2014 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010034

參展科別　數學

作品名稱　同比例分點的建構與研究

得獎獎項　大會獎：四等獎

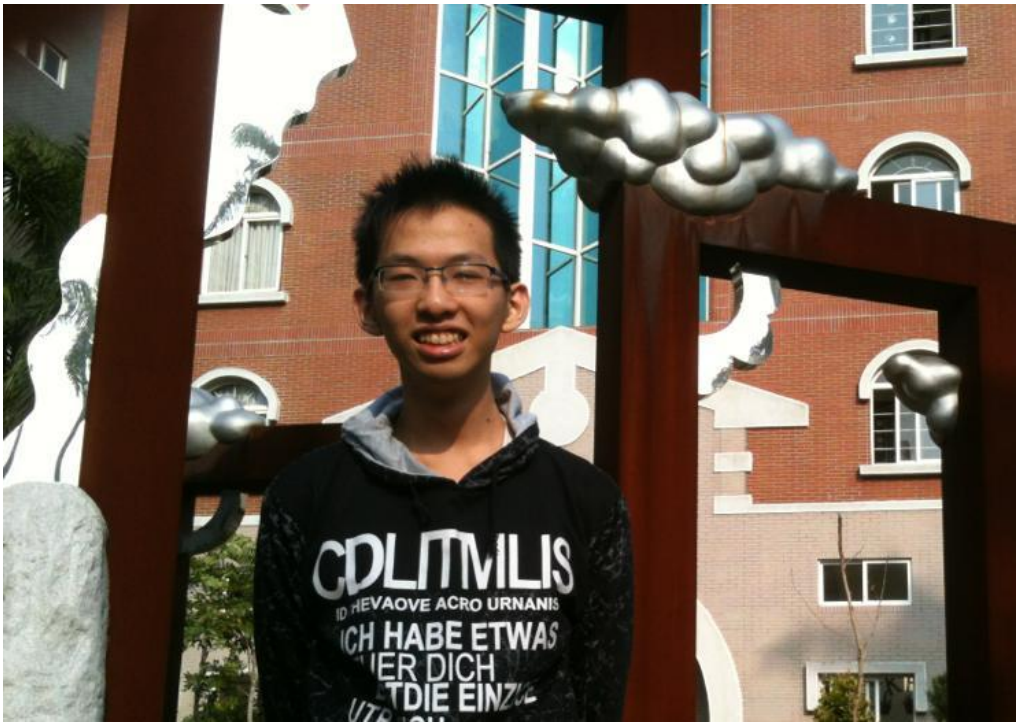
就讀學校　臺北市立建國高級中學

指導教師　陳創義、李宗憙

作者姓名　蔡宗軒

關鍵字　同比例分點、分點軌跡、追逐問題

作者簡介

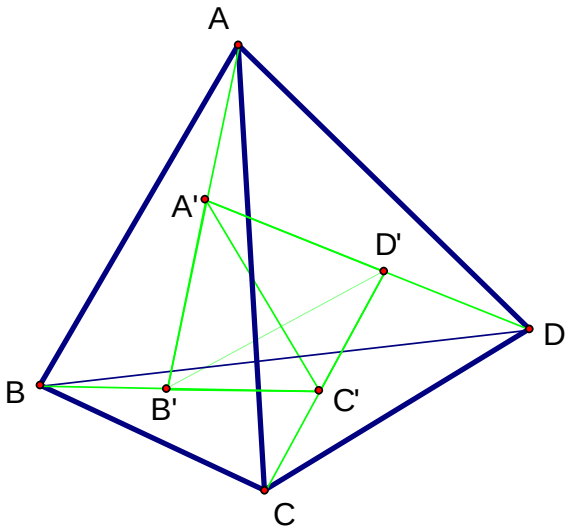


我是蔡宗軒，現就讀建國中學數理資優班三年級，興趣是研究數學、騎單車和打世紀帝國，對幾何學有特別的熱忱。去年參加過台灣國際科展雖未得獎但有所收穫，讓我更清楚如何表達我的作品，希望這次也能獲益良多。

感謝陳創義教授的建議，激發我對這件作品更多的想法。感謝李宗憙老師的指導，讓我的作品更為完整，表達更為清楚。

摘要

這份作品源自於一個有趣的幾何圖形：四面體 $ABCD$ 及其內部四點 A', B', C', D' 使得他們分別為 $\overline{AB'}, \overline{BC'}, \overline{CD'}, \overline{DA'}$ 中點。

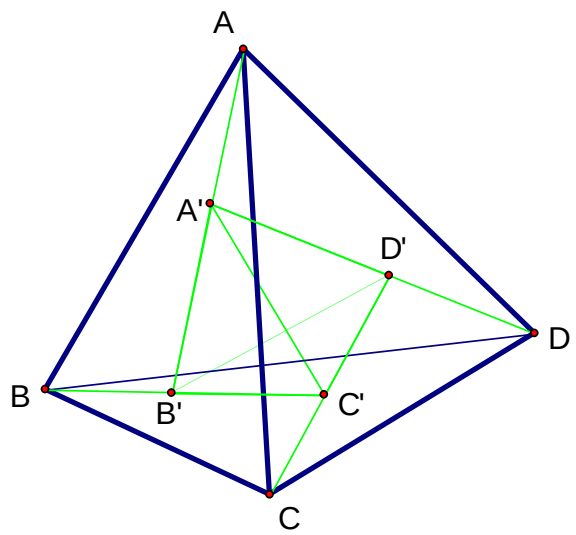


將條件的中點推廣為比例 k 的分點，得 $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC'} = k\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CD'} = k\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DA'} = k\overrightarrow{DD'}$。我們稱 A', B', C', D' 為比值為 k 的**同比例分點**，並稱四面體 $A'B'C'D'$ 為**分點四面體**；同時將類似的命題推廣至 n 維。這次研究主要探討上述圖形的性質，得到許多出乎意料的結論。

首先在基本性質主要得到，對於給定的四面體存在唯一的一組比值為 k 的分點；再來於度量性質中透過計算分點四面體的體積與邊長，發現正四面體的分點四面體不一定為正四面體；並且在分點軌跡中得到，三維同比例分點的軌跡竟為包覆圓柱的正切函數；最後應用取極限的同比例分點解決空間追逐問題。

Abstract

This study is originated from an interesting geometric graphic: A tetrahedron *ABCD* and four points *A'*, *B'*, *C'*, *D'* inside. *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, are midpoints of $\overline{AB'}$, $\overline{BC'}$, $\overline{CD'}$, $\overline{DA'}$ respectively.



Generalize the condition "midpoints" in the statement to a fixed ratio *k*, such as $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BC'} = k\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CD'} = k\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DA'} = k\overrightarrow{DD'}$. We call *A'*, *B'*, *C'*, *D'* **the fixed ratio points** with the ratio of *k*, and call tetrahedron *A'B'C'D'* **the fixed ratio tetrahedron.** The similar statement can be spread to any dimensions. In this study, the properties about the graphic above are investigated, and many unexpected conclusions are obtained.

Here are four specific aims of this study:

1. Basic properties: Struction or essential properties of the fixed ratio points.
2. Volume properties: Volume or length proportions about the fixed ratio points.
3. Locus of the points: Locus of the fixed ratio points when the ratio *k* varies.
4. Chasing problem: Simulating chasing problem by limiting fixed ratio points.

In basic properties, we get that for a given tetrahedron, the fixed ratio points are existed and unique. By calculating the volume and the side length of the fixed ratio tetrahedron, we find that the fixed ratio tetrahedron of a regular tetrahedron is not necessarily a regular tetrahedron. Unexpectedly, the locus of 3-dimentional fixed ratio point is a cylinder coated with tangent, and 3-dimensional chasing problem is solved succesfully.

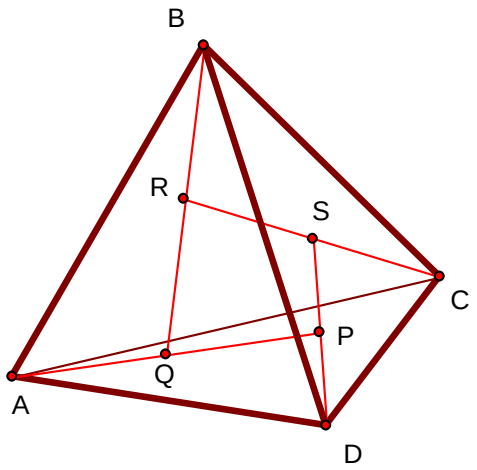
一、 前言

(一)、 研究動機

我在某次數學免修考時遇到以下一題(以下稱為原題)：

在四面體 $ABCD$ 內取四點 $PQRS$，使得點 Q, R, S, P 分別為線段 $\overline{AP}, \overline{BQ}, \overline{CR}, \overline{DS}$ 之中點，設 V_{PABC} 表四面體 $PABC$ 之體積，試求 $V_{PABC}:V_{PBCD}:V_{PCDA}:V_{PDAB}$ 。

這題的解法並不困難，然而題目的圖形架構卻隱藏著一些問題：對於任意的四面體 $ABCD$，滿足條件的 $PQRS$ 是否存在?又是否唯一?



點 Q 決定於定點 A 與不定點 P，同樣地點 R, S, P 也無法直接確定。P, Q, R, S 這四點之間以有序的方式牽制彼此。因此對於一個給定的四面體 $ABCD$，立即確立 P, Q, R, S 四點相當困難。

這樣的問題形式也適用於天體運行時對彼此的重力作用，或是 A, B, C, D 四點等速朝向 B, C, D, A 運動的追逐問題。因此我想對於這類圖形架構的研究或許對前述的發展有所幫助。

在原問題的條件中，若不取中點而取相同比例分點，使 $\overline{AP}=k\overline{AQ}$, $\overline{BQ}=k\overline{BR}$, $\overline{CR}=k\overline{CS}$, $\overline{DS}=k\overline{DP}$，圖形又會如何變化？這樣的條件若推廣為 n 維空間單體內的(n+1)個點又會如何？

(二)、 圖形推廣與名詞定義

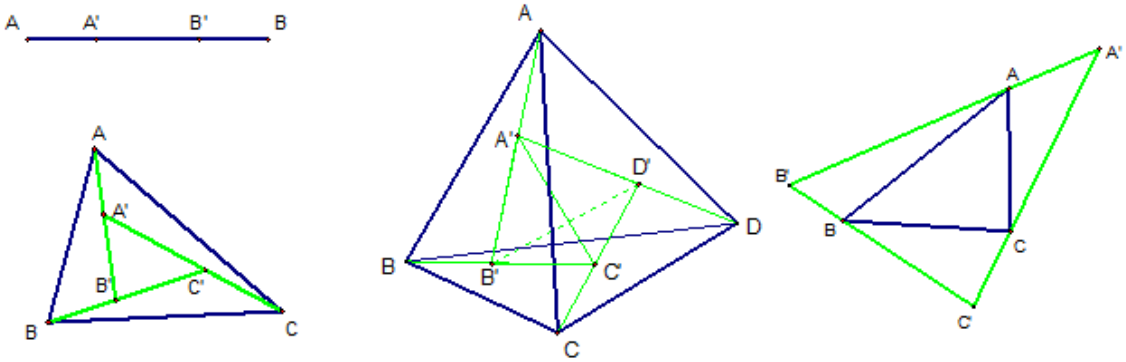
1. 以下以 A', B', C', D' 為符號代替原題中使用的 P, Q, R, S。首先將原題中的圖形作推廣：

   (1) (k 值) 將中點推廣為具有相同比值 k 的分點($\overline{AB'}=k\overline{AA'}$, 其餘同理)

   (2) (n 值) 將維度由三維的四面體推廣為 n 維的單體(包括一維線段與二維三角形)

我們將滿足這樣關係的點稱為比值為 k 的 n 維**同比例分點**，稱原本給定的點組成的單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 為**原單體**(原線段、原三角形、原四面體)，分點所組成的單體稱為**分點單體** $A'_1A'_2...A'_{n+1}$ (分點線段、分點三角形、分點四面體)。

其中第一項推廣的 k 值可取負，特別地此時分點在原單體外部。



2. 以下所言單體體積為廣義體積，包括線段長、面積與高維度體積，並且其值具有方向性。

   以下以[$A_1A_2...A_{n+1}$]代表單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 的體積。

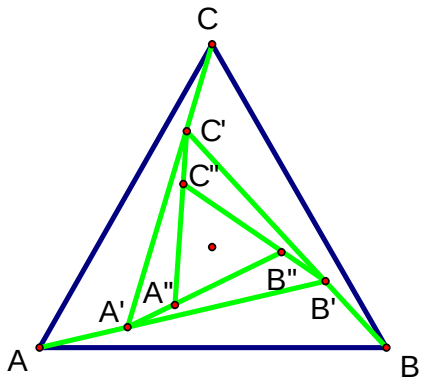
3. 定義向量係數積除法為：$\overline{AB}=t\overline{AC}\Leftrightarrow\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=t$，若 $t=0$ 且 $\overline{AB}$ 不為 0 向量，則定義 C 存在，為無窮遠點。兩平行線交於無窮遠點；兩平行平面交於無窮遠直線。

4. 以下將 $(1+k+...+k^n)$ 記為 S_n。特別地 $S_0=1$，在計算上有：

(1) $(k-1)S_n=k^n-1\Leftrightarrow S_n=\dfrac{k^n-1}{k-1}$ (2). $kS_n+1=S_{n+1}$

5. t 階分點三角形

以三角形 ABC 比值為 k 的分點三角形 $A'B'C'$ 為原三角形，再做一次比值為 k 的分點得三角形 $A''B''C''$，稱此三角形為二階分點三角形。同理做到第 t 次可得 t 階分點與 t 階分點三角形。同理可推廣 t 階分點單體。



(三)、 研究目的

研究同比例分點圖形架構的性質，主要分以下幾個方向討論。

1. 基本性質：同比例分點的圖形結構或本質的基礎問題，包括存在唯一性。

2. 度量性質：同比例分點體積與邊長比例問題，包括原題推廣、分點單體體積與邊長。

3. 分點軌跡：由同比例分點比值 k 變化所形成的分點軌跡，包括 t 階分點軌跡。

4. 追逐問題：以同比例分點的架構解決追逐問題(等角螺線)，包括空間中的追逐問題。

二、 研究方法或過程

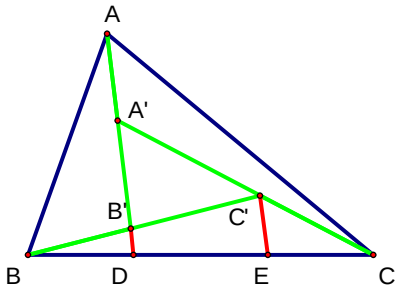
以下(一)、(二)中的各個性質(性質 1 至性質 10)以 n 維形式命題。雖僅主要列出前三維情況的說明與證明，這些命題都可以利用數學歸納法做到 n 維推廣。

(一)、 基本性質

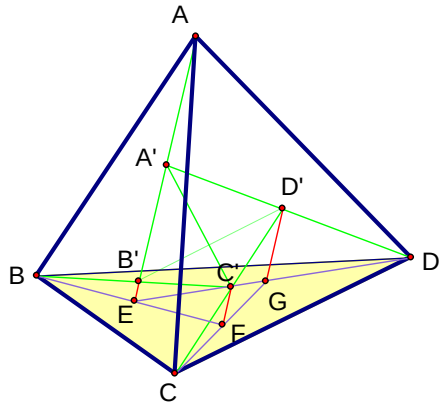
性質 1：將 n 維單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 比值為 k 的同比例分點 $A'_1, A'_2, ..., A'_{n+1}$ 延 $\overleftrightarrow{A_1A'_1}$ 方向平行投影至(n-1)維空間 $A_2A_3...A_{n+1}$，則所得的點為(n-1)維單體 $A_2A_3...A_{n+1}$ 的同比例分點。

證明：

(1) 二維，將三角形 ABC 比值為 k 的同比例分點 B', C' 延 $\overleftrightarrow{AA'}$ 方向投影到 $\overline{BC}$ 上為 D, E，由平行線截等比例有：$\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{BC'}}{\overline{BB'}}=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CC'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}=k$，得 D, E 為 $\overline{BC}$ 的一維同比例分點。



(2) 三維，將四面體 $ABCD$ 比值為 k 的同比例分點 B', C', D' 延 $\overleftrightarrow{AA'}$ 方向投影到平面 BCD 上為 E, F, G，類似地有：$\frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DG}}=k$，$E, F, G$ 為三角形 BCD 的二維同比例分點。



性質 2(存在唯一定理)：任意 n 維單體比值為 k 的同比例分點存在且唯一。(其中 $k=1$ 時特別定義所有分點共點於單體重心)。

證明：

(1) 首先來證明一維的存在唯一性，由定義立即可得：

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{AA'}-k\overrightarrow{BB'}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'B}=k\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{BB'}$$

$$\Rightarrow (k-1)\overrightarrow{AB}=(k^2-1)\overrightarrow{AA'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\frac{k-1}{k^2-1}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}$$

對於此式，因 $\overline{AB}$ 是確定的，$k\neq 1$ 時點 A' 存在且唯一。

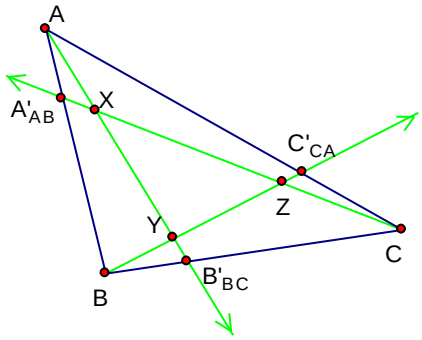
特別地 $k=-1$ 時 A' 為無窮遠點。

當 $k=1$ 時對於任意 $A'=B'$ 皆能使條件成立，但式中 $k\to 1$ 時有 $\overrightarrow{AA'}\to\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，為求圖形的連續性並使同比例分點在 $k=1$ 時唯一，特別定義當 $k=1$ 時 $A'=B'$ 為 $\overline{AB}$ 中點。

(2) 接著利用性質 1 做一維到二維的推論

首先透過一維分點直接建構出二維分點，證明其存在性。將 $\overline{AB}$ 的一維同比例分點記為 A'_{AB}, B'_{AB}，連接 $\overleftrightarrow{AB'_{BC}}, \overleftrightarrow{BC'_{CA}}, \overleftrightarrow{CA'_{AB}}$ 交於 X, Y, Z 三點，經過兩次孟氏定理：

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB'_{BC}}} = -\frac{\overrightarrow{AA'_{AB}}}{\overrightarrow{A'_{AB}B}} \times \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CB'_{BC}}} = \frac{k+1}{k^2}$$



$$\frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YB'_{BC}}} = -\frac{\overrightarrow{AC'_{CA}}}{\overrightarrow{C'_{CA}C}} \times \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BB'_{BC}}} = \frac{k^2+k}{1}$$

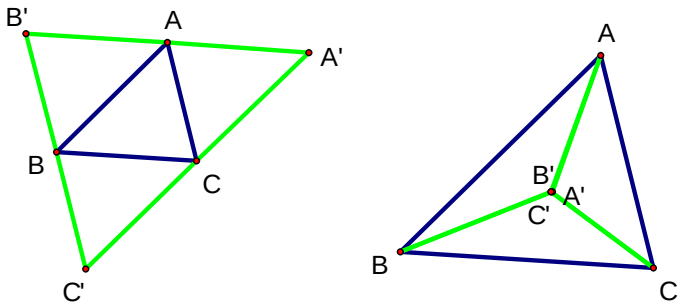
$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{AB'_{BC}}}{k^2+k+1} = \frac{\overrightarrow{AX}}{k+1} = \frac{\overrightarrow{AY}}{k^2+k} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{AY} = k\overrightarrow{AX}$$

得 X, Y, Z 為 A, B, C 比值為 k 的同比例分點 A’, B’, C’。

而由一維分點 B'_{BC} 的唯一性，$\overleftrightarrow{AB'_{BC}}$ 是唯一的，因此三線所交的三個點是唯一解。

特別地當 k = -1，因 D 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上無窮遠處有 $\overleftrightarrow{AA'} // \overleftrightarrow{BC}$，此時分點三角形為三角形 ABC 的反中點三角形。

類似於一維，任意 A’ = B’ = C’都能使 k = 1 的條件成立，但特別定義為上述的構造法所交到的點，即三中線交於三角形的重心，為二維分點在 k = 1 的唯一解。



(3) 三維

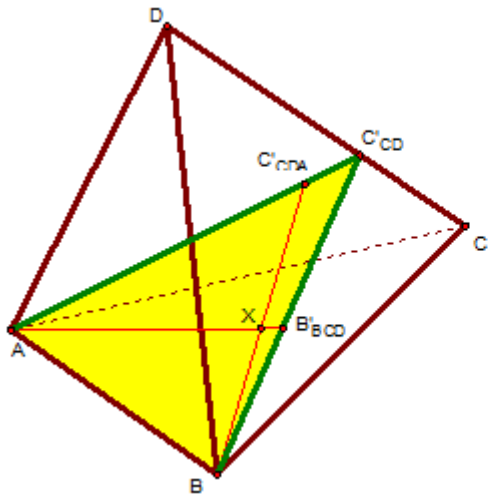
記三點 A, B, C 比值為 k 的同比例分點為 $A'_{ABC}, B'_{ABC}, C'_{ABC}$，由二維存在唯一定理知 A, A'_{ABC}, B'_{BC} 共線、D, B'_{BCD}, B'_{BC} 共線，得 $A, A'_{ABC}, D, B'_{BCD}, B'_{BC}$ 五點共面，進而 $\overleftrightarrow{AB'_{BCD}}$ 與 $\overleftrightarrow{DA'_{ABC}}$ 有交點，設其交點為 W，同理設 X, Y, Z，由孟氏定理：

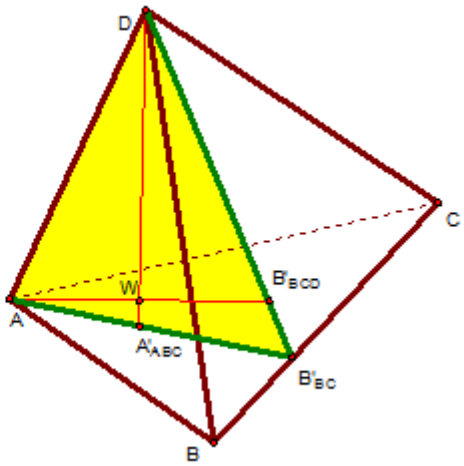
$$\frac{\overrightarrow{AW}}{\overrightarrow{WB'_{BCD}}} = -\frac{\overrightarrow{AA'_{ABC}}}{\overrightarrow{A'_{ABC}B'_{BC}}} \times \frac{\overrightarrow{B'_{BC}D}}{\overrightarrow{DB'_{BCD}}} = \frac{k+1}{k^2} \times \frac{k^2+k+1}{k^2+k} = \frac{k^2+k+1}{k^3}$$

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB'_{BCD}}} = -\frac{\overrightarrow{AC'_{CDA}}}{\overrightarrow{C'_{CDA}C'_{CD}}} \times \frac{\overrightarrow{C'_{CD}B}}{\overrightarrow{BB'_{BCD}}} = \frac{k^2+k}{1} \times \frac{k^2+k+1}{k+1} = \frac{k^3+k^2+k}{1}$$

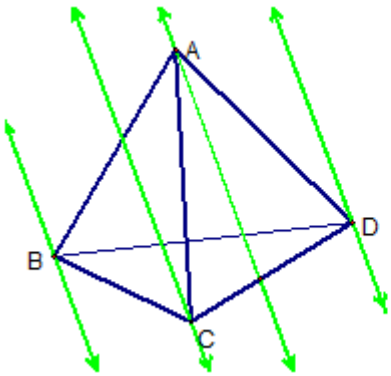
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB'_{BCD}} : \overrightarrow{AW} : \overrightarrow{AX} = S_3 : S_2 : kS_2 \Rightarrow \overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AW}$$

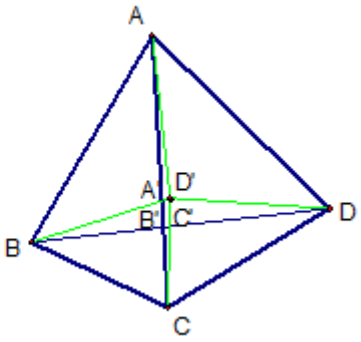
得 W, X, Y, Z 為 A, B, C, D 的同比例分點 A', B', C', D'，此四分點存在。





同理由二維分點的唯一性可以直接說明三維分點的唯一性。特別地當 $k = -1$，$\overleftrightarrow{AB'_{BCD}} // \overleftrightarrow{BC'_{CDA}} // \overleftrightarrow{CD'_{DAB}} // \overleftrightarrow{DA'_{ABC}}$，分點在無窮遠處。而類似地當 $k = 1$ 特別定義出四個分點，共點於四面體重心。





前兩個性質與定理運用同樣的方法可以推論到 n 維同比例分點。性質 1 建立了同比例分點在維度之間的連結關係，藉此可將同比例分點的諸多性質做維度類比與推廣；而性質 2 透過性質 1 確立了任意維度 n 與比值 k 同比例分點的存在性與唯一性，而其中的構造方式也可以視為同比例分點的等價命題。

性質 3：A'_1, A'_2 為單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 比值為 k 的同比例分點，令 $\overleftrightarrow{A_1A'_1}$ 交單體 $A_2A_3...A_{n+1}$ 於點 K，則 $\overrightarrow{A_1A'_1}:\overrightarrow{A'_1A'_2}:\overrightarrow{A'_2K}=S_{n-1}:(k^n-1):1$。

證明：

在前面存在性的構造法就是透過計算 $\overleftrightarrow{A_1A'_1}$ 的線段比例，以確定構造的合理性。但在此可直接透過性質 1 做出較直觀的證明。

(1) 設 ABC 中 $\overline{BC}$ 比值為 k 的分點為 D, E，由性質 1 知道 $D=K$ 且 $\overline{B'D}//\overline{C'E}$，

於是有 $\overrightarrow{B'D}:\overrightarrow{C'E}:\overrightarrow{A'D}=1:k:k^2$

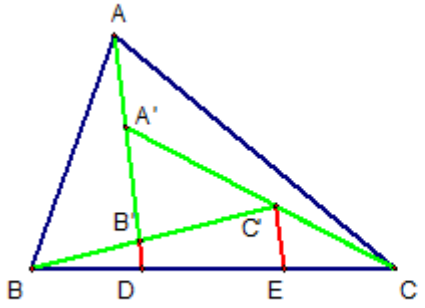
再加上 $\overrightarrow{AA'}:\overrightarrow{AB'}=1:k$，可得：

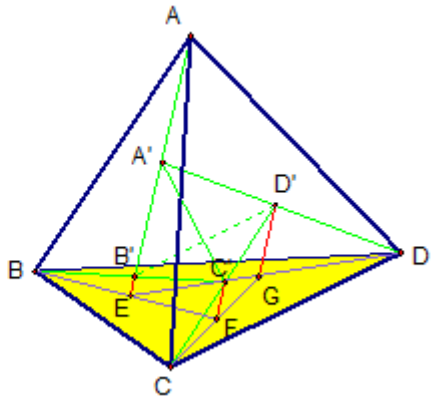
$\overrightarrow{AA'}:\overrightarrow{A'B'}:\overrightarrow{B'K}=(k+1):(k^2-1):1$

(2) 設四面體 $ABCD$ 中三角形 BCD 比值為 k 的分點為 E, F, G，類似地有

$\overrightarrow{B'E}:\overrightarrow{C'F}:\overrightarrow{D'G}:\overrightarrow{A'E}=1:k:k^2:k^3$

再加上 $\overrightarrow{AA'}:\overrightarrow{AB'}=1:k$，就有：$\overrightarrow{AA'}:\overrightarrow{A'B'}:\overrightarrow{B'K}=(k^2+k+1):(k^3-1):1$





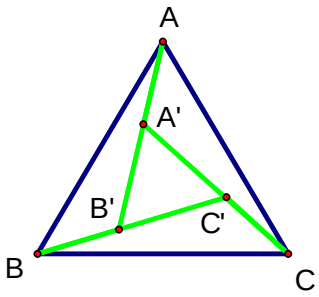
性質 4：單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 與其比值為 k 的同比例分點 $A'_1, A'_2, ..., A'_{n+1}$ 經過仿射變換 T 後，所得的點 $T(A'_1), T(A'_2), ..., T(A'_{n+1})$ 為單體 $T(A_1)T(A_2)...T(A_{n+1})$ 比值為 k 的同比例分點。

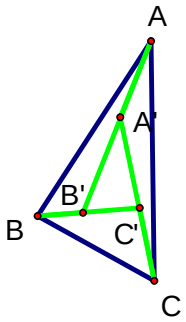
證明：

仿射變換並不改變相同直線上各線段的比例，因此有

$$\overrightarrow{A_iA'_{i+1}} = k\overrightarrow{A_iA'_i} \Rightarrow \overrightarrow{T(A_i)T(A'_{i+1})} = k\overrightarrow{T(A_i)T(A'_i)}$$

變換後的圖形仍滿足比值為 k 的同比例分點條件。



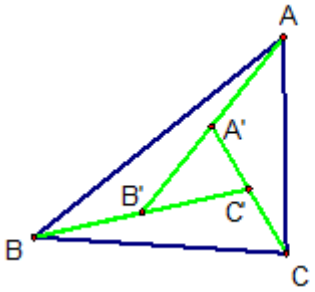


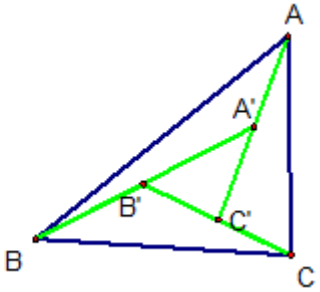
性質 4 說明了仿射變換不影響同比例分點的條件。因此許多仿射變換後不改變的性質如存在唯一性、體積比例等，只要做出正三角形、正四面體等正單體的結論，就可以代表任意情況。

性質 5：原始點取的順序與同比例分點的有關，特別地環狀排列相同的取法得到的分點相同。

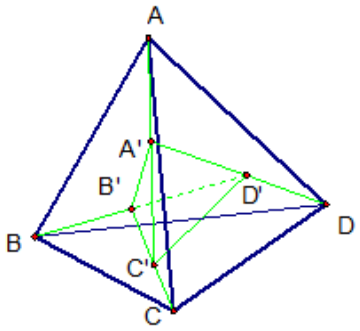
證明：

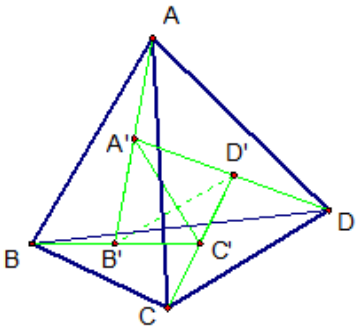
(1) 以二維為例，由定義中的條件顯然取三角形 *ABC*、*BCA* 或 *CAB* 相同比值 *k* 下的同比例分點相同，但三角形 *ACB* 所得的分點不同。因此對於給定的三角形和比值 *k*，同比例分點共有 3!/3=2 種取法。

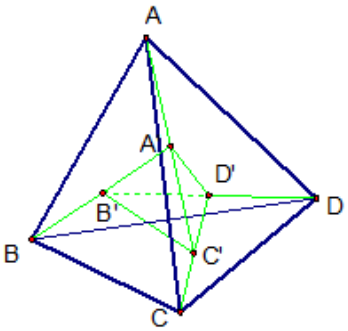




以三維為例，同二維取四面體 *ABCD*、*BCDA* 等四種取法可得同樣的同比例分點，但 *ACBD* 等其他 20 種取到的不同。因此給定四面體和 *k* 值，同比例分點共有 4!/4=6 種取法。







性質 5 說明了同比例分點的原始點不具有完整的對稱性，即條件中任意交換兩點不一定得到相同的結果。但具有輪換性，即將條件中點的取法只要滿足相同的環狀排列得到的結果相同。

性質 6：單體與分點單體重心相同。

證明：

由性質 2 的存在唯一性，我們可以說同比例分點是單體在全等關係下的對應點；又由性質 5 透過環狀排列取法得到相同分點。重心在仿射變換後仍為重心，因此可首先取正單體，再由性質 4 推論到一般情況。

(1) 在二維情況下令正三角形 ABC 重心為 G，則：

$\Delta ABC \cong \Delta BCA \cong \Delta CAB$

$\Rightarrow \Delta GA'B' \cong \Delta GB'C' \cong \Delta GC'A' \Rightarrow [GA'B'] = [GB'C'] = [GC'A']$

G 為三角形 $A'B'C'$ 重心。

(2) 再三維情況下令正四面體 $ABCD$ 重心為 G，同理可得

$[GA'B'C'] = [GB'C'D'] = [GC'D'A'] = [GD'A'B']$

G 為四面體 $A'B'C'D'$ 重心。

性質 6 顯示對於所有比值 k 的分點單體，重心會與原單體的重心相同，而重心又是 $k = 1$ 時所有分點的位置。從性質 9 開始的度量或軌跡問題，這樣的性質將會被大量運用。

(二)、 度量問題

由性質 4，性質 7、性質 8 的體積相關問題皆可由正三角形、正四面體等正單體為代表，而性質 9 的邊長比例無法在仿射變換下保持不變，因此僅討論正單體的分點單體的邊長，並且僅討論 $\overline{A'_i A'_{i+1}}$ 等相對應的邊長。

性質 7(原題推廣)：取單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 比值為 k 的一個同比例分點 A'_1，則有

$$\frac{[A_1A_2...A_nA_1']}{1}=\frac{[A_1A_2...A_{n-1}A_1'A_{n+1}]}{k}=...=\frac{[A_1'A_2...A_{n+1}]}{k^n}$$

證明：

(1) 一維顯然有 $\overrightarrow{AA'}:\overrightarrow{A'B}=1:k$

(2) 對於正三角形 ABC 及其比值為 k 的分點 A', B', C'，由性質 6 的想法可以推論：

$\Delta ABC\cong\Delta BCA\cong\Delta CAB\Rightarrow\Delta ABA'\cong\Delta BCB'\cong\Delta CAC'\Rightarrow[ABA']=[BCB']$

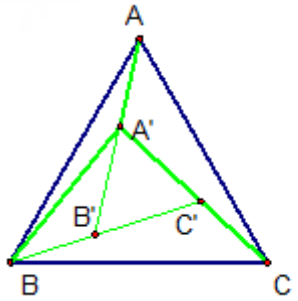
同理可得 $[AA'C]=[CC'B]$，

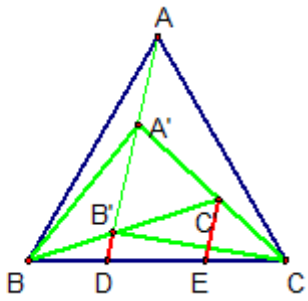
於是 $[ABA']:[AA'C]:[A'BC]=[BCB']:[BCC']:[BCA']$

再加上性質 3 的過程就有 $[BCB']:[BCC']:[BCA']$

$=\overrightarrow{B'D}:\overrightarrow{C'E}:\overrightarrow{A'D}=1:k:k^2$

$\Rightarrow\frac{[ABA']}{1}=\frac{[AA'C]}{k}=\frac{[A'BC]}{k^2}$





(3) 對於正四面體 $ABCD$，同理於二維情況有

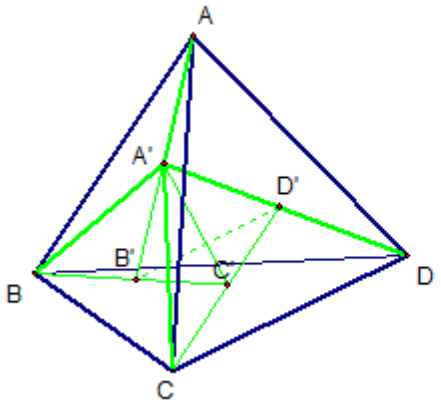
$\Delta ABCA' \cong \Delta BCDB' \Rightarrow [ABCA'] = [BCDB']$ 等三組全等，與

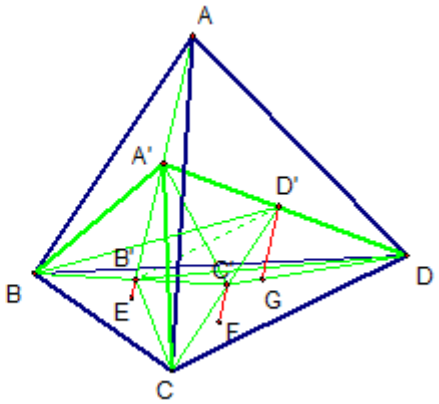
$\overrightarrow{B'E} : \overrightarrow{C'F} : \overrightarrow{D'G} : \overrightarrow{A'E} = 1 : k : k^2 : k^3$，可得：

$[ABCA'] : [ABA'D] : [AA'CD] : [A'BCD]$

$= [BCDB'] : [BCDC'] : [BCDD'] : [BCDA'] = 1 : k : k^2 : k^3$

$$\Rightarrow \frac{[ABCA']}{1} = \frac{[ABA'D]}{k} = \frac{[AA'CD]}{k^2} = \frac{[A'BCD]}{k^3}$$





推論 7.1(座標解析)：將一個 n 維單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 置入一個 n 維直角坐標系，令其原點為 O。則此單體相對於 A_1 比值為 k 的同比例分點 A_1' 可表示為

$$\overrightarrow{OA_1'} = \frac{k^n\overrightarrow{OA_1} + k^{n-1}\overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_{n+1}}}{k^n + k^{n-1} + ... + 1}$$ 。

證明：

直接由性質 7 的結果得知，同比例分點是原始點經過與 k 相關的係數加權得到。

說明：

在二維使用複數解析時，令原三角形三頂點 A, B, C 的複數座標為 a, b, c，比值為 k 的同比例分點 A', B', C' 的複數座標為 a', b', c'，則有：

$$a' = \frac{k^2a + kb + c}{k^2 + k + 1} \qquad b' = \frac{k^2b + kc + a}{k^2 + k + 1} \qquad c' = \frac{k^2c + ka + b}{k^2 + k + 1}$$

這樣的方式可以有效率的解決二維相關的軌跡問題，這些列式也可以視為二維相關軌跡在複數坐標系下以 k 為參數的參數式。

這個推論可以視為同比例分點的另一個等價命題。

性質 8：單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 與其比值為 k 的分點單體 $A'_1A'_2...A'_{n+1}$ 體積比為

$$[A'_1A'_2...A'_{n+1}]=\frac{(k-1)^n}{S_n}[A_1A_2...A_{n+1}]$$

證明：

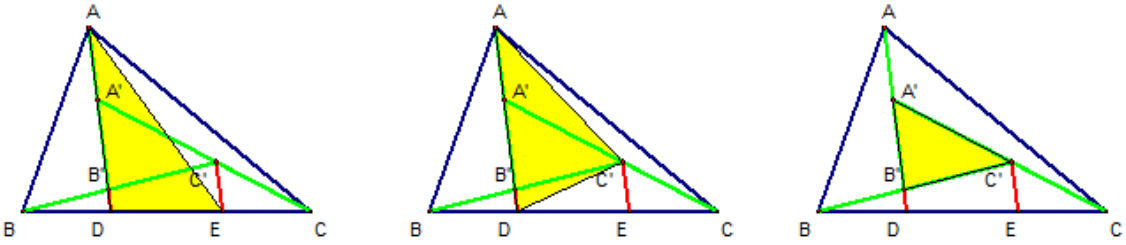
可以由性質 1、性質 3 作維度推廣，另外也能從定義和性質 7 推論。

(1) 一維顯然有 $\overrightarrow{A'B'}:\overrightarrow{AB}=(k-1):(k+1)$

(2) 對於三角形 ABC 與的 $\overline{BC}$ 分點，由一維結論有 $[ADE]=\frac{k-1}{k+1}[ABC]$

由性質 1 得 $[ADC']=[ADE]$，和性質 3 的 $[A'B'C']=\frac{k^2-1}{k^2+k+1}[ADC']$

就有 $[A'B'C']=\frac{k^2-1}{k^2+k+1}\times\frac{k-1}{k+1}[ABC]=\frac{(k-1)^2}{S_2}[ABC]$

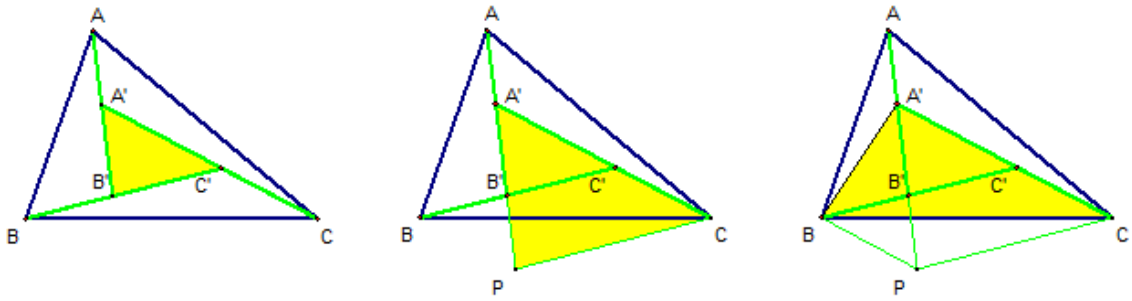


另外可以 A' 為中心將 $\Delta A'B'C'$ 位似變換 $\frac{k}{k-1}$ 倍為 $\Delta A'PC$，

$\overrightarrow{BB'}:\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{PB'}:\overrightarrow{PA'}=1:k \Rightarrow \overline{BP}//\overline{A'C} \Rightarrow [A'PC]=[A'BC]$

加入性質 7 就有

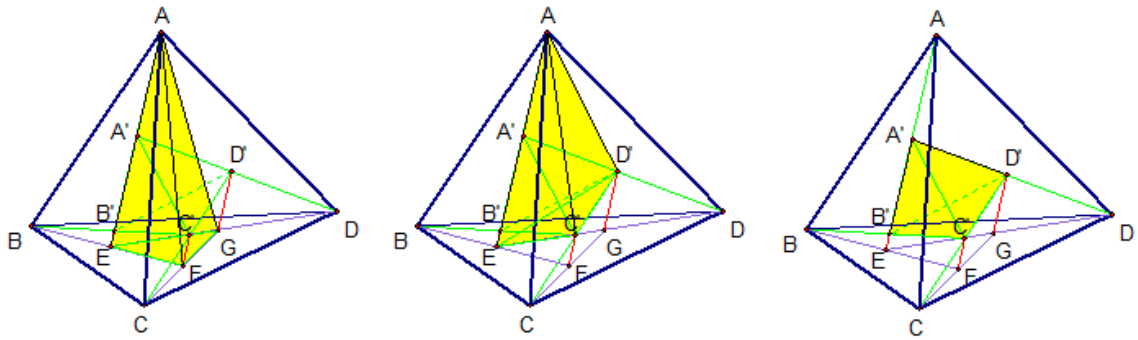
$$[A'B'C']=\frac{(k-1)^2}{k^2}[A'BC]=\frac{k^2}{k^2+k+1}\times\frac{(k-1)^2}{k^2}[ABC]=\frac{(k-1)^2}{S_2}[ABC]$$



(3) 對於四面體 $ABCD$ 與三角形 BCD 的分點，由二維結論有

$$[AEFG]=\frac{(k-1)^2}{S_2}[ABCD]$$

同理於二維 $[A'B'C'D']=\frac{k^3-1}{S_3}\times\frac{(k-1)^2}{S_2}[ABCD]=\frac{(k-1)^3}{S_3}[ABCD]$

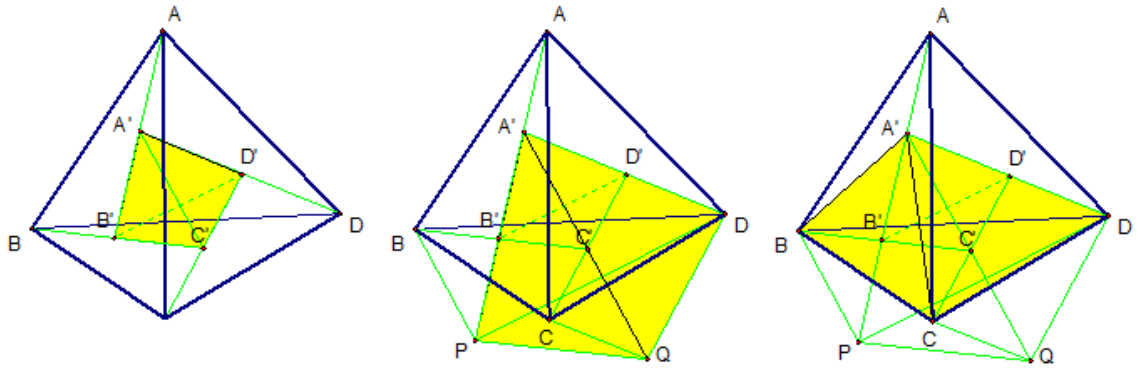


另外將四面體 $A'B'C'D'$ 位似變換 $\frac{k}{k-1}$ 倍為四面體 $A'PQD$，

同理於二維有 $[A'PQD]=[A'BCD]$

加入性質 7 就有

$$[A'B'C'D']=\frac{(k-1)^3}{k^3}[A'BCD]=\frac{k^3}{k^3+k^2+k+1}\times\frac{(k-1)^3}{k^3}[ABCD]=\frac{(k-1)^3}{S_3}[ABCD]$$



性質 9：正單體 $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ 與其比值為 k 的分點單體 $A'_1A'_2\ldots A'_{n+1}$ 邊長比為

$$\frac{\overline{A'_1A'_2}^2}{\overline{A_1A_2}^2}=\frac{S_{n-1}(k-1)^2}{S_1S_n}$$

說明：

若取正三角形的同比例分點，由性質 6 的想法：

$\Delta ABC\cong\Delta BCA\cong\Delta CAB\Rightarrow\Delta A'B'C'\cong\Delta B'C'A'\cong\Delta C'A'B'$

也就是正三角形的分點三角形也會是正三角形。

而取正四面體的同比例分點僅有：

$A'B'C'D'\cong B'C'D'A'\cong C'D'A'B'\cong D'A'B'C'$

推得 $\overline{A'B'}=\overline{B'C'}=\overline{C'D'}=\overline{D'A'}$ 和 $\overline{A'C'}=\overline{B'D'}$，無法確定分點四面體是否為正四面體。

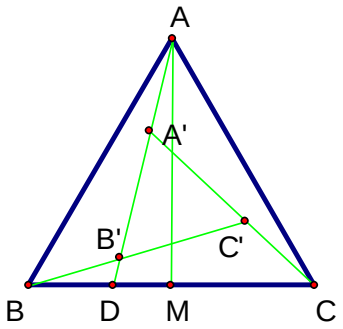
因此以下僅討論 $\overline{A'_iA'_{i+1}}$ 等相對應的邊長。

證明：

(1) 一維和性質 7 的結論相同，即 $\dfrac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2}=\dfrac{(k-1)^2}{(k+1)^2}=\dfrac{S_0(k-1)^2}{S_1S_1}$

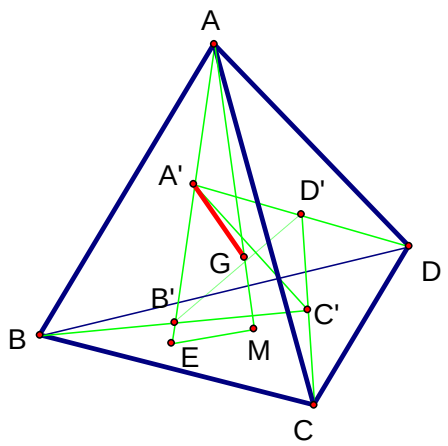
(2) 考慮正三角形 ABC 及分點三角形 $A'B'C'$，令 $\overline{BC}$ 中點為 M，由畢氏定理和一維結論，並令 $\overline{AB}=1$：

$$\overline{A'B'}^2=\left(\frac{k^2-1}{S_2}\right)^2(\overline{AM}^2+\overline{DM}^2)=\left(\frac{k^2-1}{S_2}\right)^2\left(\frac{3}{4}+\frac{(k-1)^2}{4(k+1)^2}\right)=\frac{S_1(k-1)^2}{S_1S_2}$$



(3) 考慮正四面體 $ABCD$ 及分點四面體 $A'B'C'D'$，令三角形 BCD 重心為 M，同理於二維情況：

$$\overline{A'B'}^2=\left(\frac{k^2-1}{S_2}\right)^2(\overline{AM}^2+\overline{EM}^2)=\left(\frac{k^3-1}{S_3}\right)^2\left(\frac{2}{3}+\frac{(k-1)^2}{3S_2{}^2}\right)=\frac{S_2(k-1)^2}{S_1S_3}$$



以上推論過程中，因二維分點三角形是正三角形可以較易得到 $\overline{EM}$ 的值，若要推廣到四維需要有 $\overline{GA'}$ 的值，可由餘弦定理：

$$\overline{GA'}^2=\overline{AA'}^2+\overline{AG}^2-2\overline{AA'}\times\overline{AG}\times\frac{\overline{AM}}{\overline{AE}}=\frac{3}{8}-\frac{kS_2}{S_1S_3}$$

這樣的方法可以做到 n 維推廣。

性質 10：在三維以上，正單體的分點單體不一定為正單體。

結合性質 7 和性質 9，若正單體的分點單體也是正單體，那麼會有邊長比例的 n 次方等於體積比例。

(1) 對於正三角形分點三角形，除了性質 9 中說明的想法外，對於求出來的邊長與面積的值：$\dfrac{S_1(k-1)^2}{S_1S_2}=\dfrac{(k-1)^2}{S_2}$ 是一個恆等式，因此分點三角形與原三角形相似，為正三角形。

(2) 對於正四面體的分點四面體，若分點四面體為正四面體則：

$$\left[\frac{S_2(k-1)^2}{S_1S_3}\right]^3=\left[\frac{(k-1)^3}{S_3}\right]^2$$

由此式解 k 值：

注意到左右兩式都有 $k=0$ 或 $k\to\infty$ 時解為 1 而相等。式而化簡後有：

$$S_2{}^3(k-1)^6=S_1{}^3S_3(k-1)^6\Rightarrow k(k+1)(k^3+1)(k-1)^6=0\Rightarrow k=0\vee\pm1$$

$k=0$ 為已知的解，而因 $k=\pm1$ 兩邊同為 0 或 ∞ 無法比較，取極限約去公因式 $(k-1)$ 、$(k+1)$ 後兩式不相等，非解。

因此正四面體的分點四面體為正四面體當且僅當 $k=0$ 或 $k\to\pm\infty$。

推論 10.1：四面體 $ABCD$ 若 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}\wedge\overline{AC}=\overline{BD}$ 則稱為等腰四面體，此為滿足同比例分點所需對稱形式的四面體。此類四面體的分點四面體也是等腰四面體。

說明：

既然性質 10 說明了正四面體的分點四面體並非正四面體，那麼將原四面體令為正四面體就顯得沒有必要。由性質 5 中分點的輪換關係，令

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}\wedge\overline{AC}=\overline{BD}$(等腰四面體)即能夠滿足三維同比例分點所需的對稱條件($ABCD\cong BCDA\cong CDAB\cong DABC$)，也就是對任一原始點而言其他三點的位置關係是一樣的。

因此除邊長比例外以上所證明對正四面體成立的在此條件下也成立。

即能夠滿足性質 6.(2)所證明的：

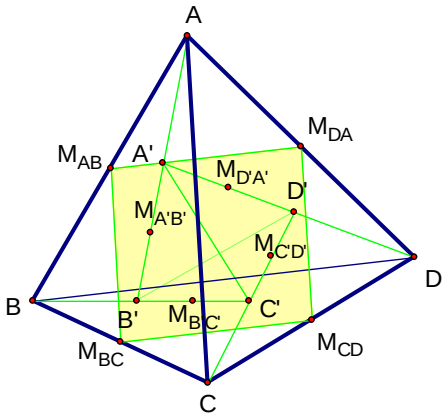
$GA'B'C'\cong GB'C'D'\cong GC'D'A'\cong GD'A'B'$

與性質 9 說明中的：

$A'B'C'D'\cong B'C'D'A'\cong C'D'A'B'\cong D'A'B'C'$

$\Rightarrow\overline{A'B'}=\overline{B'C'}=\overline{C'D'}=\overline{D'A'}\wedge\overline{A'C'}=\overline{B'D'}$

這顯示這樣條件四面體的分點四面體也滿足同樣的條件。



除此之外令 M_{AB} 為 $\overline{AB}$ 中點，類推出其餘三點做出平面 $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$，稱這個平面為四面體 $ABCD$ 的**標準平面**。由對稱性會有 $A'M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA} \cong B'M_{BC}M_{CD}M_{DA}M_{AB}$，從而 $\overline{AB}$ 中點 $M_{A'B'}$ 在原四面體的標準平面上，同理推出其餘三點，也就是分點四面體的標準平面和原四面體重合，和重心一樣可視為同比例分點的不變性。

可以直接得到四個頂點到標準平面的距離相等，考慮對平面的相對位置會有 A, C 同號而和 B, D 異號。令點 A' 的距離當 $\overline{AB}=1$ 為 $h/2$ (相對應的 C 為 $h/2$ 而 B, D 為 $-h/2$)，稱此為點 A 的**高度**。以此可作為此類四面體的一個參數，取代以 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 長度表示。

首先因為 $h \le |\overline{AB}|=1$，它的取值範圍為 $-1 \le h \le 1$。若視相似為等價類，取遍這樣範圍的 h 就可以得到所有可能的此類四面體，特別地有：

$h=0$：此時為正方形。

$h=1$：此時 $A = C$ 且 $B = D$。

另外當 $k > 1$ 或 $k < -1$ 時 A' 和 A 同號；$-1 < k < 1$ 時異號。

(三)、 分點軌跡

當同比例分點的比值 k 在實數域變化時，分點的連續變化會形成軌跡。在此僅討論二維與三維的軌跡，先取正三角形與正四面體的情況，由性質 4 將分點和軌跡做仿射變換亦可得到一般情況。

性質 11(二維分點軌跡)：正三角形 ABC 的同比例分點 A' 的軌跡為過 A, C 及重心 G 的圓。

證明：

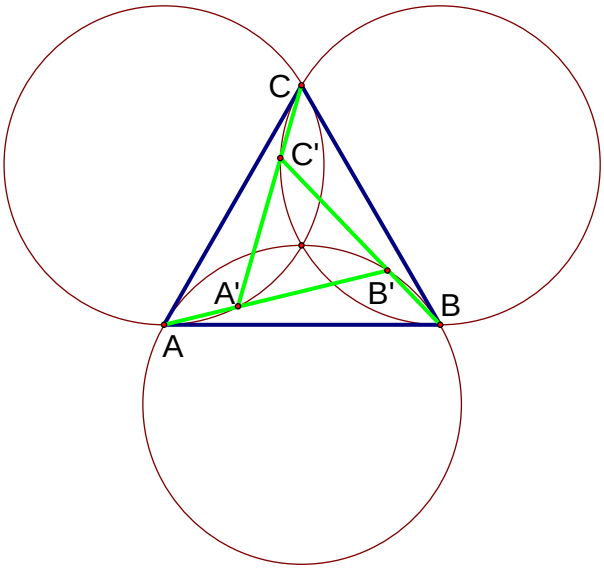
首先有 $\angle CAG = 120^o$

(1) $k > 0$：A'在三角形 ABC 內，$\angle AA'C = 120^o$

(2) $k < 0$：A'在三角形 ABC 外，$\angle AA'C = 60^o$

(3) 另外有 $k = 0$：$A' = C$ ； $k \to \infty$ ：$A' = A$

綜合三點，可知無論 k 為何值 A, C, A', G 四點共圓，且 $k = 1$ 時已特別定義 A' 為三角形重心，如此圖形得以連續，點 A'隨 k 值變化在圓上移動。同理點 A', B'的軌跡各為一圓，且 A', B', C'三點所決定的三圓共點於三角形 ABC 中心。



推論 11.1：橢圓構造方式。

說明：

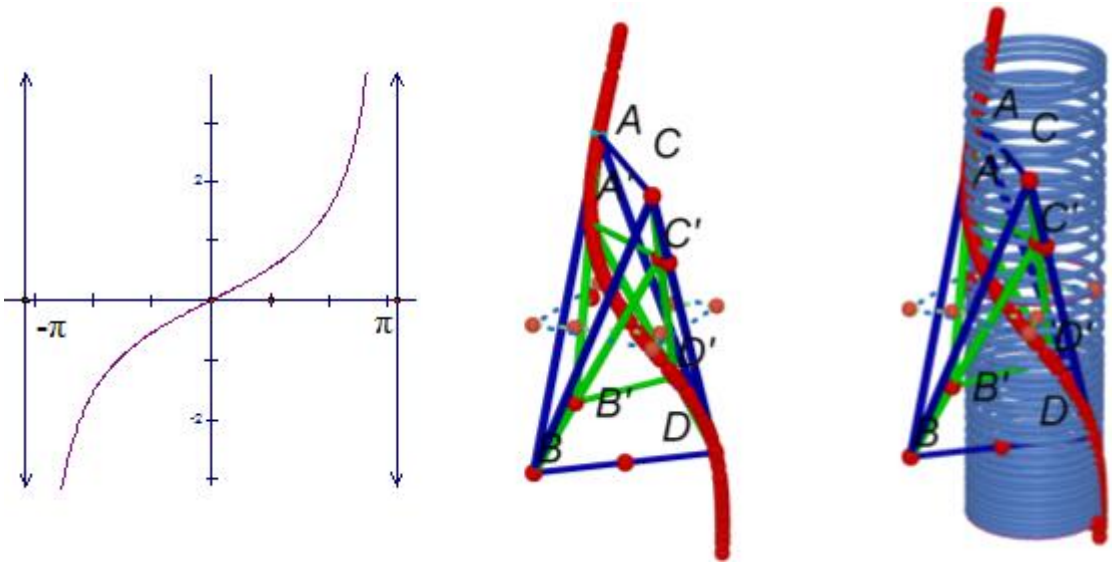
由性質 4 可將性質 11 的結果仿射變換，而圓變換後的結果就是橢圓。亦即對於任意三角形 ABC 它的分點軌跡為橢圓。

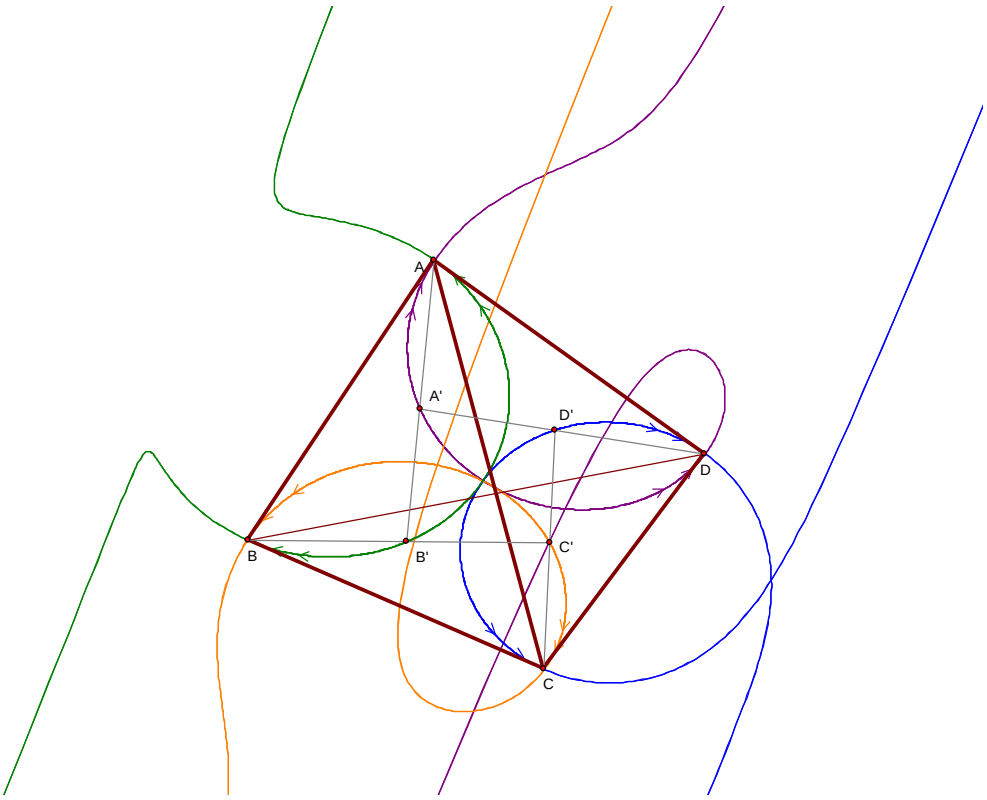
考慮推論 7.1，若需要在複數平面上構造一個橢圓，只要考慮不共線的三點，複數座標為 a, b, c，考慮他們的同比例分點，則有：

$$a' = \frac{k^2 a + kb + c}{k^2 + k + 1}$$

在 k 值變化下點 a'所給出的圖形就是橢圓，也就是這是一個對於給定三點以 k 為參數的橢圓。

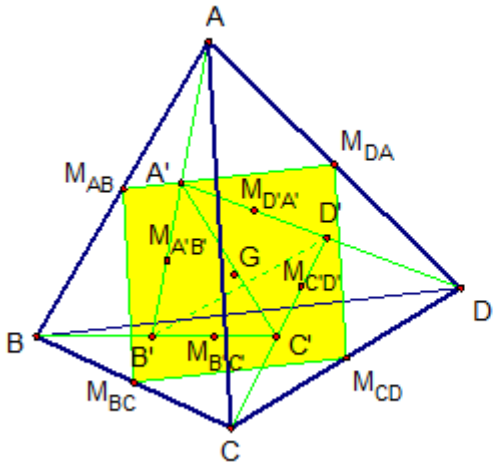
性質 12(三維分點軌跡)：令 $\overline{AB} = 1$，M_{AB} 為 $\overline{AB}$ 中點，等腰四面體 $ABCD$ 點 A 的高度為 $h/2$。四面體 $ABCD$ 同比例分點 A'的軌跡為函數 $y = h \times \tan\frac{x}{2}$ 取區間 $[-\pi, \pi]$ 的圖形包覆一個半徑為 1 的圓柱，之後在與圓面平行的兩個方向伸縮 $\sqrt{1-h^2}/2$ 倍所得的空間曲線(因此直徑為 $\sqrt{1-h^2}$)。其中圓柱的軸過 M_{DA} 且與標準平面垂直，並且函數的點(0,0)為 G，$(\frac{\pi}{2}, h)$ 為 A，$(-\frac{\pi}{2}, -h)$ 為 D。

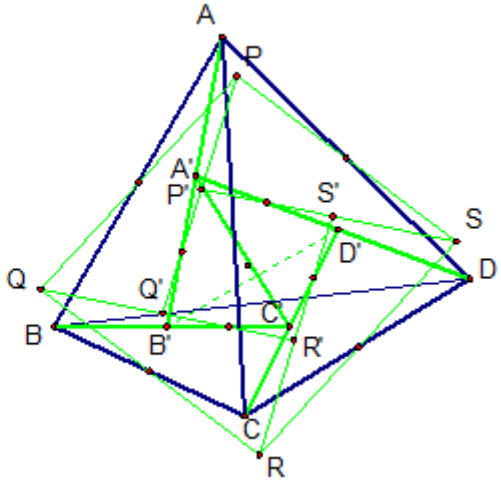




證明：

將原始點和分點垂直投影到標準平面上，得到正方形 $PQRS$ 和 $P'Q'R'S'$，類似於性質 11 點 P'的軌跡為過 P, S, G 的圓，而點 A'的軌跡會在這個圓所形成的圓柱面上。

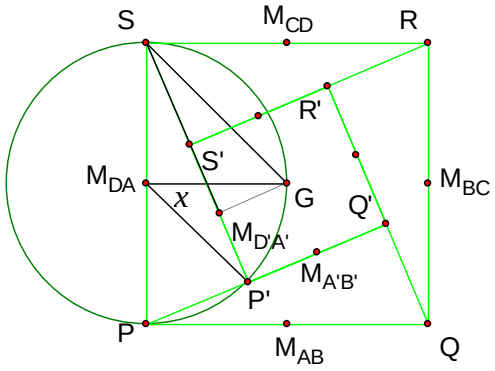




有先有 $\overline{AP}=1$，由 $\overline{AP}\,//\,\overline{A'P'}$ 且 $M_{A'B'}$ 在標準平面上，可得：

$$\overrightarrow{P'A'} = \frac{\overrightarrow{M_{A'B'}P'}}{\overline{M_{A'B'}P}} \times \overrightarrow{PA} = h \times \frac{\overrightarrow{GM_{D'A'}}}{\overline{M_{D'A'}S}} = h \times \tan\angle GSP'$$

$$= h \times \tan\left(\frac{1}{2}\angle GM_{DA}P\right) = h \times \tan\frac{x}{2}$$

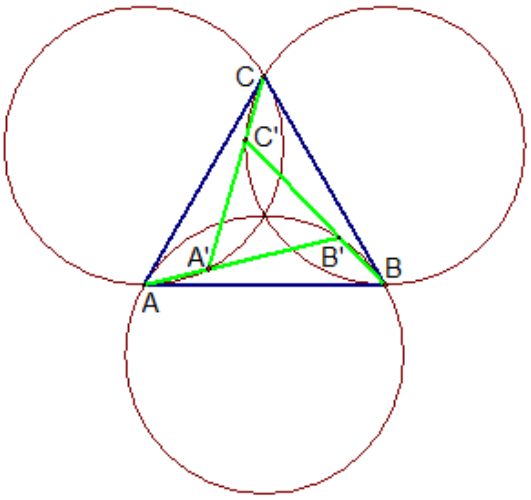


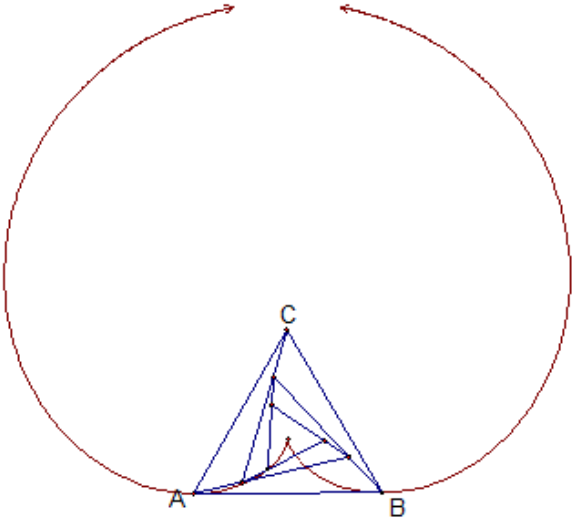
綜上，點 A'的到標準平面的距離在其投影點 P'相對於 G 的弧角為 x 時為 $\tan\frac{x}{2}$ 。

說明：

另外若考慮原四面體的方向性，以上給出的圖點 A'的軌跡要從圓柱內向外看的函數圖形為 $y = \tan\frac{x}{2}$ (因此上面圖形顯示的觀測方向中順時針為正、逆時針為負)；若正四面體的方向改變則要從外向內看，否則為 $y = \tan\frac{x}{2}$ 。事實上圖中的 B'軌跡就是後者，因此以 G 為中心在標準平面上將點 A'的軌跡旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 後，再以同平面鏡射就是點 B'的軌跡。前述的性質也可以由性質 5 推得。

性質 13(t 階分點軌跡)：二維 t 階同比例分點軌跡為極座標 $r=[2\cos(\frac{\theta}{t}+\frac{\pi}{3})]^t$ 的圖形。特別地當 $t=1$ 時圖形全等於 $r=2\cos\theta$ 為圓；當 $t=2$ 時圖形全等於 $r=4\cos\frac{\theta}{2}=2(1+\cos\theta)$ 為心臟線。





證明：

將同比例分點複數解析。根據性質 6，令正三角形 ABC 的重心為原點，則任意比例或任意階的同比例分點重心不變為原點，且由性質 10 它們都是正三角形。

令點 A 的複數座標為 a，同理得 b, c。則 $b=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot a$，$c=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot a$。

又由推論 7.1 可以得到相對於 A 比值為 k 的分點 A'的複數座標為：

$$a'=\frac{k^2a+kb+c}{k^2+k+1}=\frac{(k-1)}{2(k^2+k+1)}(2k+1+\sqrt{3}i)\cdot a=\frac{(k-1)}{\sqrt{S_2}}\left(\frac{2k+1}{2\sqrt{S_2}}+\frac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{S_2}}\right)\cdot a$$

分別討論 k 值大於或小於 1 的範圍，此式可表示為：

$$a'=r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot a=re^{i\theta}\cdot a$$

其中 $r=\frac{|k-1|}{\sqrt{S_2}}$ 與性質 9 符合，$\cos\theta=\pm\frac{2k+1}{2\sqrt{S_2}}$，$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{S_2}}$，$k>1$ 時取正。

將以上三式結合可得一階分點軌跡的極座標式

$$r = \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2\cos(\theta + \frac{\pi}{3})$$

對於二階分點三角形，有 $a'' = re^{i\theta} \cdot a' = r^2 e^{i2\theta} \cdot a = Re^{i\varphi} \cdot a$

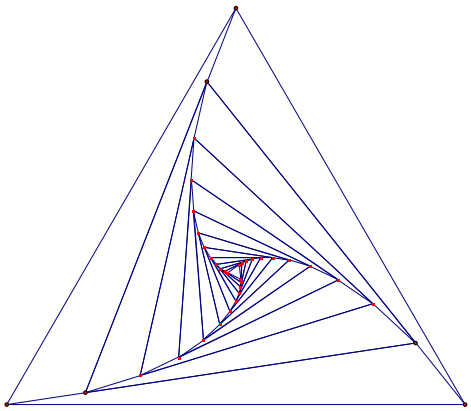
由一階分點的結論可得

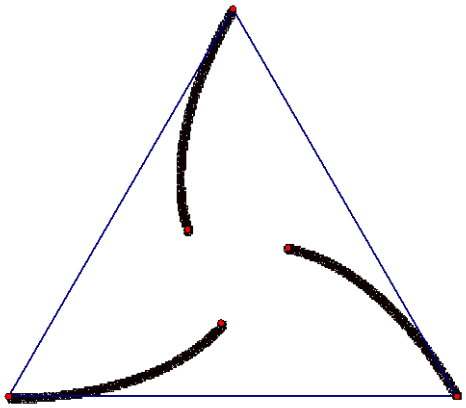
$R = r^2 = [2\cos(\theta + \frac{\pi}{3})]^2 = [2\cos(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{3})]^2 = 2[1 + \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3})]$ 同理可得 t 階分點軌跡極座標式為 $r = [2\cos(\frac{\theta}{t} + \frac{\pi}{3})]^t$

(四)、 追逐問題

平面上有三個點 A, B, C 形成正三角形，這三個點以相同速度運動，並且 A 朝向 B、B 朝向 C、C 朝向 A。討論這樣運動形式造成的狀態與軌跡稱為**追逐問題**。

事實上正三角形的同比例分點可視為追逐問題離散化的狀態，而取足夠大的 k (使 $\overline{AA'}$ 足夠小)並取足夠多的階數 t 就可以趨近為追逐問題。然而過大的 t 可能使三個點趨向重心，而過小的 t 可能使 $\overline{AA'}$ 小得無法繪出曲線。因此如何取得適當的 t，使得三點是追逐到中間的狀態就是性質 14 所要討論的問題。而性質 15 討論的是二維狀況 t 值與點位置、軌跡的關係。





而這樣的問題可以透過 n 維同比例分點做 n 維推廣：在 n 維空間中正單體的(n + 1)個頂點互相追逐的問題。而由性質 10 追逐過程中並不保證點所形成的仍為正單體，僅能保證有如推論 10.1 的對稱關係。因此性質 16 所討論的，就是三維狀況下的等腰四面體在性質 14 所導出的 t 值與點的位置、軌跡的關係。

性質 14：n 維單體比值為 k 的 t 階分點單體體及為原單體的 $e^{-\alpha}$ 倍當 $k \to \infty$ 且 $t = \dfrac{\alpha k}{n+1}$ 。

證明：

性質 8 的體積比例關係在做 t 階分點單體後可以得到比例關係為：

$$\left(\frac{(k-1)^n}{S_n}\right)^t=\left(1+\frac{(k-1)^{n+1}-k^{n+1}+1}{k^{n+1}-1}\right)^t=\left(1+\frac{-(n+1)k^n+...+(-1)^{n+1}+1}{k^{n+1}-2}\right)^t$$

注意到在未取 t 次方前此式因 $k\to\infty$ 趨近於 1，而次方數也趨近於無窮大，這也就是歐拉數 e 的定義的形式。又為使階數 t 為正，因此只要取：

$$t=\frac{k^{n+1}-1}{(n+1)k^n-...-(-1)^n-1}$$

可以讓比例關係式在 $k\to\infty$ 時為 e^{-1}，又在此狀況下對於 k 冪次較小的像可以忽略，並且為達到任意狀況而取：$t=\frac{\alpha k}{n+1}$,比例為 $e^{-\alpha}$,$\alpha\geq 0$

綜上有：$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k-1)^n}{S_n}\right)^{\frac{\alpha k}{n+1}}=e^{-\alpha}$

這樣取極限得到歐拉數 e 的方式將在性質 15、性質 16 中大量使用。

顯然取遍 $\alpha\geq 0$ 的所有可能值可以得到所有中間情況，並且 $\alpha=0$ 為起點，$\alpha\to\infty$ 為終點。

性質 15：在一複數平面上給定一正三角形 ABC，重心為原點，點 A 在實軸正向上且 $\overline{AB}=1$。以性質 14 的方式取 t 階比值為 k 的分點三角形 $A'B'C'$($k\to\infty$ 且 $t=\frac{\alpha k}{3}$)使面積比例為 $e^{-\alpha}$，則點 A'的座標為 $\frac{1}{\sqrt{3}}\exp(-\frac{\alpha}{2})\cdot\exp(\frac{i\alpha}{2\sqrt{3}})$，軌跡長為

$\frac{2}{3}\left(1-\exp(-\frac{\alpha}{2})\right)$。

證明：

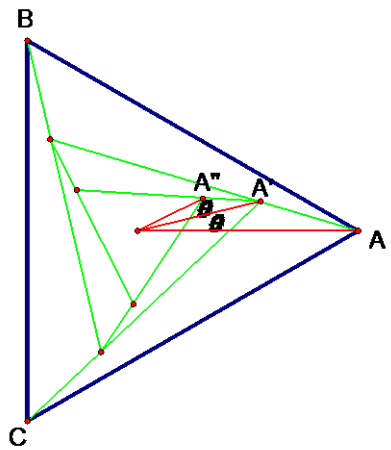
(1) 首先求點 A'的座標。由推論 7.1 和性質 13 的利用方式，在命題要求的條件下可以列出：

$$a' = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k-1}{\sqrt{S_2}}e^{i\theta}\right)^{\frac{\alpha k}{3}} \times a \qquad (\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{S_2}})$$

由 e 的定義式與 $\sin\theta$ 近似於 θ 化簡此式：

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k-1}{\sqrt{S_2}}e^{i\theta}\right)^{\frac{\alpha k}{3}} a = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k-1}{\sqrt{S_2}}\right)^{\frac{\alpha k}{3}} \lim_{k\to\infty}\exp\left(i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{S_2}}\times\frac{\alpha k}{3}\right)\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\exp(-\frac{\alpha}{2})\cdot\exp(\frac{i\alpha}{2\sqrt{3}})$$



(2) 接著求軌跡長。由性質 9：

第一段長：$\overline{AA'} = \frac{1}{k-1}\times\frac{k-1}{\sqrt{S_2}}$ ；第二段長：$\overline{A'A''} = \frac{1}{k-1}\times\left(\frac{k-1}{\sqrt{S_2}}\right)^2$ ；

以此類推第 t 段長為：$\frac{1}{k-1}\times\left(\frac{k-1}{\sqrt{S_2}}\right)^t$

欲求軌跡長則將各段總和並取 k 的極限：

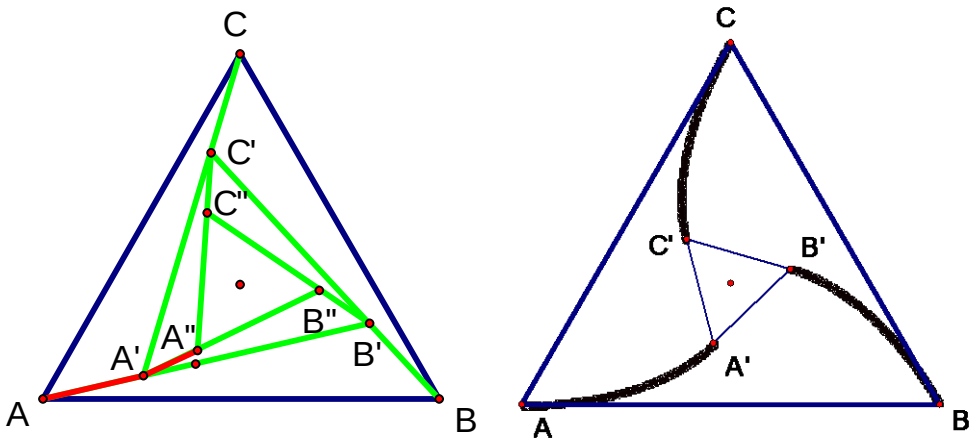
$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\frac{\alpha k}{3}}\frac{1}{k-1}\times\left(\frac{k-1}{\sqrt{S_2}}\right)^n=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{S_2}}\times\frac{1-\left(\frac{k-1}{\sqrt{S_2}}\right)^{\frac{\alpha k}{3}}}{1-\frac{k-1}{\sqrt{S_2}}}$$

$$=\left(1-\exp(-\frac{\alpha}{2})\right)\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{S_2}-(k-1)}$$

$$=\left(1-\exp(-\frac{\alpha}{2})\right)\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{S_2}+(k-1)}{(k^2+k+1)-(k-1)^2}$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\exp(-\frac{\alpha}{2})\right)$$

而在此式中 $\lim_{\alpha\to\infty}\frac{2}{3}\left(1-\exp(-\frac{\alpha}{2})\right)=\frac{2}{3}$，為追逐問題走完(三點走到到原點)總長。



性質 16：在一複數平面與 z 軸組成的空間座標$(x+yi, z)$中給定一等腰四面體 $ABCD$，重心為原點，點 A 在複數平面的投影於實軸上且 z 值為 $h/2$，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=1$ (因此標準平面為此複數平面)。以性質 14 的方式取 t 階比值為 k 的分點三角形 $A'B'C'$ ($k\to\infty$ 且 $t=\frac{\alpha k}{4}$)使面積比例為 $e^{-\alpha}$，則點 A'的座標為

$$\left(\sqrt{\frac{1-h^2}{2}}\exp(-\frac{\alpha}{4})\cdot\exp(-\frac{i\alpha}{4}),\frac{1}{2}h\exp(-\frac{\alpha}{2})\right)$$ 。

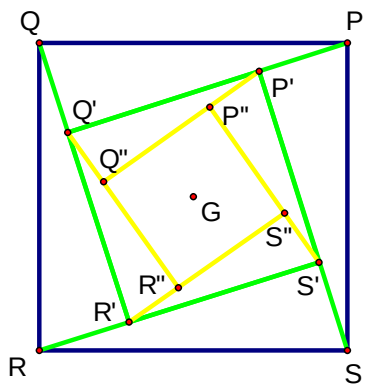
證明：

令給定的等腰四面體在複數平面上投影的座標為 $a, ia, -a, -ia$ ，點 A' 的複數以 $z(A')$ 表示。

由畢氏定理：$a=\sqrt{\dfrac{1-h^2}{2}}$

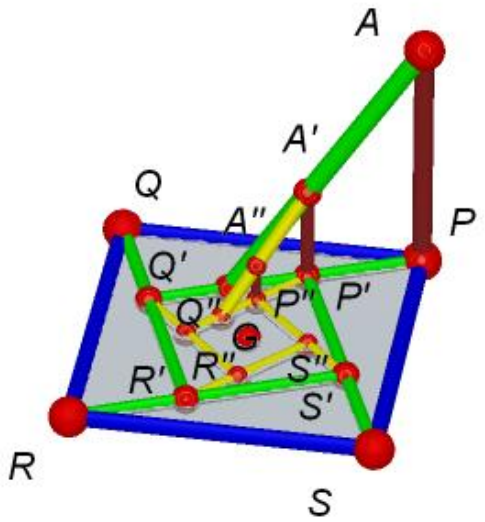
由推論 7.1 並仿照三角形的做法，可以求得一次分點的座標為：

$$z(A')=\frac{k^3-k+i(k^2-1)}{k^3+k^2+k+1}\times z(A)=\frac{(k-1)(k+i)}{k^2+1}=\frac{k-1}{\sqrt{k^2+1}}e^{i\theta}\times a,\quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$$



另外由推論 10.1，因分點四面體邊的中點在標準平面上，可以得到此時分點的高度為：

$$\overline{P'A'}=\frac{k-1}{k+1}\times\overline{PA}=\frac{k-1}{k+1}\times\frac{1}{2}h$$



將以上兩個關係式依命題取 t 階並取 k 的極限，以類似於性質 15 的方式化簡：

$$a' = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k-1}{\sqrt{k^2+1}}e^{i\theta}\right)^{\frac{\alpha k}{4}} \times a = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{-2k+1}{k^2+1}\right)^{(-\frac{k}{2})(-\frac{\alpha}{4})} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\times\frac{\alpha k}{4}\right)\times a \ (\sin\theta=\theta)$$

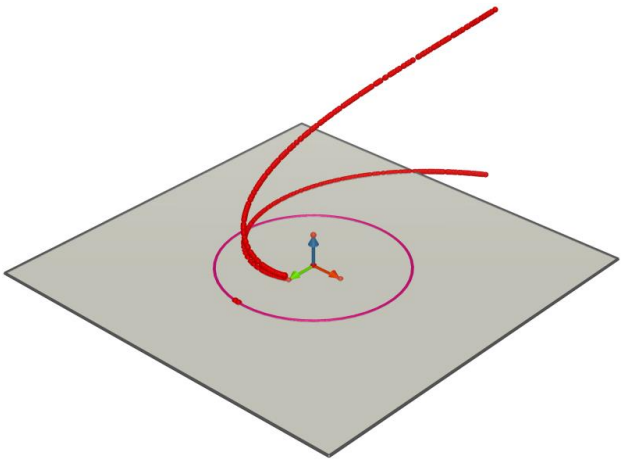
$$= \sqrt{\frac{1-h^2}{2}}\exp(\frac{\alpha}{4}\cdot)\ \exp(\frac{i\alpha}{4}$$

$$h' = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{\alpha k}{4}} \times \frac{1}{2}h = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{-2}{k+1}\right)^{(-\frac{k}{2})(-\frac{\alpha}{2})} \times \frac{1}{2}h$$

$$= \frac{1}{2}h\exp(-\frac{\alpha}{2})$$

得到完整的座標為 $(\sqrt{\frac{1-h^2}{2}}\exp(-\frac{\alpha}{4})\cdot\exp(-\frac{i\alpha}{4}), \frac{1}{2}h\exp(-\frac{\alpha}{2}))$

這個曲線在平面上的投影也是等角螺線(四點追逐問題)。



說明：

我們知道平面上的追逐曲線有一個特別的性質：作任意比例的位似變換與原圖形全等。

而這樣的曲線在座空間推廣後(上式)也有一個奇特的性質：延 z 軸方向作任意比例伸縮變換與原圖形相似。

將上面的式子參數 α 帶入 $\alpha+4c$ (不改變圖形)，得到：

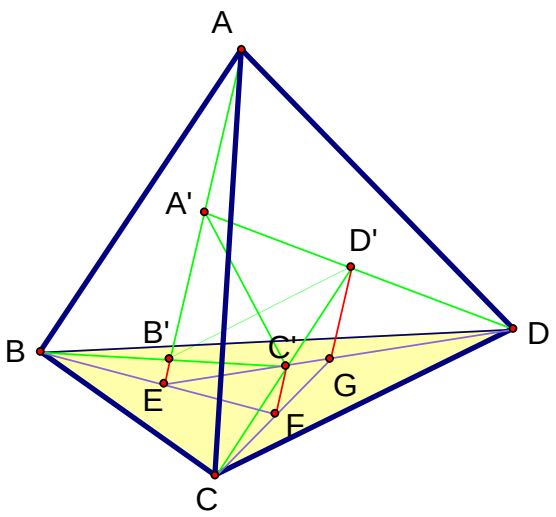
$$(\sqrt{\frac{1-h^2}{2}}\exp(-\frac{\alpha}{4}-c)\cdot\exp(-\frac{i\alpha}{4}-c),\frac{1}{2}h\exp(-\frac{\alpha}{2}-2c))$$

依此式以原點位似 e^c 倍後，再延 z 軸伸縮 e^c 倍，與原式相等，這樣就證明了以上性質。

三、 研究結果

(一)、 同比例分點的基本性質

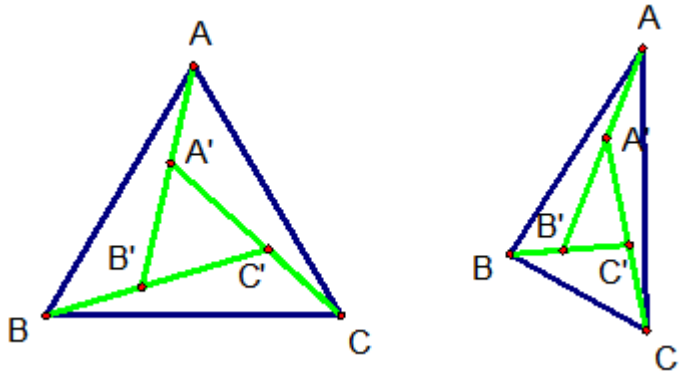
性質 1：將 n 維單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 比值為 k 的同比例分點 $A'_1, A'_2, ..., A'_{n+1}$ 延 $\overleftrightarrow{A_1A'_1}$ 方向平行投影至(n-1)維空間 $A_2A_3...A_{n+1}$，則所得的點為(n-1)維單體 $A_2A_3...A_{n+1}$ 的同比例分點。以三維為例，取四面體 $ABCD$ 比值為 k 的同比例分點 B', C', D' ，延 $\overleftrightarrow{AA'}$ 方向投影到平面 BCD 上的點 E, F, G，為三角形 BCD 的二維同比例分點。



性質 2：任意 n 維單體比值為 k 的同比例分點存在且唯一。(其中 $k = 1$ 時特別定義所有分點共點於單體重心)。

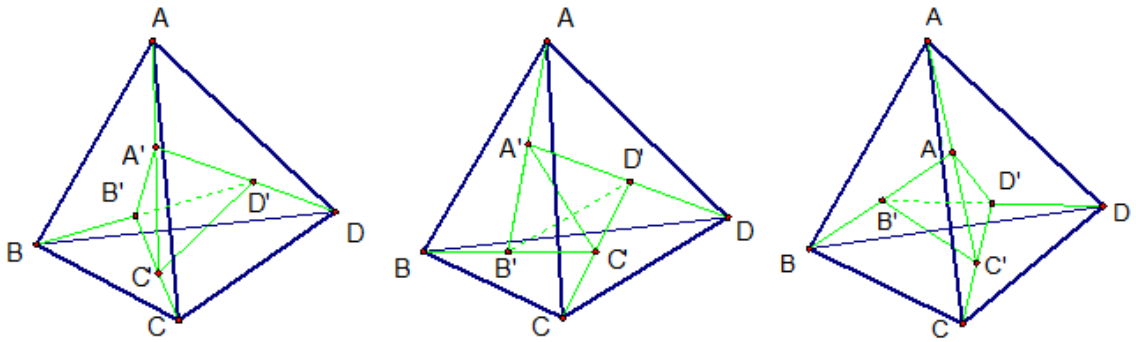
性質 3：A'_1, A'_2 為單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 比值為 k 的同比例分點，令 $\overleftrightarrow{A_1A'_1}$ 交單體 $A_2A_3...A_{n+1}$ 於點 K，則 $\overline{A_1A'_1} : \overline{A'_1A'_2} : \overline{A'_2K} = S_{n-1} : (k^n - 1) : 1$。

性質 4：單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 與其比值為 k 的同比例分點 $A'_1, A'_2, ..., A'_{n+1}$ 經過仿射變換 T 後，所得的點 $T(A'_1), T(A'_2), ..., T(A'_{n+1})$ 為單體 $T(A_1)T(A_2)...T(A_{n+1})$ 比值為 k 的同比例分點。如三角形 ABC 及其同比例分點 A', B', C'，六點經過仿設變換後 $T(A'), T(B'), T(C')$ 為三角形 $T(A)T(B)T(C)$ 的同比例分點。



性質 5：原始點取的順序與同比例分點的有關，特別地環狀排列相同的取法得到的分點相同。

因此同一個四面體 $ABCD$ 有 6 種同比例分點的形式(以下 3 種和它們的鏡像圖形共 6 種)。



性質 6：單體與分點單體重心相同。

(二)、 與同比例分點圖形相關的度量問題

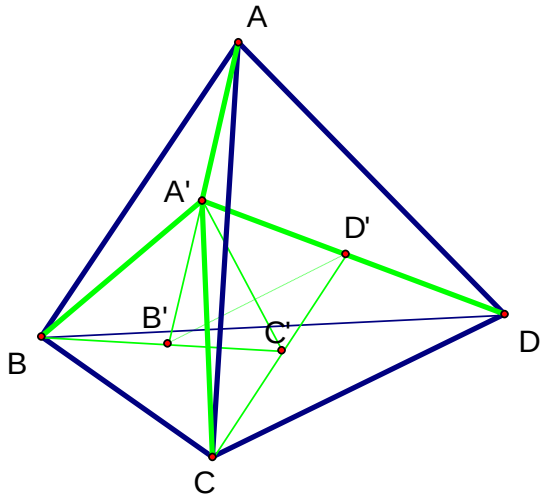
性質 7：(原題推廣)取單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 比值為 k 的一個同比例分點 A'_1，則有

$$\frac{[A_1A_2...A_nA_1']}{1}=...=\frac{[A_1A'_1...A_{n+1}]}{k}=\frac{[A_1'A_2...A_{n+1}]}{k^n}$$ 。

如取四面體 $ABCD$ 比值為 k 的同比例分點 A'可得

$$\frac{[ABCA']}{1}=\frac{[ABA'D]}{k}=\frac{[AA'CD]}{k^2}=\frac{[A'BCD]}{k^3}$$ 。

在這裡代入 $k=2$ 即為研究動機中原題的解。



推論 7.1：$\overrightarrow{OA_1'}=\dfrac{k^n\overrightarrow{OA_1}+k^{n-1}\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_{n+1}}}{k^n+k^{n-1}+\ldots+1}$ 。

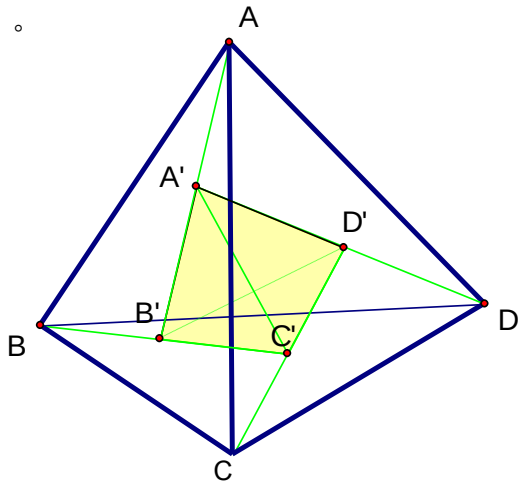
而在二維複數座標：$a'=\dfrac{k^2a+kb+c}{k^2+k+1}$ 。

性質 8：單體 $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ 與其比值為 k 的分點單體 $A'_1A'_2\ldots A'_{n+1}$ 體積比為

$[A'_1A'_2\ldots A'_{n+1}]=\dfrac{(k-1)^n}{S_n}[A_1A_2\ldots A_{n+1}]$ 。

如四面體 $ABCD$ 與其比值為 k 的分點單體 $A'B'C'D'$ 體積比為

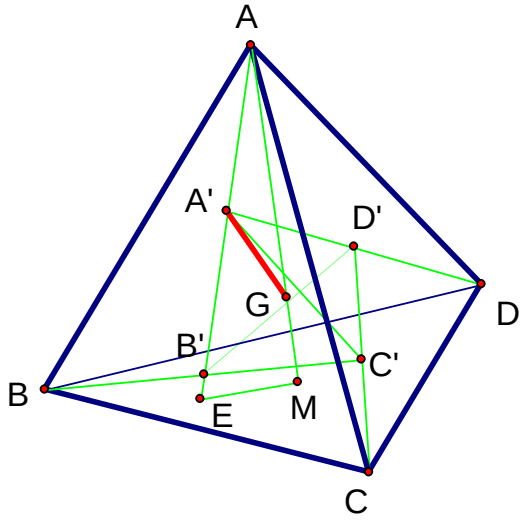
$[A'B'C'D']=\dfrac{(k-1)^3}{S_3}[ABCD]$ 。



性質 9：正單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 與其比值為 k 的分點單體 $A'_1A'_2...A'_{n+1}$ 邊長比為

$\frac{\overline{A'_1A'_2}^2}{\overline{A_1A_2}^2}=\frac{S_{n-1}(k-1)^2}{S_1S_n}$。如正四面體 $ABCD$ 及分點四面體 $A'B'C'D'$ 的邊長比為

$\frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{S_2(k-1)^2}{S_1S_3}$。

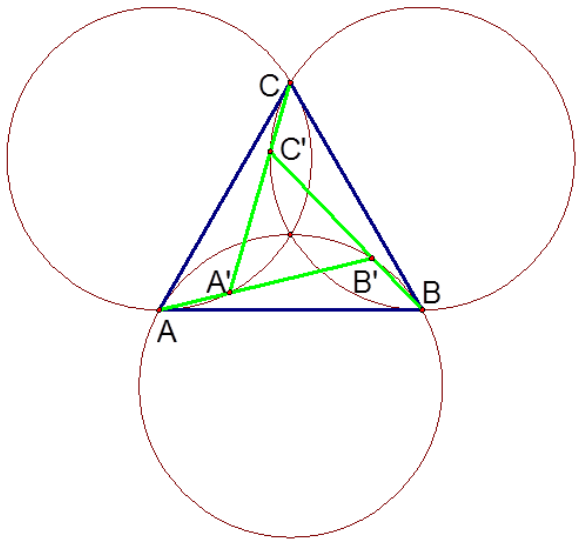


性質 10：在三維以上，正單體的分點單體不一定為正單體。如正四面體的分點四面體只有在 $k=0$ 或 $k\to\infty$ 為正四面體。特別地這時候分點單體與原單體重合

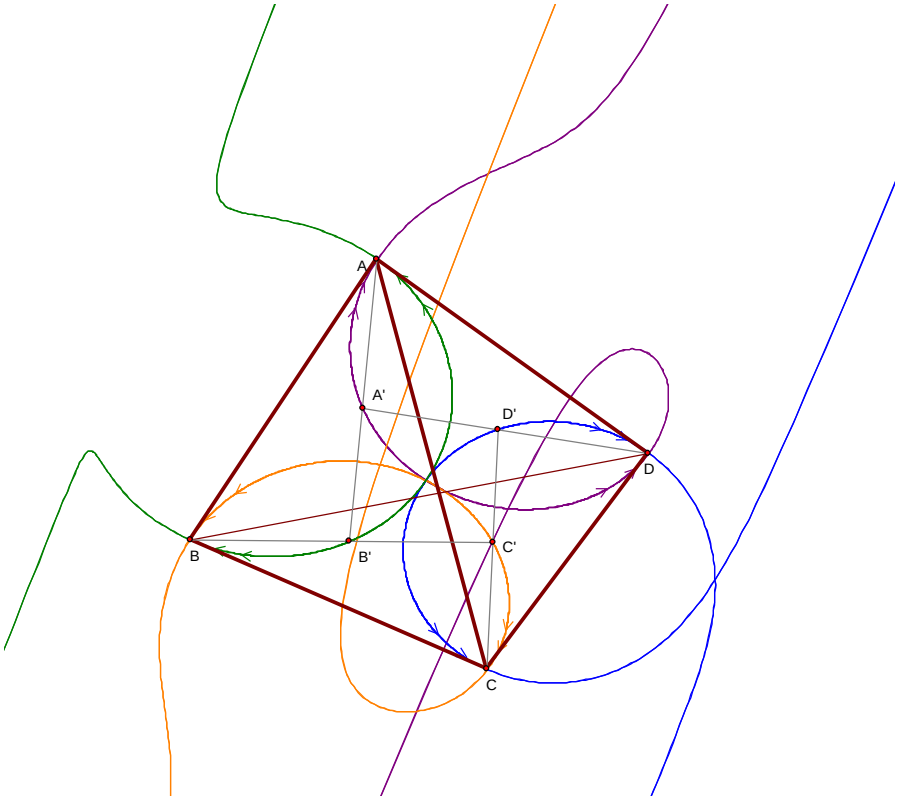
推論 10.1：四面體 $ABCD$ 若 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}\wedge\overline{AC}=\overline{BD}$ 則稱為等腰四面體，此為滿足同比例分點所需對稱形式的四面體。此類四面體的分點四面體也是等腰四面體。

(三)、 同比例分點的軌跡

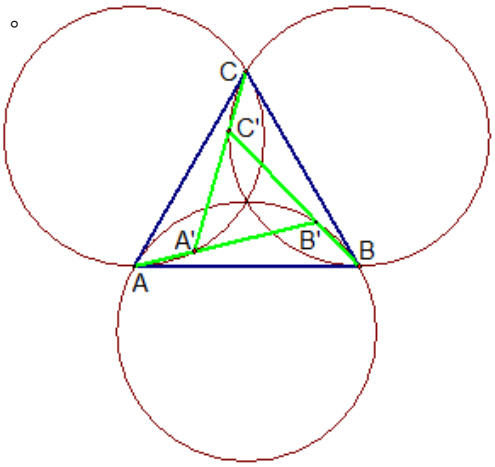
性質 11：正三角形 ABC 的同比例分點 A' 的軌跡為過 A, C 及重心 G 的圓。

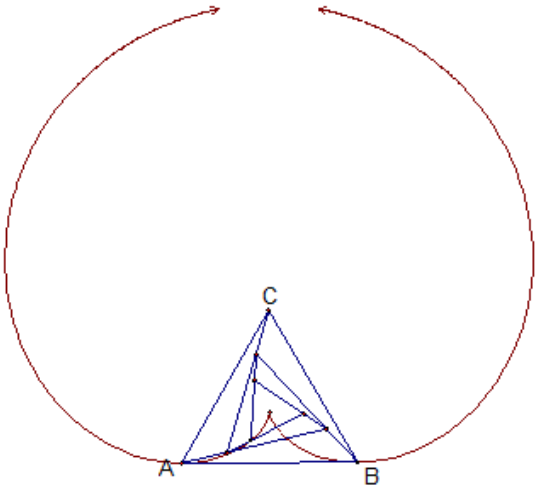


性質 12：A 點高度為 $h/2$ 的等腰四面體 $ABCD$ 中，同比例分點 A'的軌跡為函數 $y=h\times\tan\frac{x}{2}$ 取區間$[-\pi,\pi]$的圖形包覆一個半徑為 1 的圓柱，之後在與圓面平行的兩個方向伸縮$\sqrt{1-h^2}/2$倍所得的空間曲線。並且函數的點(0,0)為 G，$(\frac{\pi}{2},h)$ 為 A，$(-\frac{\pi}{2},-h)$ 為 D。



性質 13：二維 t 階同比例分點軌跡為極座標 $r=[2\cos(\frac{\theta}{t}+\frac{\pi}{3})]^t$ 的圖形。特別地當 $t=1$ 時圖形全等於 $r=2\cos\theta$ 為圓；當 $t=2$ 時圖形全等於 $r=4\cos\frac{\theta}{2}=2(1+\cos\theta)$ 為心臟線。

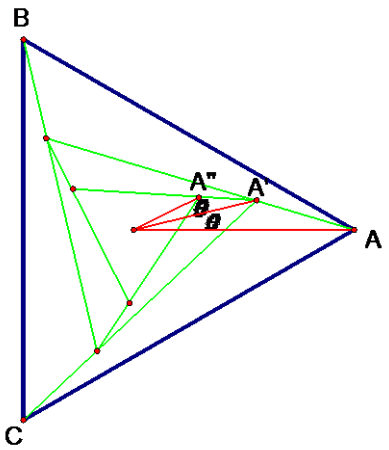


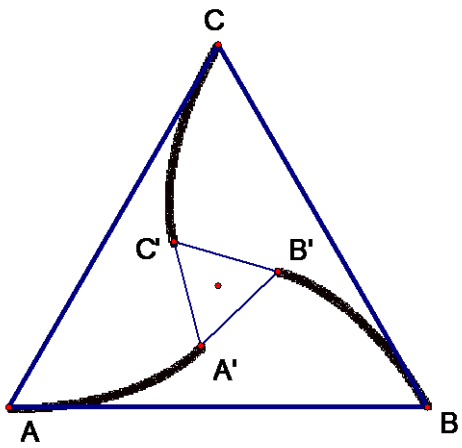


(四)、 利用同比例分點解決追逐問題

性質 14：n 維單體比值為 k 的 t 階分點單體體及為原單體的 $e^{-\alpha}$ 倍當 $k \to \infty$ 且 $t = \dfrac{\alpha k}{n+1}$ 。

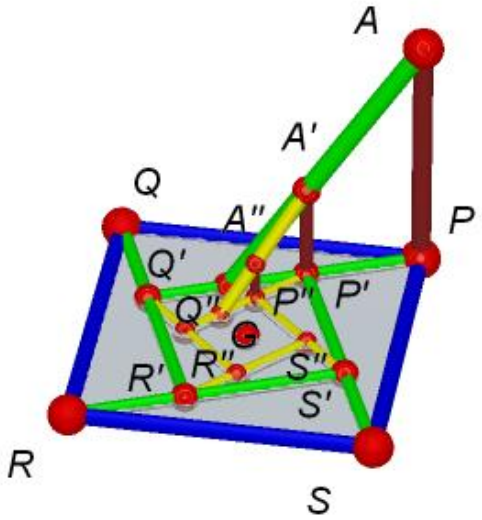
性質 15：在一複數平面上給定一正三角形 ABC，重心為原點，點 A 在實軸正向上且 $\overline{AB} = 1$。以性質 14 的方式取 t 階比值為 k 的分點三角形 $A'B'C'$ ($k \to \infty$ 且 $t = \dfrac{\alpha k}{3}$) 使面積比例為 $e^{-\alpha}$ ，則點 A' 的座標為 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\exp(-\dfrac{\alpha}{2})\cdot\exp(\dfrac{i\alpha}{2\sqrt{3}})$ ，軌跡長為 $\dfrac{2}{3}\left(1-\exp(-\dfrac{\alpha}{2})\right)$ 。

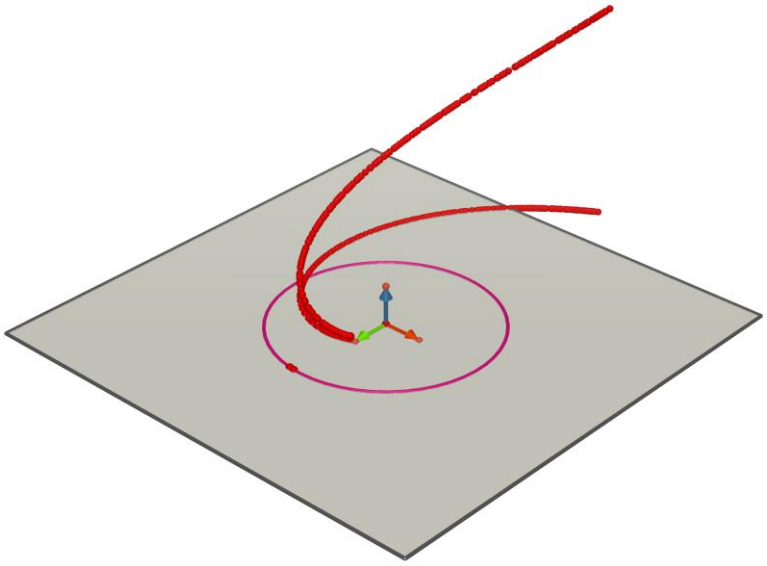




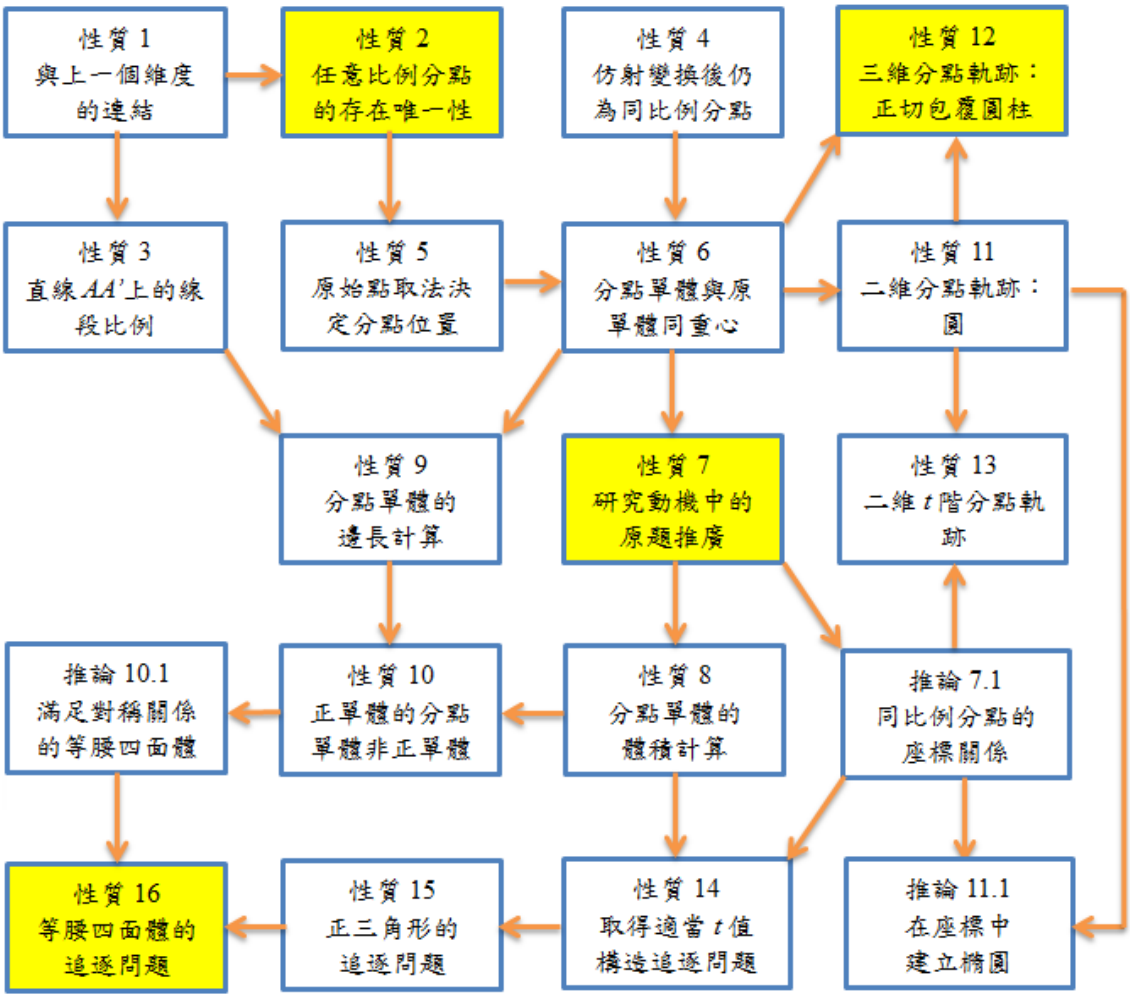
性質 16：在一複數平面與 z 軸組成的空間座標 $(x + yi, z)$ 中給定一等腰四面體 $ABCD$，重心為原點，點 A 在複數平面的投影於實軸上且 z 值為 $h/2$，$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 1$ (因此標準平面為此複數平面)。以性質 14 的方式取 t 階比值為 k 的分點三角形 $A'B'C'$ ($k \to \infty$ 且 $t = \dfrac{\alpha k}{4}$) 使面積比例為 $e^{-\alpha}$ ，則點 A' 的座標為

$$\left(\sqrt{\frac{1-h^2}{2}}\exp(-\frac{\alpha}{4})\cdot\exp(-\frac{i\alpha}{4}), \frac{1}{2}h\exp(-\frac{\alpha}{2})\right)$$ 。


A
A'
Q
A''
P
Q'
Q''
P''
P'
G
R'
R''
S''
S'
R
S



如表為以上 19 個性質與推論的關係，與各個部分具代表性的性質：



四、 結論

(一)、 基本性質

這部分首先建立同比例分點的維度連結關係(**性質 1**)，接著利用這樣的關係建構下一個維度的同比例分點，並確立的分點的存在唯一性(**性質 2**)，也對線段比例做了一些計算(**性質 3**)，為第二部分做準備。

之後更得到同比例分點某些不變的性質，即仿射不變(**性質 4**)與重心不變(**性質 6**)，並探討取點順序造成分點不同的問題(**性質 5**)。

至此同比例分點在圖形結構上的基本性質中已大致掌握。

(二)、 度量問題

應用以上基本性質可以解決同比例分點在體積、邊長的相關問題。

性質 7 成功地將原題推廣，而這同時也說明了以下性質：

若要找到一個點連到某個單體頂點的所形成的體積成比值為 k 的等比數列，則這個點是比值為 k 的同比例分點，並且可用性質 2 的方法找到。而這件事等價於將原始點經過與 k 相關的係數(等比數列)加權得到新的點，也就是**推論 7.1**。

推論 7.1 中針對二維情況在複數座標的行為，可將其視為一種幾何變換。而這種形式可以一般化到 n 維正單體(或滿足如推論 10.1 的對稱關係)投影到複數平面上形成正$(n + 1)$邊形，找到其同比例分點複數平面上的投影，性質 16 就是在 3 維情況利用這種關係所解決。

另外在**性質 8**、**性質 9** 這兩個純計算結論中，將分點單體的體積與邊長一同考慮，意外得到**性質 10** 這個結果，進而有**推論 10.1** 的想法，對同比例分點的對稱之美更為了解。而出乎意料地，這些計算上的性質對於分析之後的軌跡問題與追逐問題有莫大幫助。

(三)、 分點軌跡

在 k 值於實數域做連續變化時，同比例分點會形成軌跡。

性質 11 中正三角形的分點軌跡是圓，推廣到任意三角形則為橢圓，可以應用為座標系中建構橢圓的方式，也就是**推論 11.1** 的結論。

性質 12 中正四面體的分點軌跡是 $y=\tan\frac{x}{2}$ 函數圖形包覆圓柱面所得的空間曲線，這部分原本只是以 GSP 繪圖作推論。在三維部分一開始對繪出的軌跡並無多想法，僅知道此軌跡會在 k = -1 時點到無窮遠，並有一漸近線，而在這個方向看去曲線呈現一個圓。之後針對分點投影到圓所在平面並計算高度，得到性質 12 這個漂亮又令人驚嘆的結論。

性質 13 以推論 7.1 的複數座標方式，將同比例分點視為一種幾何變換，對其進行 t 次變換得到以 k 維參數的軌跡方程，代換後可以得到軌跡的極座標方程。

除了座標方程外，對於這樣的軌跡目前僅知道 t = 1 為圓和 t = 2 為心臟縣這兩個特例，階數在 3 以上的軌跡尚無發現較為特別的性質。

期望未來能將這樣的形式推廣到 n 維。

(四)、 追逐問題

當同比例分點的比值 k 與階數 t 趨近無窮大，視為點每次朝另一點移動極小量並移動極多次，討論這樣的問題就等價於為追逐問題。

為解決這樣的問題，首先必須要找到適當對應的 k 與 t 值(**性質 14**)，此時分點單體的計量(性質 8)就顯得十分重要。之後針對二維與三維的情況探討，設法求出追逐到某個時刻點的位置與總軌跡長(**性質 15**、**性質 16**)。

二維狀態的追逐問題得到與文獻相符的結論。而將追逐問題推廣到空間得到的曲線，竟有與二維狀況類似卻不全相同的奇特性質：延 z 軸方向作任意比例伸縮變換與原圖形相似。

將二維追逐問題的軌跡方程：$\frac{1}{\sqrt{3}}\exp(-\frac{\alpha}{2})\cdot\exp(\frac{i\alpha}{2\sqrt{3}})$

簡化並一般化，可以得到等角螺線的一般式：$e^{\theta}\cdot e^{i\theta\times d}$

其中θ為參數，d決定不同的等角螺線。

同理對於空間追逐問題：$(\sqrt{\frac{1-h^2}{2}}\exp(-\frac{\alpha}{4})\cdot\exp(-\frac{i\alpha}{4}),\frac{1}{2}h\exp(-\frac{\alpha}{2}))$

得到：$(e^{\theta}\cdot e^{i\theta\times d},e^{\theta\times m})$

其中θ為參數，而d和m決定不同的空間等角螺線。

顯見當$m\neq 1$僅有上述提到和平面等角螺線類似的性質，也就是伸縮後相似；而當$m=1$時沒有這個性質，卻有和平面等角螺線相同的性質，也就是位似後全等。

期望未來能將這樣的形式推廣到n維，並對n維等角螺線的形式有所認識。

五、 參考文獻

[1] 2008。《中等數學》8 月號。數學奧林匹亞訓練題，40。

[2] 常庚哲，面積座標，《高中數學競賽教程》第 43、44 講，九章出版社，初版，2007。

[3] 黃家禮等，梅內勞斯定理，《幾何明珠》第四章，九章數學，初版，2000。

[4] 趙文敏，心臟線，EpisteMath 數學知識，
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_21_05_1/index.html

[5] 趙文敏，等角螺線及其他，EpisteMath 數學知識，
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_20_09_1/index.html

[6] 單體(單純形)，維基百科，
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%95%E7%BA%AF%E5%BD%A2

[7] D.M.Y. Sommerville, Introduction To The Geometry Of N Dimensions, first printed, London, Methuen, p.20,21(Order.), 1929.

評語

1. 海報呈現的比較像是經過整理過後的論文，而缺乏數學實驗的歷程及研究動機。如此的呈現方法很難獲得評審的共鳴。

2. 作品是否具有經濟學上的特殊意義？如果能夠解說清楚則本作品即可提高其應用價值。