則鑲嵌，即著名的阿基米德鑲嵌(Archimedean tessellation)，共有 8 種情況^[10, 11]。令

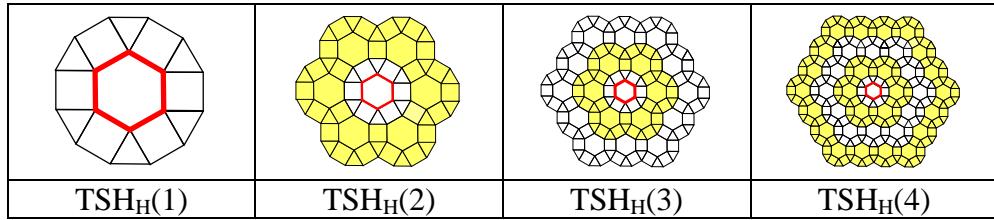
1. TS1、TS2 分別代表三個正三角形+兩個正方形組合的(3,3,3,4,4)和(3,3,4,3,4)鑲嵌。
2. TH1、TH2 分別代表二個正三角形+兩個正六邊形組合的(3,6,3,6)和四個正三角形+一個正六邊形組合的(3,3,3,3,6)鑲嵌。
3. SO 代表一個正方形+兩個正八邊形組合的(4,8,8)鑲嵌。

4. TD 代表一個正三角形+兩個正十二邊形組合的(3,12,12)鑲嵌。
5. TSH 代表一個正三角形+兩個正方形+一個正六邊形組合的(3,4,6,4)鑲嵌。
6. SHD 代表一個正方形+一個正六邊形+一個正十二邊形組合的(4,6,12)鑲嵌。

TS1	TS2	TH1	TH2
SO	TD	TSH	SHD

令 $\text{TH1}_H(k)$ 和 $\text{TSH}_H(k)$ 分別代表由 TH1 和 TSH 形成以正六邊形為中心的 k 層阿基米德鑲嵌。下表分別舉例說明 $\text{TH1}_H(k)$ 和 $\text{TSH}_H(k)$ 在 $k = 1, 2, 3, 4$ 的情況：

TH1 _H (1)	TH1 _H (2)	TH1 _H (3)	TH1 _H (4)



(二) 格子數 $C(P, k)$ 、頂點數、外框線數、和鑲嵌線數分析：歸納並整理 $T_v(k)$ 、

$S_v(k)$ 、 $H_v(k)$ 、 $T_c(k)$ 、 $S_c(k)$ 、 $H_c(k)$ 的正則鑲嵌結果如下表^[9]：

P	$T_v(k)$	$T_c(k)$	$S_v(k)$	$S_c(k)$	$H_v(k)$	$H_c(k)$
格子數	$6k^2$	$6k^2 - 6k + 1$	$4k^2$	$4k^2 - 4k + 1$	$3k^2$	$3k^2 - 3k + 1$
頂點數	$3k^2 + 3k + 1$	$3k^2$	$4k^2 + 4k + 1$	$4k^2$	$6k^2 + 6k + 1$	$6k^2$
外框線數	$6k$	$3(2k - 1)$	$8k$	$4(2k - 1)$	$12k$	$6(2k - 1)$
鑲嵌線數	$3(3k^2 - k)$	$3(3k^2 - 4k + 1)$	$4(2k^2 - k)$	$4(2k^2 - 3k + 1)$	$3(3k^2 - 2k)$	$3(3k^2 - 5k + 2)$

$TH1_H(k)$ 和 $TSH_H(k)$ 的阿基米德鑲嵌格子數如下表：

P	$TH1_H(k)$			$TSH_H(k)$	
	正三角形	正六邊形	正三角形	正方形	正六邊形
格子數	$6k^2 - 6k$	$3k^2 - 3k + 1$	$6k^2$	$9k^2 - 3k$	$3k^2 - 3k + 1$

三、研究過程

研究一：探討正方形鑲嵌 $M(S_v, k, 1)$ 、 $M(S_c, k, 1)$ 、 $M(S_v, k, 2)$ 、 $M(S_c, k, 2)$ 、

$M(S_v, k, 3)$ 、 $M(S_c, k, 3)$ 最大塗色格子數量， $m(S_v, k, 1)$ 、 $m(S_c, k, 1)$ 、

$m(S_v, k, 2)$ 、 $m(S_c, k, 2)$ 最小塗色格子數量與其塗色方式。

定理 1.1 $M(S_v, k, 1) = k^2 + k$

證明

(一) 假設塗色的格子中有 a 個位於角落、 b 個位於非角落的邊線上、 c 個位於鑲嵌內部，則與被塗色格子相鄰的格子數共有 $2a + 3b + 4c$ ，且位於角落與邊線上的格子數共有 $2a + 2b$ 。整理得到式(1)和式(2)：

$$2a + 3b + 4c \leq 4k^2 \quad (1)$$

$$2a + 2b \leq 4(2k-1), \text{ 即 } a + b \leq 2(2k-1) \quad (2)$$

因角落的位置最多僅可出現 2 個塗色格子，得：

$$a \leq 2 \quad (3)$$

整理式 (1)、式 (2) 和式 (3) 得 $a + b + c \leq k^2 + k$ ，故知：

$$M(S_v, k, 1) \leq k^2 + k.$$

(二) 建構具 S_v 最大塗色格子數的塗色法：

1. 當 k 是奇數 ($k = 1$ 、 $M(S_v, 1, 1) = 2$)； $k = 2l+1$ 時：塗色格子數為從外部向內層、每兩層劃分成一個區塊，且每兩層中較外層可塗色格子數為該層格子數的一半，再加上最內一層兩格之和，因此歸納得到塗色格子數為

$$\begin{aligned} 2 + \sum_{h=1}^l \left(\frac{(4h+2) \times 4 - 4}{4} \right) \times 2 &= 2 + \sum_{h=1}^l [2(4h+1)] \\ &= \frac{8(1+l) \times l}{2} + 2l + 2 = (2l+1)^2 + (2l+1) = k^2 + k \end{aligned}$$

2. 當 k 是偶數， $k = 2l$ 時：類似前述歸納方法，得到塗色格子數為

$$\sum_{h=1}^l \left(\frac{4h \times 4 - 4}{4} \right) \times 2 = \sum_{h=1}^l 2(4h-1) = \frac{8(1+l) \times l}{2} - 2l = 4l^2 + 2l = k^2 + k$$

故知 $M(S_v, k, 1) = k^2 + k$ ，塗色方式舉例如下：

$M(S_v, 1, 1) = 1^2 + 1 = 2$	$M(S_v, 3, 1) = 3^2 + 3 = 12$	$M(S_v, 5, 1) = 5^2 + 5 = 30$
$M(S_v, 2, 1) = 2^2 + 2 = 6$	$M(S_v, 4, 1) = 4^2 + 4 = 20$	$M(S_v, 6, 1) = 6^2 + 6 = 42$

定理 1.2 $M(S_C, k, 1) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } k = \text{奇數} \\ k^2 - 1, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$

證明

(一) 與定理 1.1 S_v 的塗色格子數最小上界證明類似：

$$2a + 3b + 4c \leq 4k^2 - 4k + 1 \quad (4)$$

$$2a + 2b \leq 8(k-1), \text{ 即 } a + b \leq 4(k-1) \quad (5)$$

1. 當 k 是奇數：因角落的位置最多可出現 4 個塗色格子，得：

$$a \leq 4 \quad (6)$$

整理式(4)、式(5)和式(6)並下取整數得 $a + b + c \leq \left\lfloor \frac{1}{4}(4k^2 + 1) \right\rfloor = k^2$ 。

2. 當 k 是偶數：因角落的位置最多可出現 2 個塗色格子，整理式(3)、

式(4)和式(5)並下取整數得 $a + b + c \leq \left\lfloor \frac{1}{4}(4k^2 - 1) \right\rfloor = k^2 - 1$ 。

故知： $M(S_C, k, 1) \leq \begin{cases} k^2, & \text{若 } k = \text{奇數} \\ k^2 - 1, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$

(二) 建構具 S_c 最大塗色格子數的塗色法：

1. 當 k 是奇數($k = 1$ 、 $M(S_C, 1, 1) = 1$)； $k = 2l + 1$ 時：類似定理 1.1 的歸

納方法，得到塗色格子數為

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{h=1}^l \left(\frac{(4h+1) \times 4 - 4}{4} \right) \times 2 &= 1 + \sum_{h=1}^l 8h \\ &= \frac{8(1+l) \times l}{2} + 1 = (2l+1)^2 = k^2 \end{aligned}$$

2. 當 k 是偶數($k = 2$ 、 $M(S_C, 2, 1) = 3$)； $k = 2l + 2$ 時：類似定理 1.1

的歸納方法，得到塗色格子數為

$$3 + \sum_{h=1}^l \left(\frac{(4h+3) \times 4 - 4}{4} \right) \times 2 = 3 + \sum_{h=1}^l 4(2h+1) \\ = \frac{8(1+l) \times l}{2} + 4l + 3 = (2l+2)^2 - 1 = k^2 - 1$$

故知 $M(S_C, k, 1) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } k = \text{奇數} \\ k^2 - 1, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$ ，塗色方式舉例如下：

$M(S_C, 1, 1) = 1^2 = 1$	$M(S_C, 3, 1) = 3^2 = 9$	$M(S_C, 5, 1) = 5^2 = 25$
$M(S_C, 2, 1) = 2^2 - 1 = 3$	$M(S_C, 4, 1) = 4^2 - 1 = 15$	$M(S_C, 6, 1) = 6^2 - 1 = 35$

定理 1.3 $M(S_V, k, 2) = 2(k^2 + k)$

證明

(一) 與定理 1.1 S_V 的塗色格子數最小上界證明類似：

$$2a + 3b + 4c \leq 8k^2 \quad (7)$$

$$2a + 2b \leq 8(2k - 1), \text{ 即 } a + b \leq 4(2k - 1) \quad (8)$$

因角落的位置最多可出現 4 個塗色格子，整理式(6)、式(7)和式(8)得

$$a + b + c \leq \frac{1}{4}(8k^2 + 8k) = 2(k^2 + k)，\text{ 故知：} M(S_V, k, 2) \leq 2(k^2 + k)。$$

(二) 建構具 S_V 最大塗色格子數的塗色法：

1. 當 k 是奇數 ($k = 1$ 、 $M(S_V, 1, 2) = 4$) : 歸納得到

$$M(S_V, k, 2) = 2(k^2 + k)。$$

2. 當 k 是偶數：歸納得到 $M(S_V, k, 2) = 2(k^2 + k)$ 。

塗色方式舉例如下：

$M(S_v, 1, 2) = 4$	$M(S_v, 3, 2) = 24$	$M(S_v, 5, 2) = 60$
$M(S_v, 2, 2) = 12$	$M(S_v, 4, 2) = 40$	$M(S_v, 6, 2) = 84$

定理 1.4 $M(S_c, k, 2) = \begin{cases} 2k^2 - 1, & \text{若 } k = \text{奇數} \\ 2k^2 - 2, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$

證明

(一) 與定理 1.2 S_c 的塗色格子數最小上界證明類似：

$$2a + 3b + 4c \leq 2(4k^2 - 4k + 1) \quad (9)$$

$$2a + 2b \leq 16(k-1), \text{ 即 } a + b \leq 8(k-1) \quad (10)$$

因角落的位置最多可出現 4 個塗色格子，整理式(6)、式(9)和式(10)並下

$$\text{取整數得 } a + b + c \leq \left\lfloor \frac{1}{4}(8k^2 - 2) \right\rfloor = 2k^2 - 1.$$

1. 當 k 是奇數：知 $M(S_c, k, 2) \leq 2k^2 - 1$ 。

2. 當 k 是偶數：觀察 $k=2$ 的塗色情況，須將正中心的格子改為不塗色、且四週的四個紅格子至少須選擇二格改為不塗色，因此知道與式(6)、式(9)和式(10)的解析結果矛盾，故實際存在的最小上界應再減少一格，

$$\text{為 } M(S_c, k, 2) \leq 2k^2 - 2.$$

(二) 建構具 S_c 最大塗色格子數的塗色法：

1. 當 k 是奇數($k=1 \wedge M(S_c, 1, 2) = 1$)：歸納得到 $M(S_c, k, 2) = 2k^2 - 1$ 。

2. 當 k 是偶數 ($k=2$ 、 $M(S_C, 2, 2)=6$) : 歸納得到

$$M(S_C, k, 2) = 2k^2 - 2.$$

塗色方式舉例如下：

$M(S_C, 1, 2) = 1$	$M(S_C, 3, 2) = 17$	$M(S_C, 5, 2) = 49$
$M(S_C, 2, 2) = 6$	$M(S_C, 4, 2) = 30$	$M(S_C, 6, 2) = 70$

定理 1.5 $M(S_V, k, 3) = 3k^2 + k$

證明 雖然任一格相鄰的格子最多可被塗色三格(賦值註記為 3)，但此塗色方式並不存在。當 $k \geq 3$ ，第 $k-1$ 層的格子全部採用賦值註記為 3 的塗色方式，則第 k 層的格子塗色結果，賦值註記總和至少需減除 $4(k-1)$ ，且因四個角落的格子僅可能與 2 個被塗色的格子相鄰，最多可被賦值註記總和需再減除 4。另一方面，假若最外層四個角落的塗色採用賦值註記總和為 2 的方式、其他格子皆滿足賦值註記為 3，則在第 $k-3$ 層至少會出現 $4(k-1)$ 個註記為 2 的不能塗色格子，故知賦值註記總和的最大值 $3 \times 4k^2 - 4(k-1) - 4 = 12k^2 - 4k$ 。

(一) 與定理 1.1 S_V 的塗色格子數最小上界證明類似：

$$2a + 3b + 4c \leq 12k^2 - 4k \quad (11)$$

$$2a + 2b \leq 8(2k-1), \text{ 即 } a + b \leq 4(2k-1) \quad (12)$$

因角落的位置最多可出現 4 個塗色格子，整理式(6)、式(11)和式(12)得

$$a + b + c \leq \frac{1}{4}(12k^2 + 4k) = 3k^2 + k, \text{ 故知: } M(S_V, k, 3) \leq 3k^2 + k.$$

(三) 建構具 S_v 最大塗色格子數的塗色法：

1. 當 k 是奇數 ($k=1$ 、 $M(S_v, 1, 3)=4$) : 歸納得到

$$M(S_v, k, 3) = 3k^2 + k \circ$$

2. 當 k 是偶數：歸納得到 $M(S_v, k, 3) = 3k^2 + k$ 。

塗色方式舉例如下：

$M(S_v, 1, 3) = 4$	$M(S_v, 3, 3) = 30$	$M(S_v, 5, 3) = 80$
$M(S_v, 2, 3) = 14$	$M(S_v, 4, 3) = 52$	$M(S_v, 6, 3) = 114$

定理 1.6 $M(S_c, k, 3) = \begin{cases} 3k^2 - 2k + 1, & \text{若 } k = \text{奇數}, k \neq 1 \\ 3k^2 - 2k, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$

證明

(一) 與定理 1.5 S_v 的塗色格子數最小上界證明類似：

1. 當 k 是奇數、 $k \geq 3$: 因每二層塗色區塊外層的兩個角落未塗色格子可被移至其內一層，使賦值註記多 4 而增加 1 個塗色格子，得

$$a+b+c \leq \left\lfloor \frac{1}{4} (3(2k-1)^2 + 2(2k-1) + 4) \right\rfloor = 3k^2 - 2k + 1 \circ$$

故知： $M(S_c, k, 3) \leq 3k^2 - 2k + 1$ 。

2. 當 k 是偶數：得 $a+b+c \leq \left\lfloor \frac{1}{4} (3(2k-1)^2 + 2(2k-1)) \right\rfloor = 3k^2 - 2k$ ，

故知： $M(S_c, k, 3) \leq 3k^2 - 2k$ 。

(二) 建構具 S_c 大塗色格子數的塗色法：

1. 當 k 是奇數 ($k=1$ 、 $M(S_c, 1, 3)=1$) : 歸納得到

$$M(S_c, k, 3) = 3k^2 - 2k + 1 \circ$$

2. 當 k 是偶數：歸納得到 $M(S_c, k, 3) = 3k^2 - 2k$ 。

塗色方式舉例如下：

$M(S_c, 1, 3) = 1$ (例外)	$M(S_c, 3, 3) = 22$	$M(S_c, 5, 3) = 66$
$M(S_c, 2, 3) = 8$	$M(S_c, 4, 3) = 40$	$M(S_c, 6, 3) = 96$

定理 1.7 $m(S_v, k, 1) = k^2 + k$

證明 應用定理 1.5 的結論，將 S_v 最外一層視成皆可塗色、鑲嵌內部的格子至少相鄰一格不塗色格子的最大塗色格子數問題，推知扣除最外一層塗色格子數後、計算鑲嵌內部的不塗色格子數即為所求，故知

$$m(S_v, k, 1) \geq (2(k+1))^2 - (3(k+1)^2 + (k+1)) = k^2 + k \circ$$

建構具 S_v 最小塗色格子數的塗色法，並歸納得到 $m(S_v, k, 1) = k^2 + k$:

$m(S_v, 1, 1) = 1^2 + 1 = 2$	$m(S_v, 3, 1) = 3^2 + 3 = 12$	$m(S_v, 5, 1) = 5^2 + 5 = 30$
$m(S_v, 2, 1) = 2^2 + 2 = 6$	$m(S_v, 4, 1) = 4^2 + 4 = 20$	$m(S_v, 6, 1) = 6^2 + 6 = 42$

定理 1.8 $m(S_C, k, 1) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } k = \text{奇數, } k \neq 1 \\ k^2 - 1, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$

證明 類似定理 1.7 的證明，應用定理 1.6 的結論，推知

(一) 當 k 是奇數 ($k = 1$ 、 $m(S_C, 1, 1) = 0$) :

$$m(S_C, k, 1) \geq (2k+1)^2 - (3(k+1)^2 - 2(k+1)) = k^2 \circ$$

(二) 當 k 是偶數 : $m(S_C, k, 1) \geq (2k+1)^2 - (3(k+1)^2 - 2(k+1) + 1) = k^2 - 1 \circ$

建構具 S_C 最小塗色格子數的塗色法，並歸納得到

$$m(S_C, k, 1) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } k = \text{奇數 } k \neq 1 \\ k^2 - 1, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases} :$$

$m(S_C, 1, 1) = 0$ (例外)	$m(S_C, 3, 1) = 3^2 = 9$	$m(S_C, 5, 1) = 5^2 = 25$
$m(S_C, 2, 1) = 2^2 - 1 = 3$	$m(S_C, 4, 1) = 4^2 - 1 = 15$	$m(S_C, 6, 1) = 6^2 - 1 = 35$

定理 1.9 $m(S_V, k, 2) = 2(k^2 + k)$

證明 類似定理 1.1 的證明，知塗色格子賦值註記總和為 $2a + 3b + 4c$ ，而位於角落

與邊線上的格子數共有 $4(2k-1)$ 個，且若角落與邊線上的格子不塗色，則與此

相鄰的內層格子需塗色，將導致賦值註記總和的增加，故知

$$2a + 3b + 4c \geq 2(2k)^2 + 2(4-a) + (8k - 8 - b) \quad , \quad \text{得}$$

$m(S_V, k, 2) = a + b + c \geq 2(k^2 + k)$ 。建構具 S_V 最小塗色格子數的塗色法，並

歸納得到 $m(S_V, k, 2) = 2(k^2 + k)$:

$m(S_v, 1, 2) = 4$	$m(S_v, 3, 2) = 24$	$m(S_v, 5, 2) = 60$
$m(S_v, 2, 2) = 12$	$m(S_v, 4, 2) = 40$	$m(S_v, 6, 2) = 84$

定理 1.10 $m(S_c, k, 2) = \begin{cases} 2k^2, & \text{若 } k = \text{奇數, } k \neq 1 \\ 2k^2 - 1, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$

證明 類似定理 1.9 的證明：

(一) 當 k 是奇數 ($k = 1$ 、 $m(S_c, 1, 2) = 0$) :

$$2a + 3b + 4c \geq 2(2k-1)^2 + 2(4-a) + (8k-12-b), \quad \text{得}$$

$$m(S_c, k, 2) = a + b + c \geq \left\lceil \frac{1}{4}(8k^2 - 2) \right\rceil = 2k^2.$$

(二) 當 k 是偶數：將最外層對角上兩個角落的塗色格子移至內層，賦值註記

$$\text{減少 } 2, \text{ 故 } 2a + 3b + 4c \geq 2(2k-1)^2 + 2(4-a) + (8k-12-b) - 2, \text{ 得}$$

$$m(S_c, k, 2) \geq 2k^2 - 1.$$

建構具 S_c 最小塗色格子數的塗色法，並歸納得到

$$m(S_c, k, 2) = \begin{cases} 2k^2, & \text{若 } k = \text{奇數} \\ 2k^2 - 1, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$$

$m(S_c, 1, 2) = 0$ (例外)	$m(S_c, 3, 2) = 18$	$m(S_c, 5, 2) = 50$
$m(S_c, 2, 2) = 7$	$m(S_c, 4, 2) = 31$	$m(S_c, 6, 2) = 71$

研究二：探討正三角形鑲嵌 $M(T_v, k, 1)$ 、 $M(T_c, k, 1)$ 、 $M(T_v, k, 2)$ 、 $M(T_c, k, 2)$

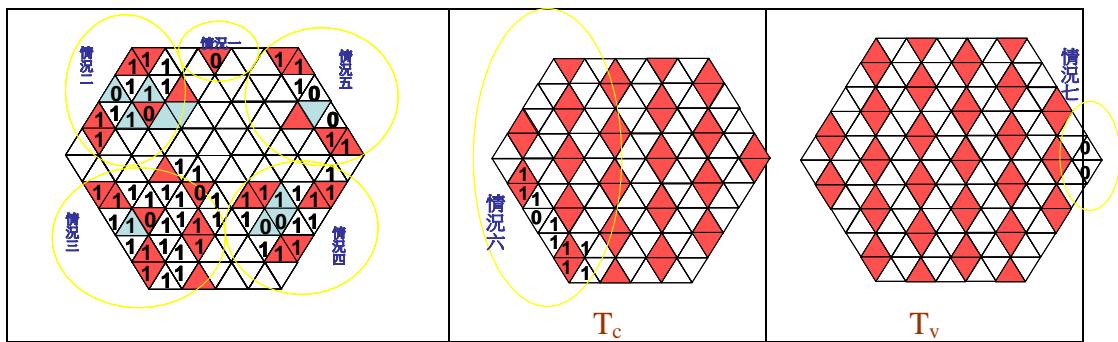
最大塗色格子數量， $m(T_v, k, 1)$ 、 $m(T_c, k, 1)$ 、 $m(T_v, k, 2)$ 、 $m(T_c, k, 2)$

最小塗色格子數量與其塗色方式。

邊線塗色解析 在 T_v 、 T_c 中，邊線上格子的塗色共可區分成下列七種情況進行分析

(藍色表示不能被塗色的格子；與一格紅色塗色格子相鄰者，賦值註記為 1；

未與紅色格子相鄰、其不論是否塗色者，賦值註記為 0)：



因紅色格子兩格相鄰(賦值註記為 1)後至少需間隔兩格(含)以上無法塗色，故

情況一：紅色格子無法再與紅色格子相鄰者賦值註記為 0。

情況二及情況三：鑲嵌邊上若連續兩格塗色、間隔三格不塗色的格子，至少會產生兩格賦值註記為 0。

情況四：間隔兩格不塗色的格子，其內部至少產生兩格賦值註記為 0 的不能塗色格子。

情況五：間隔四格不塗色的格子，於邊線上出現兩格賦值註記為 0 的格子。

情況六：在 T_c 邊線上僅出現一格賦值註記為 0 的格子。

情況七：在 T_v 邊線上若與情況六相同，則在邊線角落上出現二格賦值註記為 0 的格子。

綜合以上各種情況，進行最大塗色格子數量的不同塗色配置組合演繹分析，

推知 $k \geq 3$ 時：

(一) T_v 中必出現至少與邊線上塗色格子數相同被賦值註記為 0 的格子。

(二) T_c 中可出現至多與邊線上塗色格子數少 2 被賦值註記為 0 的格子。

定理 2.1 $M(T_v, k, 1) = 2k^2$

證明

(一) 假設塗色的格子中有 b 個位於邊線(含角落)上、 c 個位於鑲嵌內部，則與這些格子相鄰可被賦值註記的總和共有 $2b+3c$ 個。當 $k \geq 3$ 時，從邊線塗色解析結果得知：「必出現至少與邊線上塗色格子數相同被賦值註記為 0 的格子」。因此得到 $2b+3c \leq 6k^2 - b$ ，故知

$$M(T_v, k, 1) = b + c \leq 2k^2.$$

(二) 建構具 T_v 最大塗色格子數的塗色法： $M(T_v, 1, 1) = 2$ ； $M(T_v, 2, 1) = 8$ ；

$k \geq 3$ 時：歸納得到 $M(T_v, k, 1) = 2k^2$ 。塗色方式舉例如下：

$M(T_v, 1, 1) = 2$	$M(T_v, 2, 1) = 8$	$M(T_v, 3, 1) = 18$
$M(T_v, 4, 1) = 32$	$M(T_v, 5, 1) = 50$	$M(T_v, 6, 1) = 72$

定理 2.2 $M(T_c, k, 1) = 2k^2 - 2k + 1, \quad k \neq 2$

證明

(一) 類似定理 2.1 的證明，當 $k \geq 3$ 時，從邊線塗色解析結果得知：「可出現至多比邊線上塗色格子數少 2 被賦值註記為 0 的格子」。因此得到

$$2b + 3c \leq (6k^2 - 6k + 1) - (b - 2) \text{，故知 } M(T_C, k, 1) = b + c \leq 2k^2 - 2k + 1 \circ$$

(二) 建構具 T_C 最大塗色格子數的塗色法： $M(T_C, 1, 1) = 1$ ； $M(T_C, 2, 1) = 6$ ；

$k \geq 3$ 時：歸納得到 $M(T_C, k, 1) = 2k^2 - 2k + 1$ 。塗色方式舉例如下：

$M(T_C, 1, 1) = 1$	$M(T_C, 2, 1) = 6$ (例外)	
$M(T_C, 3, 1) = 13$	$M(T_C, 4, 1) = 25$	$M(T_C, 5, 1) = 41$
$M(T_C, 6, 1) = 61$	$M(T_C, 7, 1) = 85$	$M(T_C, 8, 1) = 113$

定理 2.3 $M(T_V, k, 2) = 4k^2$, $k \neq 1, 2$

證明

(一) 雖然邊線及角落的格子均可塗色，但將導致在邊長 $k - 1$ 的內層格子均不可塗色，故顯見所有格子均至少與一格未塗色格子相鄰。應用定理 2.1 的證明，易得當 $k \geq 3$ 時，其塗色格子數的最小上界為格子總數減去定理 2.1 的塗色格子數，亦即 $M(T_V, k, 2) \leq 6k^2 - 2k^2 = 4k^2 \circ$

(二) 建構具 T_V 最大塗色格子數的塗色法： $M(T_V, 1, 2) = 6$ ； $M(T_V, 2, 2) = 18$ ；

$k \geq 3$ 時：歸納得到 $M(T_V, k, 2) = 4k^2$ 。塗色方式舉例如下：

$M(T_v, 1, 2) = 6$ (例外)	$M(T_v, 2, 2) = 18$ (例外)	
$M(T_v, 3, 2) = 36$	$M(T_v, 4, 2) = 64$	$M(T_v, 5, 2) = 100$
$M(T_v, 6, 2) = 144$	$M(T_v, 7, 2) = 196$	$M(T_v, 8, 2) = 256$

定理 2.4 $M(T_c, k, 2) = \begin{cases} 4k^2 - 4k + 1, & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3}, k \neq 3 \\ 4k^2 - 4k + 2, & k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \end{cases}$

證明

(一) 類似定理 2.3 的證明，並應用定理 2.2 的結果，當 $k \geq 4$ 時，從邊線塗色
解析結果得知：「可出現至多比邊線上塗色格子數少 2 被賦值註記為 0
的格子」，並使鑲嵌內部格子賦值註記為最大、經演譯分析共可區分成
三種情況，依不塗色格子所在位置由右邊數起的行數不同(平鋪塗色、使
鑲嵌內部賦值註記最大)說明如下：

起始相對位置	$k = 3l + 1$	$k = 3l + 2$	$k = 3l$
右第一行	$2k^2 - 2k + 1$	$2k^2 - 2k + 1$	$2k^2 - 2k$
右第二行	$2k^2 - 2k$	$2k^2 - 2k + 1$	$2k^2 - 2k + 1$
右第三行	$2k^2 - 2k$	$2k^2 - 2k - 1$	$2k^2 - 2k$

得知

$$M(T_c, k, 2) \leq \begin{cases} 6k^2 - 6k + 1 - (2k^2 - 2k) = 4k^2 - 4k + 1, & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ 6k^2 - 6k + 1 - (2k^2 - 2k - 1) = 4k^2 - 4k + 2, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}.$$

(二) 建構具 T_C 最大塗色格子數的塗色法： $M(T_C, 1, 2) = 1$ ； $M(T_C, 2, 2) = 11$ ；

$M(T_C, 3, 2) = 27$ ； $k \geq 4$ 時：歸納得到

$$M(T_C, k, 2) = \begin{cases} 4k^2 - 4k + 1, & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ 4k^2 - 4k + 2, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}.$$

塗色方式舉例如下：

$M(T_C, 1, 2) = 1$	$M(T_C, 2, 2) = 11$ (例外)	$M(T_C, 3, 2) = 27$ (例外)
$M(T_C, 4, 2) = 49$	$M(T_C, 5, 2) = 82$	$M(T_C, 6, 2) = 121$
$M(T_C, 7, 2) = 169$	$M(T_C, 8, 2) = 226$	$M(T_C, 9, 2) = 289$

定理 2.5 $m(T_V, k, 1) = 2(k^2 + k)$

證明 利用定理 2.1 的結果，得知當圖形為 k 層時，鑲嵌內部的格子賦值註記均為 1，但最外層邊線上共有 $2k$ 個塗色格子，產生 $2k$ 個賦值註記為 0 的格子，且與其相鄰的其他格子需被塗色，以滿足命題要求，故知

$$m(T_V, k, 1) \geq 2(k^2 + k).$$

建構具 T_V 最小塗色格子數的塗色法，並歸納得到 $m(T_V, k, 1) = 2(k^2 + k)$ 。

$m(T_V, 1, 1) = 4$	$m(T_V, 2, 1) = 12$	$m(T_V, 3, 1) = 24$

--	--	--

定理 2.6 $m(T_C, k, 1) = \begin{cases} 2k^2 - 2, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2k^2 - 1, & k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3}, \quad k \neq 1, 2 \end{cases}$

證明 類似定理 2.5 的證明，並應用定理 2.2 的結果，當 $k \geq 3$ 時，經演譯分析共可區分成三種情況，依不塗色格子所在位置由右邊數起的行數不同說明如下：

起始 相對位置	$k = 3l + 1$	$k = 3l + 2$		$k = 3l$		
	塗色格子	賦值 0 的格子	塗色格子	賦值 0 的格子	塗色格子	賦值 0 的格子
右第一行	$2k^2 - 2k + 1$	$2k - 1$	$2k^2 - 2k + 1$	$2k - 2$	$2k^2 - 2k$	$2k$
右第二行	$2k^2 - 2k$	$2k - 1$	$2k^2 - 2k + 1$	$2k - 2$	$2k^2 - 2k + 1$	$2k - 3$
右第三行	$2k^2 - 2k$	$2k - 1$	$2k^2 - 2k - 1$	$2k + 1$	$2k^2 - 2k$	$2k$

得知：

(一) 當 $k \equiv 0 \pmod{3}$ 時： $m(T_C, k, 1) \geq (2k^2 - 2k + 1) + (2k - 3) = 2k^2 - 2$ 。

(二) 當 $k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3}$ 時：

$$m(T_C, k, 1) \geq (2k^2 - 2k) + (2k - 1), \text{ 或 } \geq (2k^2 - 2k + 1) + (2k - 2) = 2k^2 - 1$$

建構具 T_C 最小塗色格子數的塗色法，並歸納得到 $m(T_C, 1, 1) = 0$ ；

$$m(T_C, 2, 1) = 6 ; k \geq 3 \text{ 時} : m(T_C, k, 1) = \begin{cases} 2k^2 - 2, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2k^2 - 1, & k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases} \circ$$

$m(T_C, 1, 1) = 0$ (例外)	$m(T_C, 2, 1) = 6$ (例外)	

$m(T_C, 6, 1) = 70$	$m(T_C, 7, 1) = 97$	$m(T_C, 8, 1) = 127$

定理 2.7 $m(T_v, k, 2) = 4k^2 + 2k + 2, \quad k \neq 1 \text{ or } 3$

證明 利用定理 2.3 的結果，得知當 $k \geq 4$ 時，鑲嵌內部的格子賦值註記均為 2，但最外層邊線上的格子僅與鑲嵌內部的格子相鄰兩邊，為滿足命題要求，與邊線上格子相鄰的格子皆需被塗色，故需再塗色 $2k+2$ 格，故知
 $m(T_v, k, 2) \geq 4k^2 + (2k+2)$ 。另一方面，因至少要相鄰兩格，若鑲嵌的最外層邊線上的格子及其內一層的格子被塗色，會導致賦值註記浪費至少 $6(k+1)$ ，亦可證明 $m(T_v, k, 2) \geq \frac{1}{3}(2 \times 6k^2 + 6(k+1)) = 4k^2 + 2k + 2$ 。

建構具 T_v 最小塗色格子數的塗色法，並歸納得到

$$m(T_v, k, 2) = 4k^2 + 2k + 2, \quad k \neq 1 \text{ or } 3$$

$m(T_v, 1, 2) = 6$ (例外)	$m(T_v, 2, 2) = 22$	$m(T_v, 3, 2) = 42$ (例外)
$m(T_v, 4, 2) = 74$	$m(T_v, 5, 2) = 112$	$m(T_v, 6, 2) = 158$
$m(T_v, 7, 2) = 212$	$m(T_v, 8, 2) = 274$	$m(T_v, 9, 2) = 344$

定理 2.8 $m(T_c, k, 2) = 4k^2 - 2k + 1, \quad k \neq 1, 2, 3$

證明 類似定理 2.7 的證明，並應用定理 2.4 的結果，經演譯分析共可區分成三種情況，得知當 $k \geq 4$ 時，鑲嵌內部的格子賦值註記均為 2，但最外層邊線上的格子僅與鑲嵌內部的格子相鄰兩邊，為滿足命題要求，與邊線上格子相鄰的格子皆需被塗色。依不塗色格子所在位置由右邊數起的行數不同說明如下：

起始 相對位置	$k = 3l + 1$		$k = 3l + 2$		$k = 3l$	
	塗色格子	與邊線格子 相鄰需被 塗色格子	塗色格子	與邊線格子 相鄰需被 塗色格子	塗色格子	與邊線格子 相鄰需被 塗色格子
右第一行	$4k^2 - 4k$	$2k + 1$	$4k^2 - 4k$	$2k + 1$	$4k^2 - 4k + 1$	$2k$
右第二行	$4k^2 - 4k + 1$	$2k$	$4k^2 - 4k$	$2k + 1$	$4k^2 - 4k$	$2k + 1$
右第三行	$4k^2 - 4k + 1$	$2k$	$4k^2 - 4k + 2$	$2k - 1$	$4k^2 - 4k + 1$	$2k$

得知三種情況塗格子數總和皆為 $4k^2 - 2k + 1$ 。另一方面，若最外層邊線上的格子及其內一層的格子被塗色，會導致賦值註記浪費至少 $6k$ ，亦可證明故

$$m(T_C, k, 2) \geq \left\lceil \frac{1}{3} (2 \times (6k^2 - 6k + 1) + 6k) \right\rceil = 4k^2 - 2k + 1.$$

建構具 T_C 最小塗色格子數的塗色法，歸納得到

$$m(T_C, k, 2) = 4k^2 - 2k + 1, \quad k \neq 1, 2, 3.$$

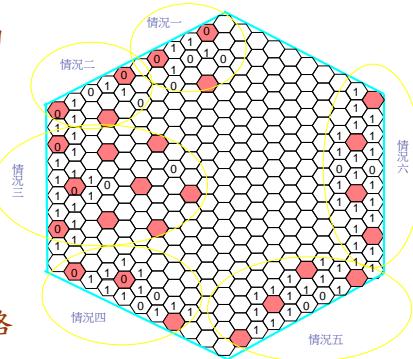
$m(T_C, 1, 2) = 0$ (例外)	$m(T_C, 2, 2) = 12$ (例外)	$m(T_C, 3, 2) = 30$ (例外)
$m(T_C, 4, 2) = 57$	$m(T_C, 5, 2) = 91$	$m(T_C, 6, 2) = 133$
$m(T_C, 7, 2) = 183$	$m(T_C, 8, 2) = 241$	$m(T_C, 9, 2) = 307$

研究三：探討正六邊形鑲嵌 $M(H_v, k, 1)$ 、 $M(H_c, k, 1)$ 、 $M(H_v, k, 2)$ 、 $M(H_c, k, 2)$ 、
 $M(H_v, k, 3)$ 、 $M(H_c, k, 3)$ 、 $M(H_v, k, 4)$ 、 $M(H_c, k, 4)$ 、 $M(H_v, k, 5)$ 、
 $M(H_c, k, 5)$ 最大塗色格子數量， $m(H_v, k, 1)$ 、 $m(H_c, k, 1)$ 、 $m(H_v, k, 2)$ 、
 $m(H_c, k, 2)$ 最小塗色格子數量與其塗色方式。

邊線塗色解析 在 H_v 、 H_c 中， $k \geq 7$ 時其邊線上格子的塗色情況共可區分成右列六種情況進行分析(與一格塗色格子相鄰者，賦值註記為 1；未與塗色格子相鄰、其不論是否被塗色者，賦值註記為 0)：

(一) 正六邊形格子若被塗色，則與其相鄰的格子皆不可塗色，賦值註記為 0。

(二) 情況一至情況六分別討論邊線上兩端的格子被塗色，中間夾著 2~7 個不塗色格子的賦值註記情形。圖中，可觀察到無論塗色格子間夾著多少個不塗色格子，都至少產生 2 個(含)以上賦值註記為 0 的格子。



定理 3.1

(一) 當 $k < 7$ 時：

$$M(H_v, k, 1) = \begin{cases} \frac{1}{3}(k^2 + 2k), & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}(k^2 + 2k + 1), & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

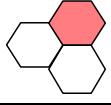
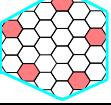
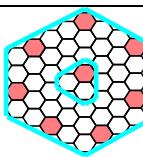
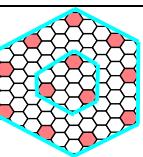
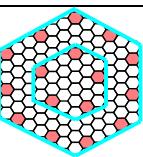
(二) 當 $k \geq 7$ 時：

$$M(H_v, k, 1) = \begin{cases} \frac{1}{7}(3k^2), & k \equiv 0 \pmod{7} \\ \frac{1}{7}(3k^2 + 4), & k \equiv 1 \text{ or } 6 \pmod{7} \\ \frac{1}{7}(3k^2 + 9), & k \equiv 2 \text{ or } 5 \pmod{7} \\ \frac{1}{7}(3k^2 + 1), & k \equiv 3 \text{ or } 4 \pmod{7} \end{cases}$$

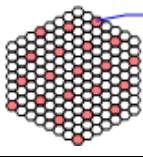
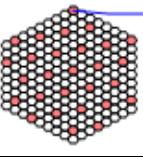
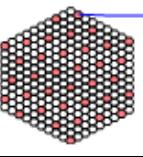
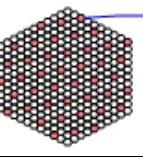
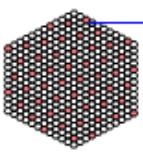
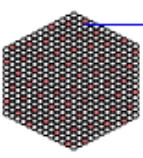
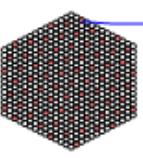
證明

(一) $k < 7$ 時：採取使邊線上(含角落)的格子可獲得最大塗色效益的方法，建

構具 H_v 最大塗色格子數的塗色法：

		
$M(H_v, 1, 1) = 1$	$M(H_v, 2, 1) = 3$	$M(H_v, 3, 1) = 5$
		
$M(H_v, 4, 1) = 8$	$M(H_v, 5, 1) = 12$	$M(H_v, 6, 1) = 16$

(二) $k \geq 7$ 時：採取使鑲嵌內部產生最大塗色格子數的方式，並控制塗色配置起始相對位置，分別歸納求取存在的最大塗色格子數如下表及塗色舉例：

			
$M(H_v, 7, 1) = 21$ $k = 7l$	$M(H_v, 8, 1) = 28$ $k = 7l + 1$	$M(H_v, 9, 1) = 36$ $k = 7l + 2$	$M(H_v, 10, 1) = 43$ $k = 7l + 3$
			
$M(H_v, 11, 1) = 52$ $k = 7l + 4$	$M(H_v, 12, 1) = 63$ $k = 7l + 5$	$M(H_v, 13, 1) = 73$ $k = 7l + 6$	

起始相對位置	$k = 7l$	$k = 7l + 1$	$k = 7l + 2$	$k = 7l + 3$	$k = 7l + 4$	$k = 7l + 5$	$k = 7l + 6$
正上方	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2 + 4}{7}$	$\frac{3k^2 + 2}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 + 2}{7}$	$\frac{3k^2 - 3}{7}$
右偏一	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2 - 3}{7}$	$\frac{3k^2 + 9}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 + 2}{7}$	$\frac{3k^2 + 4}{7}$
右偏二	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2 - 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 5}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 + 9}{7}$	$\frac{3k^2 + 4}{7}$

右偏三	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2 - 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 5}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 5}{7}$	$\frac{3k^2 - 3}{7}$
右偏四	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2 + 4}{7}$	$\frac{3k^2 + 2}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 6}{7}$	$\frac{3k^2 - 5}{7}$	$\frac{3k^2 + 4}{7}$
右偏五	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2 + 4}{7}$	$\frac{3k^2 - 5}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 + 2}{7}$	$\frac{3k^2 - 3}{7}$
右偏六	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2 - 3}{7}$	$\frac{3k^2 + 2}{7}$	$\frac{3k^2 - 6}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 5}{7}$	$\frac{3k^2 - 3}{7}$
最大值	$\frac{3k^2}{7}$	$\frac{3k^2 + 4}{7}$	$\frac{3k^2 + 9}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 + 1}{7}$	$\frac{3k^2 + 9}{7}$	$\frac{3k^2 + 4}{7}$

定理 3.2

(一) 當 $k < 7$ 時：

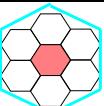
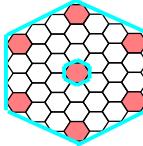
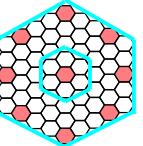
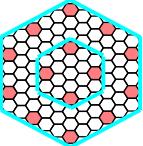
$$M(H_C, k, 1) = \begin{cases} \frac{1}{3}(k^2 + k), & k \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}(k^2 + k + 1), & k \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}(k^2 + k - 3), & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

(二) 當 $k \geq 7$ 時：

$$M(H_C, k, 1) = \begin{cases} \frac{1}{7}(3k^2 - 3k + 7), & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{7} \\ \frac{1}{7}(3k^2 - 3k + 1), & k \equiv 2 \text{ or } 6 \pmod{7} \\ \frac{1}{7}(3k^2 - 3k + 3), & k \equiv 3 \text{ or } 5 \pmod{7} \\ \frac{1}{7}(3k^2 - 3k + 13), & k \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

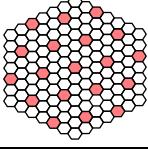
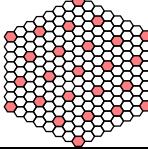
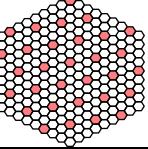
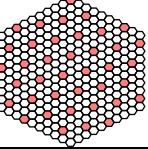
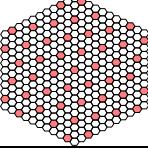
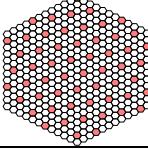
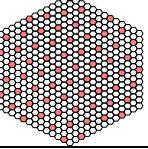
證明

(一) $k < 7$ 時：採取使邊線上(含角落)的格子可獲得最大塗色效益的方法，建構具 H_C 最大塗色格子數的塗色法：

		
$M(H_C, 1, 1) = 1$	$M(H_C, 2, 1) = 1$	$M(H_C, 3, 1) = 4$
		
$M(H_C, 4, 1) = 7$	$M(H_C, 5, 1) = 9$	$M(H_C, 6, 1) = 14$

(二) $k \geq 7$ 時：類似定理 3.1 的證明，歸納求取存在的最大塗色格子數如

下表及塗色舉例：

			
$M(H_C, 7, 1) = 19$ $k = 7l$	$M(H_C, 8, 1) = 25$ $k = 7l + 1$	$M(H_C, 9, 1) = 31$ $k = 7l + 2$	$M(H_C, 10, 1) = 39$ $k = 7l + 3$
			
$M(H_C, 11, 1) = 49$ $k = 7l + 4$	$M(H_C, 12, 1) = 57$ $k = 7l + 5$	$M(H_C, 13, 1) = 67$ $k = 7l + 6$	

起始相對位置	$k = 7l$	$k = 7l + 1$	$k = 7l + 2$	$k = 7l + 3$	$k = 7l + 4$	$k = 7l + 5$	$k = 7l + 6$
正上方	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 7}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k - 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$
右偏一	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 13}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$
右偏二	$\frac{3k^2 - 3k + 7}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k - 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$
右偏三	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k - 11}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k - 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$
右偏四	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k - 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$
右偏五	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k - 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$
右偏六	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k - 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$
最大值	$\frac{3k^2 - 3k + 7}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 7}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 13}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 3}{7}$	$\frac{3k^2 - 3k + 1}{7}$

定理 3.3

(一) 當 $k < 4$ 時： $M(H_v, 1, 2) = 3$ 、 $M(H_v, 2, 2) = 6$ 、 $M(H_v, 3, 2) = 12$

$$(二) \text{ 當 } k \geq 4 \text{ 時} : M(H_v, k, 2) = \begin{cases} \frac{1}{3}(3k^2 + k), & k \equiv 0 \pmod{3}, \quad k \neq 6 \\ k^2 + k + 1, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}(3k^2 + 2k - 1), & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

例外情況： $M(H_v, 6, 2) = 39$

證明 令與 2 格紅色格子相鄰者賦值註記為 2；與 1 格紅色格子相鄰者賦值註記為 1；未與紅色格子相鄰者、其不論是否塗色賦值註記為 0；邊線上(不含角落)的每個格子可影響相鄰 4 格的賦值註記，角落的格子可影響相鄰 3 格的賦值註記。假設在 H_v 中內部格子採取最有效率的方式塗色(亦即內部沒有賦值註記為 0 的情況，惟塗色方法非唯一，實際的塗色鑲嵌內部可能有賦值註記為 0，但最外層的塗色格子數因此上升)，則當 $k \geq 4$ ：

項次	格子總數	賦值最小上界	個別塗色格數最小上界
當 $k = 3l + 1$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3 \times (2k - 1)$	總和： $2 \times 3 \times (2k - 1)$ 扣除角落塗色： 3×6	(邊線+角落)塗色格子： $\frac{[6(2k - 1) - 18]}{4} + 6 = 3k$
$k - 1$ 層鑲嵌內部	$3(k - 1)^2$	$2 \times 3(k - 1)^2$	$(k - 1)^2$
塗色格數最小上界	此種情形，每格均賦值為 2		$k^2 + k + 1$
當 $k = 3l + 2$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3 \times (2k - 1)$	總和： $2 \times 3 \times (2k - 1)$ 扣除邊線賦值至少減少： $(4k - 4l)$ 扣除角落塗色： 3×4 內部不塗、優先邊上塗色： $6 \times (2l + 1)$	(邊線+角落)塗色格子： $\frac{[6(2k - 1) - 4(k - l) - 12 + 6(2l + 1)]}{4} + 4 = 10l + 5$
$k - 1$ 層鑲嵌內部	$3(k - 1)^2$	$2 \times 3(k - 1)^2$	扣除內部不塗格子： $(2l + 1)$ $(k - 1)^2 - (2l + 1)$
塗色格數最小上界	優先邊上塗色，產生較多塗色格子		$\frac{1}{3}(3k^2 + 2k - 1)$
當 $k = 3l$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3 \times (2k - 1)$	總和： $2 \times 3 \times (2k - 1)$ 扣除邊線賦值至少減少： $(3k + l)$ 扣除角落塗色： 3×2 內部不塗、優先邊上塗色 $6 \times l$	(邊線+角落)塗色格子： $\frac{[6(2k - 1) - (3k + l) - 6 + 6l]}{4} + 2 = 8l - 1$
$k - 1$ 層鑲嵌內部	$3(k - 1)^2$	$2 \times 3(k - 1)^2$	扣除內部不塗格子： l $(k - 1)^2 - l$

塗色格數最小上界	優先邊上塗色，產生較多塗色格子	$\frac{1}{3}(3k^2 + k)$
----------	-----------------	-------------------------

其中，當 $k = 6$ 時因受最外層邊線效應影響，其最小上界為例外。現在建構具 H_v 最大塗色格子數的塗色法，並歸納求取最大塗色格子數及塗色舉例如下：

$M(H_v, 1, 2) = 3$	$M(H_v, 2, 2) = 6$	$M(H_v, 3, 2) = 12$	$M(H_v, 6, 2) = 39$ (例外)
$M(H_v, 4, 2) = 21$		$M(H_v, 5, 2) = 28$	
$M(H_v, 9, 2) = 84$			
		$M(H_v, 7, 2) = 57$	
$M(H_v, 8, 2) = 69$		$M(H_v, 12, 2) = 148$	

定理 3.4

(一) 當 $k < 4$ 時： $M(H_c, 1, 2) = 1$ 、 $M(H_c, 2, 2) = 3$ 、 $M(H_c, 3, 2) = 9$

$$(二) \text{ 當 } k \geq 4 \text{ 時} : M(H_c, k, 2) = \begin{cases} \frac{1}{3}(3k^2 - 2k), & k \equiv 0 \pmod{3}, \quad k \neq 6 \\ \frac{1}{3}(3k^2 - k + 1), & k \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}(3k^2 - 2k + 4), & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

例外情況： $M(H_c, 6, 2) = 33$

證明 令賦值註記規則同定理 3.3 證明，假設在 H_c 中內部格子採取最有效率的方式

塗色，則當 $k \geq 4$ ：

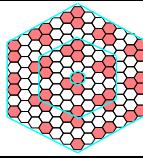
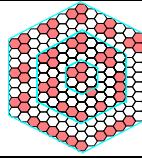
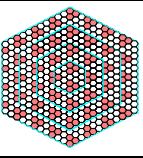
項次	格子總數	賦值最小上界	個別塗色格數最小上界
當 $k = 3l + 1$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3 \times (2k - 2)$	總和： $2 \times 3 \times (2k - 2)$ 扣除邊線賦值至少減少： $2k + 2l$ 扣除角落塗色： 3×6	(邊線+角落)塗色格子(含補回內部賦值剩餘塗色格子=2)： $\frac{[6(2k-2) - 2(k+l) - 18 + 6(2l-1) + 2]}{4} + 6$ 下取整數： $10l$

		內部不塗、優先邊上 塗色： $6 \times (2l - 1)$	
$k - 1$ 層 鑲 嵌 內部	$3(k - 1)^2 - 3(k - 1) + 1$	$6k^2 - 18k + 14$ 內部賦值剩餘：2	扣除內部不塗格子： $(2l - 1)$ $\frac{1}{6}(6k^2 - 18k + 12) - (2l - 1)$
塗色格數最小 上界	優先邊上塗色，產生較多塗色格子		$\frac{1}{3}(3k^2 - k + 1)$
當 $k = 3l + 2$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3 \times (2k - 2)$	總 和： $2 \times 3 \times (2k - 2)$ 扣除邊線賦值減少： $(k + 5l)$ 扣除角落塗色： 3×4 內部不塗、優先邊上塗色： $6 \times (4l - 2)$	(邊線+角落)塗色格子： $\frac{[6(2k - 2) - (k + 5l) + 6(4l - 2) - 12]}{4} + 4$ 下取整數：13l
$k - 1$ 層 鑲 嵌 內部	$3(k - 1)^2 - 3(k - 1) + 1$	$6k^2 - 18k + 14$ 內部賦值剩餘：2	扣除內部不塗格子： $(4l - 2)$ ($2l - 2$) 格無法塗色賦值未利用 $\frac{1}{6}(6k^2 - 18k + 12) - (6l - 4)$
塗色格數最小 上界	優先邊上塗色，產生較多塗色格子		$\frac{1}{3}(3k^2 - 2k + 4)$
當 $k = 3l$ 時：			
鑲嵌的最外層	$3 \times (2k - 2)$	總 和： $2 \times 3 \times (2k - 2)$ 扣除邊線賦值減少： $(3k - l)$ 扣除角落塗色： 3×2	(邊線+角落)塗色格子(含補回內部賦值剩餘塗色格子=2)： $\frac{[6(2k - 2) - (3k - l) - 6 + 2]}{4} + 2$ $= 7l - 2$
$k - 1$ 層 鑲 嵌 內部	$3(k - 1)^2 - 3(k - 1) + 1$	$6k^2 - 18k + 14$ 內部賦值剩餘：2	$\frac{1}{6}(6k^2 - 18k + 12)$
塗色格數最小 上界			$\frac{1}{3}(3k^2 - 2k)$

其中，當 $k = 6$ 時因受最外層邊線效應影響，其最小上界為例外。現在建構具

H_c 最大塗色格子數的塗色法，並歸納求取最大塗色格子數及塗色舉例如下：

$M(H_c, 1, 2) = 1$	$M(H_c, 2, 2) = 3$	$M(H_c, 3, 2) = 9$	$M(H_c, 6, 2) = 33$ (例外)
$M(H_c, 4, 2) = 15$		$M(H_c, 5, 2) = 23$	$M(H_c, 9, 2) = 75$

		
$M(H_C, 7, 2) = 47$	$M(H_C, 8, 2) = 60$	$M(H_C, 12, 2) = 136$

定理 3.5

(一) 當 $k < 9$ 時 : $M(H_v, 1, 3) = 3$ 、 $M(H_v, 2, 3) = 7$ 、 $M(H_v, 3, 3) = 15$ 、

$$M(H_v, 4, 3) = 28 \text{ 、 } M(H_v, 5, 3) = 40 \text{ 、 } M(H_v, 6, 3) = 56 \text{ 、 } M(H_v, 7, 3) = 76 \text{ 、}$$

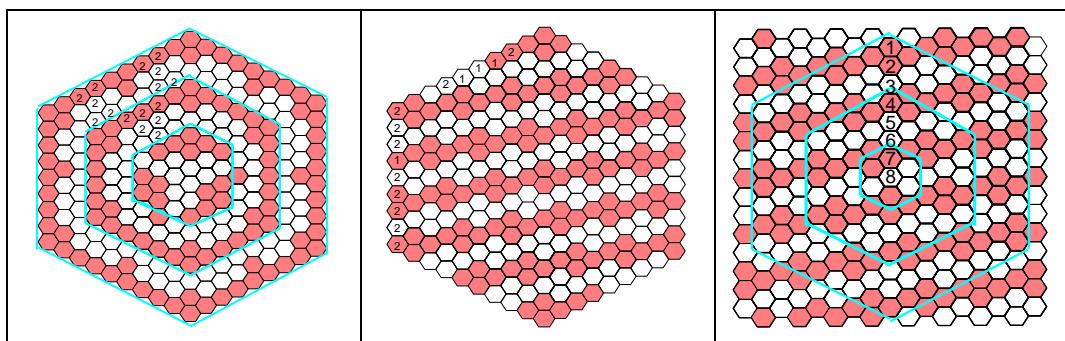
$$M(H_v, 8, 3) = 97$$

(二) 當 $k \geq 9$ 時 :

$$M(H_v, k, 3) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3k^2), & k \equiv 0 \pmod{8} \\ \frac{1}{2}(3k^2 + 3), & k \equiv 1 \text{ or } 3 \text{ or } 5 \text{ or } 7 \pmod{8} \\ \frac{1}{2}(3k^2 + 2), & k \equiv 2 \text{ or } 6 \pmod{8} \\ \frac{1}{2}(3k^2 + 4), & k \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$$

邊線塗色解析 $k \geq 9$ 時：由下方左邊二圖得知，當 $k \rightarrow \infty$ 時，可忽略最外層邊線

塗色效應，故採取使鑲嵌內部不產生賦值註記為 0 的平鋪塗色方式。建構如下圖塗色起始位置代碼 1 至代碼 8 等八個為週期的塗色循環規律，歸納各個情況的塗色數量加以比較，即可找到最大值。



證明 當 $k \geq 9$ 時，運用邊線塗色解析的塗色配置策略，分析塗色起始位置代碼 1~8、列出以八個為一週期循環的所有塗色情況進行比較，歸納如下表：

起始相對位置	$k = 8l$	$k = 8l + 1$	$k = 8l + 2$	$k = 8l + 3$	$k = 8l + 4$	$k = 8l + 5$	$k = 8l + 6$	$k = 8l + 7$
代碼 1	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 3)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 3)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$
代碼 2	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$
代碼 3	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 3)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 3)$
代碼 4	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$
代碼 5	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$
代碼 6	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$
代碼 7	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3)$
代碼 8	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 1)$
最大值	$\frac{1}{2}(3k^2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 3)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 3)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 3)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 + 3)$

當 $k < 9$ 時：

$M(H_v, 1, 3) = 3$	$M(H_v, 2, 3) = 7$	$M(H_v, 3, 3) = 15$	$M(H_v, 4, 3) = 28$
$M(H_v, 5, 3) = 40$	$M(H_v, 6, 3) = 56$	$M(H_v, 7, 3) = 76$	$M(H_v, 8, 3) = 97$

定理 3.6

(一) 當 $k < 9$ 時 : $M(H_c, 1, 3) = 1$ 、 $M(H_c, 2, 3) = 4$ 、 $M(H_c, 3, 3) = 12$ 、

$$M(H_c, 4, 3) = 21 \text{ 、 } M(H_c, 5, 3) = 34 \text{ 、 } M(H_c, 6, 3) = 48 \text{ 、 } M(H_c, 7, 3) = 65 \text{ 、 }$$

$$M(H_c, 8, 3) = 88$$

(二) 當 $k \geq 9$ 時 : $M(H_c, k, 3) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2), & k \neq 3 \text{ or } 6 \pmod{8} \\ \frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 4), & k \equiv 3 \text{ or } 6 \pmod{8} \end{cases}$

證明 類似定理 3.5 的證明，歸納如下表：

起始相對位置	$k = 8l$	$k = 8l + 1$	$k = 8l + 2$	$k = 8l + 3$	$k = 8l + 4$	$k = 8l + 5$	$k = 8l + 6$	$k = 8l + 7$
代碼 1	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$
代碼 2	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$
代碼 3	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$
代碼 4	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$
代碼 5	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$
代碼 6	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$
代碼 7	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k - 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$
代碼 8	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k)$
最大值	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 4)$	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + 2)$

當 $k < 9$ 時：

$M(H_C, 1, 3) = 1$	$M(H_C, 2, 3) = 4$	$M(H_C, 3, 3) = 12$	$M(H_C, 4, 3) = 21$
$M(H_C, 5, 3) = 34$	$M(H_C, 6, 3) = 48$	$M(H_C, 7, 3) = 65$	$M(H_C, 8, 3) = 88$

定理 3.7 $M(H_V, k, 4) = \begin{cases} 2k^2 + k, & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ 2k^2 + k - 1, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$

證明 $k \geq 4$ 時，以每三層一個區塊，因鑲嵌最外一層的格子皆可塗色、鑲嵌內部與六個角落塗色格子每格要相鄰至少 2 個不塗色格子，經分析每三層一個區塊、每區塊的第二層每個角落需特別增加不塗色格子，即每個角落賦值多 3、最內一個區塊格數較小而需調整。設鑲嵌內部共存在 c 格不塗色格子，則：

(一) $k = 3l + 1$ 時 ($k = 1 \vee M(H_V, 1, 4) = 3$) : $6c \geq 2 \times 3(k-1)^2 + \left(\frac{k-1}{3}\right) \times 6 \times 3$ ，得

$$c \geq k^2 - k \Rightarrow \text{故知 } M(H_V, k, 4) \leq 3k^2 - (k^2 - k) = 2k^2 + k$$

(二) $k = 3l + 2$ 時($k = 2$ 、 $M(H_v, 2, 4) = 9$)：在最內一個區塊的二層六個角落所

多出的註記總和為 12、需減除 6，故 $6c \geq 2 \times 3(k-1)^2 + \left(\frac{k-2}{3}+1\right) \times 6 \times 3 - 6$ ，

得 $c \geq k^2 - k + 1$ 。故知 $M(H_v, k, 4) \leq 3k^2 - (k^2 - k + 1) = 2k^2 + k - 1$ 。

(三) $k = 3l$ 時($k = 3$ 、 $M(H_v, 3, 4) = 21$)：在最內一個區塊的二層六個角落所

多出的註記總和為 9、需減除 9，故 $6c \geq 2 \times 3(k-1)^2 + \frac{k}{3} \times 6 \times 3 - 9$ ，得

$c \geq \left\lceil k^2 - k - \frac{1}{2} \right\rceil = k^2 - k$ 。故知 $M(H_v, k, 4) \leq 3k^2 - (k^2 - k) = 2k^2 + k$ 。

建構具 H_v 最大塗色格子數的塗色法，得知：

$$M(H_v, k, 4) = \begin{cases} 2k^2 + k, & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ 2k^2 + k - 1, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$M(H_v, 1, 4) = 3$	$M(H_v, 2, 4) = 9$	$M(H_v, 3, 4) = 21$
$M(H_v, 4, 4) = 36$	$M(H_v, 5, 4) = 54$	$M(H_v, 6, 4) = 78$
$M(H_v, 7, 4) = 105$	$M(H_v, 8, 4) = 135$	$M(H_v, 9, 4) = 171$

定理 3.8

$$M(H_c, k, 4) = \begin{cases} 2k^2 - k, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ 2k^2 - 2k + 4, & k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \\ 2k^2 - \frac{4}{3}k + 1, & k \equiv 0 \pmod{3}, k \neq 3 \end{cases}$$

證明 證明類似定理 3.7，設鑲嵌內部共存在 c 格不塗色格子，則：

(一) $k = 3l + 1$ 時($k = 1$ 、 $M(H_c, 1, 4) = 1$)：在最內一區塊三層六個角落所多出的 註 記 總 和 為 15，需減除 3，故

$$c \geq \left\lceil \frac{1}{6} \left(2 \times (3(k-1)^2 - 3(k-1) + 1) + \left(\frac{k-1}{3} \right) \times 6 \times 3 - 3 \right) \right\rceil, \text{ 得 } c \geq k^2 - 2k + 1。 \text{ 故知}$$

$$M(H_C, k, 4) \leq (3k^2 - 3k + 1) - (k^2 - 2k + 1) = 2k^2 - k。$$

(二) $k = 3l + 2$ 時 ($k = 2$ 、 $M(H_C, 2, 4) = 5$)：此圖形每個角落會增加賦值註記 6，在最內一個區塊的三層六個角落所多出的賦值註記總和有 18，故需減除 18；正中心多塗兩格增加賦值註記 10，故

$$c \geq \frac{1}{6} \left(2 \times (3(k-1)^2 - 3(k-1) + 1) + \left(\frac{k-2}{3} \right) \times 6 \times 6 - 18 + 10 \right), \text{ 得 } c \geq k^2 - k - 3。 \text{ 故知}$$

$$M(H_C, k, 4) \leq (3k^2 - 3k + 1) - (k^2 - k - 3) = 2k^2 - 2k + 4。$$

(三) $k = 3l$ 時 ($k = 3$ 、 $M(H_C, 3, 4) = 14$)：此圖形有 2 個角落會增加賦值註記 6、有 4 個角落會增加賦值註記 3，在最內一個區塊的三層六個角落所多出的賦值註記均為 3，需加回 6，故

$$c \geq \left\lceil \frac{1}{6} \left(2 \times (3(k-1)^2 - 3(k-1) + 1) + \left(\frac{k-3}{3} \right) \times (4 \times 3 + 2 \times 6) + 6 \right) \right\rceil, \text{ 得 } c \geq k^2 - \frac{5}{3}k。 \text{ 故}$$

$$\text{知 } M(H_C, k, 4) \leq (3k^2 - 3k + 1) - (k^2 - \frac{5}{3}k) = 2k^2 - \frac{4}{3}k + 1。$$

建構具 H_C 最大塗色格子數的塗色法，得知：

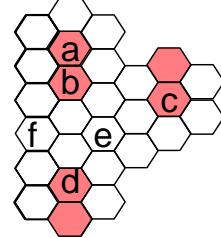
$$M(H_C, k, 4) = \begin{cases} 2k^2 - k, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ 2k^2 - 2k + 4, & k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \\ 2k^2 - \frac{4}{3}k + 1, & k \equiv 0 \pmod{3}, k \neq 3 \end{cases}。$$

$M(H_C, 1, 4) = 1$	$M(H_C, 2, 4) = 5$ (例外)	$M(H_C, 3, 4) = 14$ (例外)
$M(H_C, 4, 4) = 28$	$M(H_C, 5, 4) = 44$	$M(H_C, 6, 4) = 65$
$M(H_C, 7, 4) = 91$	$M(H_C, 8, 4) = 116$	$M(H_C, 9, 4) = 151$

定理 3.9 $m(H_v, k, 1) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2k^2), & k \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}(2k^2 + 7), & k \equiv 1 \pmod{3}, k \neq 1 \\ \frac{1}{3}(2k^2 + 4), & k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \end{cases}$

證明 $k \geq 4$ 時，賦值註記情況討論如下：

(一) 因至少與一塗色格子相鄰，故塗色格子至少需兩格相連，相連塗色的兩格旁夾的兩格賦值註記為 2。



(二) 若相鄰兩格塗色格子在鑲嵌邊線上，則浪費三格可提供賦值註記的不塗色格子。

(三) 若鑲嵌邊線上的格子儘量維持不塗色、塗其內一層的格子，如圖 b 和 d 間隔兩格不塗，則會產生如圖 e 和 f 無法與塗色格子相鄰的情況。

(四) 如圖，若 b 和 d 間只相鄰一格，賦值註記增加 1，但增加的賦值註記數值遠小於鑲嵌邊線上的格子數。

(五) 角落的格子因僅和內層的格子一格相鄰，若該內層的格子未塗色，於相鄰角落邊線上的格子塗色相對鑲嵌內部連續兩格塗色，會得到更少的塗色格子。

依此原則，設鑲嵌內部有 c 格塗上顏色，則：

(一) $k = 3l + 1$ 時 ($k = 1$ 、 $m(H_v, 1, 1) = 2$)：需調整角落三格塗色，得

$$6c \geq 3k^2 + \frac{3}{2} \times (c + 2 \times 3) \quad c \geq \left\lceil \frac{1}{3}(2k^2 + 6) \right\rceil, \text{ 故知 } m(H_v, k, 1) \geq \frac{1}{3}(2k^2 + 7).$$

(二) $k = 3l + 2$ 時 ($k = 2$ 、 $m(H_v, 2, 1) = 3$)：需調整角落二格塗色，得

$$6c \geq 3k^2 + \frac{3}{2} \times (c + 2 \times 2) \quad c \geq \frac{1}{3}(2k^2 + 4), \text{ 故知 } m(H_v, k, 1) \geq \frac{1}{3}(2k^2 + 4).$$

(三) $k = 3l$ 時 ($k = 3$ 、 $m(H_v, 3, 1) = 6$) : 得 $6c \geq 3k^2 + \frac{c}{2} \times 3$ 、 $c \geq \frac{2}{3}k^2$, 故知

$$m(H_v, k, 1) \geq \frac{1}{3}(2k^2)$$

建構具 H_v 最小塗色格子數的塗色法 , 得知 :

$$m(H_v, k, 1) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2k^2), & k \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}(2k^2 + 7), & k \equiv 1 \pmod{3}, k \neq 1 \\ \frac{1}{3}(2k^2 + 4), & k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \end{cases}$$

$m(H_v, 1, 1) = 2$ (例外)	$m(H_v, 2, 1) = 3$ (例外)	
$m(H_v, 3, 1) = 6$	$m(H_v, 4, 1) = 13$	$m(H_v, 5, 1) = 18$
$m(H_v, 6, 1) = 24$	$m(H_v, 7, 1) = 35$	$m(H_v, 8, 1) = 44$

定理 3.10 $m(H_c, k, 1) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2k^2 - 2k + 6), & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3}, k \neq 1 \\ \frac{1}{3}(2k^2 - 2k + 2), & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$

證明 證明類似定理 3.9 , 則 :

(一) $k = 3l + 1$ 時 ($k = 1$ 、 $m(H_c, 1, 1) = 0$) : 需調整角落二格塗色 , 得

$$6c \geq 3k^2 - 3k + 1 + \frac{3}{2} \times (c + 2 \times 2) \quad , \quad c \geq \left\lceil \frac{2}{9}((3k^2 - 3k + 1) + 6) \right\rceil \quad , \quad \text{故知}$$

$$m(H_c, k, 1) \geq \frac{1}{3}(2k^2 - 2k + 6)$$

(二) $k = 3l + 2$ 時 ($k = 2$ 、 $m(H_c, 2, 1) = 2$) : 得

$$6c \geq 3k^2 - 3k + 1 + \frac{3}{2} \times c \quad , \quad c \geq \left\lceil \frac{2}{9} (3k^2 - 3k + 1) \right\rceil \quad , \quad \text{故知}$$

$$m(H_C, k, 1) \geq \frac{1}{3} (2k^2 - 2k + 2) \circ$$

(三) $k = 3l$ 時 ($k = 3$ 、 $m(H_C, 3, 1) = 6$)：需調整角落二格塗色，得

$$6c \geq 3k^2 - 3k + 1 + \frac{3}{2} \times (c + 2 \times 2) \quad , \quad c \geq \left\lceil \frac{2}{9} ((3k^2 - 3k + 1) + 6) \right\rceil \quad , \quad \text{故知}$$

$$m(H_C, k, 1) \geq \frac{1}{3} (2k^2 - 2k + 6) \circ$$

建構具 H_C 最小塗色格子數的塗色法，得知：

$$m(H_C, k, 1) = \begin{cases} \frac{1}{3} (2k^2 - 2k + 6), & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3}, k \neq 1 \\ \frac{1}{3} (2k^2 - 2k + 2), & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$m(H_C, 1, 1) = 0$ (例外)	$m(H_C, 2, 1) = 2$	$m(H_C, 3, 1) = 6$
$m(H_C, 4, 1) = 10$	$m(H_C, 5, 1) = 14$	$m(H_C, 6, 1) = 22$
$m(H_C, 7, 1) = 30$	$m(H_C, 8, 1) = 38$	$m(H_C, 9, 1) = 50$

定理 3.11 $M(H_V, k, 5) = \begin{cases} \frac{1}{3} (7k^2 + 4k - 2), & k \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{1}{3} (7k^2 + 4k - 9), & k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \\ \frac{1}{3} (7k^2 + 4k - 6), & k \equiv 0 \pmod{3}, k \neq 3 \end{cases}$

證明 $k \geq 4$ 時，可視為鑲嵌最外一層的格子皆可塗色、鑲嵌內部格子至少與一不塗

色格子相鄰的最小不塗色格子數情況，將此問題轉換成先證明至少與一不塗色格子相鄰的最小不塗色格子問題，並利用定理 3.9 的證明結果；接著在鑲嵌外

部額外增加一層，使得問題轉換成至多與五格塗色格子相鄰的最大塗色格子數

問題：

(一) $k = 3l + 1$ 時 ($k = 1$ 、 $M(H_v, 1, 5) = 3$)：知

$$M(H_v, k, 5) \leq 3k^2 - \left(\frac{1}{3} (2(k-1)^2) \right) = \frac{1}{3} (7k^2 + 4k - 2) \circ$$

(二) $k = 3l + 2$ 時 ($k = 2$ 、 $M(H_v, 2, 5) = 10$)：知

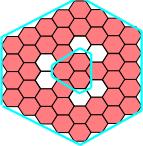
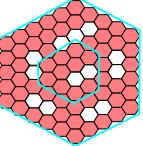
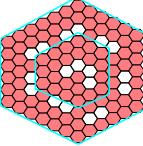
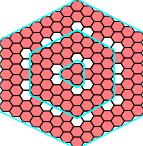
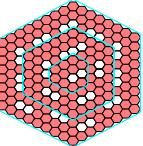
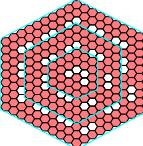
$$M(H_v, k, 5) \leq 3k^2 - \left(\frac{1}{3} (2(k-1)^2 + 7) \right) = \frac{1}{3} (7k^2 + 4k - 9) \circ$$

(三) $k = 3l$ 時 ($k = 3$ 、 $M(H_v, 3, 5) = 24$)：知

$$M(H_v, k, 5) \leq 3k^2 - \left(\frac{1}{3} (2(k-1)^2 + 4) \right) = \frac{1}{3} (7k^2 + 4k - 6) \circ$$

建構具 H_v 最大塗色格子數的塗色法，得知：

$$M(H_v, k, 5) = \begin{cases} \frac{1}{3} (7k^2 + 4k - 2), & k \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{1}{3} (7k^2 + 4k - 9), & k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \\ \frac{1}{3} (7k^2 + 4k - 6), & k \equiv 0 \pmod{3}, k \neq 3 \end{cases} \circ$$

		
$M(H_v, 1, 5) = 3$	$M(H_v, 2, 5) = 10$ (例外)	$M(H_v, 3, 5) = 24$ (例外)
		
$M(H_v, 4, 5) = 42$	$M(H_v, 5, 5) = 62$	$M(H_v, 6, 5) = 90$
		
$M(H_v, 7, 5) = 123$	$M(H_v, 8, 5) = 157$	$M(H_v, 9, 5) = 199$

定理 3.12 $M(H_C, k, 5) = \begin{cases} \frac{1}{3}(7k^2 - 3k - 7), & k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3}, k \neq 1, 2 \\ \frac{1}{3}(7k^2 - 3k - 3), & k \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$

證明 證明類似定理 3.11，先證明鑲嵌內部至少與一不塗色格子相鄰的最小不塗色格子數情況，並利用定理 3.10 的證明結果；接著在鑲嵌外部額外增加一層，使得問題轉換成至多與五格塗色格子相鄰的最大塗色格子數問題：

(一) $k = 3l + 1$ 時 ($k = 1$ 、 $M(H_C, 1, 5) = 1$)：知

$$M(H_C, k, 5) \leq (3k^2 - 3k + 1) - \left(\frac{1}{3}(2(k-1)^2 - 2(k-1) + 6) \right) = \frac{1}{3}(7k^2 - 3k - 7) \circ$$

(二) $k = 3l + 2$ 時 ($k = 2$ 、 $M(H_C, 2, 5) = 6$)：知

$$M(H_C, k, 5) \leq (3k^2 - 3k + 1) - \left(\frac{1}{3}(2(k-1)^2 - 2(k-1) + 6) \right) = \frac{1}{3}(7k^2 - 3k - 7) \circ$$

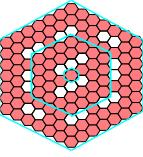
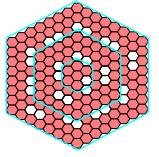
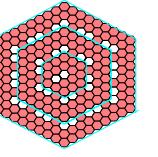
(三) $k = 3l$ 時 ($k = 3$ 、 $M(H_C, 3, 5) = 17$)：知

$$M(H_C, k, 5) \leq (3k^2 - 3k + 1) - \left(\frac{1}{3}(2(k-1)^2 - 2(k-1) + 2) \right) = \frac{1}{3}(7k^2 - 3k - 3) \circ$$

建構具 H_C 最大塗色格子數的塗色法，得知：

$$M(H_C, k, 5) = \begin{cases} \frac{1}{3}(7k^2 - 3k - 7), & k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3}, k \neq 1, 2 \\ \frac{1}{3}(7k^2 - 3k - 3), & k \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$M(H_C, 1, 5) = 1$ (例外)	$M(H_C, 2, 5) = 6$ (例外)	$M(H_C, 3, 5) = 17$
$M(H_C, 4, 5) = 31$	$M(H_C, 5, 5) = 51$	$M(H_C, 6, 5) = 77$

		
$M(H_C, 7, 5) = 105$	$M(H_C, 8, 5) = 139$	$M(H_C, 9, 5) = 179$

定理 3.13 $m(H_v, k, 2) = \begin{cases} k^2 + k, & k \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{3} \\ k^2 + k + 1, & k \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$

證明 類似定理 3.7 的證明，經分析後，採取鑲嵌內部的格子優先塗色、並以每三層為一個區塊，每區塊最外層角落的格子因與其內層的格子僅相鄰一格，故優先塗色，使賦值註記增 3，接著設鑲嵌內部共存在 c 格不塗色格子，則：

(一) $k = 3l + 1$ 時($k = 1$ 、 $m(H_v, 1, 2) = 3$)：在最內一個區塊的二層六個角落所多出的註記總和為 12、需減除 6，得 $6c \geq 2 \times 3k^2 + \left(\frac{k-1}{3} + 1\right) \times 6 \times 3 - 6$ ，知 $m(H_v, k, 2) \geq k^2 + k + 1$ 。

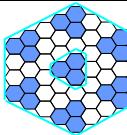
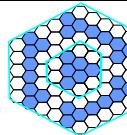
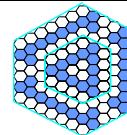
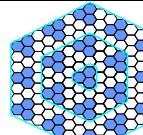
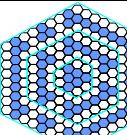
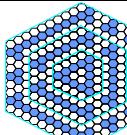
(二) $k = 3l + 2$ 時($k = 2$ 、 $m(H_v, 2, 2) = 6$)：在最內一個區塊的二層六個角落所多出的註記總和為 9、需減除 9，得 $6c \geq 2 \times 3k^2 + \left(\frac{k-2}{3} + 1\right) \times 6 \times 3 - 9$ 、
 $c \geq \left\lceil \frac{1}{6}(6k^2 + 6k - 3) \right\rceil = k^2 + k$ ，知 $m(H_v, k, 2) \geq k^2 + k$ 。

(三) $k = 3l$ 時($k = 3$ 、 $m(H_v, 3, 2) = 12$)：得 $6c \geq 2 \times 3k^2 + \frac{k}{3} \times 6 \times 3$ 、 $c \geq k^2 + k$ ，知 $m(H_v, k, 2) \geq k^2 + k$ 。

建構具 H_v 最小塗色格子數的塗色法，得知：

$$m(H_v, k, 2) = \begin{cases} k^2 + k, & k \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{3} \\ k^2 + k + 1, & k \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

		
$m(H_v, 1, 2) = 3$	$m(H_v, 2, 2) = 6$	$m(H_v, 3, 2) = 12$

		
$m(H_v, 4, 2) = 21$	$m(H_v, 5, 2) = 30$	$m(H_v, 6, 2) = 42$
		
$m(H_v, 7, 2) = 57$	$m(H_v, 8, 2) = 72$	$m(H_v, 9, 2) = 90$

定理 3.14 $m(H_C, k, 2) = \begin{cases} k^2, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ k^2 + k - 3, & k \equiv 1 \pmod{3}, k \neq 1 \\ k^2 + \frac{1}{3}(k-2), & k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \end{cases}$

證明 類似定理 3.8 的證明，設鑲嵌內部共存在 c 格不塗色格子，則：

(一) $k = 3l + 1$ 時 ($k = 1$ 、 $m(H_C, 1, 2) = 0$)：角落增加賦值註記 6、最內一個區

塊三層六個角落賦值註記總和 18，皆需減除，而正中心塗兩格賦值註記

加 10 ，故 $c \geq \frac{1}{6} \left(2 \times (3k^2 - 3k + 1) + \left(\frac{k-1}{3} \right) \times (6 \times 6) - 18 + 10 \right)$ ，知

$$m(H_C, k, 2) \geq k^2 + k - 3$$

(二) $k = 3l + 2$ 時 ($k = 2$ 、 $m(H_C, 2, 2) = 5$)：2 個角落增加賦值註記 6、4 個角

落增加賦值註記 3、最內一個區塊三層六個角落賦值註記均為 3，故需加

回 6 ，得 $c \geq \left[\frac{1}{6} \left(2 \times (3k^2 - 3k + 1) + \left(\frac{k-2}{3} \right) \times (4 \times 3 + 2 \times 6) + 6 \right) \right]$ ，知

$$m(H_C, k, 2) \geq k^2 + \frac{1}{3}(k-2)$$

(三) $k = 3l$ 時 ($k = 3$ 、 $m(H_C, 3, 2) = 9$)：最內一區塊三層的角落未利用到的賦

值註記僅有 15，故需減除 3，得 $c \geq \left[\frac{1}{6} \left(2 \times (3k^2 - 3k + 1) + \left(\frac{k}{3} \right) \times (6 \times 3) - 3 \right) \right]$ ，知

$$m(H_C, k, 2) \geq k^2$$

建構具 H_c 最小塗色格子數的塗色法，得知：

$$m(H_c, k, 2) = \begin{cases} k^2, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ k^2 + k - 3, & k \equiv 1 \pmod{3}, k \neq 1 \\ k^2 + \frac{1}{3}(k-2), & k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \end{cases}$$

$m(H_c, 1, 2) = 0$ (例外)	$m(H_c, 2, 2) = 5$ (例外)	$m(H_c, 3, 2) = 9$
$m(H_c, 4, 2) = 17$	$m(H_c, 5, 2) = 26$	$m(H_c, 6, 2) = 36$
$m(H_c, 7, 2) = 53$	$m(H_c, 8, 2) = 66$	$m(H_c, 9, 2) = 81$

研究四：探討阿基米德鑲嵌 $M(TH_{1H}, k, 1)$ 、 $M(TH_{1H}, k, 2)$ 、 $M(TSH_{1H}, k, 1)$ 、
 $M(TSH_{1H}, k, 2)$ 最大塗色格子數量， $m(TH_{1H}, k, 1)$ 、 $m(TH_{1H}, k, 2)$ 、
 $m(TSH_{1H}, k, 1)$ 、 $m(TSH_{1H}, k, 2)$ 最小塗色格子數量與其塗色方式。

定理 4.1 $M(TH_{1H}, k, 1) = \begin{cases} 2k^2 - k - 1, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2k^2 - k, & k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}$

證明

(一) 假設被塗色的格子中有 a 個是正六邊形、 b 個是正三角形。因正三角形只與正六邊形相鄰，且每個正三角形至多可與一個被塗色的正六邊形相鄰，觀察緊鄰鑲嵌最外層邊線外的正三角形格子：若最外層邊線上的正六邊形格子至多一半被塗色，則向內一層的正六邊形格子皆不可塗色，將導致向內一層的正三角形格子減少 $6(k-2)$ 賦值註記。因此，考慮鑲嵌內部賦值

註記填滿的方式，找出最大塗色格子數，得正六邊形塗色格子數

$$a \leq k^2 - k + 1.$$

1. 當 $k = 3l + 1$ 、 $k = 3l + 2$ 時：由於位在最外層邊線上的正六邊形格子與兩個緊鄰最外層邊線外的正三角形格子相鄰，且位在最外層邊線上的正三角形格子至多僅有一半可被塗色，即有 $\frac{(k-1) \times 6}{2}$ 的賦值註記未利用，

$$\text{故知 } 3b \leq (3k^2 - 3k + 1) + \frac{(k-1) \times 6}{2} \quad b \leq \left\lfloor \frac{3k^2 - 2}{3} \right\rfloor = k^2 - 1.$$

2. 當 $k = 3l$ 時：類似前述的情況，但正中心附近會至少額外少賦值註記 2，

$$\text{故知 } 3b \leq (3k^2 - 3k + 1) + \frac{(k-1) \times 6}{2} - 2 \quad b \leq \left\lfloor \frac{3k^2 - 4}{3} \right\rfloor = k^2 - 2.$$

合併對正六邊形和對正三角形格子兩者的塗色分析，得知

$$M(\text{TH1}_H, k, 1) = a + b \leq \begin{cases} 2k^2 - k - 1, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2k^2 - k, & k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}.$$

(二) 建構具 TH1_H 最大塗色格子數的塗色法，歸納得到當圖形為 k 層時，最大

可塗色的正六邊形格子數為 $k^2 - k + 1$ 、正三角形為 $k^2 - 2, k \equiv 0 \pmod{3}$ 、

$k^2 - 1, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3}$ ，故得知： $M(\text{TH1}_H, k, 1) = \begin{cases} 2k^2 - k - 1, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2k^2 - k, & k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}$ 。塗色

方式舉例如下：

$M(\text{TH1}_H, 2, 1) = 6$	$M(\text{TH1}_H, 3, 1) = 14$	$M(\text{TH1}_H, 4, 1) = 28$	$M(\text{TH1}_H, 5, 1) = 45$

定理 4.2 $M(\text{TH1}_H, k, 2) = \begin{cases} 4k^2 - 2k - 3, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 4k^2 - 2k - 1, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ 4k^2 - 2k, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$

證明

(一) 類似定理 4.1 的證明，若最外層邊線上的正六邊形格子皆被塗色，則角落及邊線上的正六邊形格子沒有用到的賦值註記總和分別為 2×6 及 $6(k - 2)$ ，且向內一層的正六邊形格子皆不可塗色，將導致向內一層的正三角形格子減少 $6 \times 2(k - 2)$ 賦值註記。因此，考慮鑲嵌內部賦值註記填滿的方式，找出最大塗色格子數，得正六邊形塗色格子數

$$a \leq \begin{cases} 2k^2 - 2k + 1, & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ 2k^2 - 2k + 2, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}.$$

1. 當 $k = 3l + 1$ 、 $k = 3l + 2$ 時：由於位在最外層邊線上的正六邊形格子與兩個緊鄰最外層邊線外的正三角形格子相鄰，且位在最外層邊線上的正三角形格子皆可被塗色，故知 $3b \leq 2(3k^2 - 3k + 1) + 6(k - 1)$ 、

$$b \leq \left\lfloor \frac{6k^2 - 4}{3} \right\rfloor = 2k^2 - 2.$$

2. 當 $k = 3l$ 時：類似前述的情況，但正中心會額外減少賦值註記 8，故知 $3b \leq 2(3k^2 - 3k + 1) + 6(k - 1) - 8$ 、 $b \leq 2k^2 - 4$ 。

合併對正六邊形和對正三角形格子兩者的塗色分析，得知

$$M(\text{TH1}_H, k, 2) = a + b \leq \begin{cases} 4k^2 - 2k - 3, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 4k^2 - 2k - 1, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ 4k^2 - 2k, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}.$$

(二) 建構具 TH1_H 最大塗色格子數的塗色法，歸納得到當圖形為 k 層時，最大

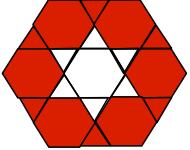
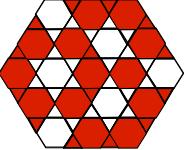
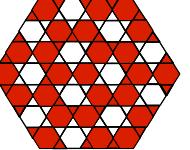
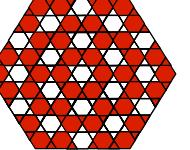
可塗色的正六邊形格子數為 $2k^2 - 2k + 1, k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3}$ 、

$2k^2 - 2k + 2, k \equiv 2 \pmod{3}$ 、正三角形格子數為 $2k^2 - 4, k \equiv 0 \pmod{3}$ 、

$2k^2 - 2, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3}$ ，故得知：

$$M(\text{TH1}_H, k, 2) = \begin{cases} 4k^2 - 2k - 3, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 4k^2 - 2k - 1, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ 4k^2 - 2k, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}.$$

塗色方式舉例如下：

			
$M(\text{TH1}_H, 2, 2) = 12$	$M(\text{TH1}_H, 3, 2) = 27$	$M(\text{TH1}_H, 4, 2) = 55$	$M(\text{TH1}_H, 5, 2) = 90$

定理 4.3 $m(\text{TH1}_H, k, 1) = \begin{cases} 2k^2 - \frac{1}{2}(k+4), & k \equiv 0 \pmod{2}, k \neq 2 \\ 2k^2 - \frac{1}{2}(k+5), & k \equiv 1 \pmod{2}, k \neq 1 \end{cases}$

證明

(一) 類似定理 4.1 的證明，若最外層邊線上的正六邊形格子至少一半被塗色，為滿足條件，考慮鑲嵌內部賦值註記填滿的方式，找出最小塗色格子數，

得正六邊形塗色格子數 $a \geq \begin{cases} k^2 + \frac{1}{2}(k-6), & k \equiv 0 \pmod{2}, k \neq 2 \\ k^2 + \frac{1}{2}(k-7), & k \equiv 1 \pmod{2}, k \neq 1 \end{cases}$ 。又因每個被塗色

的正六邊形至少與一個被塗色的正三角形相鄰，故知 $3b \geq 3k^2 - 3k + 1$ 、

$b \geq \left\lceil \frac{3k^2 - 3k + 1}{3} \right\rceil = k^2 - k + 1$ 。合併對正六邊形和對正三角形格子兩者的塗色

分析，得知 $m(\text{TH1}_H, k, 1) = a + b \geq \begin{cases} 2k^2 - \frac{1}{2}(k+4), & k \equiv 0 \pmod{2}, k \neq 2 \\ 2k^2 - \frac{1}{2}(k+5), & k \equiv 1 \pmod{2}, k \neq 1 \end{cases}$ 。

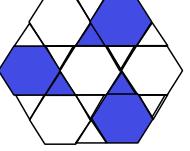
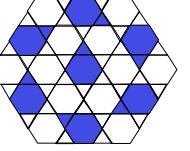
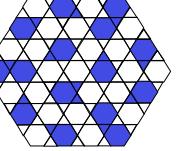
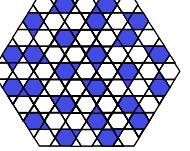
(二) 建構具 TH1_H 最小塗色格子數的塗色法，歸納得到當圖形為 k 層時，最小

可塗色的正六邊形格子數為 $k^2 + \frac{1}{2}(k-6)$, $k \equiv 0 \pmod{2}, k \neq 2$ 、

$k^2 + \frac{1}{2}(k-7)$, $k \equiv 1 \pmod{2}, k \neq 1$ 、正三角形格子數為 $k^2 - k + 1$ ，故得知：

$$m(\text{TH1}_H, k, 1) = \begin{cases} 2k^2 - \frac{1}{2}(k+4), & k \equiv 0 \pmod{2}, k \neq 2 \\ 2k^2 - \frac{1}{2}(k+5), & k \equiv 1 \pmod{2}, k \neq 1 \end{cases}$$

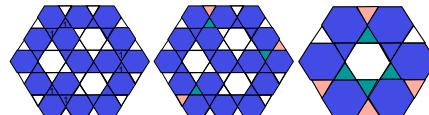
塗色方式舉例如下：

			
$m(\text{TH1}_H, 2, 1) = 6$ (例外)	$m(\text{TH1}_H, 3, 1) = 14$	$m(\text{TH1}_H, 4, 1) = 28$	$m(\text{TH1}_H, 5, 1) = 45$

定理 4.4 $m(\text{TH1}_H, k, 2) = 4k^2 - 2k$

證明

(一) 類似定理 4.1 的證明，因最外層邊線上
的正三角形格子與 2 格正六邊形格子相



鄰，故最外層邊線上的正六邊形格子皆需塗色，角落及邊線上的正六邊形
格子沒有用到的賦值註記總和分別為 2×6 及 $6(k-2)$ ，且觀察向內一層外
部的正三角形格子，因其與最外層邊線上相鄰的正六邊形格子已被塗色，
故向內一層的正六邊形格子至少需被塗色一半，賦值註記增加 $6(k-2)$ ，
故得正六邊形塗色格子數 $6a \geq 2(6k^2 - 6k) + 2 \times 6 + 6(k-2) + 6(k-2)$ 、即
 $a \geq 2k^2 - 2$ 。又因每個被塗色的正六邊形至少與二個被塗色的正三角形相鄰，
若位於最外層邊線上的正三角形格子都不塗色，則鑲嵌內部賦值註記至少
增加 3；又若讓位於最外層邊線上的正三角形格子被塗色，則未利用賦值
註記至少有 3（如圖示意，將塗綠色格子改為塗橙色格子），故知
 $3b \geq 2(3k^2 - 3k + 1) + 3$ 、即 $b \geq \left\lceil \frac{2(3k^2 - 3k + 1) + 3}{3} \right\rceil = 2k^2 - 2k + 2$ 。合併對正六
邊形和對正三角形格子兩者的塗色分析，得知
 $m(\text{TH}_H, k, 2) = a + b \geq 4k^2 - 2k$ 。

(二) 建構具 TH1_H 最小塗色格子數的塗色法，歸納得到當圖形為 k 層時，最小
可塗色的正六邊形格子數為 $2k^2 - 2$ 、正三角形格子數為 $2k^2 - 2k + 2$ ，故
得知： $m(\text{TH1}_H, k, 2) = 4k^2 - 2k$ 。塗色方式舉例如下：

$m(\text{TH1}_H, 2, 2) = 12$	$m(\text{TH1}_H, 3, 2) = 30$	$m(\text{TH1}_H, 4, 2) = 56$	$m(\text{TH1}_H, 5, 2) = 90$

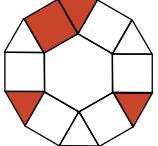
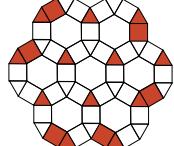
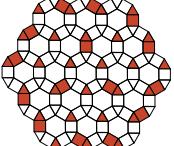
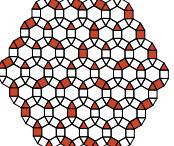
定理 4.5 $M(TSH_H, k, 1) = \frac{1}{2}(9k^2 + 3k - 6)$, $k \neq 1$

證明

(一) 欲求最大塗色格子數，須儘量不塗正六邊形格子。當 $k \geq 2$ 時，假設被塗色的格子中有 a 個是正方形、 b 個是正三角形。因正方形格子至多與一格被塗色格子相鄰，且正六邊形格子數小於正三角形格子數，正六邊形格子僅與正方形格子相鄰，正方形格子有兩邊與正六邊形格子相鄰，故最外層邊線上的正方形格子被塗色個數至多僅能塗 $6(k-1)$ 個，沒用到的賦值註記亦為 $6(k-1)$ ，得 $2a \leq 3k^2 - 3k + 1 + 6(k-1)$ 、 $a \leq \left\lfloor \frac{3k^2 + 3k - 5}{2} \right\rfloor = \frac{1}{2}(3k^2 + 3k - 6)$ 。又因正三角形僅與正方形相鄰，位於最外層邊線上的正三角形格子被塗色個數至多僅能塗 $6 + 3(k-2)$ 個，沒有用到的賦值註記總和為 $6 + 3(k-2)$ ，故得 $3b \leq 9k^2 - 3k + 6 + 3(k-2)$ 、 $b \leq 3k^2$ 。由於已無法再塗任何正六邊形格子，合併對正方形和對正三角形格子兩者的塗色分析，得知

$$M(TSH_H, k, 1) = a + b \leq \frac{1}{2}(9k^2 + 3k - 6)$$

(二) 建構具 TSH_H 最大塗色格子數的塗色法，當 $k \geq 2$ 時，歸納得到當圖形為 k 層時，最大可塗色的正方形格子數為 $\frac{1}{2}(3k^2 + 3k - 6)$ 、正三角形格子數為 $3k^2$ ，故得知： $M(TSH_H, k, 1) = \frac{1}{2}(9k^2 + 3k - 6)$ 。塗色方式舉例如下：

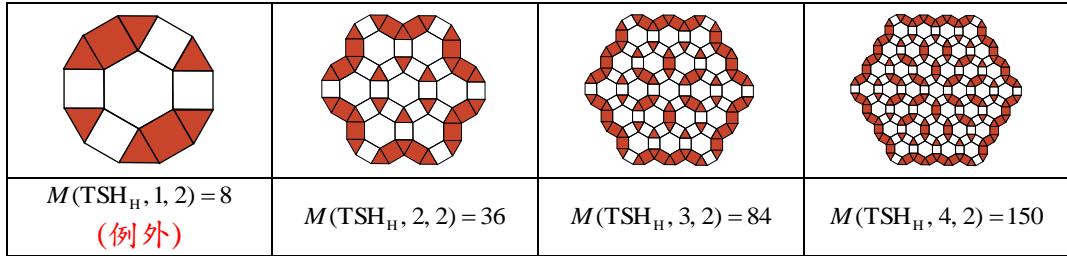
			
$M(TSH_H, 1, 1) = 4$ (例外)	$M(TSH_H, 2, 1) = 18$	$M(TSH_H, 3, 1) = 42$	$M(TSH_H, 4, 1) = 75$

定理 4.6 $M(TSH_H, k, 2) = 9k^2 + 3k - 6$, $k \neq 1$

證明

(一) 類似定理 4.5 的證明，當 $k \geq 2$ 時，因正六邊形格子至多與二格被塗色格子相鄰，最外層邊線上的正方形格子被塗色個數至多僅能塗 $6(2k-2)$ 個，沒用到的賦值註記亦為 $6(2k-2)$ ，惟此時因儘量對最外層邊線上的正方形格子塗色，造成鑲嵌正中心正六邊形格子的賦值註記減少 2，得 $2a \leq 2(3k^2 - 3k + 1) + 6(2k-2) - 2$ 、 $a \leq 3k^2 + 3k - 6$ 。又因正三角形僅與正方形相鄰，位於最外層邊線上的正三角形格子被塗色個數至多僅能塗 $2 \times 6 + 6(k-2)$ 個，故得 $3b \leq 2(9k^2 - 3k) + 2 \times 6 + 6(k-2)$ 、 $b \leq 6k^2$ 。由於已無法再塗任何正六邊形格子，合併對正方形和對正三角形格子兩者的塗色分析，得知 $M(TSH_H, k, 2) = a + b \leq 9k^2 + 3k - 6$ 。

(二) 建構具 TSH_H 最大塗色格子數的塗色法，當 $k \geq 2$ 時，歸納得到當圖形為 k 層時，最大可塗色的正方形格子數為 $3k^2 + 3k - 6$ 、正三角形格子數為 $6k^2$ ，故得知： $M(TSH_H, k, 2) = 9k^2 + 3k - 6$ 。塗色方式舉例如下：



定理 4.7 $m(TSH_H, k, 1) = \begin{cases} \frac{1}{4}(21k^2 - 6k), & k \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{4}(21k^2 - 6k + 1), & k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$

證明

(一) 欲求最小塗色格子數，須儘量塗正六邊形格子。假設被塗色的格子中有 a 個是正方形、 c 個是正六邊形。因任何一個格子至少與一塗色格子相鄰，且正三角形格子數大於正六邊形，正三角形格子僅與正方形格子相鄰，正方形格子有兩邊與正三角形相鄰，故得 $2a \geq 6k^2$ 、 $a \geq 3k^2$ 。然而，若塗色位於非最外層邊線上的任一格正六邊形格子，將導致賦值註記增加 2、位於

最外層邊線上的正六邊形格子應予塗色，每塗一格正六邊形格子，貢獻與其相鄰的正方形賦值註記 1、向內一層的正六邊形格子僅需塗色一半，又額外貢獻與向內一層塗色正六邊形相鄰的正方形賦值註記 1，故知

$$6c \geq 9k^2 - 3k + 2c - 6(k-1) + \frac{1}{2} \times 6(k-2) \quad , \quad 4c \geq 9k^2 - 6k \quad 。 \quad \text{上取整數得}$$

$$c \geq \begin{cases} \frac{1}{4}(9k^2 - 6k), & k \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{4}(9k^2 - 6k + 1), & k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad \text{由於已無法再塗任何正三角形格子，合併對正方}$$

形和對正六邊形格子兩者的塗色分析，得知

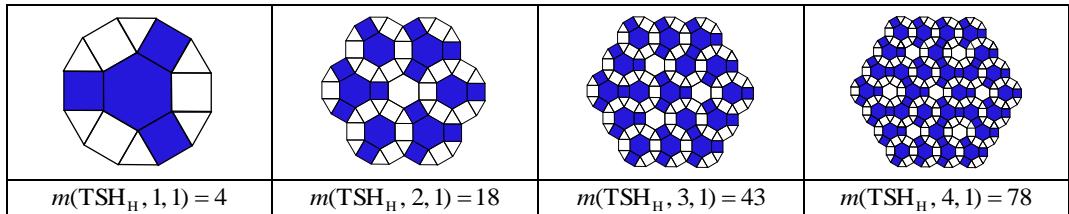
$$m(TSH_H, k, 1) = a + c \geq \begin{cases} \frac{1}{4}(21k^2 - 6k), & k \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{4}(21k^2 - 6k + 1), & k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

(二) 建構具 TSH_H 最小塗色格子數的塗色法，歸納得到當圖形為 k 層時，最小

可塗色的正方形格子數為 $3k^2$ 、正六邊形格子數為 $\frac{1}{4}(9k^2 - 6k)$, $k \equiv 0 \pmod{2}$ 、

$$\frac{1}{4}(9k^2 - 6k + 1), k \equiv 1 \pmod{2} \quad , \quad \text{故得知: } m(TSH_H, k, 1) = \begin{cases} \frac{1}{4}(21k^2 - 6k), & k \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{4}(21k^2 - 6k + 1), & k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

塗色方式舉例如下：



定理 4.8 $m(TSH_H, k, 2) = 9k^2 + 3k - 2$

證明

(一) 證明類似定理 4.7，假設被塗色的格子中有 a 個是正方形、 b 個是正三角形、 c 個是正六邊形，得 $2a \geq 2 \times 6k^2$ 、 $a \geq 6k^2$ 。此時，若正六邊形的格子全部被塗色時可提供的賦值註記為 $6(3k^2 - 3k + 1)$ ，但與其相鄰的正方形格子所需的賦值註記為 $2(9k^2 - 3k)$ 。觀察最外層邊線上的正方形塗色格子，若與其相

鄰的正六邊形格子全部被塗色仍無法滿足賦值註記的條件，則須對最外層邊線上的正三角形格子塗色，得 $c = 3k^2 - 3k + 1$ ，故知 $2b \geq 2(9k^2 - 3k) - 6(3k^2 - 3k + 1)$ 、
 $b \geq 6k - 3$ 。合併三者的塗色分析結果，得到
 $m(T_S H_2) = a + b + c \geq 9k^2 + 3k - 2$ 。

(二) 建構具 TSH_H 最小塗色格子數的塗色法，歸納得到當圖形為 k 層時，最小可塗色的正方形格子數為 $6k^2$ 、正三角形格子數為 $6k - 3$ 、正六邊形格子數為 $3k^2 - 3k + 1$ ，故得知： $m(TSH_H, k, 2) = 9k^2 + 3k - 2$ 。塗色方式舉例如下：

--	--	--	--

參、研究結果與討論

一、研究結果：

$M(P, k, x)$ 及其與 $C(P, k)$ 在 $k \rightarrow \infty$ 之比值：

x	P	$M(P, k, x)$	$C(P, k)$	q, r, k 備註	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, x)}{C(P, k)}$
1	S_v	$k^2 + k$	$4k^2$		$\frac{1}{4}$
	S_c	$k^2 - r$	$4k^2 - 4k + 1$	$r = \begin{cases} 0, & \text{若 } k = \text{奇數} \\ 1, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$	
2	S_v	$2(k^2 + k)$	$4k^2$		$\frac{1}{2}$
	S_c	$2k^2 - r$	$4k^2 - 4k + 1$	$r = \begin{cases} 1, & \text{若 } k = \text{奇數} \\ 2, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$	
3	S_v	$3k^2 + k$	$4k^2$		$\frac{3}{4}$
	S_c	$3k^2 - 2k + r$	$4k^2 - 4k + 1$	$r = \begin{cases} 1, & \text{若 } k = \text{奇數}, k \neq 1 \\ 0, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$	
1	T_v	$2k^2$	$6k^2$		$\frac{1}{3}$
	T_c	$2k^2 - 2k + 1$	$6k^2 - 6k + 1$	$k \neq 2$	
2	T_v	$4k^2$	$6k^2$	$k \geq 3$	$\frac{2}{3}$
	T_c	$4k^2 - 4k + r$	$6k^2 - 6k + 1$	$r = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3}, k \neq 3 \\ 2, & k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \end{cases}$	
1	H_v	$\frac{1}{7}(3k^2 + r)$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 1, k \equiv 0 \pmod{7} \\ 4, k \equiv 1 \text{ or } 6 \pmod{7} \\ 9, k \equiv 2 \text{ or } 5 \pmod{7} \\ 1, k \equiv 3 \text{ or } 4 \pmod{7} \end{cases}$	$\frac{1}{7}$
	H_c	$\frac{1}{7}(3k^2 - 3k + r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 7, k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{7} \\ 1, k \equiv 2 \text{ or } 6 \pmod{7} \\ 3, k \equiv 3 \text{ or } 5 \pmod{7} \\ 13, k \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$	
2	H_v	$\frac{1}{3}(3k^2 + qk + r)$	$3k^2$	$q = \begin{cases} 1, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 3, k \equiv 1 \pmod{3} \\ 2, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 3, k \equiv 1 \pmod{3} \\ -1, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $k \geq 4 \wedge k \neq 6$	$\frac{1}{3}$
	H_c	$\frac{1}{3}(3k^2 - qk + r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$q = \begin{cases} 2, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \pmod{3} \\ 2, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \pmod{3} \\ 4, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $k \geq 4 \wedge k \neq 6$	
3	H_v	$\frac{1}{2}(3k^2 + r)$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{8} \\ 3, k \equiv 1 \text{ or } 3 \text{ or } 5 \text{ or } 7 \pmod{8} \\ 2, k \equiv 2 \text{ or } 6 \pmod{8} \\ 4, k \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$ $k \geq 9$	$\frac{1}{2}$
	H_c	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 2, k \neq 3 \text{ or } 6 \pmod{8} \\ 4, k \equiv 3 \text{ or } 6 \pmod{8} \end{cases}$ $k \geq 9$	
4	H_v	$2k^2 + k + r$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ -1, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{2}{3}$

x	P	$M(P, k, x)$	$C(P, k)$	q, r, k 備註	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, x)}{C(P, k)}$
	H_c	$2k^2 - qk + r$	$3k^2 - 3k + 1$	$q = \begin{cases} \frac{4}{3}, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \pmod{3} \\ 2, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $r = \begin{cases} 1, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 0, k \equiv 1 \pmod{3} \\ 4, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $k \neq 2, 3$	
5	H_v	$\frac{1}{3}(7k^2 + 4k - r)$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 6, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2, k \equiv 1 \pmod{3} \\ 9, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $k \neq 2, 3$	$\frac{7}{9}$
	H_c	$\frac{1}{3}(7k^2 - 3k - r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 3, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 7, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}$ $k \neq 1, 2$	

$m(P, k, x)$ 及其與 $C(P, k)$ 在 $k \rightarrow \infty$ 之比值：

x	P	$m(P, k, x)$	$C(P, k)$	q, r, k 備註	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, x)}{C(P, k)}$
1	S_v	$k^2 + k$	$4k^2$		$\frac{1}{4}$
	S_c	$k^2 - r$	$4k^2 - 4k + 1$	$r = \begin{cases} 0, \text{若 } k = \text{奇數}, k \neq 1 \\ 1, \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$	
2	S_v	$2(k^2 + k)$	$4k^2$		$\frac{1}{2}$
	S_c	$2k^2 - r$	$4k^2 - 4k + 1$	$r = \begin{cases} 0, \text{若 } k = \text{奇數}, k \neq 1 \\ 1, \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$	
1	T_v	$2(k^2 + k)$	$6k^2$		$\frac{1}{3}$
	T_c	$2k^2 - r$	$6k^2 - 6k + 1$	$r = \begin{cases} 2, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3}, k \neq 1, 2 \end{cases}$	
2	T_v	$4k^2 + 2k + 2$	$6k^2$	$k \neq 1, 3$	$\frac{2}{3}$
	T_c	$4k^2 + 2k + 1$	$6k^2 - 6k + 1$	$k \neq 1, 2, 3$	
1	H_v	$\frac{1}{3}(2k^2 + r)$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 7, k \equiv 1 \pmod{3}, k \neq 1 \\ 4, k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \end{cases}$	$\frac{2}{9}$
	H_c	$\frac{1}{3}(2k^2 - 2k + r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 6, k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3}, k \neq 1 \\ 2, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$	
2	H_v	$k^2 + k + r$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{1}{3}$
	H_c	$k^2 + qk - r$	$3k^2 - 3k + 1$	$q = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 3, k \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{2}{3}, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $k \neq 1, 2$	

$TH1_H(k)$ 和 $TSH_H(k)$ 鑲嵌， $M(P, k, x)$ 及其與 $C(P, k)$ 在 $k \rightarrow \infty$ 之比值：

x	P	$M(P, k, x)$	$C(P, k)$	q, r, k 備註	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, x)}{C(P, k)}$
1	$TH1_H(k)$		$k^2 - r$	$6k^2 - 6k$	$\frac{1}{6}$
			$k^2 - k + 1$	$3k^2 - 3k + 1$	

x	P		$M(P, k, x)$	$C(P, k)$	q, r, k 備註	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, x)}{C(P, k)}$
			$2k^2 - k - q$	$9k^2 - 9k + 1$	$q = \begin{cases} 1, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 0, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{2}{9}$
2	$\text{TH1}_H(k)$		$2k^2 - r$	$6k^2 - 6k$	$r = \begin{cases} 4, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{1}{3}$
			$2k^2 - 2k + r$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 1, k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ 2, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{2}{3}$
			$4k^2 - 2k - q$	$9k^2 - 9k + 1$	$q = \begin{cases} 3, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \pmod{3} \\ 0, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{4}{9}$
1	$\text{TSH}_H(k)$		$3k^2$	$6k^2$	$k \neq 1$	$\frac{1}{2}$
			$\frac{1}{2}(3k^2 + 3k - 6)$	$9k^2 - 3k$	$k \neq 1$	$\frac{1}{6}$
			0	$3k^2 - 3k + 1$		0
			$\frac{1}{2}(9k^2 + 3k - 6)$	$18k^2 - 6k + 1$	$k \neq 1$	$\frac{1}{4}$
2	$\text{TSH}_H(k)$		$6k^2$	$6k^2$	$k \neq 1$	1
			$3k^2 + 3k - 6$	$9k^2 - 3k$	$k \neq 1$	$\frac{1}{3}$
			0	$3k^2 - 3k + 1$		0
			$9k^2 + 3k - 6$	$18k^2 - 6k + 1$	$k \neq 1$	$\frac{1}{2}$

$\text{TH1}_H(k)$ 和 $\text{TSH}_H(k)$ 鑲嵌， $m(P, k, x)$ 及其與 $C(P, k)$ 在 $k \rightarrow \infty$ 之比值：

x	P		$m(P, k, x)$	$C(P, k)$	q, r, k 備註	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, x)}{C(P, k)}$
1	$\text{TH1}_H(k)$		$k^2 - k + 1$	$6k^2 - 6k$		$\frac{1}{6}$
			$k^2 + \frac{1}{2}k - r$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} \frac{7}{2}, \text{若 } k = \text{奇數, } k \neq 1 \\ 3, \text{若 } k = \text{偶數, } k \neq 2 \end{cases}$	$\frac{1}{3}$
			$2k^2 - \frac{1}{2}(k + q)$	$9k^2 - 9k + 1$	$q = \begin{cases} 5, \text{若 } k = \text{奇數, } k \neq 1 \\ 4, \text{若 } k = \text{偶數, } k \neq 2 \end{cases}$	$\frac{2}{9}$
2	$\text{TH1}_H(k)$		$2k^2 - 2k + 2$	$6k^2 - 6k$		$\frac{1}{3}$
			$2k^2 - 2$	$3k^2 - 3k + 1$		$\frac{2}{3}$

x	P		$m(P, k, x)$	$C(P, k)$	q, r, k 備註	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, x)}{C(P, k)}$
			$4k^2 - 2k$	$9k^2 - 9k + 1$		$\frac{4}{9}$
1 TSH _H (k)			0	$6k^2$		0
			$3k^2$	$9k^2 - 3k$		$\frac{1}{3}$
			$\frac{1}{4}(9k^2 - 6k + r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 1, & \text{若 } k = \text{奇數} \\ 0, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$	$\frac{3}{4}$
			$\frac{1}{4}(21k^2 - 6k + q)$	$18k^2 - 6k + 1$	$q = \begin{cases} 1, & \text{若 } k = \text{奇數} \\ 0, & \text{若 } k = \text{偶數} \end{cases}$	$\frac{7}{24}$
2 TSH _H (k)			$6k - 3$	$6k^2$		0
			$6k^2$	$9k^2 - 3k$		$\frac{2}{3}$
			$3k^2 - 3k + 1$	$3k^2 - 3k + 1$		1
			$9k^2 + 3k - 2$	$18k^2 - 6k + 1$		$\frac{1}{2}$

二、討論：

(一) 針對不同的 $M(P, k, x)$ ，當 k 值較小時，受鑲嵌的最外層邊線效應影響，少部分無法獲得統一的數學式表示該值。從實際的塗色探討中發現，假若存在 $M(P, k, x)$ 時的塗色方式，可以使鑲嵌內部不產生賦值註記為 0 或較低塗色賦值結果，則該鑲嵌的最外層邊線效應即不存在。

(二) 在 $M(P, k, x)$ 中當鑲嵌的最外層邊線效應不存在時，從鑲嵌內部向外延展規律性的塗色方式，可得到較多塗色格子數。當最外層邊線效應存在時，從鑲嵌的最外層向內延展規律性的塗色方式，一般可以獲得比較多塗色格子數的結果。

(三) 在不同的 $M(P, k, x)$ 及 $m(P, k, x)$ 中，我們發現可以取得最大或最小塗色格子數的塗色方式並非唯一，研究中透過建構具備最大或最小塗色格

子數的歸納分析，證實最大或最小塗色格子數的最小上界數值實際存在而證得 $M(P, k, x)$ 及 $m(P, k, x)$ 。

(四) 若 P 是正 n 邊形， S_v 、 S_c ， $k \geq 3$ ； H_v 、 H_c ， $k \geq 4$ 時， $M(P, k, n-1)$ 可視為鑲嵌最外層邊線上的格子皆可塗色、鑲嵌內部的格子至少相鄰一不塗色格子的最小不塗色格子數情況，則

$M(P, k, n-1) = C(P, k) - m(P, k-1, 1)$ ，如定理 1.5 及定理 1.7、定理 1.6 及定理 1.8、定理 3.11 及定理 3.9、定理 3.12 及定理 3.10。在正三角形正則鑲嵌中，因鑲嵌每增加一層會同時增加一層邊線上及內部的格子，故沒有此現象。在 H_v 、 H_c 中 $M(P, k, n-2) = C(P, k) - m(P, k-1, 2)$ ，亦有類似的結果，如定理 3.7 及定理 3.13、定理 3.8 及定理 3.14。

(五) 當 P 是 S_v 、 S_c 、 T_v 、 T_c 、 TH_{1H} 時，有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, x)}{C(P, k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, x)}{C(P, k)}$ ；但在 H_v 、 H_c 、 TSH_H 中，則無此結果。

(六) 在正則鑲嵌中， P_v 、 P_c 分別為其以頂點為中心和以正凸多邊形為中心的鑲嵌，則有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P_v, k, x)}{C(P_v, k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P_c, k, x)}{C(P_c, k)}$ 及 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P_v, k, x)}{C(P_v, k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P_c, k, x)}{C(P_c, k)}$ ；並且，

當 P 是 S_v 、 S_c 時：

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, 1)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, 2)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, 3)}{C(P, k)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, 1)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, 2)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, 3)}{C(P, k)} = 1:2:3 \end{aligned}.$$

當 P 是 T_v 、 T_c 、 TH_{1H} 時：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, 1)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, 2)}{C(P, k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, 1)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, 2)}{C(P, k)} = 1:2.$$

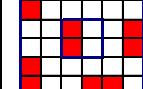
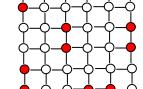
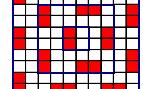
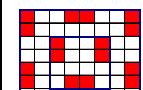
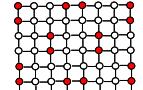
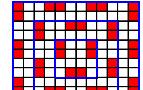
但在 H_v 、 H_c 、 TSH_H 中，則無此結果。

(七) 在 $TH1_H$ 和 TSH_H 中，因鑲嵌組成的正三角形、正方形、正六邊形邊數不同，故可巧妙利用此特性，優先對特定組成形狀的正凸多邊形進行塗色或不塗色選擇，以獲取最大或最小塗色格子數的結果，且其各自的塗色格子數佔該類型鑲嵌格子總數的極值隨 x 增加，呈現一定規律的倍數增加。

(八) 比較 $m(P, k, x)$ 與 $M(P, k, x)$ 的結果發現，對 P 是 S_v 、 T_v 、 H_v 、 S_c 、 T_c 、 H_c 、 $TH1_H$ 、 TSH_H ，當 $x=1$ 或 2 、且 $k \neq 1$ ，恒有 $m(P, k, x) \geq M(P, k, x)$ 。

一些討論及說明如下：

1. 在 $M(P, k, x)$ 中，發現塗色結果賦值註記每格均為 x 時，可得 $m(P, k, x) = M(P, k, x)$ ，且塗色方式相同，如定理 1.1 及定理 1.7、定理 1.3 及定理 1.9、定理 3.3 及定理 3.13 在 $k \equiv 1 \pmod{3}$ 的情況。以下以定理 1.1 及定理 1.7 的塗色結果為例，使用對偶圖即可觀察到這樣的現象：

				
$M(S_v, 1, 1)$ 、 $m(S_v, 1, 1)$	$M(S_v, 3, 1)$ 、 $m(S_v, 3, 1)$	$M(S_v, 5, 1)$ 、 $m(S_v, 5, 1)$		
				
$M(S_v, 2, 1)$ 、 $m(S_v, 2, 1)$	$M(S_v, 4, 1)$ 、 $m(S_v, 4, 1)$	$M(S_v, 6, 1)$ 、 $m(S_v, 6, 1)$		

2. 在 $M(P, k, x)$ 中，發現塗色結果賦值註記除一格為 $x-1$ 外、其他每格均為 x 時，可優先塗色最外層邊線上角落的格子、其次是最外層邊線上非角落的格子、再其次是鑲嵌內部的格子，可以獲得最大的塗色格子數。相反地，在 $m(P, k, x)$ 中，將前述的塗色優先順序前後對調，

所得的塗色格子數與 $M(P, k, x)$ 相同。以下以定理 1.2 及定理 1.8 在 $k \neq 1$ 的情況的塗色結果為例，使用對偶圖即可觀察到這樣的現象；另外當 k 數值較小時，一些情況僅有少數格子的賦值註記小於 x 的情況，也會獲得 $m(P, k, x) = M(P, k, x)$ 的結果，例如：

$$m(T_C, 2, 1) = M(T_C, 2, 1) \quad , \quad m(H_V, 2, 1) = M(H_V, 2, 1) \quad , \\ m(H_V, 2, 2) = M(H_V, 2, 2) \quad , \quad m(H_V, 3, 2) = M(H_V, 3, 2) \quad , \\ m(H_C, 3, 2) = M(H_C, 3, 2) \circ .$$

 $M(S_C, 1, 1)$	 $M(S_C, 3, 1)$	 $M(S_C, 5, 1)$
 $m(S_C, 1, 1)$ (例外)	 $m(S_C, 3, 1)$	 $m(S_C, 5, 1)$
 $M(S_C, 2, 1)$	 $M(S_C, 4, 1)$	 $M(S_C, 6, 1)$
 $m(S_C, 2, 1)$	 $m(S_C, 4, 1)$	 $m(S_C, 6, 1)$
 $M(T_C, 2, 1)$	 $m(T_C, 2, 1)$	 $M(H_V, 2, 1)$
 $m(H_V, 2, 1)$		

3. 在 $M(P, k, x)$ 中，發現塗色結果賦值註記若有一格賦值註記少 2 或多格賦值註記小於 x 時，可得 $m(P, k, x) \geq M(P, k, x), k \neq 1$ 。以定理 1.4 及定理 1.10 的塗色結果為例：當 k 為奇數時，可發現除鑲嵌的正中心一格賦值註記為 0 外，其餘每格均為 2；當 k 為偶數時，可發現除鑲嵌的第二層四個角落的格子賦值註記為 1 外，其餘每格均為 2。由對偶圖可觀察到 $m(S_C, k, 2) = M(S_C, k, 2) + 1, k \neq 1$ ：

$M(S_C, 1, 2)$	$M(S_C, 3, 2)$	$M(S_C, 5, 2)$	
$m(S_C, 1, 2)$ (例外)	$m(S_C, 3, 2)$	$m(S_C, 5, 2)$	
$M(S_C, 2, 2)$	$M(S_C, 4, 2)$	$M(S_C, 6, 2)$	
$m(S_C, 2, 2)$	$m(S_C, 4, 2)$	$m(S_C, 6, 2)$	

(九) 在 $M(H_V, k, 1)$ 、 $M(H_C, k, 1)$ 與 $M(H_V, k, 3)$ 、 $M(H_C, k, 3)$ 中，因塗色的重複性規律受限幾何形狀影響，並不是以想像中的每 3 層為一個週期出現，而是分別以 7 和 8 出現。

(十) 有趣的現象，在 $M(H_V, k, 1)$ 、 $k > 7$ 時，若取連續每 7 個值的和形成一

個數列，則此數列：

$$f(0) = 379, f(1) = 988, f(2) = 1891, f(3) = 3088, f(4) = 4579, \dots ; \text{同理，}$$

在 $M(H_C, k, 1)$ 、 $k > 7$ 時，若取連續每 7 個值的和形成一個數列，則此

$$\text{數列：} f(0) = 347, f(1) = 935, f(2) = 1817, f(3) = 2993, f(4) = 4463, \dots ;$$

兩者皆可寫成 $g(l) = f(l) - f(l-1)$, $h(l+1) = g(l+1) - g(l) \equiv 294, l \in \mathbb{N}$ 。

類似的現象整理如下表：

$M(P, k, x)$	k	計算週期	$f(0) = C_1$	$f(1) = C_2$	$h(l) = C_3$
$M(S_V, k, 1)$	≥ 1	4	40	200	128
$M(S_C, k, 1)$	≥ 1	4	28	172	128
$M(S_V, k, 2)$	≥ 1	4	80	400	256
$M(S_C, k, 2)$	≥ 1	4	54	342	256

$M(P, k, x)$	k	計算週期	$f(0) = C_1$	$f(1) = C_2$	$h(l) = C_3$
$M(S_v, k, 3)$	>4	4	548	1380	384
$M(S_c, k, 3)$	>4	4	472	1256	384
$M(T_v, k, 1)$	>3	3	154	388	108
$M(T_c, k, 1)$	>3	3	127	343	108
$M(T_v, k, 2)$	>3	3	308	776	216
$M(T_c, k, 2)$	>3	3	252	684	216
$M(H_v, k, 1)$	>7	7	379	988	294
$M(H_c, k, 1)$	>7	7	347	935	294
$M(H_v, k, 2)$	>6	3	210	387	54
$M(H_c, k, 2)$	>6	3	182	348	54
$M(H_v, k, 3)$	>8	8	1948	5116	1536
$M(H_c, k, 3)$	>8	8	1798	4870	1536
$M(H_v, k, 4)$	>3	3	168	411	108
$M(H_c, k, 4)$	>3	3	137	358	108
$M(H_v, k, 5)$	>3	3	194	479	126
$M(H_c, k, 5)$	>3	3	159	423	126

值得注意：當鑲嵌的最外層邊線效應消失時，表中的數學規律即形成；且，如果計算的週期相同，在同一類型的鑲嵌中，不同的 x ， h 呈現等差的變化。類似的現象也出現在 $m(P, k, x)$ 中。

肆、應用與展望

一、應用：

- (一) 貼磚或印染鑲嵌基本圖案設計^[1,5,11]：本研究的塗色規則與塗色結果，顯示了一定的對稱性、重複性與均勻性，塗色格子的分布與比值可讓我們容易估計及控制對特定高單價組成圖案的使用數量，有效率管控成本及獲得具均勻性美感的鑲嵌基本圖案設計構想。
- (二) LED 點燈益智遊戲設計^[3]：依據本研究設定的規則，類似「踩地雷電腦遊戲」，我們可以設計讓玩家在不同鑲嵌圖形的格子中任意按取一格點燈(即塗色)，接著依據規則按取允許點燈的格子，以符合規則的方式繼續按取點燈，直至不能再按取點燈為止，此時由點燈獲得最多或最少格子者為優勝的 LED 點燈益智遊戲。
- (三) 供給-需求組合配置最佳化：我們將公共設施或需求分配的提供者當成供給點，有一定數量的居民集中點或消費點當成需求點，再用通過需求點和供給點之間的分配，所建構區隔兩者、互相緊鄰(緊密鑲嵌)的區間、界線建立區域界線模型。供給點和需求點間如果可表示成由一條邊線直接相連的兩端點，即可被視為是相鄰的，此時即可套用本研究的鑲嵌塗色模型轉換成供給—需求組合配置的最佳化數學模型，並利用本研究結果取代傳統使用複雜的矩陣約簡法或應用線性編程演算法獲得最佳化的解答，求解供給—需求組合配置最佳化問題。
- (四) LED 廣告面板或色差的控制與調整：在廣告設計中或視訊裝置的色差控制與調整中，除了需要美麗、吸引人的圖案外，不同的色差變化的控制與調整也是成功的很重要因素。在 RGB 三元色中，假設 RGB 每一種發光源的亮度不同(類似鑲嵌圖形不同基本組成的正凸多邊形格子面積不

同)，我們可利用對鑲嵌圖形不同基本組成的正凸多邊形格子被均勻塗色的比率變化控制圖案的色差，獲取絢麗的變化效果。

二、未來展望：

- (一) 本研究針對阿基米德鑲嵌目前僅試探討 TH_{1H} 和 TSH_{1H} 在 $x=1$ 或 2 的四個情況，由初步的探討結果發現，可以先對組成該鑲嵌的基本圖形相鄰情況與邊數的特性進行分析，接著控制組成阿基米德鑲嵌不同種類正凸多邊形格子的優先塗色順序，個別找出對該種類正凸多邊形格子的塗色最小上界或是最大下界數值，然後才合併計算全部的塗色格子數。類似這樣的探討方式，預期能適用到其他的阿基米德鑲嵌塗色問題探討，並加以求解。
- (二) 本研究結果發現：獲得最大或最小塗色格子數的塗色方式並非唯一，在 $k \rightarrow \infty$ 時，隱約覺察存在一定塗色方法數的限制，因此探討究竟存在多少種塗色方式可以獲得最大或最小塗色格子數的解答，也是本研究可以延伸討論的一個方向。
- (三) 本研究目前尚未納入在鑲嵌圖形中不同種類正凸多邊形的面積大小對塗色面積比率的效應影響，單純就塗色格子數進行比較，未來也可以進一步考慮獲得最大或最小塗色面積的格子數問題探討。
- (四) 本研究目前僅局限在使用賦值法、一元二次不等式、數列與級數、極限、二次函數等基本數學技巧求解，進一步探討為何會獲得類似本研究的結果，其實也令人深感好奇，期望能運用離散數學或組合數學的一些進階工具輔助分析並尋求解答^[4]。

伍、參考文獻

1. 李建緯(2005 年)。科學與藝術的結合：伊斯蘭建築裝飾。暨南大學電子報，第 32 期。
2. 南非數學奧林匹亞競賽(2013 年)。第三輪競賽，試題五。
3. 張華城(CHANG, HUA CHENG)、吳炯德(WU, JIONG DE)、涂明弘(TU, MING HUNG)。互動式點燈遊戲裝置。南台科技大學(2007 年)。中華民國新型專利(證號：M327732，專利消滅：2011 年 3 月 1 日，消滅原因：未依限繳費)。
4. 張淑珠編著。離散數學。高立出版社(2005 年)。ISBN 986-412-277-0 〈平裝〉。
5. 張瑜軒。群論應用於艾雪鑲嵌藝術之對稱構成研究：以多媒體創作為例。中原大學碩士論文(2002 年)。
6. 國際數學奧林匹亞競賽(1999 年)。試題 A3。
7. 馮躍峰。數學奧林匹克小叢書—高中卷(第 16 冊)。華東師範大學出版社(2005 年)。取自：組合極值・論證與構造，第七章、例 7、第 40~41 頁。
8. 澳洲數學競賽。九章數學教育基金會(2011 年)。取自：中學中級卷、高級卷第 30 題，試題及解答中文版。
9. Hans F. Bauch (2010). Magic Hexagons in Regular Tilings – Recent Developments, 2010 magic 221110.nb, pp.1-16.
10. http://en.wikipedia.org/wiki/Tiling_by_regular_polygons#Archimedean.2C_uniform_or_semiregular_tilings.
11. http://euler.slu.edu/escher/index.php/Tessellations_by_Polygons#Tessellations_by_Convex_Polygons

Introduction

As for the exercise problem obtained from Question 30 in Intermediate Division and Senior Division, Australian Mathematics Competition 2011^[1], it requires to solve the question:

A 40×40 white square is divided into 1×1 squares by lines parallel to its sides. Some of these 1×1 squares are colored red so that each of the 1×1 squares, regardless of whether it is colored red or not, shares a side with at most one red square (not counting itself). What is the largest possible number of red squares?

A similar problem was also found in Question A3 in International Mathematics Olympiad 1999^[9], edited and published in Feng, Yueh-Feng (2005), the High School Mathematical Olympiad Small Series Vol. 16 -- Combination of extreme, Demonstration and construction, 1st Ed., East China Normal University Press^[5].

Recently, an analogous problem was presented on Question 5, Third Round, Senior Division, The South African Mathematical Olympiad 2013^[11]:

Some coins are placed on a 20×13 -board. Two coins are called neighbors if they are in the same row or column and no other coins between them. What is the largest number of coins that can be placed on the board if no coin is allowed to have more than two neighbors?

Problems related to regular polygon tessellations had been widely discussed and studied. Many real-life engineering applications could be found in references^[6,7,8].

The exploration processes caught my interest and I want to use the basic

techniques and skills learned from high school mathematics to solve the above problems.

In this study, the maximum number of colored cells for square, equilateral triangle, regular hexagon, and several kinds of Archimedean tessellations under the constraints that each adjacent cell would have at most x cells been colored will be investigated. Similar cases will also be studied to find out the minimum number of colored cells under the constraints that each adjacent cell would have at least x cells been colored. Further extension about coloring problems with different constraints of regular polygon tessellations will be discussed in advance.

Definition and Notations

1. Definition

(1) Tessellation

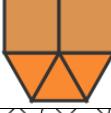
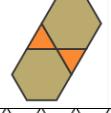
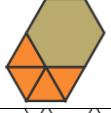
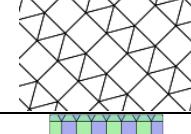
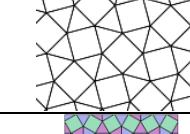
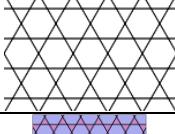
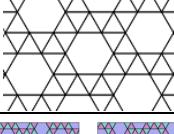
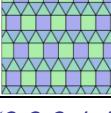
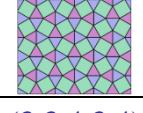
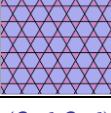
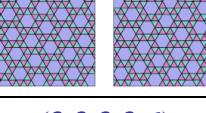
A tessellation is the tiling of a plane using one or more geometric shapes, called tiles, with no overlaps and no gaps.

(2) Regular Tessellation

Regular Tessellation is a pattern made by repeating a regular polygon. There are only three regular tessellations using exactly one kind of identical regular polygons arranged edge-to-edge. It is composed of the square, equilateral triangle, and a regular hexagon. All of the tessellations are made up of regular polygons which are all of the same type.

(3) Semi-regular Tessellation

Semi-regular tessellations are made by using two or more regular shapes. The vertex arrangement is the same throughout the entire pattern. A semi-regular tessellation is also known as an Archimedean tessellation. There are only eight semi-regular tessellations (or nine if the mirror-image pair of tessellations counts as two)^[7, 8].

			
			
			
(3,3,3,4,4)	(3,3,4,3,4)	(3,6,3,6)	(3,3,3,3,6)

(4,8,8)	(3,12,12)	(3,4,6,4)	(4,6,12)

(4) Vertex-centred Regular Tessellation

A vertex is the point of intersection of the polygons in tessellation. A vertex-centred regular tessellation is a vertex as the center to form a regular tessellation.

(5) Polygon-centred Regular Tessellation

A polygon-centred regular tessellation is a polygon as the center to form a regular tessellation.

2. Notations

(1) $T_v(k)$, $S_v(k)$, and $H_v(k)$:

$T_v(k)$ is a vertex-centred regular tessellation which is made up of equilateral triangles and is with k^{th} order. Similarly, $S_v(k)$ and $H_v(k)$ are made up of squares and regular hexagons, respectively.

The described figures are $T_v(k)$, $S_v(k)$, and $H_v(k)$ at $k = 1, 2$:

$T_v(1)$	$S_v(1)$	$H_v(1)$
$T_v(2)$	$S_v(2)$	$H_v(2)$

(2) $\mathbf{T}_c(k)$, $\mathbf{S}_c(k)$, and $\mathbf{H}_c(k)$:

$\mathbf{T}_c(k)$ is a polygon-centred regular tessellation which is made up of equilateral triangles and is with k^{th} order. Similarly, $\mathbf{S}_c(k)$ and $\mathbf{H}_c(k)$ are made up of squares and regular hexagons, respectively.

The described figures are $\mathbf{T}_c(k)$, $\mathbf{S}_c(k)$, and $\mathbf{H}_c(k)$ at $k = 1, 2, 3$:

$\mathbf{T}_c(1)$	$\mathbf{S}_c(1)$	$\mathbf{H}_c(1)$
$\mathbf{T}_c(2)$	$\mathbf{S}_c(2)$	$\mathbf{H}_c(2)$
$\mathbf{T}_c(3)$	$\mathbf{S}_c(3)$	$\mathbf{H}_c(3)$

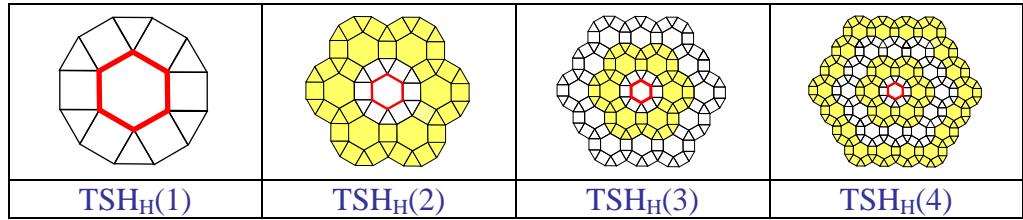
(3) $\mathbf{TH1}_H(k)$ and $\mathbf{TSH}_H(k)$:

$\mathbf{TH1}_H(k)$ is a hexagon-centred Archimedean tessellation which is a trihexagonal tiling made up of equilateral triangles and regular hexagons and is with k^{th} order.

$\mathbf{TSH}_H(k)$ is a hexagon-centred Archimedean tessellation which is a rhombitrihexagonal tiling made up of equilateral triangles, squares, and regular hexagons and is with k^{th} order.

The described figures are $\mathbf{TH1}_H(k)$ and $\mathbf{TSH}_H(k)$ at $k = 1, 2, 3, 4$:

$\mathbf{TH1}_H(1)$	$\mathbf{TH1}_H(2)$	$\mathbf{TH1}_H(3)$	$\mathbf{TH1}_H(4)$



(4) $M(P, k, x)$:

$M(P, k, x)$ is the maximum number of colored cells for a k^{th} order P -type regular tessellation or an Archimedean tessellation under the constraints that each adjacent cell would have at most x cells been colored.

(5) $m(P, k, x)$:

$m(P, k, x)$ is the minimum number of colored cells for a k^{th} order P -type regular tessellation or an Archimedean tessellation under the constraints that each adjacent cell would have at least x cells been colored.

(6) $C(P, k)$:

$m(P, k, x)$ is the total number of cells a k^{th} order P -type regular tessellation or an Archimedean tessellation.

Research Methods and Processes

Suppose that any cell is colored, it may affect the coloring condition of adjacent cells in a tessellation. For the problems described above, whether these adjacent cells can be colored or not is dependent on the previously colored cell. By using the differences of the side numbers, edges, and vertices between an equilateral triangle, square, and a regular hexagon, the colored cells are located on the corners, on the outermost layer, and in the interior layers of a tessellation. This will have difference effects on changing the coloring condition of adjacent cells.

The mathematical deduction method is used first to make a trial run. The coloring results can be observed and the coloring analyses can be performed. The whole procedures and methodologies for solving the described problems are demonstrated as

Figure 1.

Second, solving the minimum upper bound (or the maximum lower bound) of the colored cells, the methods of valuation and inequality analysis are adopted. It can be fully solved by using the differences and restrictions in sharing edges of colored cells which located on the corners, on the outermost layer, and in the interior layers of a tessellation.

After that, the maximum (or the minimum) number of colored cells can be calculated from the construction of different coloring results. The existence of the maximum (or the minimum) number of colored cells and coloring results can be further proved by using the mathematical induction.

Finally, if the results showed that it is the same as the minimum upper bound (or the maximum lower bound) obtained from the previously analyses, the proof is

completed for a specific tessellation. Therefore, with such procedures and methods, we can completely solve the specified coloring problems above.

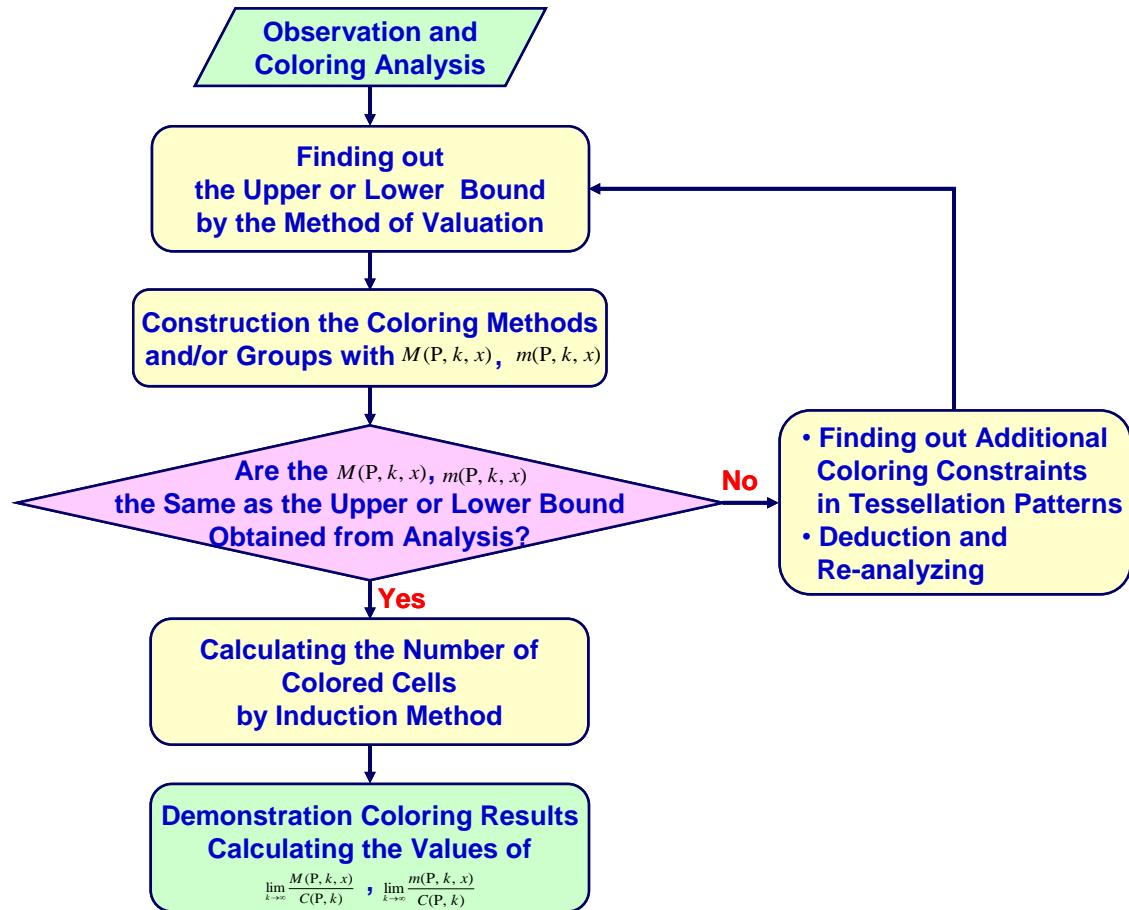


Figure 1. Procedures and methodologies for solving the described problems.

According to the above description, some representative studies of this research were selected. The proofs are demonstrated and given in this section.

Theorem 1.1 $M(S_v, k, 1) = k^2 + k$

Proof:

(1) To find out the minimum upper bound of colored cells:

Suppose that there are “ a ” colored cells located on the corners, “ b ” colored cells located on the non-corner outermost layer, and “ c ” colored cells located in the interior layers of a tessellation. The total shared edges of colored

cells are $2a + 3b + 4c$. The colored cells located on the corners and on the non-corner outermost layer of a tessellation are $2a + 2b$ because these cells have a shared edge within two cells.

The colored cells number satisfies the relation

$$2a + 3b + 4c \leq 4k^2 \quad (1)$$

$$2a + 2b \leq 4(2k - 1), \text{ 即 } a + b \leq 2(2k - 1) \quad (2)$$

With mathematical deduction, it is obviously that two corners are allowed to be colored at most. That is

$$a \leq 2 \quad (3)$$

Combine equation (1), equation (2), and equation (3), one has

$$a + b + c \leq k^2 + k. \text{ This implies that } M(S_v, k, 1) \leq k^2 + k.$$

- (2) To prove the existence of the maximum number of colored cells and coloring results:

Based on the induction method, it is constructed that a coloring with the maximum number of colored cells. The result showed that the number is the same as that obtained from the analysis. A coloring result is given as follow:

$M(S_v, 1, 1) = 1^2 + 1 = 2$	$M(S_v, 3, 1) = 3^2 + 3 = 12$	$M(S_v, 5, 1) = 5^2 + 5 = 30$
$M(S_v, 2, 1) = 2^2 + 2 = 6$	$M(S_v, 4, 1) = 4^2 + 4 = 20$	$M(S_v, 6, 1) = 6^2 + 6 = 42$

- (a) When k is odd, except $M(S_v, 1, 1) = 2$, the number of colored cells can be expressed as

$$\begin{aligned} 2 + \sum_{h=1}^l \left(\frac{(4h+2) \times 4 - 4}{4} \right) \times 2 &= 2 + \sum_{h=1}^l [2(4h+1)] \\ &= \frac{8(1+l) \times l}{2} + 2l + 2 = (2l+1)^2 + (2l+1) = k^2 + k \end{aligned}$$

- (b) When k is even, the number of colored cells are satisfied

$$\sum_{h=1}^l \left(\frac{4h \times 4 - 4}{4} \right) \times 2 = \sum_{h=1}^l 2(4h-1) = \frac{8(1+l) \times l}{2} - 2l = 4l^2 + 2l = k^2 + k$$

Whether k is odd or even, the foregoing derivation results show that the number of colored cells is the same as the upper bound obtained from the analysis. Therefore, $M(S_v, k, 1) = k^2 + k$. And, simultaneously, the existence of the maximum number of colored cells is well-proved based on the coloring result given above.

Theorem 1.9 $m(S_v, k, 2) = 2(k^2 + k)$

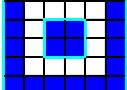
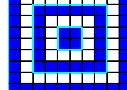
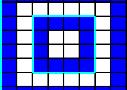
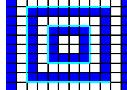
Proof:

Similar to the proof of **Theorem 1.1**, the total sum of colored cells is $2a + 3b + 4c$. There are $4(2k-1)$ colored cells located on the corners and non-corner outermost layer of the tessellation. If these cells are not colored, the adjacent cells located in the inner layer of them have to be colored, and it will lead to an increase of the sum of the valuation. Therefore,

$$2a + 3b + 4c \geq 2(2k)^2 + 2(4-a) + (8k-8-b), \text{ and}$$

$$m(S_v, k, 2) = a + b + c \geq 2(k^2 + k).$$

After that, the existence of the minimum number of colored cells is proved by coloring results and induction method. The minimum number of colored cells satisfies $m(S_V, k, 2) = 2(k^2 + k)$. A coloring result is shown as follow:

		
$m(S_V, 1, 2) = 4$	$m(S_V, 3, 2) = 24$	$m(S_V, 5, 2) = 60$
		
$m(S_V, 2, 2) = 12$	$m(S_V, 4, 2) = 40$	$m(S_V, 6, 2) = 84$

Theorem 2.1 $M(T_V, k, 1) = 2k^2$

Proof:

Suppose that there are “ b ” colored cells located on the outermost layer of a tessellation, and “ c ” colored cells located in the interior layers of a tessellation. The sum of the valuation of the adjacent cells is $2b + 3c$.

Based on the mathematical deduction and analysis of coloring results, it shows that, for the cases of $k \geq 3$, the result of the number of cells with zero valuation will be at least the same as b , i.e., the colored cells located on the outermost layer of a tessellation. Thus, $2b + 3c \leq 6k^2 - b$. It can be found that

$$M(T_V, k, 1) = b + c \leq 2k^2.$$

The existence of the maximum number of colored cells and coloring results can be proved by constructing a coloring with the maximum number of colored cells. Mathematical induction results show that $M(T_V, k, 1) = 2k^2$ when $k \geq 3$.

In addition, $M(T_V, 1, 1) = 2$ and $M(T_V, 2, 1) = 8$ are trivial.

$M(T_v, 1, 1) = 2$	$M(T_v, 2, 1) = 8$	$M(T_v, 3, 1) = 18$
$M(T_v, 4, 1) = 32$	$M(T_v, 5, 1) = 50$	$M(T_v, 6, 1) = 72$

Theorem 2.5 $m(T_v, k, 1) = 2(k^2 + k)$

Proof:

According to the results of **Theorem 2.1**, the valuation result for the cells located in the interior layers of a tessellation is one. The outermost layer of a tessellation will appear $2k$ color cells when the order of a tessellation is k . It will lead to $2k$ cells which have a zero valuation. The adjacent cells of them shall be colored, so $m(T_v, k, 1) \geq 2(k^2 + k)$.

Similarly, the existence of the minimum number of colored cells is proved by coloring results and induction method. The minimum number of colored cells satisfies $m(T_v, k, 1) = 2(k^2 + k)$. A coloring result is shown as follow:

$m(T_v, 1, 1) = 4$	$m(T_v, 2, 1) = 12$	$m(T_v, 3, 1) = 24$
$m(T_v, 4, 1) = 40$	$m(T_v, 5, 1) = 60$	$m(T_v, 6, 1) = 84$

Theorem 3.7 $M(H_v, k, 4) = \begin{cases} 2k^2 + k, & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ 2k^2 + k - 1, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$

Proof:

It can be divided every three layers to a block to solve this problem when $k \geq 4$. With the deduction analysis, it is known that the cells located on the outermost layer of each block can be colored. The cells located in the interior layers of each block and located on the corners of each block shall at least with two adjacent cells be not colored. And, the cells located on the second layer inward from the outermost layer of each block will increase uncolored cells to obtain an additional valuation results with three. This coloring adjustment on the innermost one block is not applicable.

Suppose that there are “ c ” uncolored cells located in the interior layers of a tessellation, it will be

(1) $k = 3l + 1$: Except that $M(H_v, 1, 4) = 3$ is trivial, one gets
 $6c \geq 2 \times 3(k-1)^2 + \left(\frac{k-1}{3}\right) \times 6 \times 3$, then $c \geq k^2 - k$. This implies

$$M(H_v, k, 4) \leq 3k^2 - (k^2 - k) = 2k^2 + k.$$

(2) $k = 3l + 2$: Similarly, $M(H_v, 2, 4) = 9$ is trivial. Six cells located on the corners of the innermost two layers can be colored. It will increase an additional valuation results with twelve. Comparing with the valuation results of outer blocks of the tessellation, it shall be minus six for adjustment in order to realize the coloring. So, one gets $6c \geq 2 \times 3(k-1)^2 + \left(\frac{k-2}{3} + 1\right) \times 6 \times 3 - 6$.

That is $c \geq k^2 - k + 1$. Therefore,

$$M(H_v, k, 4) \leq 3k^2 - (k^2 - k + 1) = 2k^2 + k - 1.$$

(3) $k = 3l$: $M(H_v, 3, 4) = 21$ is trivial. It is similar to the case in $k = 3l + 2$. The

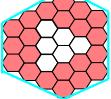
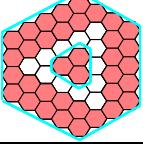
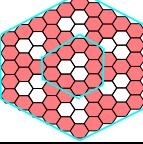
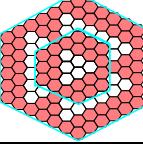
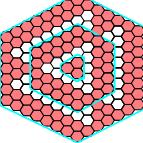
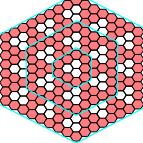
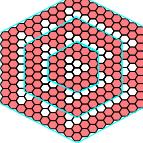
cells located on the six corners of the innermost two layers will lead to an increase in valuation. It shall be adjusted. In this case, the result of an additional valuation should be increased to nine and has to be minus totally.

$$\text{Hence, } 6c \geq 2 \times 3(k-1)^2 + \frac{k}{3} \times 6 \times 3 - 9 \quad \text{and} \quad c \geq \left\lceil k^2 - k - \frac{1}{2} \right\rceil = k^2 - k .$$

So,

$$M(H_v, k, 4) \leq 3k^2 - (k^2 - k) = 2k^2 + k .$$

With the induction method and realization the coloring, one can easily find that $M(H_v, k, 4) = \begin{cases} 2k^2 + k, & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ 2k^2 + k - 1, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$. A coloring result is shown as follow:

		
$M(H_v, 1, 4) = 3$	$M(H_v, 2, 4) = 9$	$M(H_v, 3, 4) = 21$
		
$M(H_v, 4, 4) = 36$	$M(H_v, 5, 4) = 54$	$M(H_v, 6, 4) = 78$
		
$M(H_v, 7, 4) = 105$	$M(H_v, 8, 4) = 135$	$M(H_v, 9, 4) = 171$

Theorem 3.13 $m(H_v, k, 2) = \begin{cases} k^2 + k, & k \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{3} \\ k^2 + k + 1, & k \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$

Proof:

Similar to the proof of **Theorem 3.7**, it can be divided every three layers to a block to solve this problem. In this case, the cells located in the interior layers of a

tessellation, owing to only one cell in the inner layer being adjacent with them, will have the priority to be colored. With the deduction analysis, it is known that the cells located on the corners of each block shall be colored first, and this will lead to an increase in valuation with three.

Suppose that there are “ c ” uncolored cells located in the interior layers of a tessellation, then

(1) $k = 3l + 1$: $m(H_v, 1, 2) = 3$ is trivial. The cells located on the six corners of the innermost two layers will lead to an increase in valuation. It shall be adjusted. In this case, the result of an additional valuation should be increased to twelve and has to be minus six.

$$\text{Hence, } 6c \geq 2 \times 3k^2 + \left(\frac{k-1}{3} + 1 \right) \times 6 \times 3 - 6. \text{ So, } m(H_v, k, 2) \geq k^2 + k + 1.$$

(2) $k = 3l + 2$: $m(H_v, 2, 2) = 6$ is trivial. It is similar to the case in $k = 3l + 1$.

The result of an additional valuation should be increased to nine and has to be minus totally. Hence, $6c \geq 2 \times 3k^2 + \left(\frac{k-2}{3} + 1 \right) \times 6 \times 3 - 9$. That is

$$c \geq \left\lceil \frac{1}{6} (6k^2 + 6k - 3) \right\rceil = k^2 + k.$$

This implies $m(H_v, k, 2) \geq k^2 + k$

(3) $k = 3l + 2$: It is easy to find that $m(H_v, 3, 2) = 12$, and

$$6c \geq 2 \times 3k^2 + \frac{k}{3} \times 6 \times 3. \text{ So, } c \geq k^2 + k \text{ and } m(H_v, k, 2) \geq k^2 + k.$$

With the induction method and realization the coloring, one can easily find

that $m(H_V, k, 2) = \begin{cases} k^2 + k, & k \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{3} \\ k^2 + k + 1, & k \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$. A coloring result is shown

as follow:

$m(H_V, 1, 2) = 3$	$m(H_V, 2, 2) = 6$	$m(H_V, 3, 2) = 12$
$m(H_V, 4, 2) = 21$	$m(H_V, 5, 2) = 30$	$m(H_V, 6, 2) = 42$
$m(H_V, 7, 2) = 57$	$m(H_V, 8, 2) = 72$	$m(H_V, 9, 2) = 90$

Theorem 4.1 $M(TH1_H, k, 1) = \begin{cases} 2k^2 - k - 1, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2k^2 - k, & k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}$

Proof:

Let the colored cells be “ a ” of regular hexagons and “ b ” of equilateral triangles. In this tessellation, each triangle is adjacent with hexagons only, and is up to an adjacent hexagon of coloring.

Observed closely to the outer edge of the outermost layer of triangle cells, it can easily to obtain that if the hexagonal cells on the outermost layer are at most half of them been colored, then the hexagonal cells on the inner layer and those next to the triangle cells can not be colored. This will result in the decrease in valuation with $6(k - 2)$.

Therefore, considering a coloring way to fully utilize the possible valuation in the interior layer of this tessellation and to find out the maximum number of

colored cells, it gets the upper bound of colored cells satisfies $a \leq k^2 - k + 1$ for hexagons.

Next, we try to find out the upper bound of colored cells for triangles.

(1) $k = 3l + 1$ and $k = 3l + 2$: Observe that every hexagonal cell on the outermost layer is adjacent to two triangle cells on the outer edge of the outermost layer. Half and no more than half of the triangle cells have been colored, hence, the sum of un-used valuation will be $\frac{(k-1) \times 6}{2}$. That is,

$$3b \leq (3k^2 - 3k + 1) + \frac{(k-1) \times 6}{2} \text{ and it gets } b \leq \left\lfloor \frac{3k^2 - 2}{3} \right\rfloor = k^2 - 1.$$

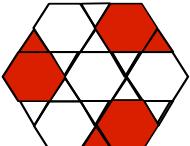
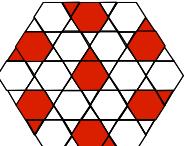
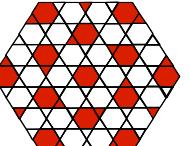
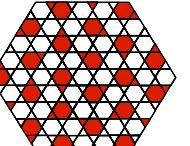
(2) $k = 3l$: Similar to the previous case, however the valuation near the center of the tessellation will be at least decreased by two, so, it is known

$$3b \leq (3k^2 - 3k + 1) + \frac{(k-1) \times 6}{2} - 2 \text{ and } b \leq \left\lfloor \frac{3k^2 - 4}{3} \right\rfloor = k^2 - 2.$$

Combining both of the above coloring analyses for hexagonal and triangle cells, it obtains that $M(\text{TH1}_H, k, 1) = a + b \leq \begin{cases} 2k^2 - k - 1, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2k^2 - k, & k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}$.

Now, with the induction method and realization the coloring, one can easily find that the maximum number of colored cells for hexagons is $k^2 - k + 1$, and for triangles is $k^2 - 2, k \equiv 0 \pmod{3}$ and $k^2 - 1, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3}$, when the order of the tessellation is k . Combining both of them, it can be obtained that

$$M(\text{TH1}_H, k, 1) = \begin{cases} 2k^2 - k - 1, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2k^2 - k, & k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}. \text{ A coloring result is shown as follow:}$$

			
$M(\text{TH1}_H, 2, 1) = 6$	$M(\text{TH1}_H, 3, 1) = 14$	$M(\text{TH1}_H, 4, 1) = 28$	$M(\text{TH1}_H, 5, 1) = 45$

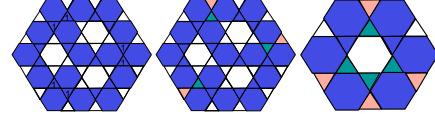
Theorem 4.4 $m(\text{TH1}_H, k, 2) = 4k^2 - 2k$

Proof:

Similar to the proof of **Theorem 4.1**, in this case, every triangle cell on the outer edge of the outermost layer is adjacent to two hexagonal cells on the outermost layer. All of the hexagonal cells should be colored. The sum of un-used valuation for the hexagonal cells located on the corners and on the non-corner outermost layer are 2×6 and $6(k-2)$, respectively. Half and no less than half of the hexagonal cells on the inward layer have been colored since all the hexagonal cells on the outermost layer were colored. The result shows an increase of valuation of $6(k-2)$. This implies that $6a \geq 2(6k^2 - 6k) + 2 \times 6 + 6(k-2) + 6(k-2)$. That is, $a \geq 2k^2 - 2$.

One can observe that each colored hexagonal cell will be at least next to two triangle colored cells. It is illustrated in the figure on the right hand side. The valuation results will at least increase to three if every triangle cell on the outer edge of the outermost layer is not colored. Otherwise, at least the un-used valuation will also be three. This result can easily be seen by changing the coloring from green cells to orange cells. Therefore, one gets

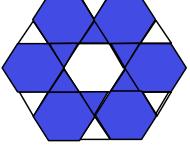
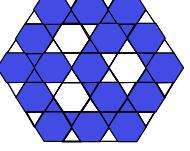
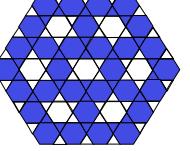
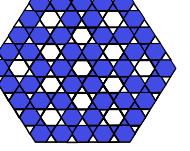
$$3b \geq 2(3k^2 - 3k + 1) + 3 \quad \text{and} \quad b \geq \left\lceil \frac{2(3k^2 - 3k + 1) + 3}{3} \right\rceil = 2k^2 - 2k + 2.$$



Combining both of the above coloring analyses for hexagonal and triangle cells, it can be obtained that $m(\text{TH1}_H, k, 2) = a + b \geq 4k^2 - 2k$.

Now, with the induction method and realization the coloring, one can easily find that the minimum number of colored cells for hexagons is $2k^2 - 2$, and for

triangles is $2k^2 - 2k + 2$, when the order of the tessellation is k . Combining both of them, it can be obtained that $m(\text{TH1}_H, k, 2) = 4k^2 - 2k$. A coloring result is shown as follow:

			
$m(\text{TH1}_H, 2, 2) = 12$	$m(\text{TH1}_H, 3, 2) = 30$	$m(\text{TH1}_H, 4, 2) = 56$	$m(\text{TH1}_H, 5, 2) = 90$

Theorem 4.6 $M(\text{TSH}_H, k, 2) = 9k^2 + 3k - 6$, $k \neq 1$

Proof:

Based on the fact that the hexagonal cells are at most adjacent to two colored cells and with the deduction analysis, it is known that there are at most $6(2k-2)$ cells can be colored for the square cells of the outermost layer, and the un-used valuation is $6(2k-2)$ if $k \geq 2$. This coloring strategy will result in the valuation decreased by two for the centric hexagonal cell of the tessellation. Therefore, $2a \leq 2(3k^2 - 3k + 1) + 6(2k-2) - 2$ and $a \leq 3k^2 + 3k - 6$.

Moreover, at most $2 \times 6 + 6(k-2)$ triangle cells located on the outer edge of the outermost layer can be colored since triangle cells are only adjacent to square cells. Hence, $3b \leq 2(9k^2 - 3k) + 2 \times 6 + 6(k-2)$ and $b \leq 6k^2$.

In this case, it is not required to color any hexagonal cell. So, combining the above coloring analyses, one can get $M(\text{TSH}_H, k, 2) = a + b \leq 9k^2 + 3k - 6$.

Now, with the induction method and realization the coloring, one can easily find that the maximum number of colored cells for squares is $3k^2 + 3k - 6$, and for triangles is $6k^2$, when the order of the tessellation is k and $k \geq 2$. Combining both of them, it can be obtained that $M(\text{TSH}_H, k, 2) = 9k^2 + 3k - 6$. A coloring result is shown as follow:

$M(TSH_H, 1, 2) = 8$ (Exception)	$M(TSH_H, 2, 2) = 36$	$M(TSH_H, 3, 2) = 84$	$M(TSH_H, 4, 2) = 150$

Theorem 4.8 $m(TSH_H, k, 2) = 9k^2 + 3k - 2$

Proof:

Let the colored cells be “ a ” of squares, “ b ” of equilateral triangles, and “ c ” of regular hexagons. Similar to the proof given in **Theorem 4.7**, it is easy to obtain $2a \geq 2 \times 6k^2$ and $a \geq 6k^2$. The total sum of the valuation for the case of coloring all the hexagons is $6(3k^2 - 3k + 1)$. Under this condition, the valuation required for the square cells next to them is $2(9k^2 - 3k)$.

Observing that the square cells of coloring located on the outer edge of the outermost layer, if it could not fulfill the optimal valuation condition when all the adjacent hexagonal cells of them were colored, the triangle cells located on the outer edge of the outermost layer should be colored. It obtains $c = 3k^2 - 3k + 1$. Thus, $2b \geq 2(9k^2 - 3k) - 6(3k^2 - 3k + 1)$ and $b \geq 6k - 3$.

Combining the above three coloring analyses, one can get $m(TSH_H, k, 2) = a + b + c \geq 9k^2 + 3k - 2$.

Now, with the induction method and realization the coloring, one can easily find that the minimum number of colored cells for squares is $6k^2$, for triangles is $6k - 3$, and for hexagons is $3k^2 - 3k + 1$, when the order of the tessellation is k . Combining all of them, obtain that $m(TSH_H, k, 2) = 9k^2 + 3k - 2$. A coloring result is shown as follow:

$m(TSH_H, 1, 2) = 10$	$m(TSH_H, 2, 2) = 40$	$m(TSH_H, 3, 2) = 88$	$m(TSH_H, 4, 2) = 154$

Results and Discussion

The results of $M(P, k, x)$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, x)}{C(P, k)}$ for S_v , S_c , T_v , T_c , H_v , and H_c are given as follows:

x	P	$M(P, k, x)$	$C(P, k)$	Notes on q, r, k	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, x)}{C(P, k)}$
1	S_v	$k^2 + k$	$4k^2$		$\frac{1}{4}$
	S_c	$k^2 - r$	$4k^2 - 4k + 1$	$r = \begin{cases} 0, & \text{if } k = \text{odd} \\ 1, & \text{if } k = \text{even} \end{cases}$	
2	S_v	$2(k^2 + k)$	$4k^2$		$\frac{1}{2}$
	S_c	$2k^2 - r$	$4k^2 - 4k + 1$	$r = \begin{cases} 1, & \text{if } k = \text{odd} \\ 2, & \text{if } k = \text{even} \end{cases}$	
3	S_v	$3k^2 + k$	$4k^2$		$\frac{3}{4}$
	S_c	$3k^2 - 2k + r$	$4k^2 - 4k + 1$	$r = \begin{cases} 1, & \text{if } k = \text{odd}, k \neq 1 \\ 0, & \text{if } k = \text{even} \end{cases}$	
1	T_v	$2k^2$	$6k^2$		$\frac{1}{3}$
	T_c	$2k^2 - 2k + 1$	$6k^2 - 6k + 1$	$k \neq 2$	
2	T_v	$4k^2$	$6k^2$	$k \geq 3$	$\frac{2}{3}$
	T_c	$4k^2 - 4k + r$	$6k^2 - 6k + 1$	$r = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3}, k \neq 3 \\ 2, & k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \end{cases}$	
1	H_v	$\frac{1}{7}(3k^2 + r)$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \pmod{7} \\ 4, & k \equiv 1 \text{ or } 6 \pmod{7} \\ 9, & k \equiv 2 \text{ or } 5 \pmod{7} \\ 1, & k \equiv 3 \text{ or } 4 \pmod{7} \end{cases}$	$\frac{1}{7}$
	H_c	$\frac{1}{7}(3k^2 - 3k + r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 7, & k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{7} \\ 1, & k \equiv 2 \text{ or } 6 \pmod{7} \\ 3, & k \equiv 3 \text{ or } 5 \pmod{7} \\ 13, & k \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$	
2	H_v	$\frac{1}{3}(3k^2 + qk + r)$	$3k^2$	$q = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 3, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ 2, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $r = \begin{cases} 0, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 3, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ -1, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $k \geq 4 \wedge k \neq 6$	$\frac{1}{3}$
	H_c	$\frac{1}{3}(3k^2 - qk + r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$q = \begin{cases} 2, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ 2, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $r = \begin{cases} 0, & k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, & k \equiv 1 \pmod{3} \\ 4, & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $k \geq 4 \wedge k \neq 6$	

x	P	$M(P, k, x)$	$C(P, k)$	Notes on q, r, k	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, x)}{C(P, k)}$
3	H_v	$\frac{1}{2}(3k^2 + r)$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{8} \\ 3, k \equiv 1 \text{ or } 3 \text{ or } 5 \text{ or } 7 \pmod{8} \\ 2, k \equiv 2 \text{ or } 6 \pmod{8} \\ 4, k \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$ $k \geq 9$	$\frac{1}{2}$
	H_c	$\frac{1}{2}(3k^2 - 3k + r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 2, k \neq 3 \text{ or } 6 \pmod{8} \\ 4, k \equiv 3 \text{ or } 6 \pmod{8} \end{cases}$ $k \geq 9$	
4	H_v	$2k^2 + k + r$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ -1, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{2}{3}$
	H_c	$2k^2 - qk + r$	$3k^2 - 3k + 1$	$q = \begin{cases} \frac{4}{3}, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \pmod{3} \\ 2, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $r = \begin{cases} 1, k \equiv 0 \pmod{3} & k \neq 2, 3 \\ 0, k \equiv 1 \pmod{3} \\ 4, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$	
5	H_v	$\frac{1}{3}(7k^2 + 4k - r)$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 6, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2, k \equiv 1 \pmod{3} \\ 9, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $k \neq 2, 3$	$\frac{7}{9}$
	H_c	$\frac{1}{3}(7k^2 - 3k - r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 3, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 7, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}$ $k \neq 1, 2$	

Similarly, the results of $m(P, k, x)$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, x)}{C(P, k)}$ for S_v, S_c, T_v, T_c, H_v , and H_c are given below:

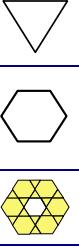
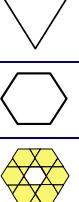
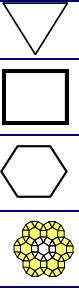
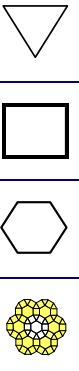
x	P	$m(P, k, x)$	$C(P, k)$	Notes on q, r, k	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, x)}{C(P, k)}$
1	S_v	$k^2 + k$	$4k^2$		$\frac{1}{4}$
	S_c	$k^2 - r$	$4k^2 - 4k + 1$	$r = \begin{cases} 0, \text{if } k = \text{odd}, k \neq 1 \\ 1, \text{if } k = \text{even} \end{cases}$	
2	S_v	$2(k^2 + k)$	$4k^2$		$\frac{1}{2}$
	S_c	$2k^2 - r$	$4k^2 - 4k + 1$	$r = \begin{cases} 0, \text{if } k = \text{odd}, k \neq 1 \\ 1, \text{if } k = \text{even} \end{cases}$	
1	T_v	$2(k^2 + k)$	$6k^2$		$\frac{1}{3}$
	T_c	$2k^2 - r$	$6k^2 - 6k + 1$	$r = \begin{cases} 2, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3}, k \neq 1, 2 \end{cases}$	
2	T_v	$4k^2 + 2k + 2$	$6k^2$	$k \neq 1, 3$	$\frac{2}{3}$
	T_c	$4k^2 + 2k + 1$	$6k^2 - 6k + 1$	$k \neq 1, 2, 3$	
1	H_v	$\frac{1}{3}(2k^2 + r)$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 7, k \equiv 1 \pmod{3}, k \neq 1 \\ 4, k \equiv 2 \pmod{3}, k \neq 2 \end{cases}$	$\frac{2}{9}$
	H_c	$\frac{1}{3}(2k^2 - 2k + r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 6, k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3}, k \neq 1 \\ 2, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$	
2	H_v	$k^2 + k + r$	$3k^2$	$r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{1}{3}$

x	P	$m(P, k, x)$	$C(P, k)$	Notes on q, r, k	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, x)}{C(P, k)}$
	H_c	$k^2 + qk - r$	$3k^2 - 3k + 1$	$q = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$ $r = \begin{cases} 0, k \equiv 0 \pmod{3} & k \neq 1, 2 \\ 3, k \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{2}{3}, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$	

Two kinds of Archimedean tessellations were studied. The following tables are the results of $M(P, k, x)$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, x)}{C(P, k)}$ for $TH1_H$ and TSH_H :

x	P		$M(P, k, x)$	$C(P, k)$	Notes on q, r, k	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, x)}{C(P, k)}$
1	$TH1_H(k)$		$k^2 - r$	$6k^2 - 6k$	$r = \begin{cases} 2, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{1}{6}$
			$k^2 - k + 1$	$3k^2 - 3k + 1$		$\frac{1}{3}$
			$2k^2 - k - q$	$9k^2 - 9k + 1$	$q = \begin{cases} 1, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 0, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{2}{9}$
2	$TH1_H(k)$		$2k^2 - r$	$6k^2 - 6k$	$r = \begin{cases} 4, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 2, k \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{1}{3}$
			$2k^2 - 2k + r$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 1, k \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{3} \\ 2, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{2}{3}$
			$4k^2 - 2k - q$	$9k^2 - 9k + 1$	$q = \begin{cases} 3, k \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, k \equiv 1 \pmod{3} \\ 0, k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$	$\frac{4}{9}$
1	$TSH_H(k)$		$3k^2$	$6k^2$	$k \neq 1$	$\frac{1}{2}$
			$\frac{1}{2}(3k^2 + 3k - 6)$	$9k^2 - 3k$	$k \neq 1$	$\frac{1}{6}$
			0	$3k^2 - 3k + 1$		0
			$\frac{1}{2}(9k^2 + 3k - 6)$	$18k^2 - 6k + 1$	$k \neq 1$	$\frac{1}{4}$
2	$TSH_H(k)$		$6k^2$	$6k^2$	$k \neq 1$	1
			$3k^2 + 3k - 6$	$9k^2 - 3k$	$k \neq 1$	$\frac{1}{3}$
			0	$3k^2 - 3k + 1$		0
			$9k^2 + 3k - 6$	$18k^2 - 6k + 1$	$k \neq 1$	$\frac{1}{2}$

The results of $m(P, k, x)$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, x)}{C(P, k)}$ for $TH1_H$ and TSH_H are

x	P	$m(P, k, x)$	$C(P, k)$	Notes on q, r, k	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, x)}{C(P, k)}$
1		$k^2 - k + 1$	$6k^2 - 6k$		$\frac{1}{6}$
		$k^2 + \frac{1}{2}k - r$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 7/2, & \text{if } k = \text{odd}, k \neq 1 \\ 3, & \text{if } k = \text{even}, k \neq 2 \end{cases}$	$\frac{1}{3}$
		$2k^2 - \frac{1}{2}(k+q)$	$9k^2 - 9k + 1$	$q = \begin{cases} 5, & \text{if } k = \text{odd}, k \neq 1 \\ 4, & \text{if } k = \text{even}, k \neq 2 \end{cases}$	$\frac{2}{9}$
2		$2k^2 - 2k + 2$	$6k^2 - 6k$		$\frac{1}{3}$
		$2k^2 - 2$	$3k^2 - 3k + 1$		$\frac{2}{3}$
		$4k^2 - 2k$	$9k^2 - 9k + 1$		$\frac{4}{9}$
1		0	$6k^2$		0
		$3k^2$	$9k^2 - 3k$		$\frac{1}{3}$
		$\frac{1}{4}(9k^2 - 6k + r)$	$3k^2 - 3k + 1$	$r = \begin{cases} 1, & \text{if } k = \text{odd} \\ 0, & \text{if } k = \text{even} \end{cases}$	$\frac{3}{4}$
		$\frac{1}{4}(21k^2 - 6k + q)$	$18k^2 - 6k + 1$	$q = \begin{cases} 1, & \text{if } k = \text{odd} \\ 0, & \text{if } k = \text{even} \end{cases}$	$\frac{7}{24}$
2		$6k - 3$	$6k^2$		0
		$6k^2$	$9k^2 - 3k$		$\frac{2}{3}$
		$3k^2 - 3k + 1$	$3k^2 - 3k + 1$		1
		$9k^2 + 3k - 2$	$18k^2 - 6k + 1$		$\frac{1}{2}$

Based on the above findings, several conclusions and discussion are summarized as follows:

1. If the coloring methods of $M(P, k, x)$ existed, and there were no zero or lower cases of valuation results assigned to internal cells within tessellations, therefore, the effect of outer edges of a tessellation does not exist.
2. When the effect of outer edges of a tessellation does not exist in a case of $M(P, k, x)$, one can get more colored cells via coloring the cells extended outward

from the interior layers of a tessellation regularly. Otherwise, coloring the cells extended inward from the outermost layer of a tessellation regularly will in general get more colored cells.

3. The coloring way to obtain the maximum or minimum colored cells is not unique for different $M(P, k, x)$ and $m(P, k, x)$.
4. Suppose that P is a regular n -gon, and in the cases $k \geq 3$ for S_v and S_c , and $k \geq 4$ for H_v and H_c , the coloring way for $M(P, k, n-1)$ can be considered as the cases which all the cells located on the outermost layer of a tessellation can be colored, and all the cells located in the interior layers of a tessellation can be transferred to the problem being equivalent to find out the minimum number of colored cells under the constraints that each adjacent cell would have at least one cell been colored. That is, $M(P, k, n-1) = C(P, k) - m(P, k-1, 1)$. This feature occurs in the proof of Theorem 1.5 and Theorem 1.7, Theorem 1.6 and Theorem 1.8, Theorem 3.11 and Theorem 3.9, Theorem 3.12 and Theorem 3.10. Similarly, $M(P, k, n-2) = C(P, k) - m(P, k-1, 2)$ can be found in the proof of Theorem 3.7 and Theorem 3.13, Theorem 3.8 and Theorem 3.14 for the cases of H_v and H_c .

5. Suppose that P are $S_v, S_c, T_v, T_c, TH1_H$, then $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, x)}{C(P, k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, x)}{C(P, k)}$.
6. Let P_v and P_c be a vertex-centred and a polygon-centred regular tessellations respectively. This can be deduced that $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P_v, k, x)}{C(P_v, k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P_c, k, x)}{C(P_c, k)}$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P_v, k, x)}{C(P_v, k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P_c, k, x)}{C(P_c, k)}$. And, suppose that P are S_v and S_c , then
$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, 1)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, 2)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, 3)}{C(P, k)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, 1)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, 2)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, 3)}{C(P, k)} = 1 : 2 : 3 \end{aligned}$$

Similarly, when P are T_v , T_c and $TH1_H$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, 1)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P, k, 2)}{C(P, k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, 1)}{C(P, k)} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(P, k, 2)}{C(P, k)} = 1 : 2.$$

7. In Archimedean tessellations, i.e. $TH1_H$ and TSH_H , side numbers are different in equilateral triangle, square, and regular hexagon. When any cell is colored, it may affect the coloring condition of adjacent cells. In other words, whether these adjacent cells can be colored or not, they will be affected by the previously colored cell. The extent to which they affect the coloring condition is different. It depends on the priority to color equilateral triangle, square, or regular hexagon first so as to obtain the maximum (or the minimum) number of colored cells. Moreover, when x is doubled, the colored ratio of the specific regular polygon is also doubled.
8. Compare $m(P, k, x)$ and $M(P, k, x)$ to find out that $m(P, k, x) \geq M(P, k, x)$, when $x = 1$ or 2 , $k \neq 1$, and P are S_v , T_v , H_v , S_c , T_c , H_c , $TH1_H$, and TSH_H .

Application

The results of this study can be further applied to the following areas:

1. **Tiling or dyeing basic pattern design**^[4,8,10]: The coloring rules and coloring results of this study demonstrated a specific symmetry, repeatability and uniformity characteristics. By using the results of colored cells distribution and the ratio of colored cells with whole cells, one can easily estimate and control the usage of high unit cost of specific composition or pattern. This would help us effectively control costs, and get with the uniformity of the tiling pattern and the aesthetic dyeing design results.
2. **LED lighting puzzle game design**^[2]: According to the rules specified in this study, which is similar to the computer game of minesweeper, one can design a game which allows players to press any cell satisfied the rules to light up the cell (i.e., coloring) within different regular polygon tessellations. The game will continue until one can not light up his/her cell in accordance with the rules. At this point, counting the lighting cells, the player who gets the largest number of lighting cells (or the minimum number of lighting cells) will win the game. The game may be designed to single people checkpoints activities or multiplayer competitions.
3. **Supply-demand optimal portfolio allocation**: Suppose that supply points or delivery points are public facilities or providers of demand allocation and distribution. Likewise, demand points or points of use are a number of residents gathering points or the points of consumption. Then, allocating the supply and demand points, a region (or area, or zone) is constructed through the supply and demand points and is divided by the distribution segment. The constructed regions are both close to each other (and forming tessellation) with the interval boundary. It can be seen as a regional boundary model of supply-demand allocations. One can

say that a supply point and demand point are adjacent if the two end-points are directly connected by a sideline. Now, according to the differences in sideline relations and boundary conditions, one can select a suitable regular polygon tessellation model to match and find out the solution of a supply-demand optimal portfolio allocation. The results of this study can be adopted to replace the traditional use of complex matrices reduction or linear programming algorithm to solve the supply-demand portfolio allocation optimization problems.

4. **LED advertising panel or control and adjustment:** Control and adjustment of different color variations as well as beautiful and attractive designs are very important factors for the success in the design of LED advertising panel or video device. Suppose that there is different brightness of each LED light source of RGB, this effect is similar to the difference in shape areas of polygons composed of a regular polygon tessellation. RGB color control of typical patterns can be properly achieved by using the uniformity characteristics in each colored cell in a tessellation. Brilliant effect can also be adjusted by the results of colored cells distribution and the ratio of colored cells with whole cells within different regular polygon tessellation models.

Several topics can be extended in the future and listed as follows:

1. The coloring problems of other Archimedean tessellations,
2. The combinations of coloring methods with maximum (or minimum) colored cells,
3. Allocation of coloring cells to maximize or to minimize the colored area within a tessellation,
4. The use of discrete mathematics or combinatorial mathematics to solid the analysis^[3].

References

1. Australian Mathematics Competition (2011). Intermediate Division and Senior Division, Question 30.
2. Chang, Hua-Cheng, Wu, Jiong-De, Tu, Ming-Hung (2007). Interactive Lighting Gaming Device, Southern Taiwan University of Science and Technology. Taiwan Patent Publication Number: M327732.
3. Chang, Shu-Chu (2005). Discrete Mathematics, 2nd Ed., Gau Lih Book Co., Ltd., Taiwan.
4. Chang, Yu-Hsuan (2002). A Study of Symmetrical Construction in Escher's Tessellation Art from the Perspective of Group Theory – A Case of Multimedia Design, Master's Dissertations, Ghung Yuan Christian University, Taiwan.
5. Feng, Yueh-Feng (2005). High School Mathematical Olympiad Small Series Vol. 16 -- Combination of extreme, Demonstration and construction, 1st Ed., East China Normal University Press, P.R.C. Retrieved from Chap. 7, Example 7, pp.40-41.
6. Hans F. Bauch (2010). Magic Hexagons in Regular Tilings – Recent Developments, 2010 magic 221110.nb, pp.1-16.
7. http://en.wikipedia.org/wiki/Tiling_by_regular_polygons#Archimedean.2C_uniform_or_semiregular_tilings.
8. http://euler.slu.edu/escher/index.php/Tessellations_by_Polygons#Tessellations_by_Convex_Polygons
9. International Mathematics Olympiad (1999). Question A3.
10. Lee, Jian-Wei (2005). The combination of science and art – The Islamic architectural decoration, E-paper of National Chi Nan University, No. 32.
11. The South African Mathematical Olympiad (2013). Third Round, Senior Division (Grades 10 to 12), Question 5.

評語

對於一個給定的正多邊形的正則鑲嵌或阿基米德鑲嵌，是否存在一種塗色的方式，使得相鄰區域中被塗色滿足一些特定的條件是一個有趣的問題。作者針對所有可能的情況作了分析，給出了完整的解答，內容精彩豐富。唯一美中不足的是，一些結果的論證說明不是很清楚，比較接近對觀察到的現象的描述而不像是證明。如果能把一些事情交代得更為清楚，會是很棒的作品。