

2014 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010022

參展科別 數學

作品名稱 挑動心弦—弦長，圖心與新的圖形辨識

得獎獎項 大會獎：四等獎

就讀學校 國立新竹女子高級中學

指導教師 陳美雪、林典蔚

作者姓名 陳彥瑜

關鍵字 圓錐曲線、統計、圖形辨識

作者簡介



我是陳彥瑜，就讀於國立新竹女子高級中學。從小我就比較偏愛數學這一科，因為它需要的並不是一味地去強記硬背，而是運用靈活的思考能力，甚至是新鮮的想像力去推敲解答。

閒暇時間我喜歡隨手塗鴉，所以在數學中對於幾何圖形頗感興趣，升上高中後能夠參加國際科展，對我來說是一個難能可貴的經驗，初次接觸圖形辨識方面的知識，覺得十分的好玩，同時更加深了對於數學這門科學的興趣。

摘要

本文所探討的是建立一新的幾何描述模型，以過圖形內一點之弦長來描述圖形的特徵值，而其中牽涉到一客觀並方便求得的觀察點（我們稱之為圖心），即弦長標準差最小點，過此點所得弦長集合就是圖形的特徵值集合。我們先研究圓與橢圓的弦長標準差，利用過圓內一點之弦長函數的反函數求出累積分配與機率密度函數，再求得子樣本的期望值與標準差，並以聯合機率密度函數求出母體的分佈。關於不規則圖形的研究，本文先集中在不規則凸圖形。我們發現不規則凸圖形中弦長標準差大小竟然有規則性，而這規則性讓我們可以發展出『篩法』，利用層層篩子逼近弦長標準差最小點。本文最後以此模型比較蛋形、蛋圓、圓形三個圖形的相似性，得到令人滿意的結果。

Abstract

This study's aim is to build a new method of taking feature values while representing images. A set of length of strings passed through an observation point by degree within the figure is used as a feature vector in pattern recognition. The so called observation point must be objective and easily found. We define it as a point that make all strings through have minimal standard deviation of length. First, we use the method in circle and ellipse to find the trend of standard deviation of the strings length through points from the center to the edge. We define a function, which contains degree the strings rotate on the point and distance between the point and center as input and length as output. Then, we invert the function and use the inverse function to get Cumulative Distribution Function and Probability Density Function of strings length. From that, we can get expected value and standard deviation of string length passed through every points and we can get the distribution of all string length by joint probability function. The last half in this study, we use the method in irregular convex figure and find a regularity of standard deviation of strings length surprisingly. Thus, according to the regularity, we can develop a 'mesh' to approximate the point of minimal standard deviation of strings length layer by layer. Finally, we use the method to compare the similarity of three figures: circle, eggcircle, and egg and get a satisfying result.

壹、 研究動機

下列三張圖，一個是最基本的圖形——圓，一個是有點接近滿月的月亮，而另一個則是蛋，光是這三張圖來比較相似性，每一個人都有他個人的主觀感受，何況自然界的形狀千變萬化。



而且現在市面上愈來愈多關於圖形辨識的應用，例如：智慧型手機的手寫輸入法、指紋辨識、虹膜辨識……，這些複雜的圖形辨識，不論是哪一種圖形辨識的方法，都需要先從最簡單的著手做起。因此，我想提供一個創新且有效率的辨識方法。

貳、 研究目的

- 一、找出過圓內一點的弦長集合的分佈情形。
- 二、找出過橢圓內一點的弦長集合的分佈情形。
- 三、觀察圓和橢圓的弦長集合後，推廣至不規則圖形。
- 四、利用『圖心』和弦長建立可描述不規則圖形的數學模型。
- 五、將上述數學模型導入圖形辨識。

參、研究設備及器材

1. 紙
2. 筆
3. 電腦(ex. GeoGebra, Mathematica, Office Excel, Office Word.....)

肆、研究方法及步驟

一、過圓內一點的弦長集合分佈

透過圓這個最對稱的圖形，觀察過圓內一點的弦長，看看這些弦長的集合有何特性。我們先求出過圓內一點的弦長函數，將弦長函數轉換成弦長的累積分配函數及機率密度函數，再求出弦長的期望值、標準差和其分佈。

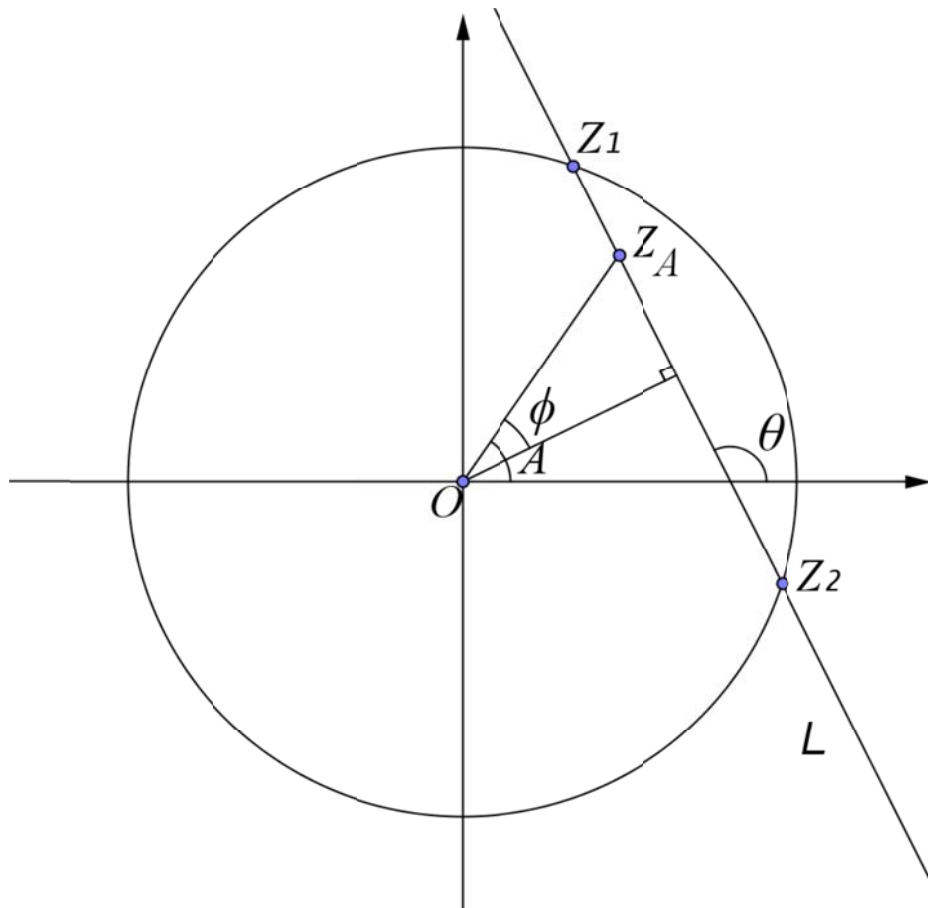
(一) 過圓內一點的弦長函數

過圓內一點的弦長函數為 $s(\phi, r) = \sqrt{4R^2 - 4r^2 \cos^2 \phi}$ ， R 為圓半徑， r 為點到圓心的距離， ϕ 為弧度， $0 \leq r < R, 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$ 。

【證明】

1. 定義符號和圖形

在複數平面上以 O 為原點做一個半徑為 R 的圓，在圓內取一點 Z_A ， Z_A 到圓心距離為 r ，過 Z_A 做一直線 L 交圓於 Z_1, Z_2 ，直線 L 與實軸的夾角為 θ ， O 點與 Z_A 的連線與實軸的夾角和過 O 點做一垂直於直線 L 的線段的夾角分別為 A 和 ϕ 。



2. 計算

令複數平面上一點 $Z_A(a+bi)$ ， $\sqrt{a^2+b^2}=r$ ，過 Z_A 的直線 L 方程式為

$Z - Z_A = tZ_\lambda, t \in \mathbb{R}, Z_\lambda = \cos\theta + i\sin\theta \dots$ 式 Φ ，而圓方程式為 $|Z| = R \dots$ 式 Θ

我們先求直線與圓的交點 Z_1, Z_2

將 Φ 式帶入 Θ 式

$$|Z_A + tZ_\lambda| = R$$

$$\Rightarrow |Z_A + tZ_\lambda|^2 = R^2$$

$$\Rightarrow (Z_A + tZ_\lambda)(\overline{Z_A + tZ_\lambda}) = R^2$$

$$\Rightarrow (Z_A + tZ_\lambda)(\overline{Z_A} + t\overline{Z_\lambda}) = R^2$$

$$\Rightarrow Z_\lambda \cdot \overline{Z_\lambda} t^2 + (Z_\lambda \cdot \overline{Z_A} + \overline{Z_\lambda} \cdot Z_A) t + (Z_A \cdot \overline{Z_A} - R^2) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-(Z_\lambda \overline{Z_A} + \overline{Z_\lambda} Z_A) \pm \sqrt{D}}{2Z_\lambda \overline{Z_\lambda}}$$

$$\text{其中 } D = (Z_\lambda \overline{Z_A} + \overline{Z_\lambda} Z_A)^2 - 4(Z_\lambda \overline{Z_\lambda})(Z_A \overline{Z_A} - R^2)$$

$$t \text{ 代入 } \Phi \text{ 式，解得交點 } Z = Z_A + \frac{-(Z_\lambda \overline{Z_A} + \overline{Z_\lambda} Z_A) \pm \sqrt{D}}{2Z_\lambda \overline{Z_\lambda}} \cdot Z_\lambda$$

$$= \frac{2Z_A \overline{Z_\lambda} - Z_\lambda \overline{Z_A} - \overline{Z_\lambda} Z_A \pm \sqrt{D}}{2\overline{Z_\lambda}}$$

$$= \frac{Z_A \overline{Z_\lambda} - \overline{Z_A} Z_\lambda \pm \sqrt{D}}{2\overline{Z_\lambda}}$$

得直線與圓之兩交點分別為

$$Z_1 = \frac{Z_A \overline{Z_\lambda} - \overline{Z_A} Z_\lambda + \sqrt{D}}{2\overline{Z_\lambda}}, \quad Z_2 = \frac{Z_A \overline{Z_\lambda} - \overline{Z_A} Z_\lambda - \sqrt{D}}{2\overline{Z_\lambda}}$$

$$\text{所以得弦長} = |Z_1 - Z_2| = \frac{|\sqrt{D}|}{|\overline{Z_\lambda}|} = \frac{|\sqrt{D}|}{|Z_\lambda|}$$

$$\therefore |\overline{Z_\lambda}| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} = 1$$

$$\therefore \frac{|\sqrt{D}|}{|Z_\lambda|} = \sqrt{D}$$

$$\text{其中 } D = (Z_\lambda \overline{Z_A} + Z_A \overline{Z_\lambda})^2 - 4|Z_\lambda|^2 (|Z_A|^2 - R^2)$$

$$= (Z_\lambda \overline{Z_A})^2 + (Z_A \overline{Z_\lambda})^2 + 2|\overline{Z_\lambda}|^2 |\overline{Z_A}|^2 - 4|\overline{Z_\lambda}|^2 |\overline{Z_A}|^2 + 4|\overline{Z_\lambda}|^2 R^2$$

$$= \left(Z_{\lambda} \overline{Z_A} - Z_A \overline{Z_{\lambda}} \right)^2 + 4R^2$$

$$Z_{\lambda} = \cos \theta + i \sin \theta, Z_A = a + bi \text{ 代入上式}$$

$$\text{得 } D = \left[(\cos \theta + i \sin \theta)(a - bi) - (a + bi)(\cos \theta - i \sin \theta) \right]^2 + 4R^2$$

$$= \left[(a \cos \theta + ai \sin \theta - bi \sin \theta + b \sin \theta) - (a \cos \theta - ai \sin \theta + bi \cos \theta + b \sin \theta) \right]^2 + 4R^2$$

$$= \left[2i(a \sin \theta - b \cos \theta) \right]^2 + 4R^2$$

$$= 4R^2 - 4(a \sin \theta - b \cos \theta)^2$$

$$= 4R^2 - 4(a^2 + b^2) \left(\sin \theta \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \cos \theta \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2$$

$$= 4R^2 - 4(a^2 + b^2) \left[\cos(90^\circ - \theta) \cos A - \sin(90^\circ - \theta) \sin A \right]^2$$

$$= 4R^2 - 4r^2 \cos^2(A + 90^\circ - \theta)$$

$$= 4R^2 - 4r^2 \cos^2 \phi$$

得弦長函數 $s(\phi, r) = \sqrt{4R^2 - 4r^2 \cos^2 \phi}$ 為二元變數函數，自變數為距離 r 和夾角 ϕ 。

接下來將弦長函數轉換成弦長的累積分配函數及機率密度函數。

(二) 過圓內一點弦長的累積分配函數及機率密度函數

若將過圓內一點的弦長集合當作子樣本，則：

子樣本的累積分配函數為

$$\begin{cases} F_s(s) = 0 & s < \sqrt{4R^2 - 4r^2} \\ F_s(s) = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \sqrt{\frac{4R^2 - s^2}{4r^2}} & \sqrt{4R^2 - 4r^2} \leq s \leq 2R, \\ F_s(s) = 1 & s > 2R \end{cases}$$

子樣本的機率密度函數為

$$\begin{cases} f_s(s) = 0 & s < \sqrt{4R^2 - 4r^2} \\ f_s(s) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{s}{\sqrt{(4R^2 - s^2)(4r^2 - 4R^2 + s^2)}} & \sqrt{4R^2 - 4r^2} \leq s \leq 2R, \\ f_s(s) = 0 & s > 2R \end{cases}$$

R 為圓半徑， r 為點到圓心的距離， s 為弦長。

【證明】

1. 想法與定義符號

令過圓內一點弦長函數為 $s(r, \phi)$

$s(r, \phi) = \sqrt{4R^2 - 4r^2 \cos^2 \phi}$ ，符號定義如(一)所述。

因為直接討論二元變數比較複雜，所以我們在圓內取一個固定點，也就是在 r 固定的情況下，即子樣本，先推導出以弦長為隨機變數的累積分配函數 $F_s(s)$ 與機率密度函數 $f_s(s)$ ，再運用機率密度函數求過圓內一點的弦長期望值 $E_s(s)$ 與變異數 $V_s(s)$ 。

2. 求累積分配函數與機率密度函數

如果固定 r ，則由 ϕ 決定的弦長集合

$S = \left\{ \sqrt{4R^2 - 4r^2 \cos^2 \phi} \mid 0 \leq r < R, 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2} \right\}$ ，此為一連續且無限元素的集

合，因為此函數在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 與 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 對稱，所以弦長樣本空間取定義域為 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 即可。

函數 $s(\phi) = \sqrt{4R^2 - 4r^2 \cos^2 \phi}$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 之間為單調遞增函數，我們可以利用 s 跟 ϕ 的一對一映射關係求累積分配函數，即取到某個區間的弦長集合的累積機率等於其對應到角度區間的幾何機率。故把弦長函數轉換成反函數，再除以整個定義域區間的長度 $\frac{\pi}{2}$ ：

$$\text{令 } s = \sqrt{4R^2 - 4r^2 \cos^2 \phi}$$

$$\Rightarrow s^2 = 4R^2 - 4r^2 \cos^2 \phi$$

$$\Rightarrow \cos^2 \phi = \frac{4R^2 - s^2}{4r^2}$$

$$\Rightarrow \phi = \cos^{-1} \sqrt{\frac{4R^2 - s^2}{4r^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\phi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \sqrt{\frac{4R^2 - s^2}{4r^2}}$$

$$\text{求得累積分配函數 } F_s(s) = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \sqrt{\frac{4R^2 - s^2}{4r^2}}$$

$$\text{嚴格定義為 } \begin{cases} F_s(s) = 0 & s < \sqrt{4R^2 - 4r^2} \\ F_s(s) = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \sqrt{\frac{4R^2 - s^2}{4r^2}} & \sqrt{4R^2 - 4r^2} \leq s \leq 2R \\ F_s(s) = 1 & s > 2R \end{cases}$$

然而，光是累積分配函數不足以我們進行運算，我們還需要進一步得到

機率密度函數 $f_s(s)$ 就是 $F_s(s)$ 的導數，微分求得機率密度函數為

$$\begin{cases} f_s(s) = 0 & s < \sqrt{4R^2 - 4r^2} \\ f_s(s) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{s}{\sqrt{(4R^2 - s^2)(4r^2 - 4R^2 + s^2)}} & \sqrt{4R^2 - 4r^2} \leq s \leq 2R \\ f_s(s) = 0 & s > 2R \end{cases}$$

於是，機率密度函數圖所占的面積等於隨機變數在該區域的累積機率。

我們求出機率密度函數後，就可順利求出子樣本的期望值與變異數。

3. 求期望值與變異數

期望值 $E_s(s)$ ：

$$\begin{aligned} E_s(s) &= \int_{\sqrt{4R^2 - 4r^2}}^{2R} s \cdot f_s(s) ds \\ &= \int_{\sqrt{4R^2 - 4r^2}}^{2R} s \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{s}{\sqrt{(4R^2 - s^2)(4r^2 - 4R^2 + s^2)}} ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{4R^2 - 4r^2}}^{2R} \frac{s^2}{\sqrt{(4R^2 - s^2)(4r^2 - 4R^2 + s^2)}} ds \end{aligned}$$

以 *Mathematica* 運算定積分的結果為 $\frac{2}{\pi} \cdot 2R \cdot E\left(\frac{r^2}{R^2}\right)$

再來看看變異數：

$$\begin{aligned} V_s(s) &= E_s(s^2) - [E_s(s)]^2 \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{4R^2 - 4r^2}}^{2R} \frac{s^3}{\sqrt{(4r^2 - 4R^2 + s^2)(4R^2 - s^2)}} ds - [E_s(s)]^2 \end{aligned}$$

以 *Mathematica* 運算定積分的結果為

$$\frac{1}{\pi} \times 2\pi(2R^2 - r^2) - \left[2R \cdot E\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \times \frac{2}{\pi} \right]^2, \text{ 其中 } E\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \text{ 為第二類完全橢圓積分。}$$

分。

(三) 母體

母體機率密度函數

$$f_M(r, s) = f(r) \cdot f_s(s) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{rs}{R^2 \sqrt{(4R^2 - s^2)(4r^2 - 4R^2 + s^2)}}, \text{ } R \text{ 為圓半徑, } r \text{ 為}$$

點到圓心的距離, s 為弦長。

【證明】

1. 想法與定義符號

接下來, 我們討論母體的情況, 也就是 r 和 ϕ 皆會變動下, 母體由

①圓內任取一點 A , ②過點 A 任取弦長, 兩個獨立變數一起構成, 其映射情形如下:

$$\begin{array}{l} S_k = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots\} \\ \text{子樣本 (固定 } r) \text{ 令為 } r_k \text{ 的映射情形} \quad \quad \quad \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n, \dots\} \end{array}$$

母體的映射情形 $\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_n \quad \dots$

$$\begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_k \\ \vdots \end{array} \left\{ \begin{array}{cccccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1n} & \dots \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2n} & \dots \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \dots & S_{3n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ S_{k1} & S_{k2} & S_{k3} & \dots & S_{kn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array} \right\}$$

構成母體的變數有 r, ϕ 兩個，所以當我們要計算母體弦長的期望值時，需要用到聯合機率密度函數，因此，除了 $f_s(s)$ ，我們還需要另外求出 $f(r)$ ，為在圓內取到離圓心距離小於等於 r 的點的機率密度函數。

2. 計算

令一圓圓心為 O ，半徑為 R ，若任意在圓內取一點，則距離圓心小於或等於 r 的機率為 $\frac{r^2}{R^2}$ ，故圓內取一點距離圓心小於等於 r 的累積分配函數 $F(r) = \frac{r^2}{R^2}$ ，得機率密度函數 $f(r) = F'(r) = \frac{2r}{R^2}$ ，因為在圓內會取到哪個點與過點會取到哪條弦的機率互相獨立，故聯合機率密度函數

$$f_M(r, s) = f(r) \cdot f_s(s) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{rs}{R^2 \sqrt{(4R^2 - s^2)(4r^2 - 4R^2 + s^2)}} ,$$

所以也可以順利求得母體期望值 $E_M(s)$ 為

$$\begin{aligned} E_M(s) &= \int_0^R \int_{\sqrt{4R^2 - 4r^2}}^{2R} s \cdot f_s(s) \cdot f(r) ds dr \\ &= \int_0^R \int_{\sqrt{4R^2 - 4r^2}}^{2R} s \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{s}{\sqrt{(4R^2 - s^2)(4r^2 - 4R^2 + s^2)}} \cdot \frac{2r}{R^2} ds dr \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{R^2} \int_0^R \int_{\sqrt{4R^2 - 4r^2}}^{2R} \frac{s^2 r}{\sqrt{(4R^2 - s^2)(4r^2 - 4R^2 + s^2)}} ds dr \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{R^2} \int_0^R 2Rr \cdot E\left(\frac{r^2}{R^2}\right) dr \\ &= \frac{8}{\pi R} \int_0^R r \cdot E\left(\frac{r^2}{R^2}\right) dr \\ &= \frac{8}{\pi R} \cdot \frac{2R^2}{3} \\ &= \frac{16R}{3\pi} \end{aligned}$$

及母體變異數 $V_M(s)$ 為

$$V_M(s) = E_M(s^2) - (E_M(s))^2$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } E_M(s^2) &= \int_0^R \int_{\sqrt{4R^2-4r^2}}^{2R} s^2 \cdot f_s(s) f(r) ds dr \\ &= \int_0^R \int_{\sqrt{4R^2-4r^2}}^{2R} s^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{s}{\sqrt{(4R^2-s^2)(4r^2-4R^2+s^2)}} \cdot \frac{2r}{R^2} ds dr \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{R^2} \int_0^R \int_{\sqrt{4R^2-4r^2}}^{2R} \frac{s^3 r}{\sqrt{(4R^2-s^2)(4r^2-4R^2+s^2)}} ds dr \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{R^2} \int_0^R \pi r (2R^2 - r^2) dr \\ &= \frac{4}{R^2} \int_0^R r (2R^2 - r^2) dr \\ &= \frac{4}{R^2} \left[R^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \\ &= \frac{4}{R^2} \left[R^4 - \frac{1}{4} R^4 \right] \\ &= 3R^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_M(s) = E_M(s^2) - (E_M(s))^2$$

$$= 3R^2 - \left(\frac{16R}{3\pi} \right)^2$$

$$= R^2 \left[3 - \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_M(s) = \sqrt{V_M(s)}$$

$$= \sqrt{R^2 \left[3 - \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 \right]}$$

$$\doteq 0.343 R$$

(四) 實驗

母體期望值上下一個標準差為 $[1.698R - 0.343R, 1.698R + 0.343R]$

$$= [1.355R, 2R]$$

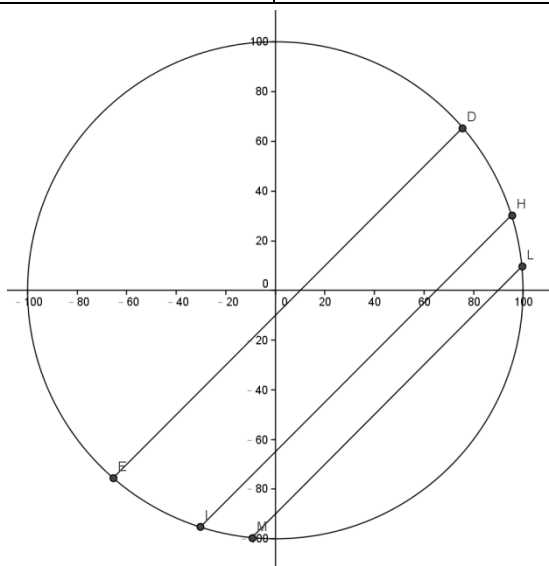
若圓內取一點離圓心 r ，過此點的最短弦長在上下一個標準差內，則 r 的範圍為：

$$2\sqrt{R^2 - r^2} > 1.355R \Rightarrow R^2 - r^2 > 0.45900625R^2 \Rightarrow r < 0.7355227732708213R$$

我們計算出在母體期望值上下一個標準差的範圍，發現過該範圍內的點所取出的弦長，彼此之間的相似性會較高，我們也實際畫圖操作。

做一個半徑為 100 公分的圓，分別在 10 公分、65 公分、90 公分處取點，過此三點每 1 度取 1 條弦長，各取 180 條弦，我們將 10 公分、65 公分、90 公分的 180 條弦，做成 3 組向量，即可用兩兩的夾角餘弦值來比較其相似性，結果如下表，65 公分處的弦長樣本分佈較接近 10 公分處的弦長樣本分佈。

	夾角餘弦值
10 公分與 65 公分	0.99560685
65 公分與 90 公分	0.98686013



二、過橢圓內一點的弦長集合的分布

(一) 過橢圓內任意點之弦長期望值對橢圓範圍做圖

因為橢圓的弦長函數，導出為 $\frac{2ab\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \theta - r^2 \cos^2 \phi}}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$ ， a 為半長軸， b

為半短軸， $c^2 = a^2 - b^2$ ， r 為取到的點離

中心距離， θ 為弦的轉角， ϕ 為取點至中

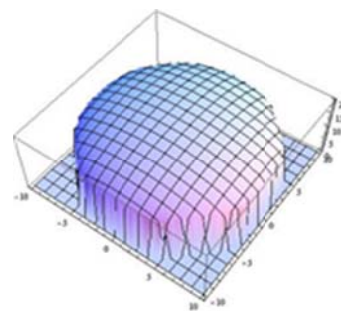
心與長軸的逆時針夾角。這個三元函數要

轉換成累積分配函數有其困難性，所以我

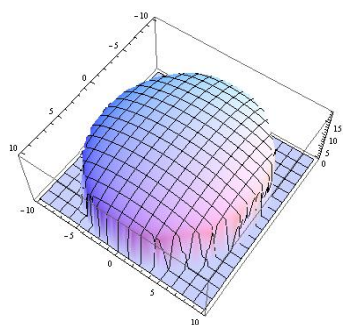
們直接用 *Mathematica* 畫出從圓到九種橢

圓的圖內每個點的標準差和期望值，觀察

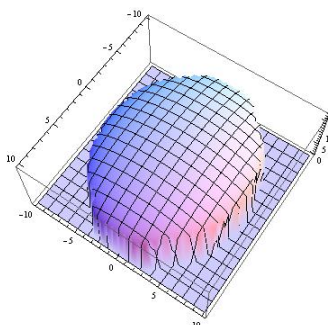
其趨勢。



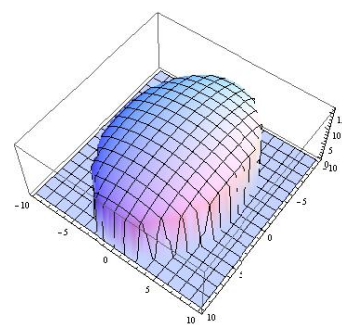
$a=10, b=10$



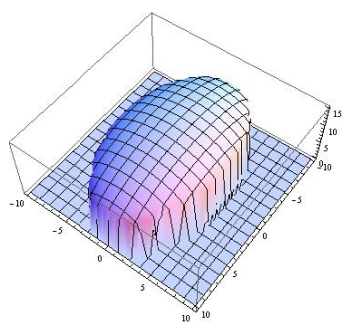
$a=10, b=9$



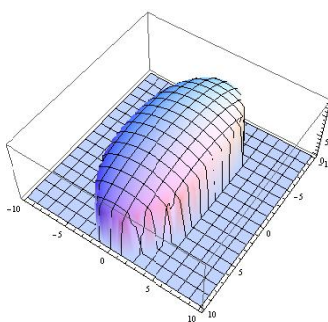
$a=10, b=8$



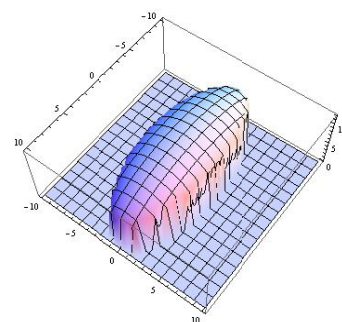
$a=10, b=7$



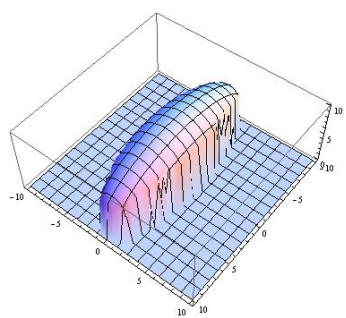
$a=10, b=6$



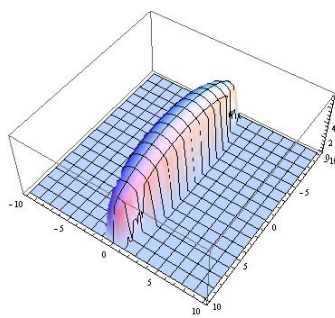
$a=10, b=5$



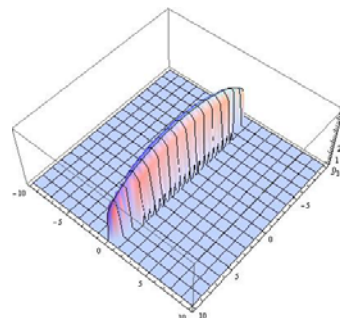
$a=10, b=4$



$a=10, b=3$



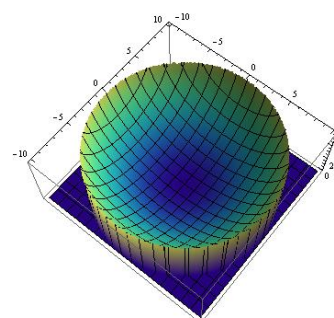
$a=10, b=2$



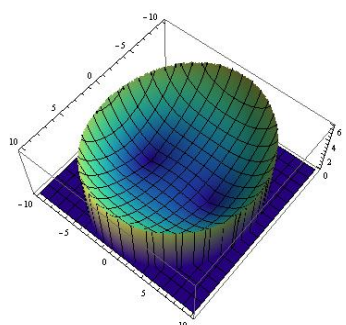
$a=10, b=1$

(二) 過橢圓內任意點之弦長標準差對橢圓範圍做圖

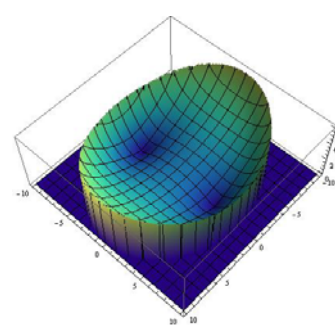
由圖發現，弦長標準差比較有高低起伏，因此我們覺得標準差在分析弦長集合上可能有一些特別的性質，所以進一步研究不規則圖形的弦長標準差。



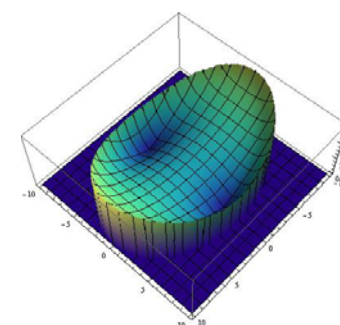
$a=10, b=10$



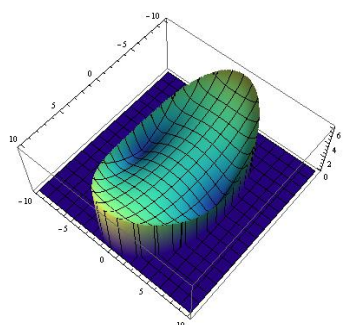
$a=10, b=9$



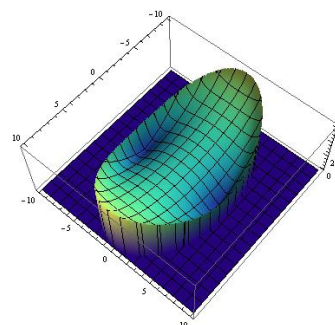
$a=10, b=8$



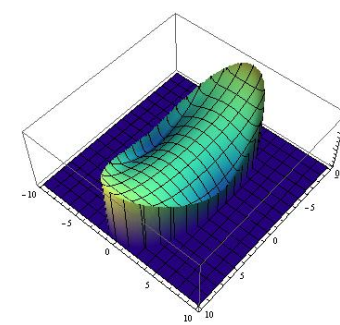
$a=10, b=7$



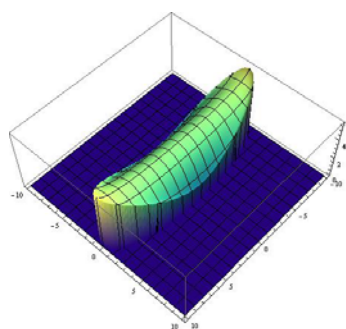
$a=10, b=6$



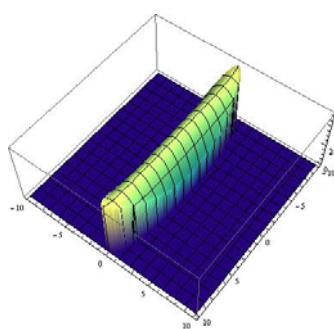
$a=10, b=5$



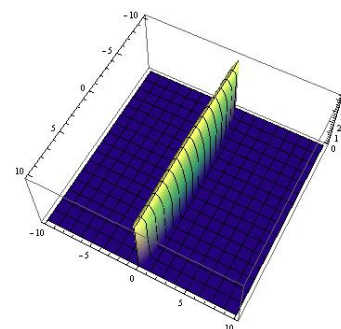
$a=10, b=4$



$a=10, b=3$



$a=10, b=2$



$a=10, b=1$

三、任意封閉凸圖形內之弦長期望值與標準差

(一) 建立不規則凸圖形的數學模型的重要定理

觀察圓和橢圓上過圖內一點的弦長分佈情況後，我們先有以下幾個關於封閉凸圖形的猜想，然後嘗試以我們所學去證明，這些證明的成功讓我們找到不規則圖形的規則，並足以建立實用的數學模型。定理如下：

1. 封閉凸圖形內最少必有一點，從這個點通過的所有弦，弦長標準差最小（弦長標準差最小點）。
2. 封閉凸圖形內若非只有一點弦長標準差最小點，也必定是有限多點，並且兩兩對稱。
3. 封閉凸圖形若非對稱，則其內每一點弦長標準差皆相異。
4. 封閉凸圖形若非對稱，則弦長標準差最小點唯一。
5. 以圖形內一弦為定義域，弦長變異數函數為凹向上函數。

(二) 證明

定理 1. 任何封閉凸圖形必至少有一標準差最小點。

利用柯西不等式證明弦長標準差有極小值。

【證明】

令 $X(\theta)$ 為過封閉凸圖形內一點，與水平軸逆時針夾角為 θ 之弦長，

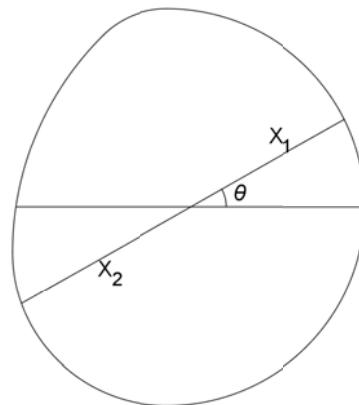
$0 \leq \theta < \pi$ ， $X_1(\theta)$, $X_2(\theta)$ 各為點到邊上之半弦長，故

$$X(\theta) = X_1(\theta) + X_2(\theta),$$

$$\Rightarrow \text{變異數 } \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= E(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) - [E(X)]^2$$

$$= E(X_1^2) + 2E(X_1X_2) + E(X_2^2) - [E(X)]^2$$



由函數輸出值之平均的定義可得

$$\begin{aligned} E(X_1^2) + E(X_2^2) &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi X_1^2(\theta) d\theta + \int_0^\pi X_2^2(\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\pi \frac{1}{2} X_1^2(\theta) d\theta + \int_0^\pi \frac{1}{2} X_2^2(\theta) d\theta \right] \end{aligned}$$

其中 $\int_0^\pi \frac{1}{2} X_1^2(\theta) d\theta + \int_0^\pi \frac{1}{2} X_2^2(\theta) d\theta$ 為圖形面積

設為常數 k

$$\text{則原式為 } \frac{2}{\pi} \cdot k + 2E(X_1X_2) - E(X) \cdot E(X)$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot k + 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X_1(\theta) X_2(\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X(\theta) d\theta \cdot E(X)$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot k + \frac{1}{\pi} \left[2 \int_0^\pi X_1(\theta) X_2(\theta) d\theta - \int_0^\pi (X_1(\theta) + X_2(\theta)) d\theta \cdot E(X) \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot k - \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi (X_1(\theta) + X_2(\theta)) \cdot E(X) d\theta - 2 \int_0^\pi X_1(\theta) X_2(\theta) d\theta \right]$$

由於弦長函數 $X(\theta)$ 和半弦長函數 $X_1(\theta), X_2(\theta)$ 在 $0 \leq \theta < \pi$ 的區間內積分都是有意義的，故我們將上述積分式轉換成希爾伯特 (Hilbert) 空間內無限維向量的內積。

令 I 為 $I(\theta)=1, 0 \leq \theta < \pi$ 所張出來的向量

$$\begin{aligned} \text{則原式為 } & \frac{2}{\pi} \cdot k - \frac{1}{\pi} \left[\langle \overline{X}(X_1 + X_2), I \rangle - \langle 2X_1X_2, I \rangle \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot k - \frac{1}{\pi} \langle \overline{X}(X_1 + X_2) - 2X_1X_2, I \rangle \\ &\geq \frac{2}{\pi} \cdot k - \frac{1}{\pi} \|\overline{X}(X_1 + X_2) - 2X_1X_2\| \cdot \|I\| \end{aligned}$$

等號成立於 $\overline{X}(X_1 + X_2) - 2X_1X_2$ 與 I 平行時，如果沒有平行，也一定可以

找到 $\overline{X}(X_1 + X_2) - 2X_1X_2$ 與 I 夾角最小時， $\text{Var}(X)$ 也最小。

定理 2. 封閉凸圖形內若非只有一點弦長標準差最小點，也必定是有限多點，並且兩兩對稱，圖形亦對稱。

定理 3. 封閉凸圖形若非對稱，則其內每一點弦長標準差皆相異。

定理 4. 封閉凸圖形若非對稱，則弦長標準差最小點唯一。

(1) 利用傅立葉級數來表示凸圖形內一點的弦長函數，並證明其標準差函數不連續。

【證明】

令過凸圖形內一點 P 的半弦長為

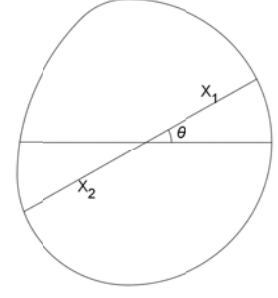
$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)], \quad \theta=0 \sim 2\pi$$

，則如右圖，由 x_1 構成之半弦長函數為

$$f_1(\theta) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)], \quad \theta=0 \sim \pi$$

$$f_2(\theta) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n} \cos(2n\theta) + b_{2n} \sin(2n\theta)]$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1} \cos((2n-1)\theta) + b_{2n-1} \sin((2n-1)\theta)], \quad \theta=0 \sim \pi$$



由求傅立葉級數係數公式可得

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta = a_0 + \frac{2}{\pi} \left[b_1 + \frac{1}{3} b_3 + \frac{1}{5} b_5 + \dots \right], \quad \text{即 } E(X_1), \quad \text{同理,}$$

$$\beta = a_0 - \frac{2}{\pi} \left[b_1 + \frac{1}{3} b_3 + \frac{1}{5} b_5 + \dots \right], \quad \text{即 } E(X_2),$$

$$\text{全弦長函數 } f_T(\theta) = 2a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n} \cos(2n\theta) + b_{2n} \sin(2n\theta)], \quad \theta=0 \sim \pi,$$

$$\text{全弦長期望值 } E(X) = 2a_0.$$

若凸圖形內非常接近兩點的標準差為 $V_1(X)$ 、 $V_2(X)$ ，相減後得

$$[E_1(X)]^2 - [E_2(X)]^2 - [2E_1(X_1X_2) - 2E_2(X_1X_2)], \quad \text{非常接近兩點的弦長}$$

$$\text{函數展開之傅立葉級數也非常相近, } [E_1(X)]^2 - [E_2(X)]^2 = 0.$$

來看看 $E_1(X_1X_2) - E_2(X_1X_2)$

$$E(X_1X_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(\theta) f_2(\theta)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\alpha\beta + (a_2^2 + b_2^2 + a_4^2 + b_4^2 + \dots) - (a_1^2 + b_1^2 + a_3^2 + b_3^2 + \dots) \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} [a_0^2 + (a_2^2 + b_2^2 + a_4^2 + b_4^2 + \dots) - (a_1^2 + b_1^2 + a_3^2 + b_3^2 + \dots)]$$

$$- \frac{4}{\pi^2} (b_1 + \frac{1}{3} b_3 + \frac{1}{5} b_5 + \dots)^2]$$

因為 $f(x)$ 為平方可積函數，故其傅立葉展開之係數平方和收斂。

而觀察 $(b_1 + \frac{1}{3}b_3 + \frac{1}{5}b_5 + \dots)^2$ 之一項，令為討論項。

$E_1(X_1X_2) - E_2(X_1X_2)$ 會產生

$$(b_1 + \frac{1}{3}b_3 + \frac{1}{5}b_5 + \dots)^2 - (d_1 + \frac{1}{3}d_3 + \frac{1}{5}d_5 + \dots)^2,$$

其中 $(d_1 + \frac{1}{3}d_3 + \frac{1}{5}d_5 + \dots)^2$ 為 $E_2(X_1X_2)$ 中之討論項。

其結果為

$$\left[(b_1 + d_1) + \frac{1}{3}(b_3 + d_3) + \frac{1}{5}(b_5 + d_5) + \dots \right] \left[(b_1 - d_1) + \frac{1}{3}(b_3 - d_3) + \frac{1}{5}(b_5 - d_5) + \dots \right]$$

因為兩點的弦長函數的傅立葉展開非常接近，

$$\text{故上式右邊可寫成 } \left[\varepsilon_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \frac{1}{5}\varepsilon_3 + \dots \right] = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots) \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots \right),$$

其中， $\varepsilon_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 為極小值但正負不定的數列，

而傅立葉係數 $b_n = \int_0^{2\pi} f_1(x) \sin nx dx, d_n = \int_0^{2\pi} f_2(x) \sin nx dx$ 會因為我

們的命題，當 n 越大則數列 ε_i 內正負的個數差距越大，正比較多或負比較多由圖形決定

上式可看成極小值 ε 乘上廣義調和級數構成的無窮級數，故不定型。

因此標準差函數不連續。

(2) 以弦長變異數的值不連續證明弦上兩點 Q, R ，若 $V(A) = V(B)$ ，則

$E(A_1A_2) = E(B_1B_2)$ ， $E(A) = E(B)$ ，其中 A 為過 Q 之所有弦長構成的樣本集合、 B 為過 R 之所有弦長構成的樣本集合， A_1, A_2, B_1, B_2 各為 Q, R 到邊上之半弦長。

【證明】

假設 $E(A_1A_2) \neq E(B_1B_2)$

因為 $V(A) = V(B)$

所以 $[E(A)]^2 - 2E(A_1A_2) = [E(B)]^2 - 2E(B_1B_2)$

$\Rightarrow [E(A)]^2 - [E(B)]^2 = 2E(A_1A_2) - 2E(B_1B_2)$

在 Q, R 的右側取逼近點，逼近點的變異數令為 $V(\alpha) = V(A + \delta_1)$ 、

$V(\beta) = V(B + \delta_2)$ ，

其中 δ_1, δ_2 為含有 $+\delta, -\delta, 0$ 的向量， δ 為極小弦長差，

則 $V(\alpha) - V(\beta) = E(\alpha^2) - [E(\alpha)]^2 - E(\beta^2) + [E(\beta)]^2$

$= E[(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)] - E(\alpha - \beta)E(\alpha + \beta)$

$= E[(A - B + \delta_1 - \delta_2)(A + B + \delta_1 + \delta_2)]$

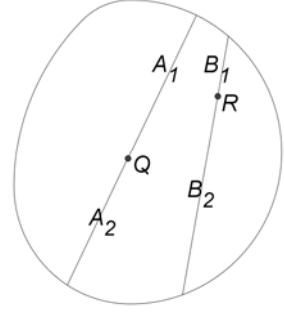
$- E(A - B + \delta_1 - \delta_2)E(A + B + \delta_1 + \delta_2)$

$= E[(A - B)(A + B) + 2A\delta_1 - 2B\delta_2 + \delta_1^2 - \delta_2^2] - E(A - B)E(A + B)$

因為 $E[(A - B)(A + B)] - E(A - B)E(A + B) = V(A) - V(B) = 0$ ，

所以原式可得 $2E(A\delta_1) - 2E(B\delta_2)$ ，

轉成希爾伯特內積得 $2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot (\langle A, \delta_1 \rangle - \langle B, \delta_2 \rangle)$ ，



因為 δ_1, δ_2 為含 $+\delta, -\delta, 0$ 的向量，故其範數為 $\delta\sqrt{\pi}$ ，

上式得 $2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \delta \cdot (\langle A, I_1 \rangle - \langle B, I_2 \rangle)$ ， I_1, I_2 為 A, B 元素與其期望值之方

向張開的向量，比期望值大為 1，比期望值小為 -1，相同為 0，

因為 $V(A) = V(B)$ ，

所以 $\langle A, I_1 \rangle - \langle B, I_2 \rangle = 0$ ，故 $V(\alpha) = V(\beta)$ ，

即可找到右逼近讓 $[E(A + \delta_1)]^2 - [E(B + \delta_2)]^2 =$

$2E[(A_1 + \delta_1)(A_2 + \delta_1)] - 2E[(B_1 + \delta_2)(B_2 + \delta_2)]$

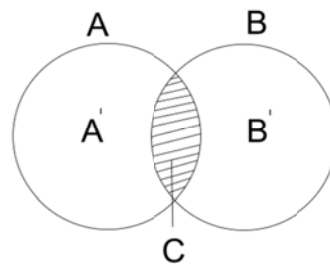
但左式連續而右式不連續，故矛盾。

因此得證：若 $V(A) = V(B)$ ，則 $E(A_1 A_2) = E(B_1 B_2)$ ， $E(A) = E(B)$ 。

(3) 以樣本集合會發生矛盾來證明若 $V(A) = V(B)$ 則 A 樣本 = B 樣本。

【證明】

假設 $A \neq B$ ， A 樣本集合與 B 樣本集合有部份交集。



如圖 $A = A' + C$ ， $B = B' + C$ ， $A \cap B = C$ ，

假設 A 樣本中最長弦為 a 、最短弦為 b ， B 樣本中最長弦為 c 、最短弦為 d ，因為 $V(A) = V(B)$ ，所以 c, d 長度不可能介於 a, b 間， a, b 長度也不可能介於 c, d 間。

假設 $A'(\theta)$ 定義域為 $[\theta_1, \theta_2]$ ， $B'(\theta)$ 定義域為 $[\theta_3, \theta_4]$ ，其中必定

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_4 - \theta_3。$$

$$E(A') = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} A'(\theta) d\theta, \quad E(B') = \frac{1}{\theta_4 - \theta_3} \int_{\theta_3}^{\theta_4} B'(\theta) d\theta$$

將 $B'(\theta)$ 中的 θ 變換為 $\theta' + \theta_3 - \theta_1$ ，新函數 $B''(\theta') = B'(\theta' + \theta_3 - \theta_1)$ ，

θ' 再換回 θ ，

$$\text{得 } B''(\theta) = B'(\theta + \theta_3 - \theta_1)，\text{ 則 } E(B'') = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} B''(\theta) d\theta = E(B')，$$

令 $P(\theta) = B''(\theta) - A'(\theta)$ ，因為 $B''(\theta)$ ， $A'(\theta)$ 連續並且定義域相同，

若 $E(P) = 0$ ，則 P 的函數值跨過正負，其中必有一為 0。

與 $A' \cap B' = \emptyset$ 矛盾，故 $A = B$ 。

由 (1) (2) (3) 證明出若圖形內兩點弦長標準差相等，則弦長樣本相同，即圖形為對稱。

我們實際做圖發現，圖形會以此兩點的中垂線為鏡面對稱。若圖形不對稱，則圖形內找不到弦長樣本相同的點，即弦長標準差皆不同。由定理 1 可知即使圖形不對稱，也一定有一弦長標準差最小點。因為弦長標準差的值為不連續，故弦長標準差做圖凹向上，卻不符合介值定理在這邊是正確的。

定理 5. 以圖形內一弦為定義域，弦長變異數函數為凹向上函數。

雖然圖形內某弦上之弦長變異數函數不連續，我們無法求函數的微分，但是觀察其極相近兩點的斜率，可得弦長變異數函數為凹向上函數。

【證明】

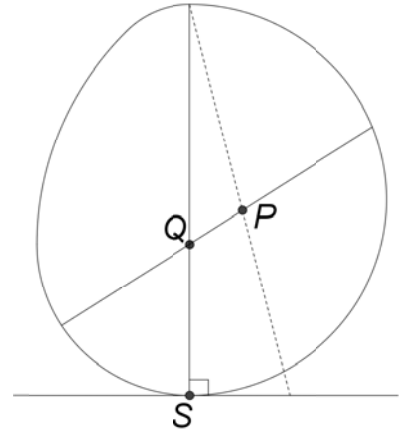
令弦上一點 Q ， A 為過 Q 之所有弦長構成的樣本集合， P 為動點， δ 為 P 的弦長與 Q 的弦長極小弦長差，當 P 逼近 Q 時， $\overline{PQ} = \Delta P$ ，

$$\begin{aligned} \text{斜率為} & \frac{V(A+\delta)-V(A)}{\Delta P} \\ &= \frac{V(\delta)+2\text{Cov}(A,\delta)}{\Delta P} \\ &= \frac{E(\delta^2)-[E(\delta)]^2+2E(A\delta)-2E(A)E(\delta)}{\Delta P} \end{aligned}$$

當 P 逼近 A 時， ΔP 趨近於 δ ， $\frac{E(\delta^2)}{\Delta P}$ 趨近於 0， $\frac{E(\delta)^2}{\Delta P}$ 趨近於 0，故原式為 $\frac{2E(A\delta)-2E(A)E(\delta)}{\Delta P}$ 。

因為 $\Delta P \doteq \delta$ ，所以可得上式為 $2E(AI)-2E(A)E(I)$ ，其中 I 為 $I(\theta)$ 的函數值， $I(\theta)=1$ or -1 or 0 ， $\theta=[0,\pi]$ 。

(如圖)當圖形邊上一點 S 剛好為某條 A 弦的切點，則 I 函數值為 0，而 S 之一邊的所有 I 為 1，另一邊的 I 為 -1 ，哪邊為正，哪邊為負，視圖形形狀而定，且可找到圖形邊上另一點 T 為另一條 A 弦之切點， I 函數值亦為 0。



討論

(1) 斜率為 0 時：

$$\text{因為 } \text{Cov}(A,\delta)=0, \quad 2E(AI) \neq 2E(A)E(I)$$

$$\text{故斜率為 0 時, } 2E(AI)=0, \quad 2E(A)E(I)=0$$

$\Rightarrow E(I)=0$, 則 I 函數內 1 的數目等於 -1 的數目, 即兩切點的弦相交

為 $\frac{\pi}{2}$ (定義域之半) 並且

$\langle A, I \rangle = 0$, 例如橢圓(如圖),

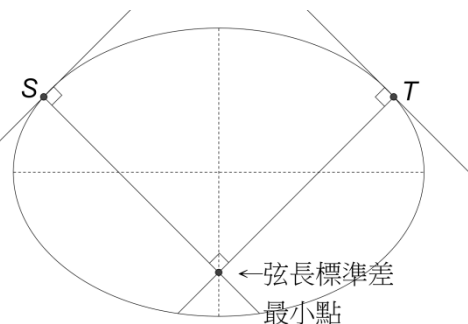
標準差最小點出現在短軸上,

因為過短軸上某點可符合上

述兩條件, 另外, 過中心點

亦符合上述兩條件, 故斜率

為 0, 為坡峰。



(2) 離標準差最小點越遠時, A 與 I 的函數值均離其期望值越遠,

$|\text{Cov}(A, I)|$ 越大, 即斜率絕對值越大。

由(1)(2)得證, 以一弦為定義域, 弦長變異數函數為凹向上。

如果圖形對稱, 則會出現斜率亦為 0 之坡峰。

四、過凸圖形內一點的弦長函數與傅立葉的關係

(一) 傅立葉係數與弦長函數的關係

若弦長函數 $f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$, $\theta=0 \sim 2\pi$

$$a_0 = \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$\text{令 } z = \cos x + i \sin x$$

$$\frac{dz}{dx} = -\sin x + i \cos x$$

$$a_1 = \int_0^\pi f(x) \cos x dx$$

$$b_1 = \int_0^\pi f(x) \sin x dx$$

$$\begin{aligned} [-b_1 + ia_1] &= -\int_0^\pi f(x) \sin x dx + i \int_0^\pi f(x) \cos x dx \\ &= \int_0^\pi f(x) (-\sin x) dx + \int_0^\pi f(x) i \cos x dx \\ &= \int_0^\pi f(x) (-\sin x + i \cos x) dx \\ &= \oint_c f(x) dz \\ &= \oint_c |f(z)| dz \end{aligned}$$

c 為複函數積分的路徑，為單位圓。

$z = \cos x + i \sin x$, $f(z) = f_x z$, 既 x 為輻角, $f(x)$ 為長度。因為絕對值有奇點，封閉積分不為零。

$$(-b_1 + ia_1) = \oint_c |f(z)| dz$$

$$(-b_2 + ia_2) = \oint_c |f(z)| dz^2$$

$$(-b_n + ia_n) = \oint_c |f(z)| dz^n = \oint_c |f(z)| z^{n-1} dz$$

所以在我們的命題裡，傅立葉係數是弦長在圓的同角度切線分量上的投影。

(二) 關於我們圖形辨識的命題的離散型傅立葉轉換

離散型傅立葉展開如下：

其中 Y 矩陣為離散型傅立葉係數矩陣， F 為傅立葉矩陣， X 為弦長樣本矩陣

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow Y = FX$$

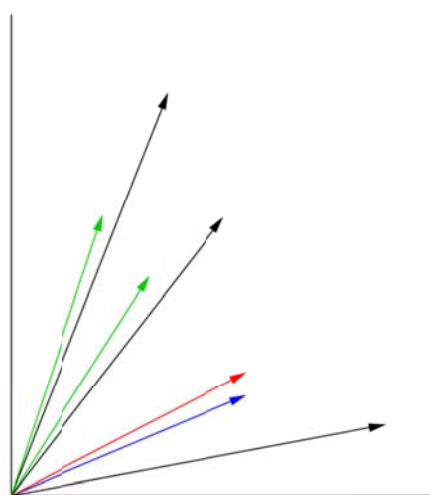
係數平方和可以得到 $Y^T Y = X^T F^T F X = X^T X$ ，為弦長樣本平方和，我們計算離散型傅立葉與傅立葉級數的誤差如下：

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi [f(x) - F(x)]^2 dx \\ &= \int_0^\pi [f^2(x) - F^2(x)] dx - 2 \int_0^\pi f(x) F(x) dx \\ &= \|f(x)\|^2 - \|F(x)\|^2 - 2 \int_0^\pi f(x) F(x) dx \end{aligned}$$

(三) 我們的命題的傅立葉係數在希爾伯特空間內的討論

因為傅立葉級數可看成在無限多組正餘弦組成的正交基上展開的向量，我們也將離散型傅立葉的係數向量內加入無限多個 0，成為無限維向量，於是本研究可以畫成如下面的向量圖形：

此圖為希爾伯特空間示意圖，黑色向量與紅色向量都是無窮傅立葉係數構成的向量，而紅色向量是長度最短者，就是弦長標準差最小點所構成的。綠色向量與藍色向量則為抽樣出的離散型傅立葉係數加上無窮個零所構成的向量，藍色向量是當中最接近紅色的，就是我們的目標。



由上述五個定理，發展出逼近弦長標準差最小點的『篩法』。

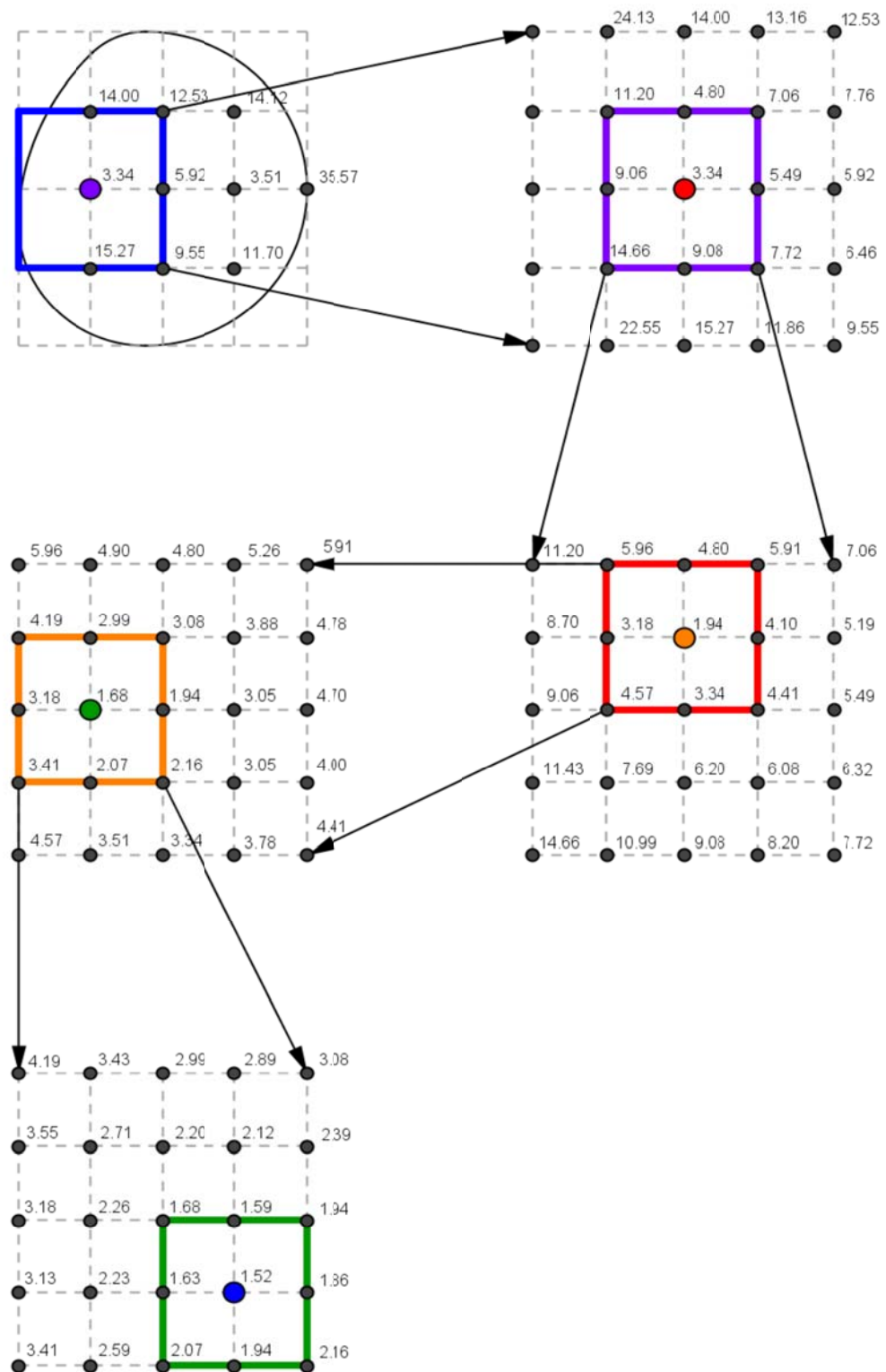
由上述五個定理，我們知道離弦長標準差最小點越遠者，弦長標準差越大，而弦長標準差做圖的斜率也越大。故當我們取有限個點比較其弦長標準差大小時，弦長標準差越小者越接近弦長標準差最小點，由此層層迭代即可逼近弦長標準差最小點。

五、弦長、弦長標準差最小點與圖形相似性

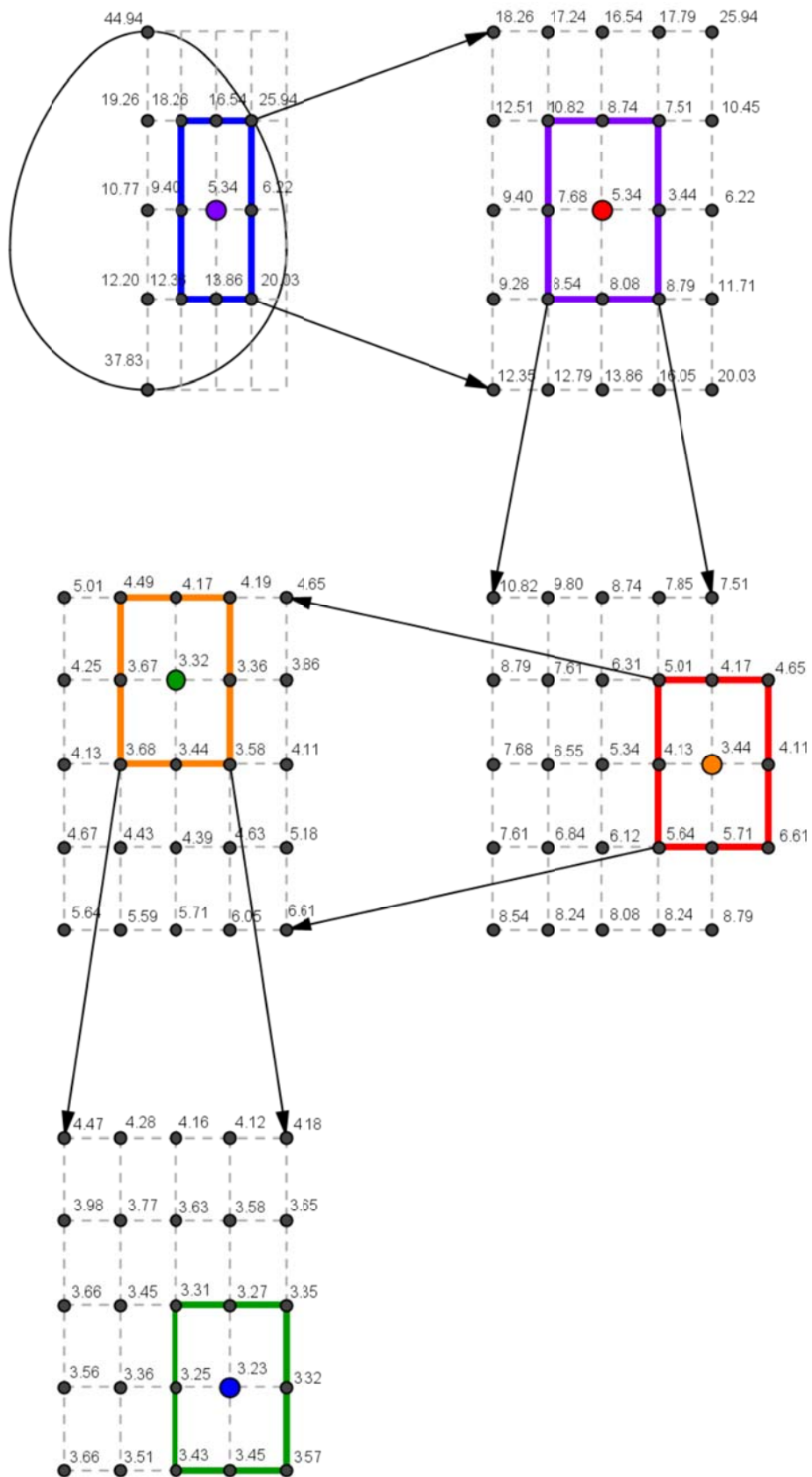
(一) 篩子流程圖

我們用 5×5 的篩子將整個圖形圍住，因為蛋形為一左右對稱之圖形，所以僅篩對稱的一半即可，接下來我們計算出過各網點之弦長標準差，再取標準差最小網點四周的範圍，重覆此動作篩取 5 次，以逼近圖形內弦長標準差最小點。

1. 蛋圓篩子流程圖



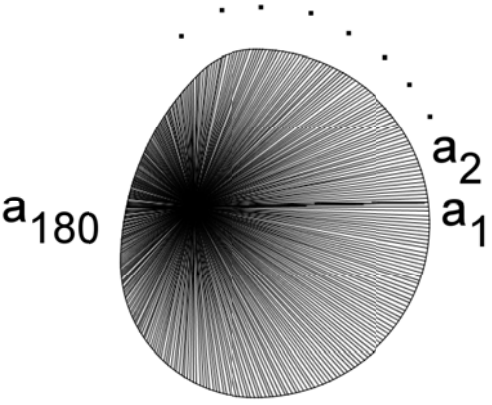
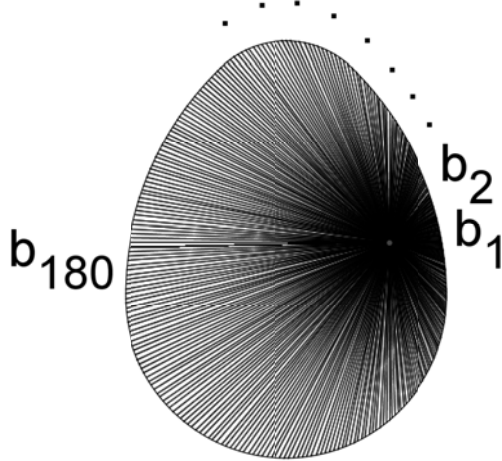
2. 蛋形篩子流程圖



(二) 利用全弦長比較蛋圓、圓與蛋形的相似性

我們以篩法找出接近弦長標準差最小值的點，以此點為觀察點，過該點每隔 1 度取一條弦，測量此 180 條弦長，將 180 條弦長依序排成一組向量，再以向量計算蛋圓與圓、蛋形與圓和蛋圓與蛋形的夾角餘弦，夾角餘弦值愈大者即相似性愈高。

令 C 為圓弦長之向量， EC 為蛋圓弦長之向量， E 為蛋形弦長之向量

1. 蛋圓與圓	2. 蛋形與圓
	
$EC = (a_1, a_2, \dots, a_{180}) = (112.1399, 112.0828, \dots, 112.19395)$ $C = (140, 140, \dots, 140)$ 所求出之夾角餘弦值=0.999906091	$E = (b_1, b_2, \dots, b_{180}) = (97.3954, 97.599, \dots, 97.2015)$ $C = (140, 140, \dots, 140)$ 所求出之夾角餘弦值 =0.99947137441

3. 蛋圓與蛋形:若我們旋轉了蛋圓，則所取出的弦長先後順序就會改變，但因為要利用內積來計算餘弦值，就會牽涉到向量內各數值的順序，而電腦並無法辨別它其實只是同一種圖形旋轉後的結果，因此我們找出當蛋圓轉到某特定方向時，所計算出來的餘弦值有最大值，並以該值來代表此兩圖形的相似度。我們使用 180×180 的循環矩陣代表蛋

圓的旋轉， 180×1 的矩陣代表蛋形的弦長向量，計算出 180 組夾角餘弦值再加以比較。

$$\begin{bmatrix} 112.1399 & 112.0828 & \dots & 112.19395 \\ 112.0820 & 112.0228 & \dots & 112.1399 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 111.6606 & 111.7397 & \dots & 111.579 \\ 111.7397 & 111.8159 & \dots & 111.6606 \\ 111.8159 & 111.8892 & \dots & 111.7397 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 112.19395 & 112.1399 & \dots & 112.2448 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 97.3954 \\ 97.599 \\ \vdots \\ 97.4945 \\ 97.2562 \\ 97.0346 \\ \vdots \\ 97.2015 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.998997481 \\ 0.998991751 \\ \vdots \\ 0.999671951 \\ 0.999965856 \\ 0.999643834 \\ \vdots \\ 0.998997481 \end{bmatrix}$$

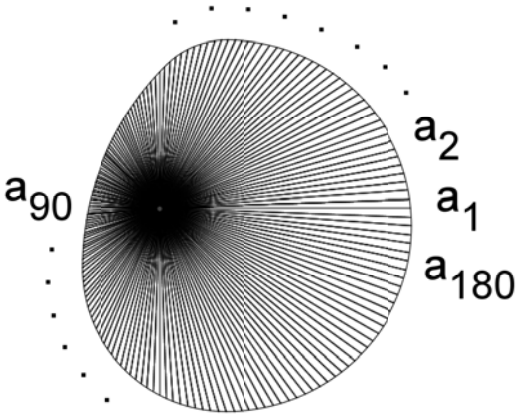
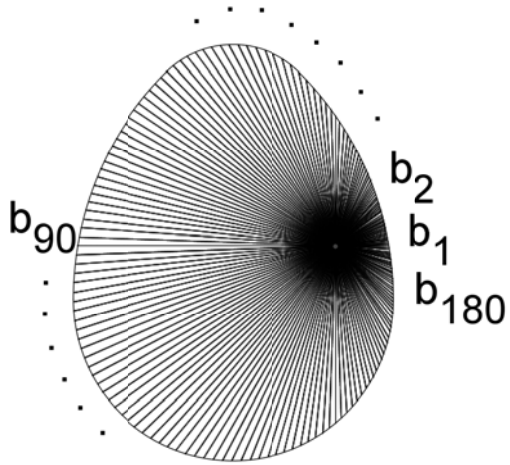
$$\|EC\| \cdot \|E\|$$

蛋圓與蛋形的弦長向量夾角餘弦值最大，為 0.999965856，所以蛋圓與蛋形最相似。

(三) 利用半弦長比較蛋圓、圓與蛋形的相似性

我們以篩法找出接近弦長標準差最小值的點，以此點為觀察點，過該點每隔 2 度取一條半弦，測量此 180 條半弦長，將 180 條半弦長依序排成一組向量，再以向量計算蛋圓與圓、蛋形與圓和蛋圓與蛋形的夾角餘弦，夾角餘弦值愈大者即相似性愈高。

令 C' 為圓半弦長之向量， EC' 為蛋圓半弦長之向量， E' 為蛋形半弦長之向量

1. 蛋圓與圓	2. 蛋形與圓
	
$a_1 \quad a_2 \quad a_{180}$ $EC' = (87.2031, 86.8623, \dots, 87.5069)$ $C' = (70, 70, \dots, 70)$ 所求出之夾角餘弦值= 0.92096647149	$b_1 \quad b_2 \quad b_{180}$ $E' = (16.4818, 16.4103, \dots, 16.5707)$ $C' = (70, 70, \dots, 70)$ 所求出之夾角餘弦值= 0.88376006306

4. 蛋圓與蛋形：

$$\begin{bmatrix} 16.4818 & 16.4104 & \cdots & 16.5708 \\ 16.4104 & 16.356 & \cdots & 16.4818 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 85.2576 & 85.5775 & \cdots & 84.8636 \\ 85.5775 & 85.8227 & \cdots & 85.2576 \\ 85.8227 & 85.9927 & \cdots & 85.5775 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 16.5708 & 16.4818 & \cdots & 16.6776 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} 87.18532 \\ 86.84207 \\ \vdots \\ 27.4641 \\ 27.92962 \\ 28.43274 \\ \vdots \\ 87.4915 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} 0.6466409 \\ 0.6442431 \\ \vdots \\ 0.9944987 \\ 0.9946763 \\ 0.9946268 \\ \vdots \\ 0.64925761521 \end{bmatrix}$$

$$\|E\| \|EC\|$$

蛋圓與蛋形的半弦長向量夾角餘弦值最大，為 0.9946763，所以蛋圓與蛋形最相似。

伍、 研究結果

一、過圓內一點的弦長函數 $s(\phi, r) = \sqrt{4R^2 - 4r^2 \cos^2 \phi}$ ，藉由反函數在角度上的累積機率可得弦長的累積分配函數和機率密度函數，並求得期望值和變異數，而過圓內所有點的弦長較集中在 $[1.355R, 2R]$ ，母體期望值為 $\frac{16R}{3\pi}$ 和變異數為

$$R^2 \left[3 - \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 \right]。$$

二、過橢圓內一點的弦長函數為 $\frac{2ab\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 \theta - r^2 \cos^2 \phi}}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$ ，其為三元變數函數，弦長標準差呈現對稱而漂亮的山峰山谷形態，標準差最小點在短軸上。

三、在任何封閉凸圖形內皆有有限個標準差最小點，若圖形對稱，則標準差最小點也對稱出現。離最小點愈近標準差越小，而且離最小點越遠，標準差坡度越陡。這些性質可用來設計逼近法。

四、弦長函數與傅立葉係數的關係為 $(-b_n + ia_n) = \oint_c |f(z)| z^{n-1} dz$ ，為投影的積分。

其中， c 為複函數積分的路徑，為單位圓。 $z = \cos x + i \sin x$, $f(z) = f_x z$, 既 x 為幅角, $f(x)$ 為長度。因為絕對值有奇點，封閉積分不為零。

五、離散傅立葉之係數平方和等於弦長抽樣的平方和。

六、利用傅立葉級數表示凸圖形內任一點的弦長函數，再映射至希爾伯特空間的無限維傅立葉係數向量，可以展現出我們這篇研究的核心精神。

七、用篩網來逼近最小點。用 5×5 的篩網篩到第5層就很逼近最小值了，從逼近的相對小點抽取弦長集合為特徵值，可用來描述圖形。

八、將兩側圖形從標準差相對小點抽取的弦長或半弦長集合，以夾角餘弦來比較其相似性，剛好可以設定為 $0 \sim 1$ 的相似度，並且不受圖形大小影響。

九、利用循環矩陣可以解決比較圖形相似性時圖形旋轉的問題。

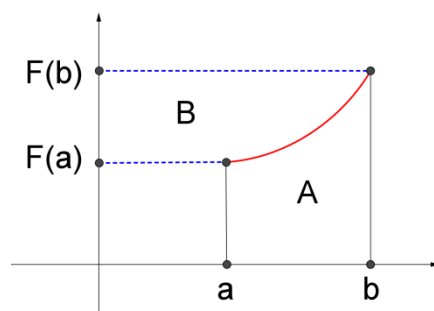
十、蛋形、蛋圓、圓當中，以弦長或半弦長來比較相似性，皆是蛋圓和蛋形相似度最高。

陸、 討論

一、將函數的輸出值當做隨機變數處理在近代數學或物理領域是很普遍的應用，例如量子力學的波函數、頻譜分析的抽樣、離散型傅立葉轉換，而把圖形的特徵值取出並加以統計分析也是圖形辨識的一個重要步驟。我們在第一段研究內，以過圓內一點的弦長為圖形特徵值來討論，先求出此弦長的函數，再將函數的輸出值當做隨機變數，這邊我們用了較少見的方法，即反函數跟變數的機率對應。因為弦長函數 $s(\phi) = \sqrt{4R^2 - 4r^2 \cos^2 \phi}$ ，在定義域 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 的區間內為單調函數，存在反函數 $g(s) = \cos^{-1} \sqrt{\frac{4R^2 - s^2}{4r^2}}$ 並一對一映射原函數，轉成反函數後，輸出值為角度，為線性的，可經由幾何機率映射至弦長這個變數的累積機率，進而求得累積分配函數和機率密度函數。有趣的是，我們將初等代數與統計學結合，給予解析幾何新的詮釋，在研究弦長函數轉換成累積分配函數時，我們發現一個等式可用來解釋這樣的轉換是可行的。

令 $F(x)$ 在 a 、 b 區間內單調，並可求得反函數，令反函數為 $f(x)$ ，則根據函數與反函數的積分關係 $\int_a^b F(x)dx + \int_{F(a)}^{F(b)} f(x)dx = bF(b) - aF(a)$ ，即面積 A 加面積 B 等於大方形減小方形。如圖：

因為 $f(x)$ 也為單調函數可導，令其導函數為 $f'(x)$ 。



當我們試著計算定積分 $\int_{F(a)}^{F(b)} xf'(x)dx$ ，運

用分部積分

$$\begin{aligned}
\int_{F(a)}^{F(b)} xf'(x)dx &= xf(x) \Big|_{F(a)}^{F(b)} - \int_{F(a)}^{F(b)} f(x)dx \\
&= F(b)f(F(b)) - F(a)f(F(a)) - \int_{F(a)}^{F(b)} f(x)dx \\
&= bF(b) - aF(a) - \int_{F(a)}^{F(b)} f(x)dx \\
&= \int_a^b F(x)dx
\end{aligned}$$

$$\text{兩邊同除以 } b-a \text{ 得 } \frac{1}{b-a} \int_{F(a)}^{F(b)} xf'(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x)dx ,$$

左邊為機率密度函數求期望值的形式，右邊為函數輸出值的平均，因為 $F(x)$

為單調，輸出值的平均就是其期望值，故可得 $\frac{1}{b-a} f'(x)$ 為機率密度函數，

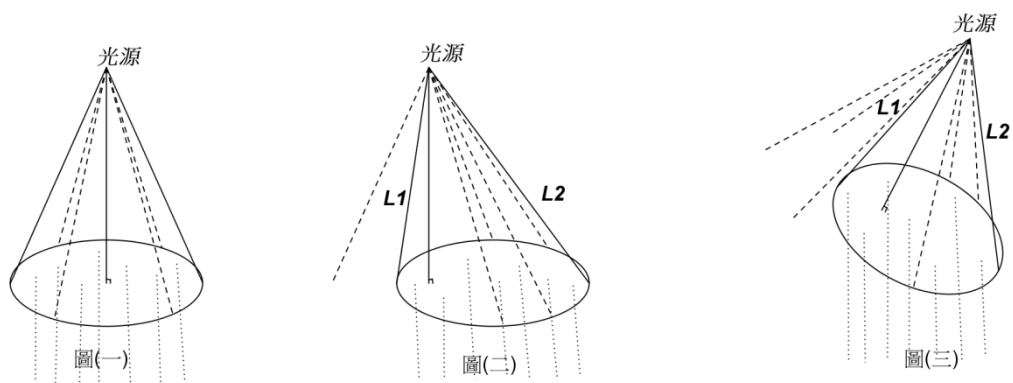
而 $\frac{1}{b-a} f(x)$ 為累積分配函數。因此我們處理圓內一點弦長函數——求得反函

數再除以原函數的定義域是可行的。

二、計算過圓內一點的弦長期望值結果為 $\frac{2}{\pi} \cdot 2RE \left(\frac{r^2}{R^2} \right)$ ， R 為圓半徑， r 為離圓心

距離，出現的第二類完全橢圓積分可以用投影幾何來解釋。

假設有一放射光源，光源正下置一透明圓盤如圖(一)，從圓盤下方看上去，其光跡印在盤上就像從圓盤中心向邊上放射的所有弦，如果往一側平移一小於圓盤半徑的距離 r 如圖(二)，則其光跡就像在圓心外取一點離圓心 r ，過此點的所有弦。在這相同光源內，我們一定可以找到一傾斜角，讓圓盤傾斜後，光源距圓盤邊上的所有距離與平移後的圓盤相同，如圖(三)。此時再從下方看上去傾斜的圓盤投影成橢圓，而其上光跡也與平移後的圓盤相同，這是弦長期望值會跑出橢圓圓周的原因。



三、我們研究圓的弦長時，命題為取圓內一點，再從此點取弦長，而非散亂的取弦長，故母體為二元隨機變數。而且取到圓內一點的機率與過此點取弦的機率互相獨立，故聯合機率密度函數可為兩個機率密度相乘，也因為命題的關係，所以母體期望值較接近直徑。

四、從圖形內任一點到圖形邊上的半弦長平方，積分一圈後會得到2倍的圖形面積，這個微積分概念是這篇研究中處理不規則圖形時最重要的前提，我們拿橢圓焦點的極式方程式 $r = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon \cdot \cos \theta}$ 來積分，可以印證這個微積分概念的可行性。

五個定理的主要目的就是要將弦長標準差最小點在幾何描述的實用性上建立依據。

定理一、二是為了描述弦長標準差有其特殊性，定理三、四、五則是為了在定理一、二的基礎上發展出找到最小點的方法，而篩網的方法就是建立在這五個定理都能成立的前提下。

五、關於我們的命題與傅立葉係數的關係，求出 $(-b_n + ia_n) = \oint_C |f(z)| z^{n-1} dz$ ，為複函數積分之難題，我們很希望能有更多資源幫忙解開化簡，而因此找到簡易求得係數的方法，這樣的結果在傅立葉應用上是少見的。另外也可以讓我們知道係數之間數量級的差別，以推算做離散傅立葉時，在誤差不大的情形下，弦長抽樣的最少數目為多少。雖然研究到此還無法解開係數的複數積分，但

是運算之中的投影和積分都是線性操作，所以可以說過一點的弦長集合和傅立葉係數是一一映射而同構。

六、抽樣 9 條和 180 條弦長做出來的離散傅立葉，其誤差不大，所以 9 項離散傅立葉長度已經夠逼近原函數了。

七、利用傅立葉級數這個有利的工具，我們還找到一個令人興奮的結果，用過最小標準差點的弦長做離散傅立葉轉換，可以將不規則凸圖形函數化，甚至利用半弦長做離散傅立葉轉換，還可以將函數逆推成圖形。此結果讓我們不只需要辨識圖形還可以将圖形函數化然後進一步運算。

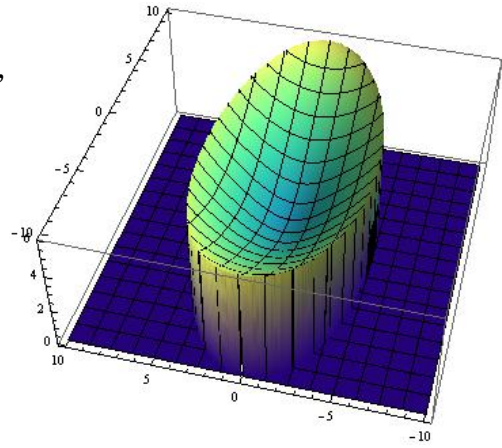
八、用篩子逼近最小點的方法建立在五個定理上，要確保層層逼近時都能越來越接近最小點，而另一個重要的問題是如何篩比較有效率，如果用長寬相同數目的篩子，我們發現 4×4 的篩子可以用最少點達到最大的精密度 (*precision*) 與準確度 (*accuracy*)，但是平方數目的篩子遇到狹長圖形，則因為篩網變太長，導致準確度可能降低，故可用正方格的篩網，但長寬的篩點數目不同。

假設某封閉凸圖形的第一層篩網長寬分別為 a, b ，我們設計出 $m \times n$ 的正方格篩網，則 $\left\lceil \frac{a}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{b}{n} \right\rceil$ (中括號為高斯符號)。要達到有效率的篩法就要使 m, n 中較小的為 4，如此在短軸上每花 4 個點就精確 $\frac{2}{3}$ ，每個點貢獻 $\frac{1}{6}$ 的精確度為最大。也可以在第一層用密的篩網，第二層之後再以上述大小的篩網，可以更精確。

九、例如蛋圓這種部分對稱的圖形會出現一深一淺的山谷，在第一層遇到兩個接近的標準差時，可以計算兩個點附近的標準差對網點距離的斜率，越大者表示其山谷更深，為要接下去篩的區域，所以當遇到像蛋圓這種部分對稱的圖形時，第一層用 4×4 的篩子，恐怕就會因為追求效率而失去準確性。

十、以過觀察點的半弦長樣本來比較圖形

相似性，夾角餘弦值的差異較全弦長大，更能顯示出圖形相似的程度。我們認為以弦長找觀察點，以半弦長為抽取值似乎是更好的方法，如圖為橢圓的半弦長標準差立體圖，因為過於平滑，所以不適合用半弦長的標準差找觀察點。平的



原因如下：半弦長標準差 $V(X_h) = E(X_h^2) - [E(X_h)]^2$ ，其中

$E(X_h^2) = \frac{1}{\pi} \times \text{圖形面積}$ 為定值，故半弦長標準差做圖為期望值做圖的相反。而

且半弦長展開的離散傅立葉函數容易回推做圖。

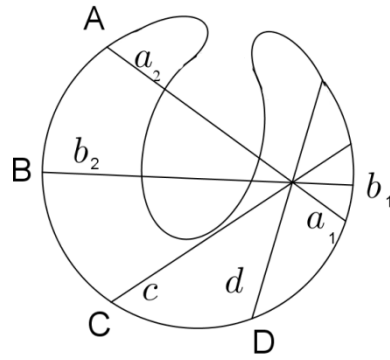
十一、 抽取特徵值是圖形辨識的核心，至目前有很多種數學模型，本文的弦長集合就像是用探針觀察圖形，只要觀察的點具代表性，其準確度就很高，而且弦長的測量對電腦是很省資源的運算，我們認為這篇研究的未來發展大有可為。

十二、 由於時間和篇幅有限，我們只能先研究封閉凸圖形的弦長集合，在圖形辨識的應用中，凸圖形的辨識就有很大的功能，例如目前最新的資訊應用——人臉辨識，人臉就是凸圖形。另外，凹圖形的研究也有很多方向可做，在此提供幾個我們目前的想法：

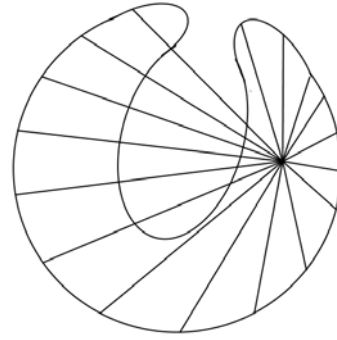
(一) 利用圖形分割，將凹圖形分割成數個凸圖形。

(二) 利用多組集合來儲存被凹圖形切斷的弦長，如圖(四)， A 、 B 被切成兩段，故用第二個集合儲存 a_2 、 b_2 ，而 a_1 、 b_1 、 c 、 d 照凸圖形處理。

(三) 利用半弦長集合。過點的半弦長可集中在一個樣本內儲存，如圖(五)，但是弦長與角度的關係就非一對一映射，需要進一步研究。另外，半弦長有個好處是可以儲存非封閉圖形如曲線的抽取值。



圖(四)



圖(五)

柒、 結論

開始研究我們的「新幾何學」時沒有想到會到這麼深入，我們依據觀察→大膽假設→證明→定理→發展的研究精神，竟然可以完成凸圖形的數學模型，在不規則中找到規則，這條路目前走到一半，接下來是解弦長函數的傅立葉係數的複積分、描述凹圖形和找到凹凸圖形皆適用的統一模型。圖形辨識的應用很廣，每個應用也有其特殊的額外特徵值，然而核心的數學是一樣的，皆為利用抽取值比較圖形相似性。我們建立篩法，逼近觀察點(弦長標準差最小點)，然後抽取弦長為特徵值，這些猜想、設計都蘊含著一個基本原則——如何簡單又準確。而我們本篇研究的篩法很準確，但是如何使篩法更省事，及篩點之數學模型的改善，也是接下來要努力的方向。

捌、 參考文獻

一、林惠玲、陳正倉。統計學(方法與應用四版上冊)。台北市：雙葉書廊有限公司 (2010)。

二、余文卿。普通高級數學第二冊 (2 版)。台北市：翰林 (2012)。

三、游森棚。普通高級數學第四冊 (1 版)。台北市：翰林 (2013)。

四、節錄自網路 — 維基百科

<http://zh.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:%E9%A6%96%E9%A1%B5>

五、動機圖片節錄自 <http://ppt.cc/jkYV>

<http://ppt.cc/RuND>

<http://ppt.cc/yNDu>

評語

本件作品討論通過圓內(或封閉凸集合)之所有弦，其弦長在某些機率分配下之弦長平均值，和標準差。這是相當有意思的一個題目。第一個機率模型其條件機率以反三角函數去刻劃，由於這代表每根弦之出現機率並不相等，是很有意思的看法，可惜作者卻並未往這方向去多加延伸並探討。第二個機率模式由於是任意封閉凸集，並沒有類似和圓一樣的對稱性質，因此作者採用 uniform distribution 去計算其標準差，然而作者對於高等數學工具的掌握度不足，是要加強之處。