2014 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010013

參展科別　數學

作品名稱　藏寶旋跡

得獎獎項　大會獎：三等獎

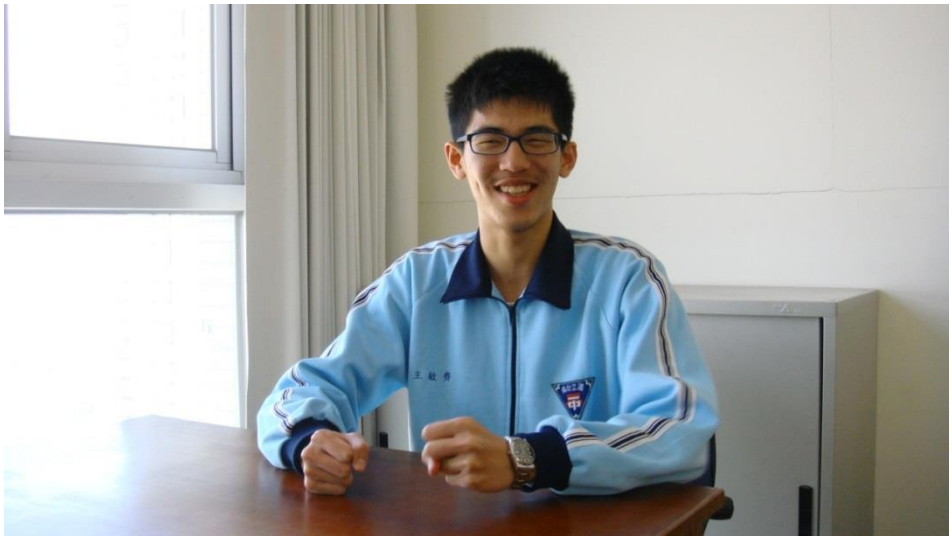
就讀學校　國立臺南第一高級中學

指導教師　陳建良、陳亮君

作者姓名　王敏齊、詹雨安

關鍵字　旋轉、軌跡、加權點

作者簡介



我是王敏齊，目前就讀臺南一中一年級。我的個性自然、率真，對於應該做的事積極投入。從很小我就對數學充滿興趣，大概在七歲的時候就立志將來要投入數學工作，這十年來不管經過多少挫折，都無法改變我的志向，將來大學以數學系為目標，並以數學研究為夢想職業。這次的國際科展之旅是我踏上數學研究的前哨站，希望我能在此觀摩更厲害的作品，結識更優秀的同學，請教更博學的師長，而目前，我稍微經歷了數學研究過程中的困難、瓶頸，領略了完成數學研究的欣喜、愉悅，這是我一輩子難以忘記的。

我是詹雨安，目前就讀臺南一中科學班一年級。我的個性很活潑，平常最大的興趣就是踢足球和看電影，且對英雄電影情有獨鍾。我非常喜歡物理，對數學也很有興趣，如果有人問到我不會的東西，我會豁出去研究直到弄懂為止。雖然有人說我這樣會浪費時間無法兼顧課業，但我通常都樂在其中，覺得十分值得。我的夢想是有一天能打造出真正的鋼鐵人裝甲，每天在天空飛來飛去。

摘要

從海盜藏寶的情境出發，主要探討旋轉角度和平均點與加權點之間的關係。藉由增加旋轉中心個數，改變旋轉角度或旋轉次數等變項，來探討固定點的存在性與加權點的軌跡變化。於研究過程中發現，操控旋轉角度的正負值、倍率及加入旋轉後伸縮，能讓動點與加權點(平均點)間的移動軌跡有相似圖形、繞圓、橢圓、內(外)次擺線及各種數學上未定義，我們稱之為 n 階行星與齒輪圖形等豐富有趣的現象變化；將問題延伸，除了旋轉及旋轉後伸縮以外，同時有多組不同伸縮在進行時，所得到的加權點軌跡會形成次擺線和向前直進(或在直線上滾動)的多層行星與齒輪圖形。推廣至空間中的旋轉，更可發現橢圓的軌跡。

Abstract

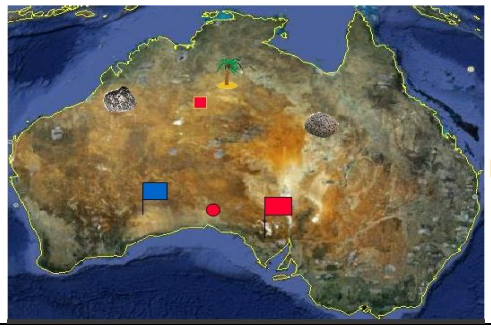
Inspired by a math problem set in the pirate-treasure context, the project is aimed at exploring how angles of rotation are related to weighted mean points and arithmetic mean points. By controlling variables including the number of rotation centers, angles of rotation and times of rotation, the researchers investigated the possible existence of a fixed point and the changing locus of a weighted mean point. In this research, it has been found that through manipulating angles of rotation, amplification factors, and dilation after rotation, the researchers have found the conditions under which a fixed point exists, as well as different loci of moving points and weighted points. These loci include moving points and weighted points going in similar patterns, circles, ovals, hypotrochoid, epitrochoid and many other mathematically undefined patterns, which the researchers term “n-laminar planets and cogwheels” patterns respectively. When the research is further expanded to include different sets of dilation simultaneously, loci of weighted mean points are found to be those of trochoid, “n-laminar planet-comet and cogwheel-straight line” patterns. When conducted in a three-dimensional context, elliptical trajectories can also be found.

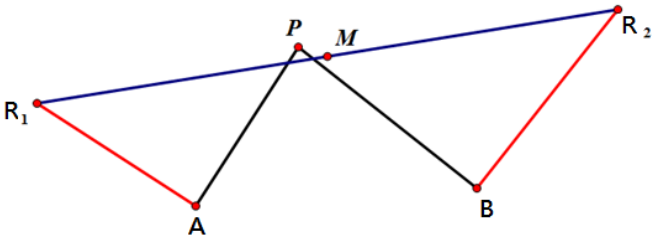
壹、　研究動機

在上學習 Geogebra 軟體的數學課時，為了示範軟體應用，我們遇到了這個有趣的藏寶問題：

傑克船長曾在阿里巴島上藏寶藏。他先從島上 P 點處的一棵椰子樹，對石頭 A 點逆時針旋轉90°至R_1，並插上一面旗子於R_1點，接著走回椰子樹 P 處，再對石頭 B點順時針旋轉90°至R_2，並插上另一面旗子於R_2點，最後在R_1與R_2的中點 M 處藏下寶藏。

一年後，傑克船長想回到阿里巴島挖出寶藏，但島上的椰子樹 P 和兩面旗子R_1、R_2都已被暴風吹走，只留下兩顆石頭A、B未被移動。請問：傑克船長該如何找到寶藏 M 點呢？





這個問題的解答是：以兩顆石頭 A、B 的中點為旋轉中心，將 A 點順時針旋轉90°，所得到的點便是藏寶地點 M。後來，我們用 Geogebra 軟體實際操作，發現這並不是巧合的結果，因為不論椰子樹 P 點的位置在哪裡，藏寶地點 M 的位置其實都不會改變，因此我們將 M 稱為固定點。然而「為什麼 P 點改變，但 M 點卻會固定呢？」,「那 M 點不會移動是受了哪些條件影響呢？」,「如果有三個或更多個石頭為旋轉中心時，會不會有相對之固定點存在呢？」,「如果旋轉角度是任意角度時，M 點還會是固定點嗎？」,「旋轉角度若改以不同倍率變化時，M 點位置會如何變動呢？」,「如果把問題情境轉換到空間上探討，又會有什麼樣的變化呢？」

……這些問題一個接著一個從腦中湧出，讓我們熱烈的討論著。在好奇心驅使下，決定以這主題做為科展研究，並期望能利用研究過程中所得的結果，讓有趣的藏寶問題獲得更深入且豐富的數學發現。

貳、 研究目的

一、證明傑克船長故事內的 M 點是固定點，不受動點 P 影響。

二、探討將兩個旋轉中心(石頭)延伸至多個旋轉中心(石頭)時，也會有相對之固定點存在。證明此論點並發展出一個找出此固定點坐標的可行方法。

三、將固定點 M 由平均點推廣至加權點，並在每個旋轉完成後，將得到的點對該旋轉中心再作伸縮，找尋 M 再次成為固定點所需要的旋轉條件。(註：四、五、六、七、八中所指的加權點皆為旋轉後再加上一個伸縮倍率的形式所得之加權點)

四、 在尋找固定點的過程中，發現加權點(平均點)M 的移動軌跡會和動點 P 的移動軌跡相似，找出其原因並證明。再推廣至 n 個旋轉中心在 P 點改變時也同時變動，且其移動軌跡皆與 P 的軌跡相似時，證明此相似軌跡狀況亦成立。

五、對於多個旋轉中心，操控各個旋轉角度的差值、正負與兩項倍率為變項，探討加權點(平均點)M 的移動軌跡變化情形，證明出有繞圓、橢圓、內(外)次擺線等情況。

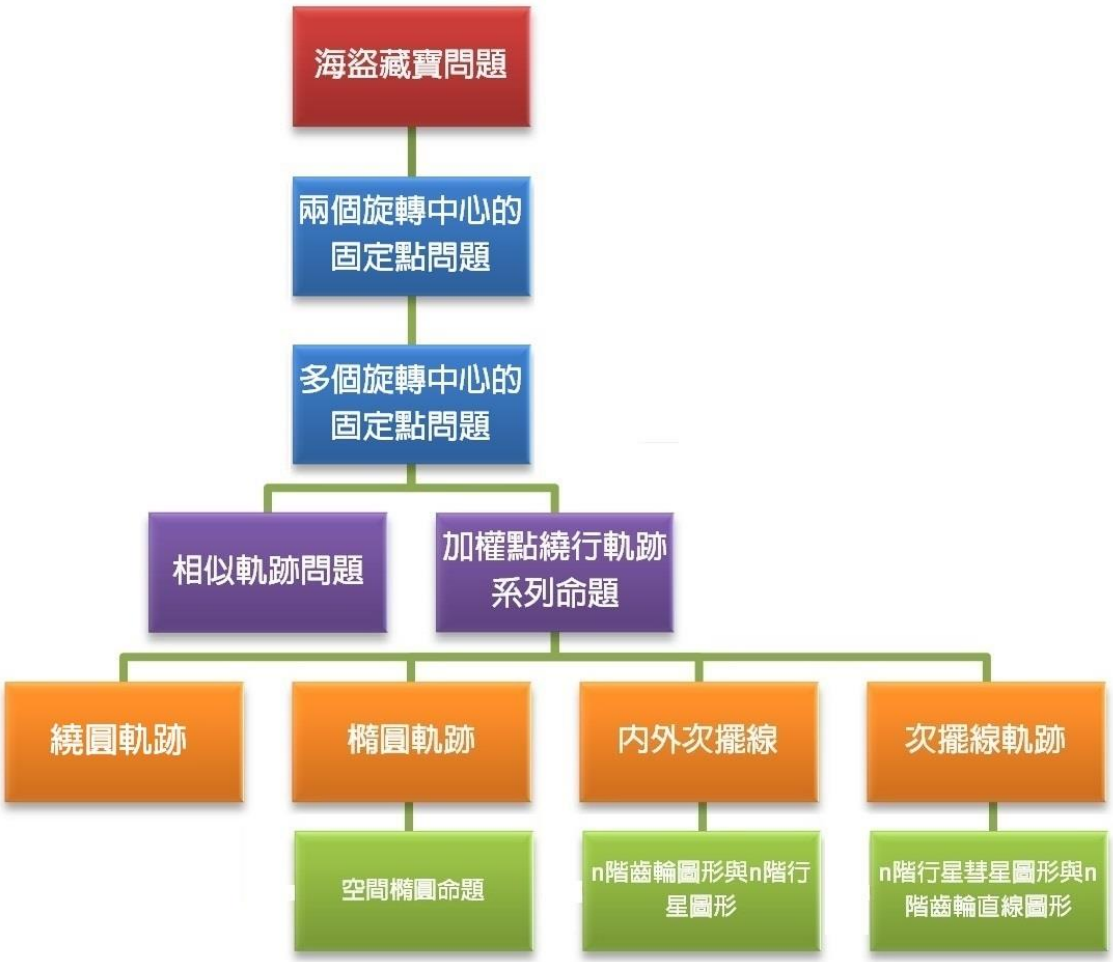
六、對於多個旋轉中心，操控各個旋轉角度的 n 種倍率為變項時，探討加權點 M 的移動軌跡變化情形，以多層行星與齒輪的軌跡來解釋，並推導其參數式。

七、對於多個旋轉中心，除了使各個旋轉角度為$t+\alpha_k(k=1,2,\dots,n)$之外，同時加入多組不同的伸縮(例：以$V_k$為伸縮中心，將$Q_k$ 伸縮$(d_k t+b_k)$倍得W_k點)，並將所有旋轉後與伸縮後得到的點加權至 M，證明 M 隨 t 變動時的軌跡為次擺線。

八、對於多個旋轉中心，除了操控各個旋轉角度的 n 種倍率為變項之外，同時加入多組不同的伸縮，探討加權點 M 的軌跡性質，以向前直進(或在直線上滾動)的多層行星與齒輪的軌跡來解釋，並推導其參數式。

九、將平面的旋轉延伸至空間，以有向直線為軸，將空間中的點作旋轉，並使所有的旋轉角度皆為θ，推論並證明加權點 M 的軌跡為橢圓。

參、 研究架構



這份科展於一開始研究時致力於找尋旋轉角度和平均點之間的關係，包含平均點的固定與否以及隨角度變化所呈現之軌跡，證明的方式多為三角函數坐標的展開與換元，並用些許向量來解釋所得的軌跡。但到後來，我們發現所謂「平均點」只是「加權點」的一個特例，因此重新將全部已證明的命題中再做推廣，得到一系列以「加權點」為主軸的新命題；而到了這個時候，由於我們自己的數學已進步許多，於是改採複數和向量的運算來證明這些命題。不過為了保持這份科展最真實的推廣與證明的流程，我們仍將原本的證明方法保留，因此沒有改用複數和向量重新撰寫。

肆、　名詞解釋

一、固定點：

以固定規則使定點與動點製造出一反應點，當動點位置任意改變時，其反應點位置不變，則稱其反應點為固定點。

二、平均點：

設R_1，R_2，⋯，R_n為平面上 n 個點，將R_1，R_2，⋯，R_n的坐標相加再除以 n 得到 M 點，即$\overrightarrow{OM}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OR_k}}{n}$，(其中 O 為原點)，則稱 M 為$R_1$，$R_2$，⋯，$R_n$的平均點。

三、加權點：

設R_1，R_2，⋯，R_n為平面上 n 個點，將R_1，R_2，⋯，R_n的坐標分別乘以h_1，h_2，⋯，h_n後相加，再除以$(h_1+h_2+\cdots+h_n)$，得到 M 點，

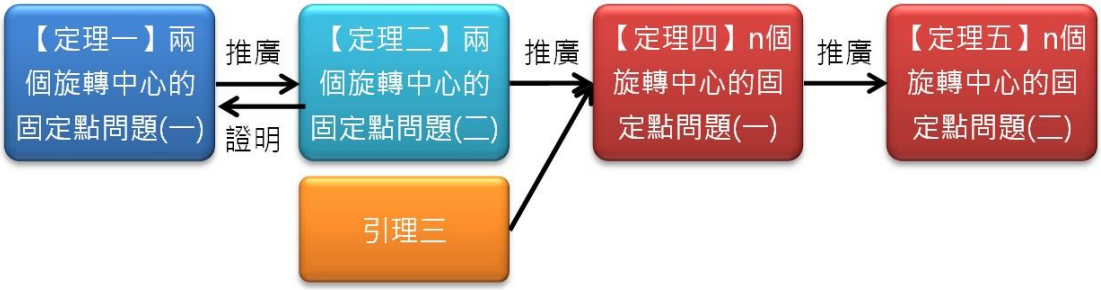
即$\overrightarrow{OM}=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_k\overrightarrow{OR_k}}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$，(其中 O 為原點)，則稱 M 為$R_1$，$R_2$，⋯，$R_n$分別以$h_1$，$h_2$，⋯，$h_n$為加權倍率所得到的加權點。簡化符號，記為$M=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kR_k}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$

伍、　研究工具

紙、筆、電腦、Geogebra 動態幾何繪圖板。

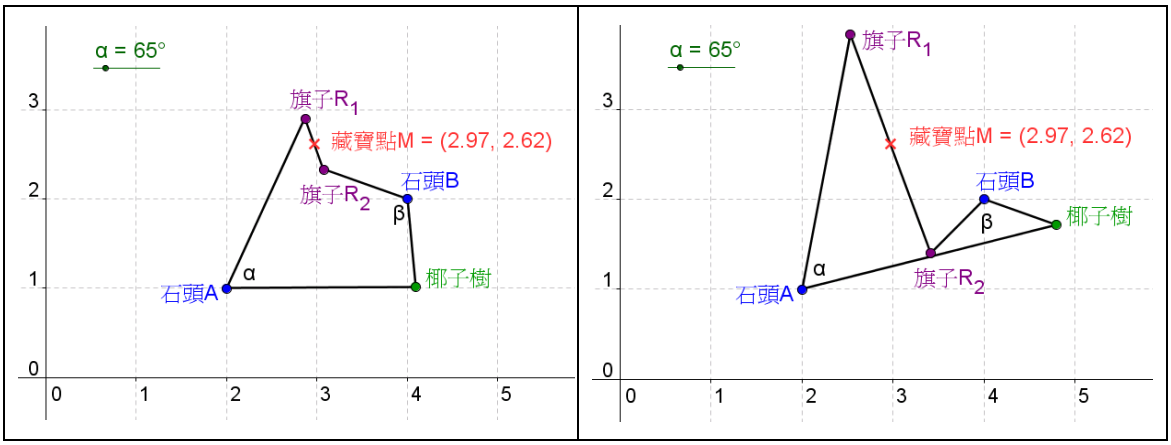
陸、 研究過程

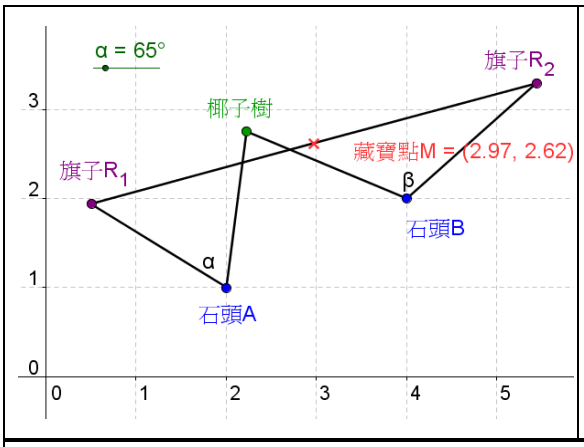
一、 固定點問題

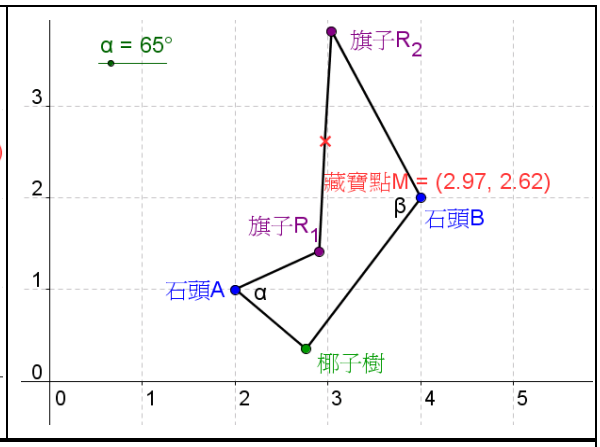


(一) 改變旋轉角度

研究動機藏寶問題中談到傑克船長將椰子樹 P 點對石頭 A、B 順、逆時針旋轉90°，分別得到R_1，R_2，設$\overline{R_1R_2}$中點為 M，則不論椰子樹 P 點如何改變，藏寶點 M 恆為固定點。我們把它寫成【定理一】，並思考是否旋轉角度不一定要順、逆時針各旋轉90°，只要逆時針旋轉α，順時針旋轉β，其中$\alpha+\beta=180^{\circ}$即可。使用 Geogebra 測試後，發現下圖的結果－不論椰子樹 P 位置如何改變，藏寶點 M 的坐標皆不改變。所以我們將證明 M 為固定點的問題表示成【定理二】，當$\alpha=\beta=90^{\circ}$時即為【定理一】的情況，只要能證明【定理二】，就能確定【定理一】成立。







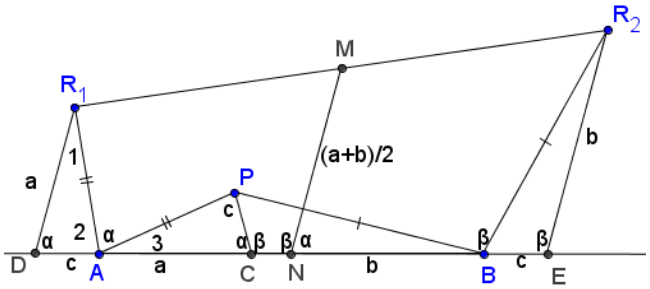
【定理一】兩個旋轉中心的固定點問題（一）

平面上有兩定點 A，B，設 P 為平面上另一點。以 A 為圓心，$\overline{AP}$長為半徑，將 P 逆時針旋轉90°至R_1；以 B 為圓心，$\overline{BP}$長為半徑，將 P 順時針旋轉90°至R_2，令$\overline{R_1R_2}$的中點為 M，證明：不論 P 點在平面上如何變動，M 恆為固定點。

(二) 證明【定理二】

【定理二】兩個旋轉中心的固定點問題（二）

平面上有兩定點 A，B，設 P 為平面上另一點。以 A 為圓心，$\overline{AP}$長為半徑，將 P 逆時針旋轉α至R_1；以 B 為圓心，$\overline{BP}$長為半徑，將 P 順時針旋轉β至R_2，其中$\alpha+\beta=180^{\circ}$，令$\overline{R_1R_2}$的中點為 M，證明：不論 P 點在平面上如何變動，M 恆為固定點。



【證明】

1. 如右圖連接$\overleftrightarrow{AB}$，連接$\overline{AR_1}$，$\overline{BR_2}$，依題意知$\overline{AR_1}=\overline{AP}$，$\overline{BR_2}=\overline{BP}$，

   作$\overline{PC}$交$\overleftrightarrow{AB}$於 C 點，使得$\angle PCA=\alpha$，則$\angle PCB=180^{\circ}-\alpha=\beta$，

   設$\overline{PC}=c$，$\overline{AC}=a$，$\overline{BC}=b$

2. 作$\overline{R_1D}$交$\overleftrightarrow{AB}$於 D 點，使得$\angle R_1DA=\alpha$，作$\overline{R_2E}$交$\overleftrightarrow{AB}$於 E 點，使得$\angle R_2EB=\beta$，因為$\alpha+\beta=180^\circ$，同側內角互補，所以$\overline{R_1D}//\overline{R_2E}$

3. ΔADR_1與ΔPCA中，

$\because \angle 1+\angle 2=180^\circ-\alpha=\angle 2+\angle 3$

$\therefore \angle 1=\angle 3$ 又$\angle PCA=\alpha=\angle R_1DA$，$\overline{AR_1}=\overline{AP}$

$\therefore \Delta ADR_1 \cong \Delta PCA(AAS)$

$\therefore \overline{R_1D}=\overline{AC}=a$，$\overline{DA}=\overline{PC}=c$

同理$\Delta BER_2 \cong \Delta PCB(AAS)$ $\therefore \overline{R_2E}=\overline{CB}=b$，$\overline{BE}=\overline{PC}=c$

4. $\because \overline{R_1D}$ // $\overline{R_2E}$，作$\overline{MN}$使$\overline{MN}$ // $\overline{R_1D}$且交$\overleftrightarrow{AB}$於 N 點，

又$\because$M 為$\overline{R_1R_2}$中點$\therefore \overline{MN}$為梯形R_1DER_2的中線，N 為$\overline{DE}$中點

$\because \overline{MN}$為梯形R_1DER_2的中線$\therefore \overline{MN}=\frac{\overline{R_1D}+\overline{R_2E}}{2}=\frac{a+b}{2}$

$\because$N 為$\overline{DE}$中點且$\overline{DA}=\overline{BE}$.$\therefore$N 為$\overline{AB}$中點$\therefore \overline{AN}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{a+b}{2}$

$\because \overline{MN}$ // $\overline{R_1D}$，$\therefore \angle MNB=\angle R_1DA=\alpha$

5. 以 A 為原點(0，0)，令 C 的坐標為(a，0)，畫出互相垂直的兩坐標軸，將圖形坐標化，

$\because \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}$

$=\left(\frac{a+b}{2}，0\right)+\left(\frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha\right)=(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha)$

又 A 為原點(0，0).$\therefore$M 的坐標為$(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha)$

$\because$A，B 為兩定點$\therefore a+b=\overline{AB}$為定值，又$\alpha$為一固定角度，

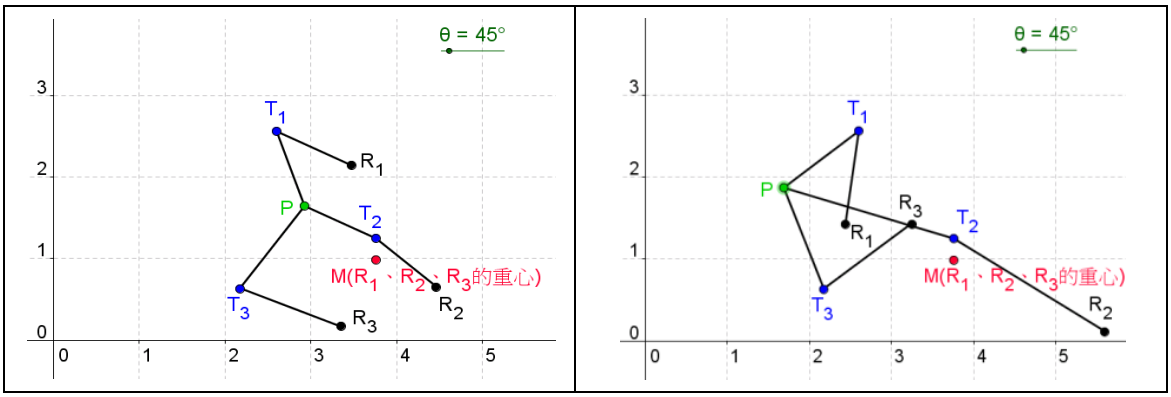
$\therefore$不論 P 點如何變動，M 的坐標為$(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha)$是一個固定的點，不會隨著 P 的改變而改變，得證■

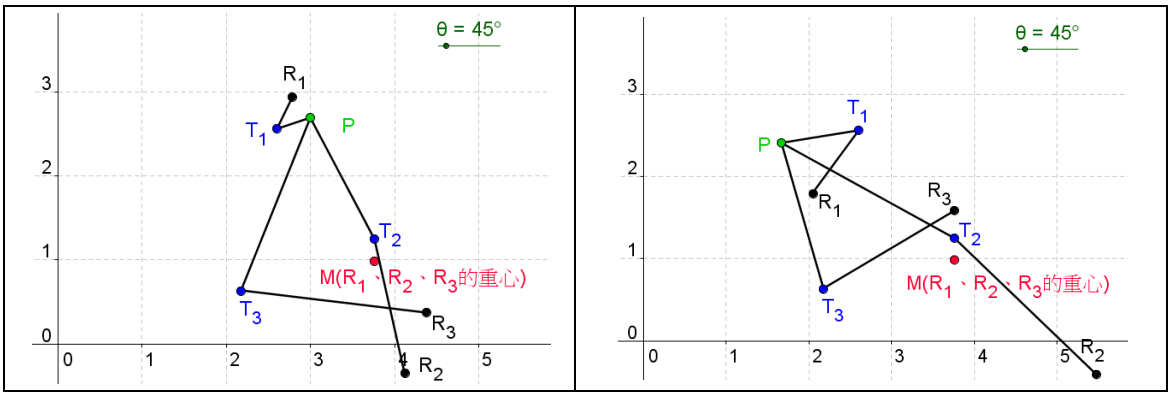
(三) 回應傑克船長的問題

【定理二】的命題中當$\alpha=\beta=90^{\circ}$時即為【定理一】的命題，若訂定 A 為原點$(0，0)$，此時藏寶點 M 的坐標為$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\cos 90^{\circ}，\frac{a+b}{2}\sin 90^{\circ}\right)=\left(\frac{a+b}{2}，\frac{a+b}{2}\right)$，可回答研究動機中傑克船長如何找到寶藏點 M 的問題。

(四) 找尋多個旋轉中心的固定點確實存在的思考過程

如果將兩個旋轉中心(兩顆石頭)，改成三個旋轉中心(三顆石頭)，那麼三個旋轉中心分別將椰子樹 P 作旋轉後，是否仍然可以找到固定點 M 呢？如果可以，又該如何選取旋轉角度呢？我們從【定理二】兩個旋轉中心時，藏寶點 M 為$\overline{R_1R_2}$中點(坐標相加除以二)，得到了靈感，覺得最有可能成為固定點的是重心(坐標相加除以三)。而兩個旋轉中心的旋轉角度：逆時針旋轉α，順時針旋轉β，$\alpha+\beta=180^{\circ}$，可改成逆時針旋轉α，逆時針旋轉$-\beta$，而$\alpha—\beta=\alpha+\beta=180^{\circ}$，旋轉角度差是$180^{\circ}=\frac{360^{\circ}}{2}$，讓我們猜想到對三個旋轉中心而言，旋轉角度差有可能是$\frac{360^{\circ}}{3}=120^{\circ}$。也就是均改為逆時針旋轉時，三個角度分別為$\theta_1$，$\theta_1+120^{\circ}$，$\theta_1+240^{\circ}$我們用 Geogebra 測試此猜想之後，其結果如下面圖示，發現這猜想是正確的，並著手證明三個旋轉中心的固定點。





(五) 證明多個旋轉中心的固定點之思考過程

一開始我們嘗試用幾何的方法來證，但發現難度很高，沒有太大進展。後來因為有組員學過三角函數，知道三角函數的極式可以解決旋轉的問題，於是我們往這方面嘗試，並驚喜的發現證明三個旋轉中心的固定點問題的方法，可以用來證明推廣到 n 個旋轉中心的固定點問題！由於 n 個旋轉中心的情形包含三個旋轉中心的情形，因此我們以 n 個旋轉中心的情形來作呈現，【定理四】是我們歸納出的結論和證明。

(六) 【定理四】及其引理證明

1. **在證明【定理四】的過程中我們會使用到一個【引理三】，在此先作說明**

【引理三】

以 O 為圓心，作一半徑為 1 的圓，在圓上取 n 個點A_1，A_2，A_3，⋯，A_n將此圓 n 等分$(n \geq 2)$，則 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{O}$

引理三感覺很直觀，所以我們把它的證明放在附錄，請參閱 P.200【附錄一】

2. **證明【定理四】n 個旋轉中心的固定點。**

為了方便起見，往後所有的角度均以有向角表示，角度為正，代表逆時針旋轉；角度為負，代表順時針旋轉。以正負代表方向，不再特別標示是逆時針旋轉或順時針旋轉。

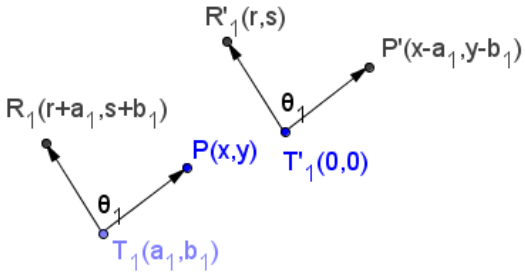
【定理四】n 個旋轉中心的固定點問題(一)

設$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，⋯，$T_n(a_n，b_n)$為坐標平面上的 n 個定點 $(n \geq 2)$，另有一點P。

令$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \frac{360^\circ}{n}$，⋯，$\theta_n = \theta + \frac{360^\circ}{n} \times (n-1)$，今以$T_1$為旋轉中心，將P點旋轉$\theta_1$，得到點$R_1$；以$T_2$為旋轉中心，將P點旋轉$\theta_2$，得到點$R_2$； ……；以$T_n$為旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_n$，得到點$R_n$，其中θ角度固定。設M為$R_1$，$R_2$，⋯，$R_n$的平均點，即$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \cdots + \overrightarrow{OR_n})$，其中O為原點，則不論P點在平面上如何變動，M 恆為固定點。

【證明】

1. 設 $P(x，y)$為動點，已知$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，⋯，$T_n(a_n，b_n)$為定點，以T_1為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1，得到點R_1，先求R_1坐標：將圖形平移，使T_1與原點重合，令為$T_1'(0，0)$，則 P 隨之平移至$P'(x-a_1，y-b_1)$



2. 設以T_1'為旋轉中心，將P'點旋轉θ_1，得到$R_1'(r，s)$點，

則$r + is = \big((x-a_1) + i(y-b_1)\big)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = (x-a_1)\cos\theta_1 - (y-b_1)\sin\theta_1 + i((x-a_1)\sin\theta_1 + (y-b_1)\cos\theta_1)$

所以 $r= (x-a_1)\cos\theta_1 - (y-b_1)\sin\theta_1$，$s= (x-a_1)\sin\theta_1 + (y-b_1)\cos\theta_1$

$\therefore R_1'$坐標為$((x-a_1)\cos\theta_1 - (y-b_1)\sin\theta_1，(x-a_1)\sin\theta_1 + (y-b_1)\cos\theta_1)$

再將圖形平移回去，使T_1'與$T_1(a_1，b_1)$重合，則R_1'會與R_1重合$\therefore R_1$坐標為$(r + a_1，s + b_1)$

即R_1坐標為$((x-a_1)\cos\theta_1 - (y-b_1)\sin\theta_1 + a_1，(x-a_1)\sin\theta_1 + (y-b_1)\cos\theta_1 + b_1)$

同理R_2坐標為$((x-a_2)\cos\theta_2-(y-b_2)\sin\theta_2+a_2$，$(x-a_2)\sin\theta_2+(y-b_2)\cos\theta_2+b_2)$

R_n坐標為$((x-a_n)\cos\theta_n-(y-b_n)\sin\theta_n+a_n$，$(x-a_n)\sin\theta_n+(y-b_n)\cos\theta_n+b_n)$

3. 令$M(x'，y')$，因為$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_n})$

所以$(nx'，ny')=n\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_n}$為$R_1$，$R_2$，…，$R_n$的坐標相加

nx'為R_1，R_2，…，R_n的 x 坐標相加

$\therefore nx'=(x-a_1)\cos\theta_1-(y-b_1)\sin\theta_1+a_1+(x-a_2)\cos\theta_2-(y-b_2)\sin\theta_2+a_2+\cdots+(x-a_n)\cos\theta_n-(y-b_n)\sin\theta_n+a_n=x(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n)-y(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)-a_1\cos\theta_1+b_1\sin\theta_1+a_1-a_2\cos\theta_2+b_2\sin\theta_2+a_2-\cdots-a_n\cos\theta_n+b_n\sin\theta_n+a_n$----------(1)

ny'為R_1，R_2，…，R_n的 y 坐標相加

$\therefore ny'=(x-a_1)\sin\theta_1+(y-b_1)\cos\theta_1+b_1+(x-a_2)\sin\theta_2+(y-b_2)\cos\theta_2+b_2+\cdots+(x-a_n)\sin\theta_n+(y-b_n)\cos\theta_n+b_n=x(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)+y(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n)-a_1\sin\theta_1-b_1\cos\theta_1+b_1-a_2\sin\theta_2-b_2\cos\theta_2+b_2-\cdots-a_n\sin\theta_n-b_n\cos\theta_n+b_n$----------(2)

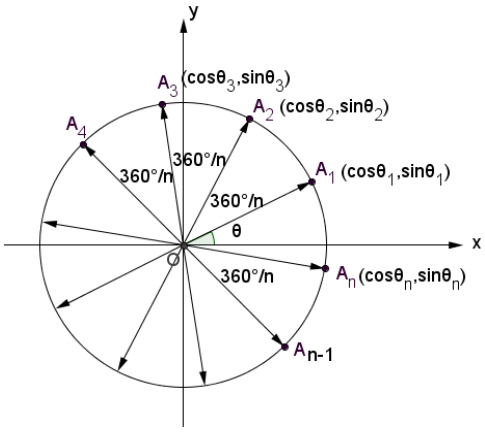
因為 $P(x，y)$為動點，而$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，…，$T_n(a_n，b_n)$為定點，所以只要θ_1，θ_2，…，θ_n滿足$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0\end{cases}$---(3)，代入式子(1)(2)，則不論$x$，$y$為何值，$P(x，y)$為何點，$nx'$，$ny'$均為定值，即$x'$，$y'$為定值，$M(x'，y')$會是固定點。

4. 接著我們想辦法證明上面框框內式子(3)，則即可得證

$M(x'，y')$是固定點：

$\because \theta_1=\theta，\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}，\cdots，\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$

令A_1坐標為$(\cos\theta_1，\sin\theta_1)$，$A_2$坐標為$(\cos\theta_2，\sin\theta_2)$，…，$A_n$坐標為$(\cos\theta_n，\sin\theta_n)$，則$A_1$，$A_2$，⋯，$A_n$將以 $O(0，0)$ 為圓心，半徑為 1 的圓 n 等分(如右圖)，



由【引理三】知$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$，

即$(\cos\theta_1，\sin\theta_1)+(\cos\theta_2，\sin\theta_2)+\cdots+(\cos\theta_n，\sin\theta_n)=(0,0)$

$\therefore(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n，\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)=(0,0)$

所以$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0\end{cases}$-----(*)，式子(3)得證

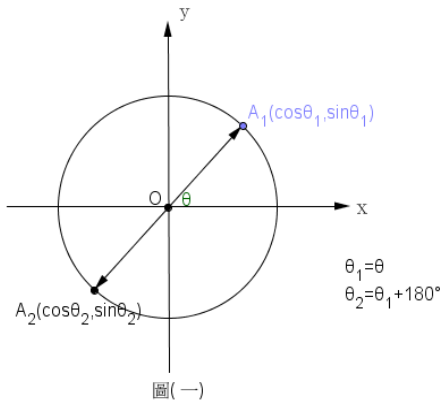
由上面的框框討論知：不論 $P(x，y)$如何變動，nx'，ny'均為定值，即x'，y'為定值，$M(x'，y')$會是固定點，得證■

(七) 探討定理四中$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，$\theta_3=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times 2$，⋯，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$是否是讓平均點 M 成為固定點的唯一一種旋轉角度

設$\theta_1\le\theta_2\le\theta_3\le\cdots\le\theta_n$，令$A_1$坐標為$(\cos\theta_1，\sin\theta_1)$，$A_2$坐標為$(\cos\theta_2，\sin\theta_2)$，…，

A_n坐標為$(\cos\theta_n，\sin\theta_n)$均為單位圓上的點，只要滿足$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$，那麼$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3$，⋯，$\theta_n$就會滿足

$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0\end{cases}$，由 P.11 上的框



圖(一)

框討論知平均點 M 就會是固定點。當$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，$\theta_3=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times 2$，…，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$時，$A_1$，$A_2$，$A_3$，……，$A_n$將圓 n 等分，可以滿足$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{O}$，除此之外是否還有其他情形可以使$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3$，…，$\theta_n$滿足$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{O}$而使平均點 M 是固定點呢？就不同的 n 值討論如下：

1. **n=2 時**

   $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=\vec{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA_1}=-\overrightarrow{OA_2}\Leftrightarrow$ O 為$\overline{A_1A_2}$的中點，

   此時A_1，A_2將圓二等分如圖(一)，

   $\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+180^\circ$為使平均點 M 成為固定點的唯一一種角度形式。

2. **n=3 時**

   $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=\vec{O}$，則三向量始點接終點會構成一個封閉圖形(三角形)如圖(二)，邊長均為 1 的三角形必為正三角形，

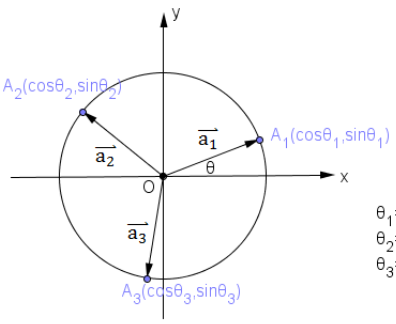
   $\therefore A_1$，A_2，A_3必將一個圓三等分如圖(三)，則

   可得知：$\theta_1=\theta$，

   $\theta_2=\theta+120^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{3}$，

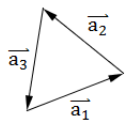
   $\theta_3=\theta+240^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{3}\times 2$

   為使平均點 M 成為固定點的唯一一種角度形式。



$\theta_1=\theta$
$\theta_2=\theta+120^\circ$
$\theta_3=\theta+240^\circ$

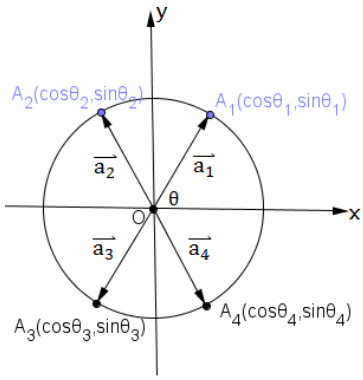
圖(三)



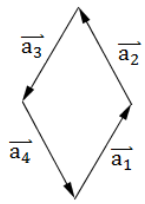
圖(二)

3. **n=4 時**

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\vec{O}$，則四向量始點接終點會構成一個封閉圖形(四邊形)，如圖(四)，邊長均為 1 的四邊形必為菱形，但夾角並不唯一。如圖(五)θ_1、θ_2、θ_3、θ_4的表示形式為θ_1，θ_2，θ_1+180°，θ_2+180°，



圖(五)



圖(四)

當四邊形為正方形時，

$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+90^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{4}$，$\theta_3=\theta+180^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{4}\times 2$，

$\theta_4=\theta+270^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{4}\times 3$，此時可使平均點 M 是固定點，但不是使平均點 M 成為固定點的唯一一種角度形式。

4. **n=5 時**

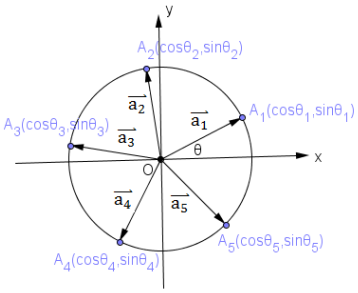
$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}=\vec{O}$

令$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{a_3}$，$\overrightarrow{OA_4}=\overrightarrow{a_4}$，$\overrightarrow{OA_5}=\overrightarrow{a_5}$，

則$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}+\overrightarrow{a_5}=\vec{O}$

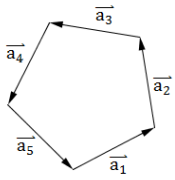
$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$，$\overrightarrow{a_4}$，$\overrightarrow{a_5}$五向量始點接終點會構成一個封閉圖形(五邊形)，如圖(六)

圖(八)

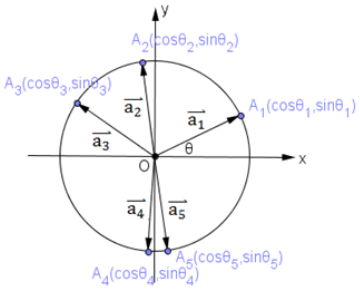


圖(七)

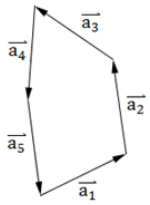
$\theta_1=\theta$
$\theta_2=\theta+72^\circ$
$\theta_3=\theta+144^\circ$
$\theta_4=\theta+216^\circ$
$\theta_5=\theta+288^\circ$



圖(六)



圖(九)



圖(八)

邊長均為 1 的五邊形有各種可能圖形，夾角更是不唯一，所以

θ_1，θ_2，θ_3，θ_4，θ_5的表示形式有各種可能情形，並不唯一。

當$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$，$\overrightarrow{a_4}$，$\overrightarrow{a_5}$五向量始點接終點構成一個正五邊形時，

θ_1，θ_2，θ_3，θ_4，θ_5的表示形式即為$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+72^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{5}$，

$\theta_3=\theta+144^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{5}\times 2$，$\theta_4=\theta+216^\circ=\theta+\frac{360^\circ}{5}\times 3$，$\theta_5=\theta+288^\circ=$

$\theta+\frac{360^\circ}{5}\times 4$，

此時A_1，A_2，A_3，A_4，A_5將圓五等分。

5. **n≥ 6時與 n=5 時情況類似**

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{O}$

令$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{a_3}$，…，$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{a_n}$，

則$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\cdots+\overrightarrow{a_n}=\vec{O}$時$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$，…，$\overrightarrow{a_n}$，

n 個向量始點接終點會構成一個封閉圖形(n 邊形)，

邊長均為 1 的 n 邊形有各種可能圖形(想像我們在桌上放一個正 n 邊形，我們可以將它擠壓而形成各種不同的 n 邊形)，夾角更是不唯一，所以

θ_1，θ_2，θ_3，…，θ_n的表示形式有各種可能情形，並不唯一。

當$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$，…，$\overrightarrow{a_n}$，n 個向量始點接終點構成一個正 n 邊形時，

θ_1，θ_2，θ_3，…，θ_n的表示形式即為$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times 2$，…，$\theta_n=$

$\theta+\frac{360^{\circ}}{n}\times(n-1)$，

此時A_1，A_2，A_3，…，A_n將圓 n 等分。■

(八) 推廣平均點至加權點並加入旋轉後伸縮

1. **定義加權點**

設h_1，h_2，…，h_n為非零實數，且$\sum_{k=1}^{n}h_k\neq 0$

若 $\overrightarrow{OM}=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_k\overrightarrow{OR_k}}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$ (其中 O 為原點)，則我們稱 M 為R_1，R_2，…，R_n分別以h_1，h_2，…，h_n為加權倍率得到的加權點，以符號$M=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kR_k}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$來表示。

備註：往後所有談到“分別以h_1，h_2，…，h_n為加權倍率得到的加權點”，其中h_1，h_2，…，h_n均指非零實數，且$\sum_{k=1}^{n}h_k\neq 0$，不再另外註明。

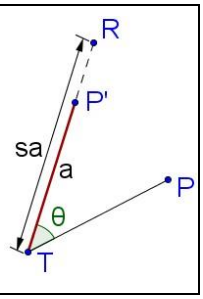
2. **推廣平均點至加權點並加入旋轉後伸縮，探討固定點問題**

在原本【定理四】的命題中我們所做的是：分別以定點T_k為旋轉中心，將一點P旋轉θ_k至R_k點$(k=1，2，\cdots，n)$，並由證明過程中 P.11 的框框中發現：當θ_1，θ_2，θ_3，…，θ_n滿足$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n=0\end{cases}$時，$R_1$，$R_2$，…，$R_n$的平均點 M 點就會是固定點，位置不會隨著P的改變而改變。在此我們發現平均點其實只是「加權點」的一個特例，因此我們轉向加權點研究，並且在旋轉後加入伸縮，推廣成【定理五】。在這個部分的證明過程中我們發現複數的運算方式比起三角函數的坐標展開還要方便許多，因此改用複數來證明。

3. **在證明【定理五】之前，先說明我們往後常常出現的一句話：“以T為旋轉中心，將 P 旋轉θ，再伸縮s倍至R”的意義**

以T為旋轉中心，將 P 旋轉θ，再伸縮s倍至R的意義為：

如圖，以T為旋轉中心，將 P 旋轉θ至P′，而且R點滿足$\overrightarrow{TR} = s\overrightarrow{TP'}$



4. **證明**【定理五】

【定理五】n 個旋轉中心的固定點問題(二)

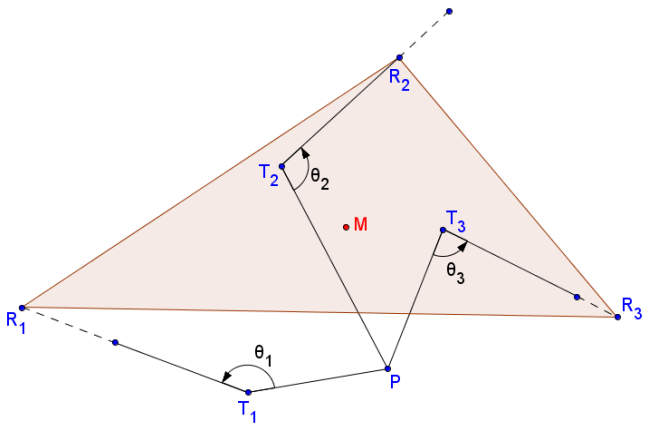
平面上有 n 個定點$T_1, T_2, \cdots, T_n$，設 P 為平面上另一點。以T_1為旋轉中心，將 P 旋轉θ_1，再伸縮s_1倍至R_1；以T_2為旋轉中心，將 P 旋轉θ_2，再伸縮s_2倍至R_2；…；以T_n為旋轉中心，將 P 旋轉θ_n，再伸縮s_n倍至R_n。設M為$R_1, R_2, \cdots, R_n$分別以$h_1, h_2, \cdots, h_n$為加權倍率得到的加權點，即$M = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$。若

$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} h_k s_k \cos\theta_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} h_k s_k \sin\theta_k = 0 \end{cases}$，則不論 P 點在平面上如何變動，M恆為固定點。

【證明】

令點P，M，T_k，R_k的複數坐標分別為p，m，t_k，$r_k(k = 1，2，\cdots，n)$

令$\cos\theta_k + i\sin\theta_k = w_k(k = 1，2，\cdots，n)$，



∵以T_k為旋轉中心，將 P 旋轉θ_k，再對T_k伸縮s_k倍至R_k

$\therefore r_k = (p - t_k)w_k s_k + t_k$

$\because M = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$

$\therefore m = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k r_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k((p-t_k)w_k s_k + t_k)}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(h_k p w_k s_k - h_k t_k w_k s_k + h_k t_k)}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$

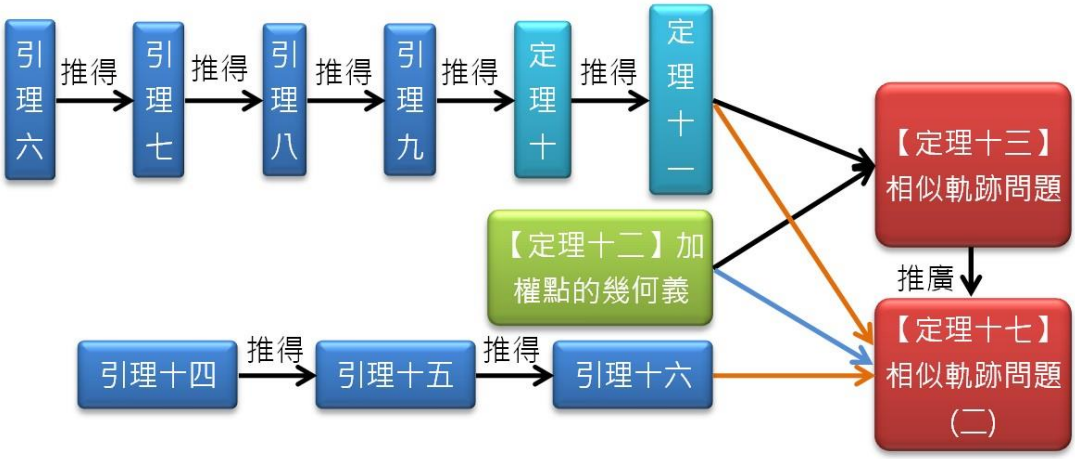
$$= \frac{p\sum_{k=1}^{n} h_k s_k w_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} + \frac{\sum_{k=1}^{n}(h_k t_k - h_k t_k w_k s_k)}{\sum_{k=1}^{n} h_k} \text{----------}(1)$$

由(1)式可得知：若$\sum_{k=1}^{n} h_k s_k w_k = 0$ ，則 M不會隨著 P 點的改變而改變，

而$\sum_{k=1}^{n} h_k s_k w_k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} h_k s_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} h_k s_k \cos\theta_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} h_k s_k \sin\theta_k = 0 \end{cases}$

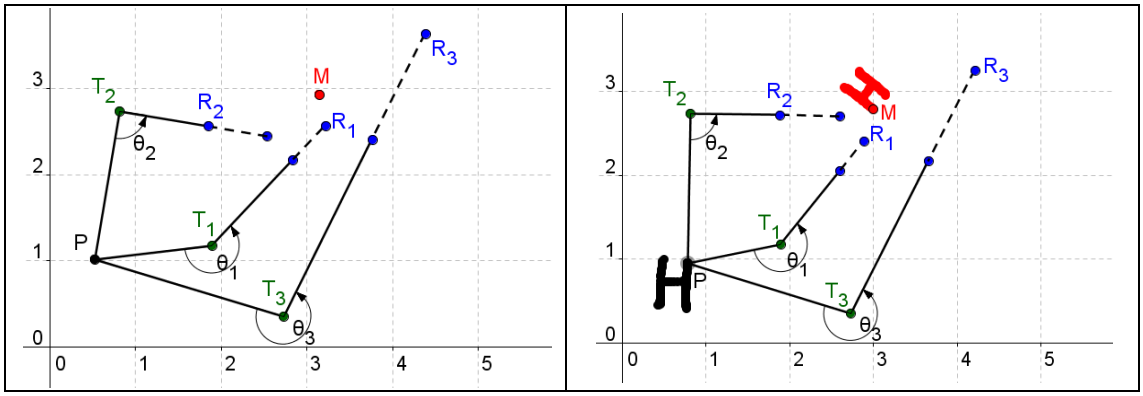
$\therefore$若$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} h_k s_k \cos\theta_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} h_k s_k \sin\theta_k = 0 \end{cases}$則 M不會隨著 P 點的改變而改變，不論 P 點在平面上如何變動，M恆為固定點，得證■

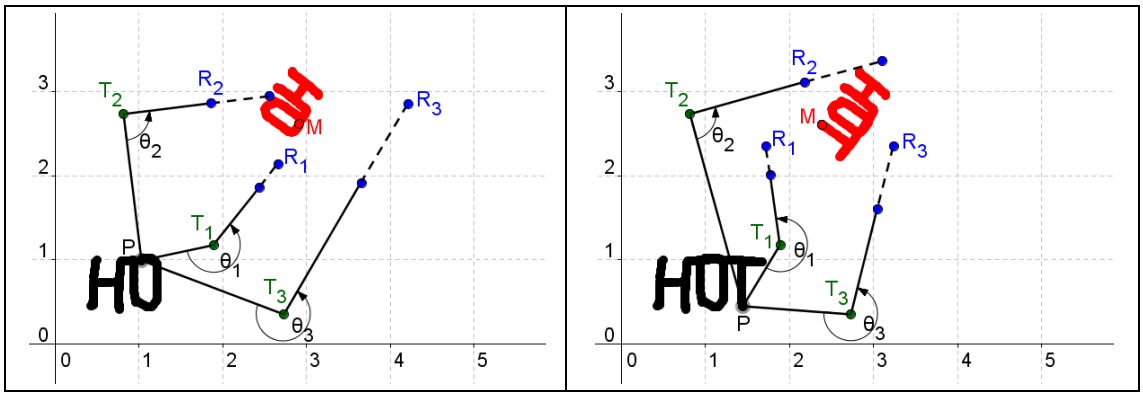
二、 相似軌跡問題



(一) 對旋轉中心旋轉任意角時，加權點 M 的軌跡特色

在我們推廣平均點至加權點時，由【定理五】知：只要θ_1，θ_2，…，θ_n滿足$\sum_{k=1}^{n} h_k s_k \cos\theta_k = 0$且$\sum_{k=1}^{n} h_k s_k \sin\theta_k = 0$時，加權點 M 就會是固定點，不會隨著 P 點的改變而改變。但我們很好奇，如果θ_1，θ_2，…，θ_n不滿足此條件時，結果會怎樣？我們只讓旋轉角度θ_1，θ_2，…，θ_n角度固定，但沒有給予特別的限制，旋轉後加入伸縮，用 Geogebra 測試如下圖所示，當 P 點移動軌跡是 HOT 時，M 點也呈現 HOT 的字樣。P 點改變，M 不再是固定點，會隨著 P 點的改變而改變，但令人驚奇的是，P 點的軌跡與 M 點的軌跡是相似圖形，我們將這個有趣的現象寫成【定理十三】相似軌跡問題，放在 P.27 的地方，並加以證明。





因為在證明相似軌跡問題過程中會用到一些定義和引理，所以先列出如下：

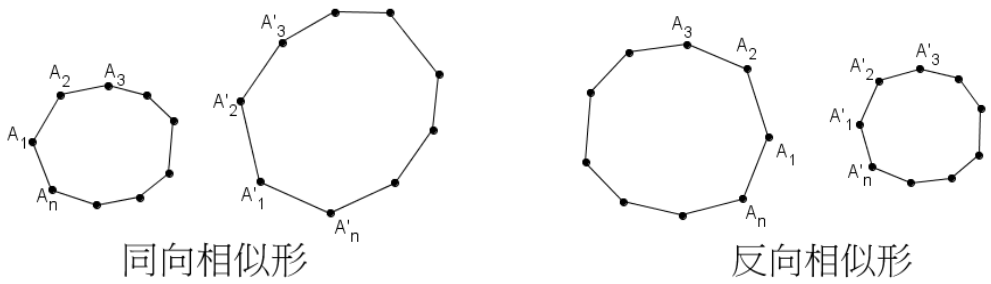
首先，我們介紹三個定義：

(二) 同向相似形和反向相似形：

兩多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n(n\geq 3)$，若$\angle A_1=\angle A'_1$，$\angle A_2=\angle A'_2$，$\cdots$，$\angle A_n=\angle A'_n$ (對應角相等)，且$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A'_1A'_2}}=\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A'_2A'_3}}=\cdots=\frac{\overline{A_nA_1}}{\overline{A'_nA'_1}}$ (對應邊成比例)，則多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n$為兩相似多邊形，分為兩類:

1. 當$A_1\to A_2\to\cdots\to A_n$與$A'_1\to A'_2\to\cdots\to A'_n$均為順時針或均為逆時針時，稱多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n$為兩同向相似形

2. 當$A_1\to A_2\to\cdots\to A_n$與$A'_1\to A'_2\to\cdots\to A'_n$一個為順時針，一個為逆時針時，稱多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n$為兩反向相似形



備註：當$n\to\infty$時，即可表示曲線的同向相似形及反向相似形

3. 規定：點是任意圖形的同相相似圖形

(三) 對應點

1. 設有$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{A'B'}$兩直線，其坐標為 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$A'(x_1'，y_1')$，$B'(x_2'，y_2')$，

   設 $P(x_1+(x_2-x_1)t，y_1+(y_2-y_1)t)$為$\overleftrightarrow{AB}$上的點

   $Q(x_1'+(x_2'-x_1')s，y_1'+(y_2'-y_1')s)$為$\overleftrightarrow{A'B'}$上的點

   若 t=s，則稱在$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{A'B'}$中，P，Q 互為對應點

   (有時則表示成在$\overline{AB}$，$\overline{A'B'}$中，P，Q 互為對應點)

   (註：t=s=0 時，得到 A，A′為對應點；t=s=1 時，得到 B，B′為對應點)

2. 設有兩相似多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A_1'A_2'\cdots A_n'(n\geq 3)$，

   滿足$\angle A_1=\angle A_1'$，$\angle A_2=\angle A_2'$，…，$\angle A_n=\angle A_n'$ (對應角相等)，且$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}}=\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2'A_3'}}=\cdots=\frac{\overline{A_nA_1}}{\overline{A_n'A_1'}}$ (對應邊成比例)，若 P 為多邊形$A_1A_2\cdots A_n$上一點，Q 為多邊形$A_1'A_2'\cdots A_n'$上一點，而且 P，Q 恰在多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A_1'A_2'\cdots A_n'$兩對應邊上，且互為對應邊上的對應點，則稱多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A_1'A_2'\cdots A_n'$中，P，Q 互為對應點。

   備註：當$n\to\infty$時，即可表示兩相似曲線圖形上的對應點。

(四) $\vec{a}:\vec{b}=r:s$的意義

設 $r，s\in R$，$\vec{a}$，$\vec{b}$為向量，定義$\vec{a}:\vec{b}=r:s$的意義為 $s\vec{a}=r\vec{b}$

在解釋完基本的定義後，接下來我們推導出一連串的引理如下：

(五) 證明中需要的引理

由於需要的引理很多，為了增加內容的流暢度，我們將引理的詳細證明放在 P.202【附錄二】。

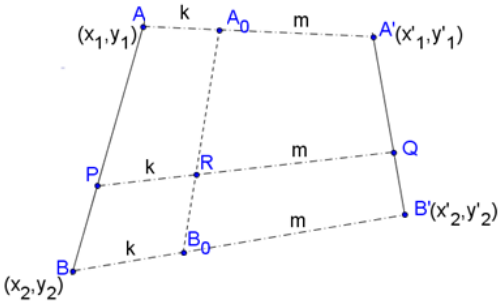
【引理六】

設有$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{A'B'}$兩直線，其坐標為 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$A'(x_1'，y_1')$，$B'(x_2'，y_2')$，

A_0在$\overleftrightarrow{AA'}$上，滿足$\overrightarrow{AA_0}$：$\overrightarrow{A_0A'}$=k：m，B_0在$\overleftrightarrow{BB'}$上，滿足$\overrightarrow{BB_0}$：$\overrightarrow{B_0B'}$=k：m

$\overleftrightarrow{AB}$的參數式為$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$，

$\overleftrightarrow{A'B'}$的參數式為$\begin{cases} x = x_1' + (x_2' - x_1')s \\ y = y_1' + (y_2' - y_1')s \end{cases}$，



設 P 為$\overleftrightarrow{AB}$上的動點，Q 在$\overleftrightarrow{A'B'}$上，且為 P 的對應點

R 在$\overleftrightarrow{PQ}$上，滿足$\overrightarrow{PR}$：$\overrightarrow{RQ}$=k：m ，

則：(1)隨著 P 在$\overleftrightarrow{AB}$上變動，所有 R 點所成圖形為$\overleftrightarrow{A_0B_0}$

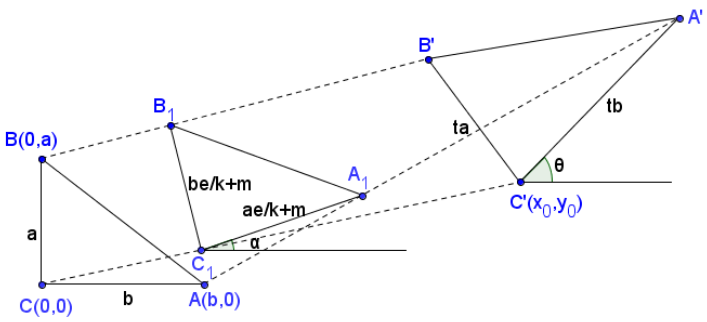
(2)隨著 P 在$\overline{AB}$上變動，所有 R 點所成圖形為$\overline{A_0B_0}$

【引理七】

設直角ΔABC 與直角$\Delta A'B'C'$為同向的相似三角形，

$\angle C = \angle C' = 90^\circ$，

$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$



A_1在$\overleftrightarrow{AA'}$上，滿足

$\overrightarrow{AA_1}$：$\overrightarrow{A_1A'} = k：m$，

B_1在$\overleftrightarrow{BB'}$上，滿足$\overrightarrow{BB_1}$：$\overrightarrow{B_1B'} = k：m$，

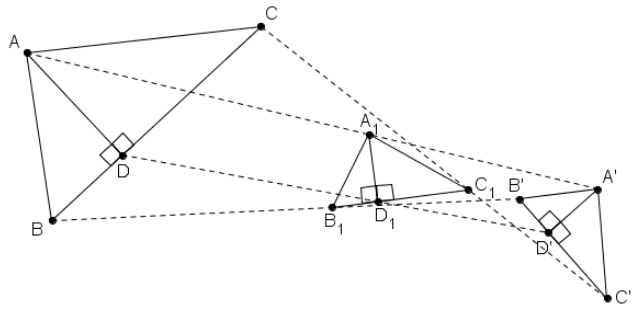
C_1在$\overleftrightarrow{CC'}$上，滿足$\overrightarrow{CC_1}$：$\overrightarrow{C_1C'} = k：m$，

則$\Delta A_1B_1C_1$與ΔABC亦為同向的相似三角形

由於任意三角形均可分成兩個直角三角形，所以由【引理七】可推得【引理八】

【引理八】

設ΔABC與$\Delta A'B'C'$為同向的相似三角形，



A_1在$\overleftrightarrow{AA'}$上，

滿足$\overrightarrow{AA_1}:\overrightarrow{A_1A'}=k:m$，

B_1在$\overleftrightarrow{BB'}$上，

滿足$\overrightarrow{BB_1}:\overrightarrow{B_1B'}=k:m$，

C_1在$\overleftrightarrow{CC'}$上，滿足$\overrightarrow{CC_1}:\overrightarrow{C_1C'}=k:m$，則$\Delta A_1B_1C_1$與$\Delta ABC$亦為同向的相似三角形

由於 n 邊形可以分成(n-2)個三角形，所以由【引理八】可推得【引理九】

【引理九】(請參考定理十的圖)

設兩多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n(n\geq 3)$ 為同向的相似多邊形，

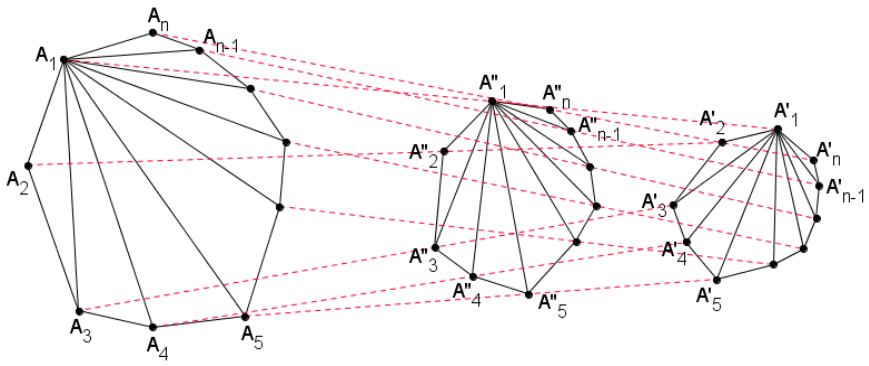
A'_1，A'_2，…，A'_n分別為A_1，A_2，…，A_n的對應點，

A''_1在$\overleftrightarrow{A_1A'_1}$上，滿足$\overrightarrow{A_1A''_1}:\overrightarrow{A''_1A'_1}=k:m$，$A''_2$在$\overleftrightarrow{A_2A'_2}$上，滿足$\overrightarrow{A_2A''_2}:\overrightarrow{A''_2A'_2}=k:m$，……，$A''_n$在$\overleftrightarrow{A_nA'_n}$上，滿足$\overrightarrow{A_nA''_n}:\overrightarrow{A''_nA'_n}=k:m$，則多邊形$A''_1A''_2\cdots A''_n$與$A_1A_2\cdots A_n$為同向的相似多邊形

由【引理九】及【引理六】我們可以得到【定理十】

【定理十】

兩多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n(n\geq 3)$為同向的相似多邊形，$A'_1$，$A'_2$，…，$A'_n$分別為$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的對應點，設 P 為多邊形$A_1A_2\cdots A_n$上的動點，Q 在多邊形

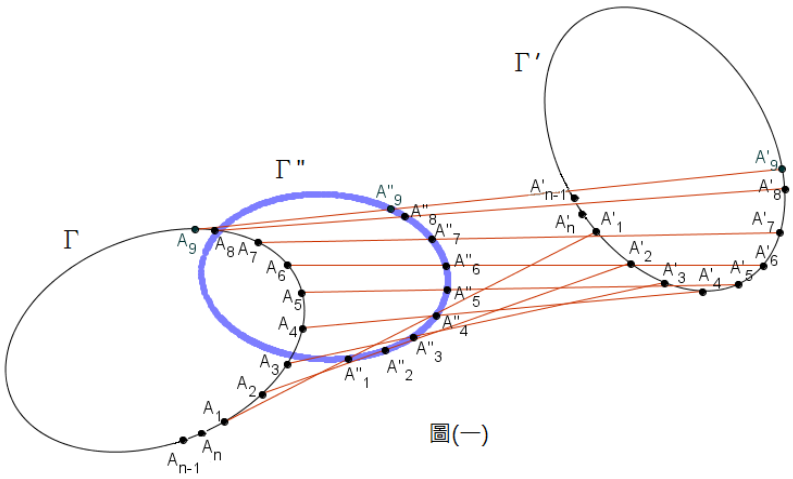


$A'_1A'_2\cdots A'_n$上，且為 P 的對應點，R 在$\overleftrightarrow{PQ}$上，滿足$\overrightarrow{PR}:\overrightarrow{RQ}=k:m$，則隨著 P 在多邊形$A_1A_2\cdots A_n$上變動，所有 R 點所成圖形為多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$的同向相似圖形。

由【定理十】我們可以得到【定理十一】

【定理十一】

設Γ，Γ′為同向的相似圖形(可以有弧線)，設 P 為Γ上的動點，Q 在Γ′上，且為 P 的對應點，R 在$\overleftrightarrow{PQ}$上，滿足$\overrightarrow{PR}:\overrightarrow{RQ}=k:m$



圖(一)

設隨著 P 在Γ上變動，所有 R 點所成圖形為Γ"，則Γ"為Γ的同向相似圖形

以上引理六、七、八、九及定理十、十一的詳細證明請參閱 P.202【附錄二】。

(六) 平均點與加權點的幾何意義

【定理十二】加權點的幾何意義

設R_1，R_2，⋯，R_n為平面上 n 個點，h_1，h_2，⋯，h_n為 n 個非零實數($n\geq 2$)，且$\sum_{k=1}^{n} h_k \neq 0$

設M_1在$\overleftrightarrow{R_1R_2}$上，滿足$\overrightarrow{R_1M_1}:\overrightarrow{M_1R_2}=h_2:h_1$

M_2在$\overleftrightarrow{M_1R_3}$上，滿足$\overrightarrow{M_1M_2}:\overrightarrow{M_2R_3}=h_3:(h_1+h_2)$

M_3在$\overleftrightarrow{M_2R_4}$上，滿足$\overrightarrow{M_2M_3}:\overrightarrow{M_3R_4}=h_4:(h_1+h_2+h_3)$

……

M_{n-1}在$\overleftrightarrow{M_{n-2}R_n}$上，滿足$\overrightarrow{M_{n-2}M_{n-1}}:\overrightarrow{M_{n-1}R_n}=h_n:(h_1+h_2+h_3+\cdots h_{n-1})$

設M為$R_1,R_2,\cdots,R_n$分別以$h_1,h_2,\cdots,h_n$為加權倍率得到的加權點，

即$\overrightarrow{OM}=\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k\overrightarrow{OR_k}}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，(其中 O 為原點)，則$M_{n-1}$即為 M 點

【證明】

一、使用數學歸納法證明：當 $n\geq 2$時，$\overrightarrow{OM_{n-1}}=\frac{1}{h_1+h_2+h_3+\cdots+h_n}\left(h_1\overrightarrow{OR_1}+h_2\overrightarrow{OR_2}+h_3\overrightarrow{OR_3}+\quad\cdots+h_n\overrightarrow{OR_n}\right)$均成立，證明如下：

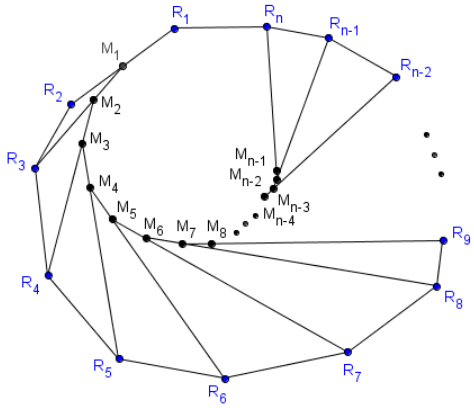
(1) $n=2$時

$\because M_1$在$\overleftrightarrow{R_1R_2}$上，滿足$\overrightarrow{R_1M_1}:\overrightarrow{M_1R_2}=h_2:h_1$

$\therefore h_1\overrightarrow{R_1M_1}=h_2\overrightarrow{M_1R_2}$

$\therefore h_1\left(\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OR_1}\right)=h_2\left(\overrightarrow{OR_2}-\overrightarrow{OM_1}\right)$

$\therefore \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{h_1+h_2}(h_1\overrightarrow{OR_1} + h_2\overrightarrow{OR_2})$



$\therefore n = 2$時原式成立

(2) 設$n = k$時原式成立，

即$\overrightarrow{OM_{k-1}} = \frac{1}{h_1+h_2+h_3+\cdots h_{k-1}+h_k}(h_1\overrightarrow{OR_1} + h_2\overrightarrow{OR_2} + h_3\overrightarrow{OR_3} + \cdots + h_k\overrightarrow{OR_k})$

則$n = k+1$時

$\because M_k$在$\overleftrightarrow{M_{k-1}R_{k+1}}$上，

滿足$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} : \overrightarrow{M_kR_{k+1}} = h_{k+1} : (h_1 + h_2 + h_3 + \cdots h_{k-1} + h_k)$

$\therefore h_{k+1}\overrightarrow{M_kR_{k+1}} = (h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_{k-1} + h_k)\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$

$\therefore h_{k+1}(\overrightarrow{OR_{k+1}} - \overrightarrow{OM_k}) = (h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_{k-1} + h_k)(\overrightarrow{OM_k} - \overrightarrow{OM_{k-1}})$

$\therefore \overrightarrow{OM_k}$

$= \frac{1}{h_1+h_2+h_3+\cdots+h_k+h_{k+1}}[(h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_{k-1} + h_k)\overrightarrow{OM_{k-1}} + h_{k+1}\overrightarrow{OR_{k+1}}]$

$\therefore \overrightarrow{OM_k} = \frac{1}{h_1+h_2+h_3+\cdots+h_k+h_{k+1}}(h_1\overrightarrow{OR_1} + h_2\overrightarrow{OR_2} + h_3\overrightarrow{OR_3} + \cdots + h_k\overrightarrow{OR_k} + h_{k+1}\overrightarrow{OR_{k+1}})$

$\therefore n = k+1$時原式也成立

由數學歸納法得證：當$n \geq 2$時，

$\overrightarrow{OM_{n-1}} = \frac{1}{h_1+h_2+h_3+\cdots+h_n}(h_1\overrightarrow{OR_1} + h_2\overrightarrow{OR_2} + h_3\overrightarrow{OR_3} + \cdots + h_n\overrightarrow{OR_n})$均成立

二、$\therefore \overrightarrow{OM_{n-1}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k\overrightarrow{OR_k}}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = \overrightarrow{OM}$，$\therefore M_{n-1}$即為M點，得證■

備註：當$h_1 = h_2 = h_3 = \cdots = h_n = 1$時，$\overrightarrow{OM} = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k \overrightarrow{OR_k}}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OR_k}}{n}$即可得到平均點的幾何意義。平均點的幾何意義感覺很特別，【定理十二】的圖M_{n-1}畫的即是平均點。

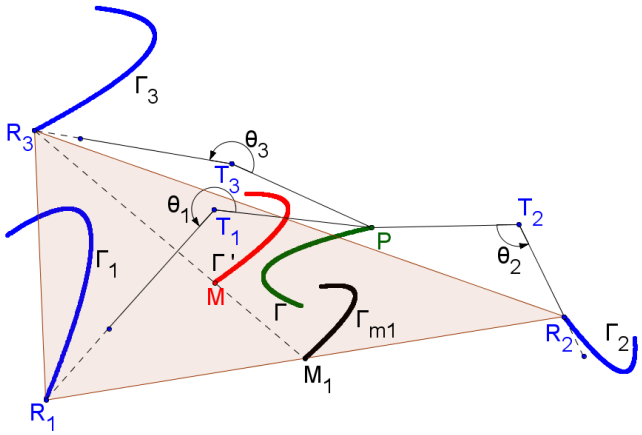
(七) 證明 P.19 所提到的 P 點軌跡與 M 點軌跡是相似圖形，寫成【定理十三】相似軌跡問題。

之前所證的一些引理就是為了證明此定理。

【定理十三】相似軌跡問題

設T_1，T_2，⋯，T_n為坐標平面上的 n 個定點$(n \geq 2)$，另有一點 P，今以T_1為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1再伸縮s_1倍，得到點R_1；以T_2為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_2再伸縮s_2倍，得到點R_2； …；以T_n為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_n再伸縮s_n倍，得到點R_n。設M為R_1，R_2，⋯，R_n分別以h_1，h_2，…，h_n為加權倍率得到的加權點，即$M = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，今 P 點任意變動，設變動的軌跡為Γ，M 隨之變動，設變動軌跡為Γ′，證明Γ′與 Γ為同向的相似圖形

【證明】



1. 隨著P點在軌跡Γ上變動，設R_1的變動軌跡為Γ_1，R_2的變動軌跡為Γ_2，⋯，R_n的變動軌跡為Γ_n，

∵以T_1為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1再伸縮s_1倍得到點R_1，又隨著 P 點在軌跡Γ上變動，R_1的變動軌跡為Γ_1

∴以T_1為旋轉中心，將圖形Γ旋轉θ_1後，再以T_1為伸縮中心將圖形伸縮s_1

倍，可得到圖形Γ_1

$\therefore \Gamma_1$與Γ為同向的相似圖形

2. 同理Γ_2，Γ_3，…，Γ_n與 Γ也為同向的相似圖形

所以Γ_1，Γ_2，Γ_3，…，Γ_n與 Γ均為同向的相似圖形

3. 設M_1在$\overleftrightarrow{R_1R_2}$上，滿足$\overline{R_1M_1}:\overline{M_1R_2}=h_2:h_1$

M_2在$\overleftrightarrow{M_1R_3}$上，滿足$\overline{M_1M_2}:\overline{M_2R_3}=h_3:(h_1+h_2)$，

M_3在$\overleftrightarrow{M_2R_4}$上，滿足$\overline{M_2M_3}:\overline{M_3R_4}=h_4:(h_1+h_2+h_3)$

……

M_{n-1}在$\overleftrightarrow{M_{n-2}R_n}$上，滿足$\overline{M_{n-2}M_{n-1}}:\overline{M_{n-1}R_n}=h_n:(h_1+h_2+h_3+\cdots h_{n-1})$

由【定理十二】知M_{n-1}即為 M 點

隨著 P 點在軌跡Γ上變動，設M_1的變動軌跡為Γ_{m1}，

M_2的變動軌跡為Γ_{m2}，…，M_{n-1}的變動軌跡為$\Gamma_{m(n-1)}$

4. $\because M_1$在$\overleftrightarrow{R_1R_2}$上，滿足$\overline{R_1M_1}:\overline{M_1R_2}=h_2:h_1$，且$R_1$軌跡$\Gamma_1$，$R_2$軌跡$\Gamma_2$為同向的相似圖形

由【定理十一】知M_1軌跡Γ_{m1}與R_2軌跡Γ_2為同向的相似圖形

$\therefore \Gamma_{m1}$與Γ_1，Γ_2，Γ_3，…，Γ_n，Γ為同向的相似圖形

5. $\because M_2$在$\overleftrightarrow{M_1R_3}$上，滿足$\overline{M_1M_2}:\overline{M_2R_3}=h_3:(h_1+h_2)$，且$M_1$軌跡$\Gamma_{m1}$與$R_3$軌跡$\Gamma_3$為同向的相似圖形，由【定理十一】知$M_2$軌跡$\Gamma_{m2}$與$R_3$軌跡$\Gamma_3$為同向的相似圖形

$\therefore \Gamma_{m2}$與Γ_1，Γ_2，Γ_3，…，Γ_n，Γ為同向的相似圖形

……依此類推，同理可證：

M_{n-1}的變動軌跡$\Gamma_{m(n-1)}$與Γ_1，Γ_2，Γ_3，…，Γ_n，Γ為同向的相似圖形

因為M_{n-1}即為 M 點，所以 M 的變動軌跡Γ'與Γ_1，Γ_2，Γ_3，…，Γ_n，Γ為同向的相似圖形

即 M 的變動軌跡Γ'與Γ為同向的相似圖形，得證■

(八) 改變旋轉中心T_1，T_2，…，T_n為動點探討軌跡

在【定理十三】相似軌跡問題中，我們假設旋轉中心T_1，T_2，…，T_n均為定點，但有一次，我們將旋轉中心改為許多圓周上的動點，每個旋轉中心移動的角速度都相同，並令 P 點也以相同角速度繞圓，我們發現旋轉後所得的平均點 M 的軌跡仍然會和 P 點軌跡相似(繞一個圓)。最後，我們發現：只要每個旋轉中心移動的軌跡和 P 點的移動軌跡為同向相似圖形，則我們得到的加權點 M 的軌跡也就會和 P 點的移動軌跡相似，寫成【定理十七】，放在 P. 31 的地方。

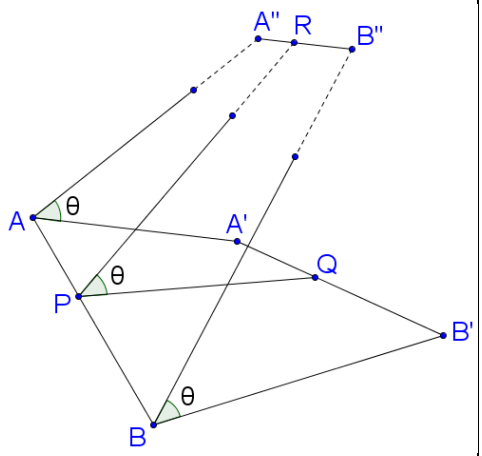
1. **在證明【定理十七】之前，先介紹下面三個引理**

【引理十四】

設有$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{A'B'}$兩直線，其坐標為 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$A'(x_1'，y_1')$，$B'(x_2'，y_2')$，

$\overleftrightarrow{AB}$的參數式為$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$

$\overleftrightarrow{A'B'}$的參數式為$\begin{cases} x = x_1' + (x_2' - x_1')t \\ y = y_1' + (y_2' - y_1')t \end{cases}$



設 P 為$\overleftrightarrow{AB}$上的動點，Q 在$\overleftrightarrow{A'B'}$上，且為 P 的對應點，若θ為某固定角度

今以A為旋轉中心將A'旋轉θ再伸縮s倍得A''點，以B為旋轉中心將B'旋轉θ再伸縮s倍得B''點，以P為旋轉中心將Q旋轉θ再伸縮s倍得R點

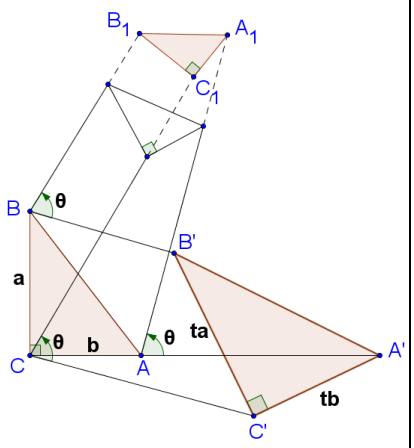
證明：隨著 P 在$\overleftrightarrow{AB}$上變動，所有 R 點所成圖形為$\overleftrightarrow{A''B''}$

【引理十五】

設直角ΔABC與直角$\Delta A'B'C'$為同向的相似三角形，

$\angle C = \angle C' = 90^\circ$，$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$

若θ為某固定角度，今以A為旋轉中心將A′旋轉θ再伸縮s倍得A_1點，以B為旋轉中心將B′旋轉θ再伸縮s倍得B_1點，以C為旋轉中心將C′旋轉θ再伸縮s倍得C_1點

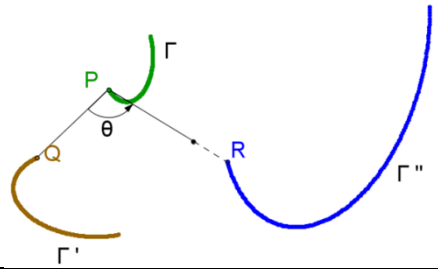


證明：$\Delta A_1B_1C_1$與ΔABC亦為同向的相似三角形

【引理十六】

設Γ，Γ′為同向的相似圖形(可以有弧線)，設 P 為Γ上的動點，Q 在Γ′上，且為 P 的對應點，若θ為某固定角度，且以 P 為旋轉中心將 Q 旋轉θ，再伸縮 s 倍得 R 點，設隨著 P 在Γ上變動，所有 R 點所成圖形為Γ"

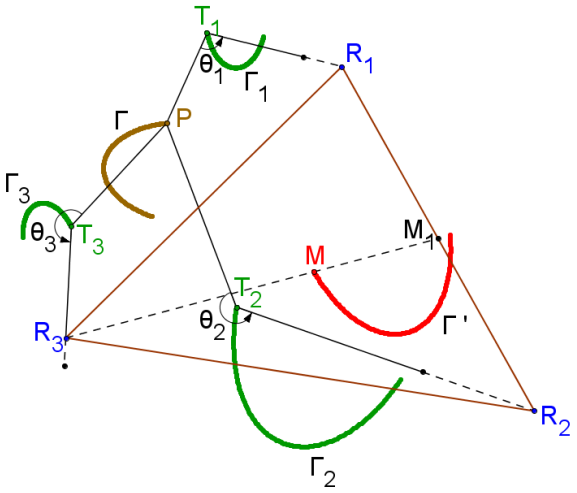
則Γ"為 Γ的同向相似圖形



為了讓主題明確流暢些，我們將引理十四、十五、十六的證明放在附錄，請參閱 P. 212【附錄三】

2. **證明【定理十七】：相似軌跡問題(二)**

【定理十七】相似軌跡問題(二)



設Γ，Γ_1，Γ_2，…，Γ_n均為同向的相似圖形，P 為Γ上的動點，T_1，T_2，…，T_n分別在Γ_1，Γ_2，…，Γ_n上，且均為 P 的對應點。以T_1為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1再伸縮s_1倍得到點R_1；以T_2為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_2再伸縮s_2倍得到點R_2；…；以T_n為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_n再伸縮s_n倍得到點R_n。設 M 為R_1，R_2，…，R_n分別以h_1，h_2，…，h_n為加權倍率作加權得的點，即$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}h_k}\left(\sum_{k=1}^{n}h_k\,\overrightarrow{OR_k}\right)$，其中 O 為原點。今 P 點在$\Gamma$上任意變動(即變動的軌跡為$\Gamma$)，M 隨之變動，設變動軌跡為$\Gamma'$，證明$\Gamma'$與 Γ為同向的相似圖形

【證明】(思考模式和【定理十三】有些類似)

1. 已知Γ，Γ_1為同向的相似圖形，P 為Γ上的動點，T_1在Γ_1上變動，且為 P 的對應點，

   即T_1在Γ_1上變動，P 點在軌跡Γ上變動，且 P 為T_1的對應點

   以T_1為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1再伸縮s_1倍得到點R_1，

   設隨著T_1在Γ_1上變動，P 在Γ上變動，所有R_1點所成圖形為Γ_{R1}，

   $\because\Gamma_1$，Γ為同向的相似圖形，由【引理十六】知：

   Γ_{R1}與Γ_1為同向的相似圖形

   所以Γ_{R1}與Γ_1，Γ為同向的相似圖形

2. 設隨著T_2，T_3，⋯，T_n分別在Γ_2，Γ_3，⋯，Γ_n上變動，P 在Γ上變動(T_2，T_3，⋯，T_n

均為 P 的對應點)，所有R_2，R_3，⋯，R_n所成圖形分別為Γ_{R2}，Γ_{R3}，⋯，Γ_{Rn}

同理可證：

Γ_{R2}與Γ_2，Γ為同向的相似圖形

Γ_{R3}與Γ_3，Γ為同向的相似圖形

……

Γ_{Rn}與Γ_n，Γ為同向的相似圖形

所以Γ_{R1}，Γ_{R2}，Γ_{R3}，⋯，Γ_{Rn}，Γ均為同向的相似圖形

3. 設M_1在$\overleftrightarrow{R_1R_2}$上，滿足$\overrightarrow{R_1M_1}:\overrightarrow{M_1R_2}=h_2:h_1$

M_2在$\overleftrightarrow{M_1R_3}$上，滿足$\overrightarrow{M_1M_2}:\overrightarrow{M_2R_3}=h_3:(h_1+h_2)$，

M_3在$\overleftrightarrow{M_2R_4}$上，滿足$\overrightarrow{M_2M_3}:\overrightarrow{M_3R_4}=h_4:(h_1+h_2+h_3)$

……

M_{n-1}在$\overleftrightarrow{M_{n-2}R_n}$上，滿足$\overrightarrow{M_{n-2}M_{n-1}}:\overrightarrow{M_{n-1}R_n}=h_n:(h_1+h_2+h_3+\cdots h_{n-1})$

由 P. 25【定理十二】知M_{n-1}即為 M 點

隨著 P 點在Γ上任意變動，設M_1的變動軌跡為Γ_{m1}，M_2的變動軌跡為Γ_{m2}，⋯，M_{n-1}的變動軌跡為$\Gamma_{m(n-1)}$

4. $\because M_1$在$\overleftrightarrow{R_1R_2}$上，滿足$\overrightarrow{R_1M_1}:\overrightarrow{M_1R_2}=h_2:h_1$，且$R_1$軌跡$\Gamma_{R1}$，$R_2$軌跡$\Gamma_{R2}$為同向的相似圖形

由【定理十一】知M_1軌跡Γ_{m1}與R_2軌跡Γ_{R2}為同向的相似圖形

$\therefore \Gamma_{m1}$與Γ_{R1}，Γ_{R2}，Γ_{R3}，…，Γ_{Rn}，Γ為同向的相似圖形

5. $\because M_2$在$\overleftrightarrow{M_1R_3}$上，滿足$\overline{M_1M_2}:\overline{M_2R_3}=h_3:(h_1+h_2)$，且$M_1$軌跡$\Gamma_{m1}$與$R_3$軌跡$\Gamma_{R3}$為同向的相似圖形

由【定理十一】知M_2軌跡Γ_{m2}與R_3軌跡Γ_{R3}為同向的相似圖形

$\therefore \Gamma_{m2}$與Γ_{R1}，Γ_{R2}，Γ_{R3}，…，Γ_{Rn}，Γ為同向的相似圖形

…… 依此類推，同理可證：

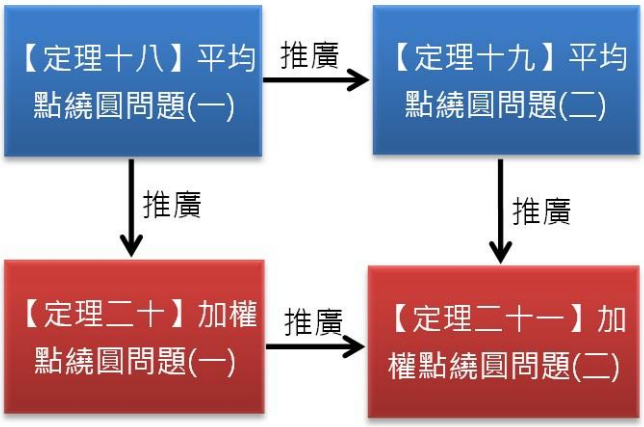
M_{n-1}的變動軌跡$\Gamma_{m(n-1)}$與Γ_{R1}，Γ_{R2}，Γ_{R3}，…，Γ_{Rn}，Γ為同向的相似圖形

因為M_{n-1}即為 M 點，

所以 M 的變動軌跡Γ'與Γ_{R1}，Γ_{R2}，Γ_{R3}，…，Γ_{Rn}，Γ為同向的相似圖形

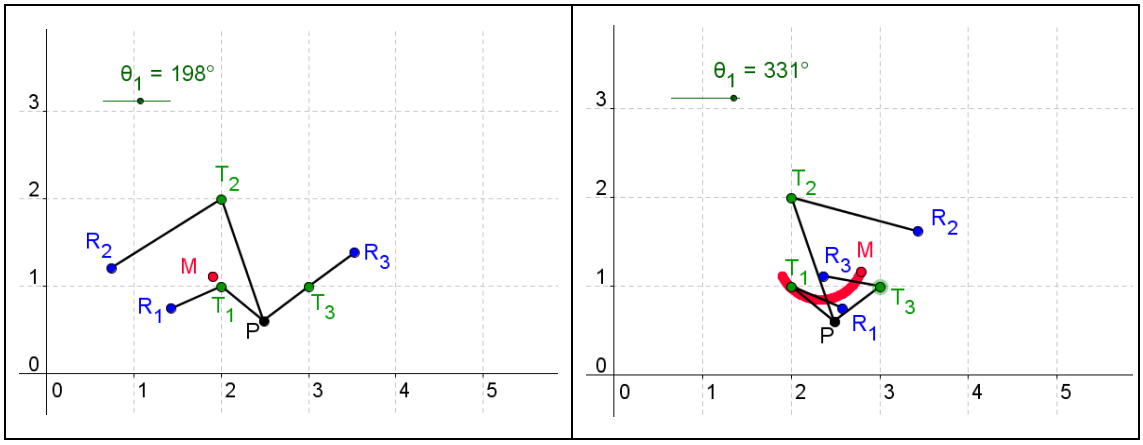
即 M 的變動軌跡Γ'與Γ為同向的相似圖形，得證■

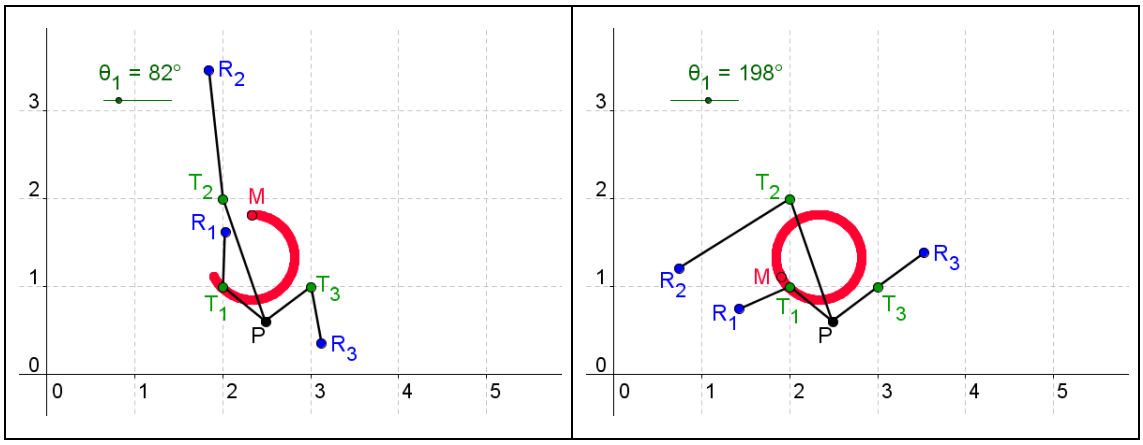
三、 加權點繞圓問題



(一) 旋轉角θ變動時，平均點 M 的移動軌跡

在用 Geogebra 軟體作最初 n 個旋轉中心問題(平均點版本)的圖時，由於我們知道：當$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \frac{360^\circ}{n}$，…，$\theta_n = \theta + \frac{360^\circ}{n} \times (n-1)$時，只要θ角度固定，平均點 M 都不會因為 P 點的改變而移動。但在一次偶然的情況下，我們移動了θ角的數值滑桿，發現θ變動時，M 點會移動，於是我們將 M 點的移動軌跡顯示出來，發現是一個圓，如下列四圖所示。我們將此發現寫成【定理十八】，並利用三角函數把它證明出來。





(二) 證明【定理十八】

【定理十八】平均點繞圓問題(一)

設$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，⋯，$T_n(a_n，b_n)$為坐標平面上的 n 個定點($(n \geq 2)$，另有一點 P，令$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \frac{360^\circ}{n}$，⋯，$\theta_n = \theta + \frac{360^\circ}{n} \times (n-1)$，今以$T_1$為旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_1$得到$R_1$；以$T_2$為旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_2$得到$R_2$； ...；以$T_n$為旋轉中心，將 P 點旋轉$\theta_n$得到$R_n$。設 M 為$R_1$，$R_2$，⋯，$R_n$的平均點，即$\overrightarrow{OM} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OR_k}}{n}$，其中 O 為原點，證明：當$\theta$角在$0^\circ$到$360^\circ$之間逐漸變動時，M 點會跟著改變，所有 M 點所成圖形為一圓，圓心為$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)$，此時 P 點可任意改變，不影響 M 的軌跡。

1. $\because \theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \frac{360^\circ}{n}$，⋯，$\theta_n = \theta + \frac{360^\circ}{n} \times (n-1)$，

令$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{n}$，$\alpha_2 = \frac{360^\circ}{n} \times 2$，...，$\alpha_{n-1} = \frac{360^\circ}{n} \times (n-1)$，則

$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \alpha_1$，⋯，$\theta_n = \theta + \alpha_{n-1}$，且

$\begin{cases} \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n = 0 \\ \sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n = 0 \end{cases}$(由 P.12 上面式子(*)已證)

由【定理四】的證明過程，P.11 式子(1)知：令$M(x'，y')$，則

$nx' = x(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n) - y(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n) -$

$a_1\cos\theta_1 + b_1\sin\theta_1 + a_1 - a_2\cos\theta_2 + b_2\sin\theta_2 + a_2 - \ldots\ldots - a_n\cos\theta_n +$

$b_n\sin\theta_n + a_n$

(以$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n = 0$，$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n = 0$代入)

$= -a_1\cos\theta_1 + b_1\sin\theta_1 + a_1 - a_2\cos\theta_2 + b_2\sin\theta_2 + a_2 \ldots\ldots - a_n\cos\theta_n +$

$b_n\sin\theta_n + a_n$

(以$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \alpha_1$，$\cdots$，$\theta_n = \theta + \alpha_{n-1}$代入)

$= -a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_1 - a_2\cos(\theta + \alpha_1) + b_2\sin(\theta + \alpha_1) + a_2 - \ldots\ldots$

$-a_n\cos(\theta + \alpha_{n-1}) + b_n\sin(\theta + \alpha_{n-1}) + a_n$

$= -a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_1 - a_2(\cos\theta\cos\alpha_1 - \sin\theta\sin\alpha_1) + b_2(\sin\theta\cos\alpha_1 +$

$\cos\theta\sin\alpha_1) + a_2 - \ldots\ldots - a_n(\cos\theta\cos\alpha_{n-1} - \sin\theta\sin\alpha_{n-1}) + b_n(\sin\theta\cos\alpha_{n-1} +$

$\cos\theta\sin\alpha_{n-1}) + a_n$

$= a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \cos\theta(-a_1 - a_2\cos\alpha_1 + b_2\sin\alpha_1 - \ldots\ldots - a_n\cos\alpha_{n-1} +$

$b_n\sin\alpha_{n-1}) + \sin\theta(b_1 + a_2\sin\alpha_1 + b_2\cos\alpha_1 + \ldots\ldots + a_n\sin\alpha_{n-1} + b_n\cos\alpha_{n-1})$

----------(3)

由【定理四】的證明過程，P.11 式子(2)知

$ny' = x(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n) + y(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n) -$

$a_1\sin\theta_1 - b_1\cos\theta_1 + b_1 - a_2\sin\theta_2 - b_2\cos\theta_2 + b_2 \ldots\ldots - a_n\sin\theta_n - b_n\cos\theta_n +$

b_n

(以$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n = 0$，$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n = 0$代入)

$= -a_1\sin\theta_1 - b_1\cos\theta_1 + b_1 - a_2\sin\theta_2 - b_2\cos\theta_2 + b_2 \ldots\ldots - a_n\sin\theta_n -$

$b_n\cos\theta_n + b_n$

(以$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \alpha_1$，$\cdots$，$\theta_n = \theta + \alpha_{n-1}$代入)

$= -a_1\sin\theta - b_1\cos\theta + b_1 - a_2\sin(\theta + \alpha_1) - b_2\cos(\theta + \alpha_1) + b_2 - \ldots\ldots$

$-a_n\sin(\theta+\alpha_{n-1})-b_n\cos(\theta+\alpha_{n-1})+b_n$

$=-a_1\sin\theta-b_1\cos\theta+b_1-a_2(\sin\theta\cos\alpha_1+\cos\theta\sin\alpha_1)-b_2(\cos\theta\cos\alpha_1-\sin\theta\sin\alpha_1)+b_2-\ldots\ldots-a_n(\sin\theta\cos\alpha_{n-1}+\cos\theta\sin\alpha_{n-1})-b_n(\cos\theta\cos\alpha_{n-1}-\sin\theta\sin\alpha_{n-1})+b_n$

$=b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n-\cos\theta(b_1+a_2\sin\alpha_1+b_2\cos\alpha_1+\ldots\ldots+a_n\sin\alpha_{n-1}+b_n\cos\alpha_{n-1})+\sin\theta(-a_1-a_2\cos\alpha_1+b_2\sin\alpha_1-\ldots\ldots-a_n\cos\alpha_{n-1}+b_n\sin\alpha_{n-1})$----------(4)

2. 令$k=-a_1-a_2\cos\alpha_1+b_2\sin\alpha_1-\ldots\ldots-a_n\cos\alpha_{n-1}+b_n\sin\alpha_{n-1}$

$h=b_1+a_2\sin\alpha_1+b_2\cos\alpha_1+\ldots\ldots+a_n\sin\alpha_{n-1}+b_n\cos\alpha_{n-1}$

因為$\alpha_1=\frac{360^\circ}{n}$，$\alpha_2=\frac{360^\circ}{n}\times 2$，……，$\alpha_{n-1}=\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$為固定的角度

所以 h，k 均為定值，而且 h，k 與x，y無關，不受P(x，y)影響，

由式子(3)與式子(4)知

$nx'=a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n+k\cos\theta+h\sin\theta$----------(5)

$ny'=b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n-h\cos\theta+k\sin\theta$----------(6)

將$h+ik$改成極式$r(\cos\beta+i\sin\beta)$，可得$h=r\cos\beta$，$k=r\sin\beta$代入(5)(6)可得

$$\begin{cases} nx'=a_1+a_2+\cdots+a_n+r\sin\beta\cos\theta+r\cos\beta\sin\theta=a_1+a_2+\cdots+a_n+r\sin(\theta+\beta) \\ ny'=b_1+b_2+\cdots+b_n-r\cos\beta\cos\theta+r\sin\beta\sin\theta=b_1+b_2+\cdots+b_n-r\cos(\theta+\beta) \end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases} x'=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+\frac{r}{n}\times\sin(\theta+\beta) \\ y'=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}-\frac{r}{n}\times\cos(\theta+\beta) \end{cases}$$

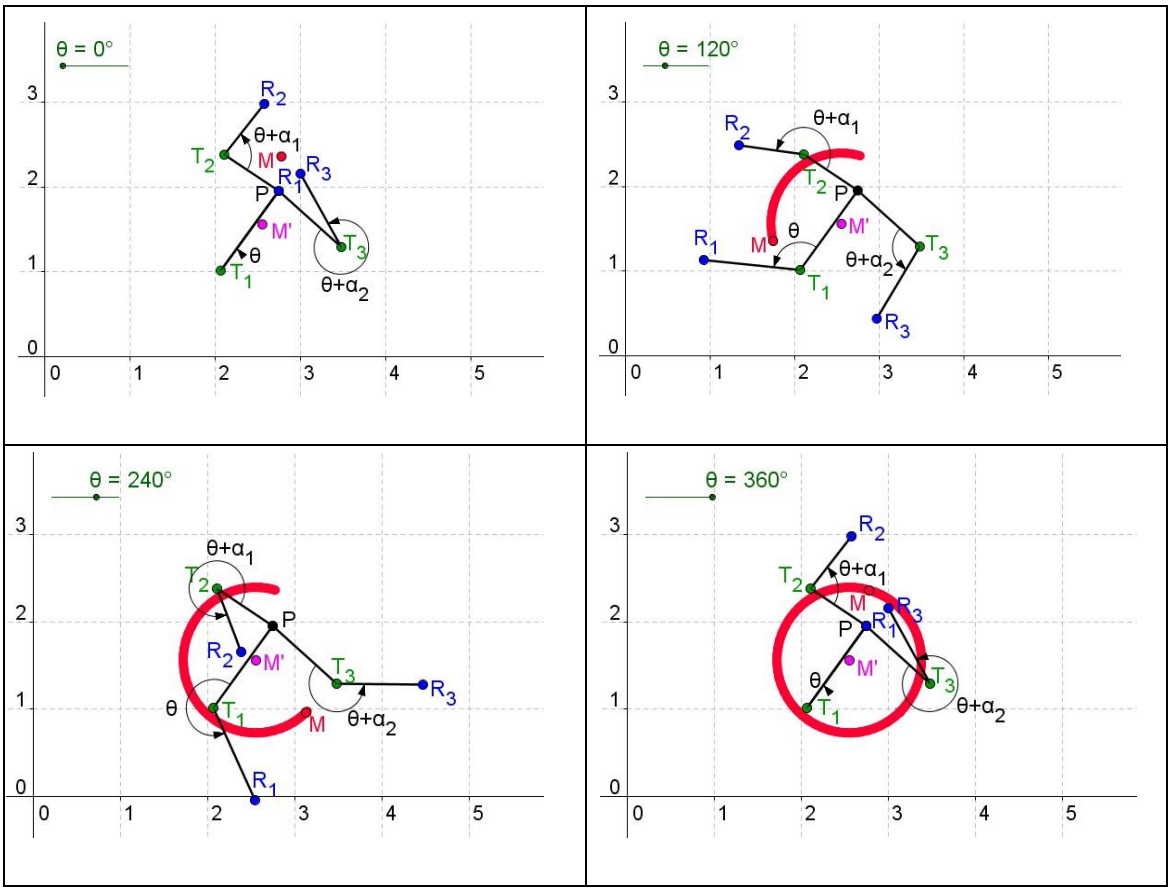
$$\therefore\left(x'-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2+\left(y'-\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)^2=\left(\frac{r}{n}\right)^2$$

∴隨著θ的改變，所有M(x′，y′)所形成的圖形為以$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)$為圓心，半徑為$\frac{r}{n}$的圓。又 h，k 不受P(x，y)影響，所以 r 不受P(x，y)影響，

所以 P 點任意變動無妨，P 點改變不影響M(x′，y′)的軌跡，得證■

(三) 改變【定理十八】旋轉角度間的差值

我們在【定理十八】證明當旋轉角度$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\frac{360^\circ}{n}$，…，$\theta_n=\theta+\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)$時，θ角在$0^\circ$到$360^\circ$之間逐漸變動，平均點 M 會繞圓。但我們很好奇，如果θ_1，θ_2，…，θ_n不滿足此條件時，結果會怎樣？因此我們將旋轉角度改成$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，…，$\theta_n=\theta+\alpha_{n-1}$，(其中$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_{n-1}$角度固定，但沒有給予特別的限制)，我們用 Geogebra 測試如下圖所示，發現：θ改變，平均點 M 仍然會繞圓，我們將其寫成【定理十九】。



【定理十九】平均點繞圓問題(二)

設$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，…，$T_n(a_n，b_n)$為坐標平面上的 n 個定點($n\geq 2$)，另有一點 P，令$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，…，$\theta_n=\theta+\alpha_{n-1}$，(其中$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_{n-1}$為

固定角度)，今以T_1為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1，得到R_1；以T_2為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_2，得到R_2； ……；以T_n為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_n，得到R_n。設 M 為R_1，R_2，⋯，R_n的平均點，即$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1}+\overrightarrow{OR_2}+\cdots+\overrightarrow{OR_n})$，其中 O 為原點，證明：若 P 點固定，則當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，M 點會跟著改變，所有 M 點所成圖形為一圓

【證明】我們有兩種證法，方法一與【定理十八】的證法類似，可以證明圓心為$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)$，方法二仿照【定理十三】的證明過程，即可得證。

一、方法一的證明

已知$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，$\theta_3=\theta+\alpha_2$，⋯，$\theta_n=\theta+\alpha_{n-1}$

回到 P.11【定理四】的證明過程，式子(1)(2)，令$M(x'，y')$則

$$nx'=x(\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n)-y(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)-a_1\cos\theta_1+$$
$$b_1\sin\theta_1+a_1-a_2\cos\theta_2+b_2\sin\theta_2+a_2-\ldots\ldots-a_n\cos\theta_n+b_n\sin\theta_n+a_n$$

($\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，$\theta_3=\theta+\alpha_2$，⋯，$\theta_n=\theta+\alpha_{n-1}$代入)

$$=x(\cos\theta+\cos(\theta+\alpha_1)+\cdots+\cos(\theta+\alpha_{n-1}))$$
$$-y(\sin\theta+\sin(\theta+\alpha_1)+\cdots+\sin(\theta+\alpha_{n-1}))$$
$$-a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+a_1-a_2\cos(\theta+\alpha_1)+b_2\sin(\theta+\alpha_1)+a_2-\cdots$$
$$-a_n\cos(\theta+\alpha_{n-1})+b_n\sin(\theta+\alpha_{n-1})+a_n$$
$$=x(\cos\theta+\cos\theta\cos\alpha_1-\sin\theta\sin\alpha_1+\cdots+\cos\theta\cos\alpha_{n-1}-\sin\theta\sin\alpha_{n-1})$$
$$-y(\sin\theta+\sin\theta\cos\alpha_1+\cos\theta\sin\alpha_1+\cdots+\sin\theta\cos\alpha_{n-1}+\cos\theta\sin\alpha_{n-1})$$
$$-a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+a_1-a_2(\cos\theta\cos\alpha_1-\sin\theta\sin\alpha_1)$$
$$+b_2(\sin\theta\cos\alpha_1+\cos\theta\sin\alpha_1)+a_2-\cdots-a_n(\cos\theta\cos\alpha_{n-1}-\sin\theta\sin\alpha_{n-1})$$
$$+b_n(\sin\theta\cos\alpha_{n-1}+\cos\theta\sin\alpha_{n-1})+a_n$$
$$=\cos\theta(x+x\cos\alpha_1+\cdots+x\cos\alpha_{n-1}-y\sin\alpha_1-\cdots-y\sin\alpha_{n-1}-a_1-a_2\cos\alpha_1+$$

$b_2\sin\alpha_1 - \cdots - a_n\cos\alpha_{n-1} + b_n\sin\alpha_{n-1}) + \sin\theta(-x\sin\alpha_1 - \cdots - x\sin\alpha_{n-1} -$

$y - y\cos\alpha_1 - \cdots - y\cos\alpha_{n-1} + b_1 + a_2\sin\alpha_1 + b_2\cos\alpha_1 + \cdots + a_n\sin\alpha_{n-1} +$

$b_n\cos\alpha_{n-1}) + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$= \cos\theta(x + x\cos\alpha_1 + \cdots + x\cos\alpha_{n-1} - y\sin\alpha_1 - \cdots - y\sin\alpha_{n-1} - a_1 - a_2\cos\alpha_1$

$+ b_2\sin\alpha_1 - \cdots - a_n\cos\alpha_{n-1} + b_n\sin\alpha_{n-1}) - \sin\theta(x\sin\alpha_1 + \cdots + x\sin\alpha_{n-1}$

$+y + y\cos\alpha_1 + \cdots + y\cos\alpha_{n-1} - b_1 - a_2\sin\alpha_1 - b_2\cos\alpha_1 - \cdots - a_n\sin\alpha_{n-1}$

$-b_n\cos\alpha_{n-1}) + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$---------(3)

$ny' = x(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n) + y(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n) - a_1\sin\theta_1$

$-b_1\cos\theta_1 + b_1 - a_2\sin\theta_2 - b_2\cos\theta_2 + b_2 \ldots\ldots - a_n\sin\theta_n - b_n\cos\theta_n + b_n$

($\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \alpha_1$，$\theta_3 = \theta + \alpha_2$，$\cdots$，$\theta_n = \theta + \alpha_{n-1}$代入)

$= x(\sin\theta + \sin(\theta + \alpha_1) + \cdots + \sin(\theta + \alpha_{n-1})) + y(\cos\theta + \cos(\theta + \alpha_1) + \cdots$

$+ \cos(\theta + \alpha_{n-1})) - a_1\sin\theta - b_1\cos\theta + b_1 - a_2\sin(\theta + \alpha_1) - b_2\cos(\theta + \alpha_1)$

$+b_2 - \cdots - a_n\sin(\theta + \alpha_{n-1}) - b_n\cos(\theta + \alpha_{n-1}) + b_n$

$= x(\sin\theta + \sin\theta\cos\alpha_1 + \cos\theta\sin\alpha_1 + \cdots + \sin\theta\cos\alpha_{n-1} + \cos\theta\sin\alpha_{n-1})$

$+y(\cos\theta + \cos\theta\cos\alpha_1 - \sin\theta\sin\alpha_1 + \cdots + \cos\theta\cos\alpha_{n-1} - \sin\theta\sin\alpha_{n-1})$

$-a_1\sin\theta - b_1\cos\theta + b_1 - a_2(\sin\theta\cos\alpha_1 + \cos\theta\sin\alpha_1)$

$-b_2(\cos\theta\cos\alpha_1 - \sin\theta\sin\alpha_1) + b_2 - \cdots - a_n(\sin\theta\cos\alpha_{n-1} + \cos\theta\sin\alpha_{n-1})$

$-b_n(\cos\theta\cos\alpha_{n-1} - \sin\theta\sin\alpha_{n-1}) + b_n$

$= \sin\theta(x + x\cos\alpha_1 + \cdots + x\cos\alpha_{n-1} - y\sin\alpha_1 - \cdots - y\sin\alpha_{n-1} - a_1 - a_2\cos\alpha_1$

$+b_2\sin\alpha_1 - \cdots - a_n\cos\alpha_{n-1} + b_n\sin\alpha_{n-1})$

$+\cos\theta(x\sin\alpha_1 + \cdots + x\sin\alpha_{n-1} + y + y\cos\alpha_1 + \cdots + y\cos\alpha_{n-1} - b_1 - a_2\sin\alpha_1$

$-b_2\cos\alpha_1 - \cdots - a_n\sin\alpha_{n-1} - b_n\cos\alpha_{n-1})+b_1 + b_2 + \cdots + b_n$----------(4)

令$x + x\cos\alpha_1 + \cdots + x\cos\alpha_{n-1} - y\sin\alpha_1 - \cdots - y\sin\alpha_{n-1} - a_1 - a_2\cos\alpha_1$

$+ b_2\sin\alpha_1 - \cdots - a_n\cos\alpha_{n-1} + b_n\sin\alpha_{n-1} = h$

令$x\sin\alpha_1 + \cdots + x\sin\alpha_{n-1} + y + y\cos\alpha_1 + \cdots + y\cos\alpha_{n-1} - b_1 - a_2\sin\alpha_1$

$-b_2\cos\alpha_1 - \cdots - a_n\sin\alpha_{n-1} - b_n\cos\alpha_{n-1} = k$

P(x，y)固定，所以x，y為定值， 所以h，k均為定值，代入(3)(4)

得 $\begin{cases} nx' = h\cos\theta - k\sin\theta + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ ny' = h\sin\theta + k\cos\theta + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \end{cases}$

所以$\begin{cases} nx' - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = h\cos\theta - k\sin\theta \\ ny' - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = h\sin\theta + k\cos\theta \end{cases}$

$\therefore \left(nx' - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right)^2 + (ny' - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n))^2$

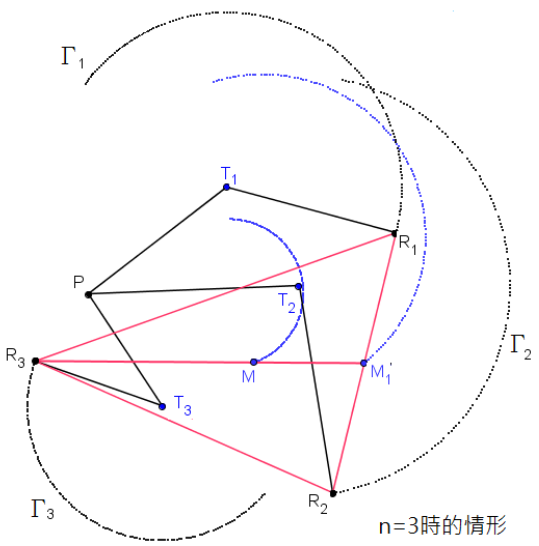
$= h^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + k^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 2hk\cos\theta\sin\theta + 2hk\sin\theta\cos\theta = h^2 + k^2$

$\therefore \left(nx' - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right)^2 + (ny' - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n))^2 = h^2 + k^2$

$\therefore (x' - \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^2 + (y' - \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})^2 = \frac{h^2+k^2}{n^2}$ $\therefore$不論θ如何變動，

所有M(x′，y′)點所成圖形為一個圓，圓心為$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)$，半徑為$\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{n}$

得證■



二、方法二的證明

隨著θ在0°到360°之間逐漸變動，設R_1

的變動軌跡為Γ_1，R_2的變動軌跡為Γ_2，…，R_n的變動軌跡為Γ_n，

因為以T_1為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1，得到點R_1，

所以隨著θ(即θ_1) 在0°到360°之間逐漸變動，R_1的變動軌跡Γ_1為一個圓，圓心為T_1，半徑為$\overline{T_1P}$

同理隨著θ在0°到360°之間逐漸變動，R_2的變動軌跡Γ_2為一個圓，圓心為T_2，半徑為$\overline{T_2P}$

……

隨著θ在0°到360°之間逐漸變動，R_n的變動軌跡Γ_n為一個圓，圓心為T_n，半徑為$\overline{T_nP}$

所以Γ_1，Γ_2，…，Γ_n均為一個圓，為同向的相似圖形

仿照 P.27【定理十三】的證明過程，即可得證：所有 M 點所成圖形與Γ_1，Γ_2，…，Γ_n為同向的相似圖形，所以還是會構成一個圓，得證■

備註：【定理十八】與【定理十九】的差別在於，【定理十八】的 P 點可任意改變，不影響 M 的軌跡；而【定理十九】的 P 點必須固定。

(四) 將一個被旋轉點 P 推廣至 n 個被旋轉點P_1，P_2，…，P_n，並引入加權點

在之前的命題中，我們都是以T_1，T_2，…，T_n為旋轉中心，將同一個 P 作旋轉。我們在想：如果將一個點 P 推廣至 n 個點P_1，P_2，…，P_n，並以T_1，T_2，…，T_n為旋轉中心，分別將P_1，P_2，…，P_n旋轉θ角至R_1，R_2，…，R_n，平均點還會繞圓嗎？若再引入加權點的概念，加權點的軌跡也會是圓嗎？我們用Geogebra測試的結果是正確的，將此命題寫成【定理二十】，並以複數的觀念來證明。

備註：往後只要有命題談到：以T_1，T_2，…，T_n為旋轉中心，分別將P_1，P_2，…，P_n旋轉某個角度至R_1，R_2，…，R_n，均指T_k與P_K相異$(k = 1,2,\cdots,n)$，不再特別註明。

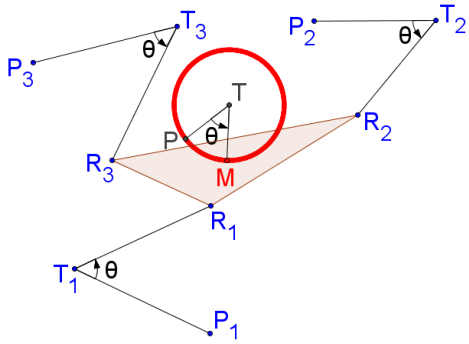
【定理二十】加權點繞圓問題(一)

平面上有 n 個定點T_1，T_2，⋯，T_n，與另外 n 個定點P_1，P_2，⋯，P_n。以T_1為旋轉中心，將P_1旋轉θ至R_1，以T_2為旋轉中心，將P_2旋轉θ至R_2，…，以T_n為旋轉中心，將P_n旋轉θ至R_n。設M為$R_1, R_2, \cdots, R_n$分別以$h_1, h_2, \cdots, h_n$為加權倍率得到的加權點，即$M=\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，令$T=\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k T_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，$P=\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k P_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，則：

(1)以T 為旋轉中心，將 P 旋轉θ得到的點恰為 M

(2)當θ在0°到360°之間變動時，M點會跟著改變，所有M點所形成的圖形為一圓，圓心為T。

【證明】



令點M，P_k，T_k，R_k的複數坐標分別為

m，p_k，t_k，$r_k(k=1，2，\cdots，n)$

令$\cos\theta + i\sin\theta = w$

∵以T_k為旋轉中心，將P_k旋轉θ至R_k

$\therefore r_k = (p_k - t_k)w + t_k$

$\because M = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$

$$\therefore m = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k r_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k((p_k-t_k)w+t_k)}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(h_k t_k + w h_k(p_k-t_k))}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} + \frac{\sum_{k=1}^{n} w h_k(p_k-t_k))}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} - \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}\right)w + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} \text{ ----------(1)}$$

因為 $P=\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k P_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，所以 P 的複數坐標為 $P(\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k})$，

因為$T=\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k T_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，所以 T 的複數坐標為$T(\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k})$

由(1)式知 M 為以$T(\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k})$為旋轉中心，將 $P(\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k})$旋轉θ得到的點

∴當θ在0°到360°之間逐漸變動時，M點會跟著改變，所有M點所形成的圖形為一圓，圓心為T。

得證■

(五) 推廣【定理二十】並於旋轉後加入伸縮

我們延伸【定理二十】推廣成以T_k為旋轉中心，將P_k旋轉$\theta+\alpha_k$，再伸縮s_k倍至$R_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，並使R_1，R_2，⋯，R_n加權至 M 點後探討其軌跡，將命題寫成【定理二十一】。

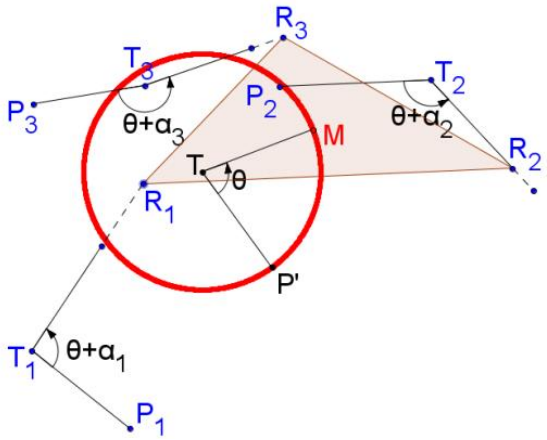
【定理二十一】加權點繞圓問題(二)

設T_1，T_2，⋯，T_n， P_1，P_2，⋯，P_n均為平面上的點。

以T_k為旋轉中心，將P_k旋轉$\theta+\alpha_k$，再伸縮s_k倍至R_k點$(k=1，2，\cdots，n)$，

設M為R_1，R_2，⋯，R_n分別以 h_1，h_2，⋯，h_n為加權倍率得到的加權點，即$M=\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，

設T為T_1，T_2，⋯，T_n分別以 h_1，h_2，⋯，h_n為加權倍率得到的加權點，即$T=\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k T_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，則



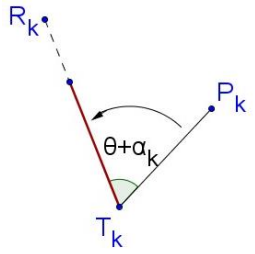
當θ在0°到360°之間逐漸變動時，M點會跟著改變，所有M點所形成的圖形為一圓

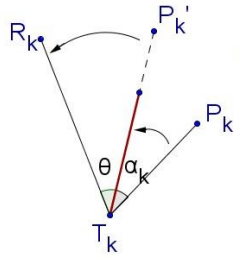
平面中必能找到一點P'，滿足以T為旋轉中心將P'

旋轉θ角可得 M 點，而且P'不會隨著θ的改變而改變

【證明】

「將P_k以T_k為旋轉中心旋轉$\theta+\alpha_k$，再伸縮s_k倍至R_k點」(如下左圖)，等價於「先將P_k以T_k為旋轉中心旋轉α_k再伸縮s_k得P_k'點，再以T_k為旋轉中心將P_k'旋轉θ角至R_k點」(如下右圖)。





$\therefore$可找到平面上 n 個點P_1'，P_2'，…，P_n'，以T_k為旋轉中心將P_k'旋轉θ可得R_k點$(k=1,2,\dots,n)$

由【定理二十】可得知：

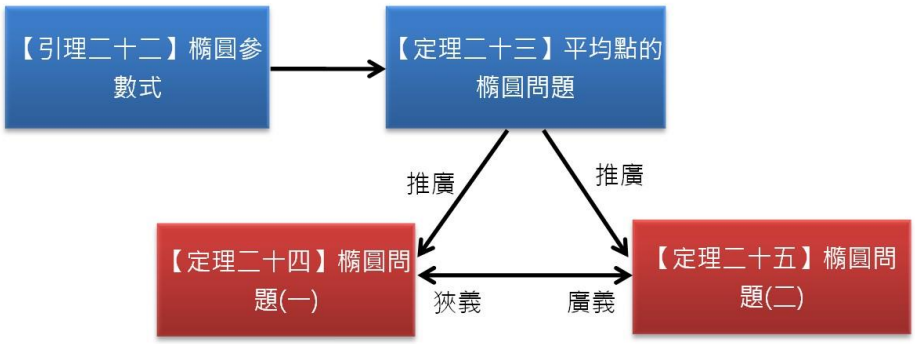
(1) 當θ在0°到360°之間逐漸變動時，M點會跟著改變，所有M點所形成的圖形為一圓

(2) 若取$T=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kT_k}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$，$P'=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kP_k'}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$，則以T為旋轉中心將$P'$旋轉$\theta$角可得 M 點。

$\because P_1'$，P_2'，…，P_n'與θ無關不會隨著θ的改變而改變

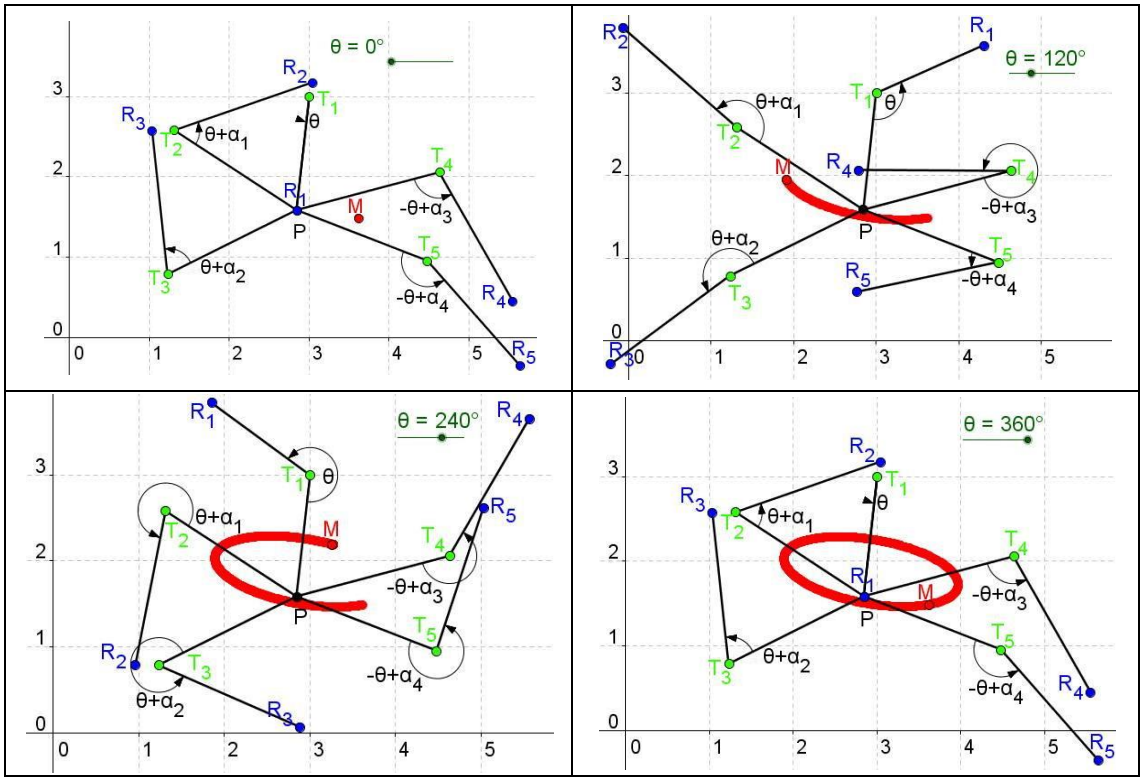
$\therefore P'$不會隨著θ的改變而改變，得證■

四、 加權點橢圓軌跡問題



(一) 操控旋轉角度內θ值的正負，平均點得到橢圓軌跡

在我們證明平均點繞圓時，命題中都是將各個旋轉角度設為$\theta+\alpha_k$的形式。但我們突然想到，如果旋轉角度的倍率不是只有θ，而是改為其中一部分旋轉θ，另外一部分旋轉$(-\theta)$，那平均點M點的移動軌跡會是怎樣呢？在用 Geogebra 軟體作圖測試後（如下面四圖），我們發現θ由0°到360°作變化時，M的移動軌跡是一個橢圓，因此我們將這個發現寫成【定理二十三】，並著手證明之。



1. **在證明【定理二十三】之前，先介紹平面橢圓的參數式，因此在這邊寫了一個引理。**

備註：我們往後所寫的橢圓均指橢圓家族，除了橢圓外也包括圓、點、線段三種特殊或退化的情形。

【引理二十二】橢圓參數式

曲線Γ之參數式可表示成$\begin{cases} x = c\cos\theta + d\sin\theta \\ y = e\cos\theta + f\sin\theta \end{cases}$ $(0^\circ \le \theta < 360^\circ)$ $\Longleftrightarrow$ 曲線Γ為一橢圓，且中心為$(0,0)$

【證明】

$(\Longrightarrow)$

已知Γ之參數式可表示成$\begin{cases} x = c\cos\theta + d\sin\theta \\ y = e\cos\theta + f\sin\theta \end{cases}$ $(0^\circ \le \theta < 360^\circ)$

令$p = \frac{c+f}{2}$，$q = \frac{c-f}{2}$，$s = \frac{e-d}{2}$，$t = \frac{e+d}{2}$，則$p + q = c$，$p - q = f$，$s + t = e$，$-(s - t) = d$

$\therefore \Gamma$：$\begin{cases} x = (p+q)\cos\theta - (s-t)\sin\theta \\ y = (s+t)\cos\theta + (p-q)\sin\theta \end{cases}$ ----------(1)

將$p + si$與$q + ti$以極式表示，

設$p + si = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$，$q + ti = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

其中$r_1 = \sqrt{p^2 + s^2}$，$r_2 = \sqrt{q^2 + t^2}$

則$p = r_1\cos\varphi_1$，$s = r_1\sin\varphi_1$，$q = r_2\cos\varphi_2$，$t = r_2\sin\varphi_2$，

令 $a = r_1 + r_2$，$b = r_1 - r_2$，則$r_1 = \frac{a+b}{2}$，$r_2 = \frac{a-b}{2}$

令$\beta=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$，$\gamma=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$，則$\varphi_1=\beta+\gamma$，$\varphi_2=\beta-\gamma$

所以$p=\frac{a+b}{2}\cos(\beta+\gamma)=\frac{a+b}{2}(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)$

$q=\frac{a-b}{2}\cos(\beta-\gamma)=\frac{a-b}{2}(\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)$

$s=\frac{a+b}{2}\sin(\beta+\gamma)=\frac{a+b}{2}(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)$，

$t=\frac{a-b}{2}\sin(\beta-\gamma)=\frac{a-b}{2}(\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)$

$\therefore p+q=a\cos\beta\cos\gamma-b\sin\beta\sin\gamma$，$p-q=b\cos\beta\cos\gamma-a\sin\beta\sin\gamma$

$s+t=a\sin\beta\cos\gamma+b\cos\beta\sin\gamma$，$s-t=b\sin\beta\cos\gamma+a\cos\beta\sin\gamma$

代入方程組(1)得$\begin{cases}x=(a\cos\beta\cos\gamma-b\sin\beta\sin\gamma)\cos\theta-(b\sin\beta\cos\gamma+a\cos\beta\sin\gamma)\sin\theta\\ y=(a\sin\beta\cos\gamma+b\cos\beta\sin\gamma)\cos\theta+(b\cos\beta\cos\gamma-a\sin\beta\sin\gamma)\sin\theta\end{cases}$

$x=(a\cos\beta\cos\gamma-b\sin\beta\sin\gamma)\cos\theta-(b\sin\beta\cos\gamma+a\cos\beta\sin\gamma)\sin\theta$

$=a\cos\beta(\cos\theta\cos\gamma-\sin\theta\sin\gamma)-b\sin\beta(\cos\theta\sin\gamma+\sin\theta\cos\gamma)$

$=a\cos\beta\cos(\theta+\gamma)-b\sin\beta\sin(\theta+\gamma)$

$y=(a\sin\beta\cos\gamma+b\cos\beta\sin\gamma)\cos\theta+(b\cos\beta\cos\gamma-a\sin\beta\sin\gamma)\sin\theta$

$=a\sin\beta(\cos\theta\cos\gamma-\sin\theta\sin\gamma)+b\cos\beta(\cos\theta\sin\gamma+\sin\theta\cos\gamma)$

$=a\sin\beta\cos(\theta+\gamma)+b\cos\beta\sin(\theta+\gamma)$

$\therefore\Gamma：\begin{cases}x=a\cos\beta\cos(\theta+\gamma)-b\sin\beta\sin(\theta+\gamma)\\ y=a\sin\beta\cos(\theta+\gamma)+b\cos\beta\sin(\theta+\gamma)\end{cases}(0^\circ\le\theta<360^\circ)$

令Γ_1為$\begin{cases}x_1=a\cos(\theta+\gamma)\\ y_1=b\sin(\theta+\gamma)\end{cases}(0^\circ\le\theta<360^\circ)$，

$\therefore\Gamma_1$圖形為橢圓，中心為(0,0)

$\because (a\cos(\theta+\gamma)+ib\sin(\theta+\gamma))(\cos\beta+i\sin\beta)$

$=(a\ \cos\beta\cos(\theta+\gamma)-\ b\sin\beta\sin(\theta+\gamma))+i(a\sin\beta\cos(\theta+\gamma)+b\cos\beta\sin(\theta+\gamma))$

$\therefore$將Γ_1：$\begin{cases}x_1=a\cos(\theta+\gamma)\\ y_1=b\sin(\theta+\gamma)\end{cases}(0^\circ\le\theta<360^\circ)$以原點為旋轉中心，旋轉$\beta$可得

Γ：$\begin{cases}x=a\cos\beta\cos(\theta+\gamma)-b\sin\beta\sin(\theta+\gamma)\\ y=a\sin\beta\cos(\theta+\gamma)+b\cos\beta\sin(\theta+\gamma)\end{cases}$

$\therefore\Gamma$圖形與Γ_1全等，圖形為橢圓，中心也為原點(0，0)

$(\Longleftarrow)$

已知曲線Γ為一橢圓，且中心為(0,0)，

設Γ長軸長為2a，短軸長為2b

$\therefore\Gamma$必可由橢圓Γ'：$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}(0^\circ\le\theta<360^\circ)$旋轉某個角度而得到，設此角度為$\alpha$

$\because(a\cos\theta+i\,b\sin\theta)(\cos\alpha+i\sin\alpha)=(a\cos\alpha\cos\theta-b\sin\alpha\sin\theta)+i(a\sin\alpha\cos\theta+b\cos\alpha\sin\theta)$

Γ可表示成$\begin{cases}x=a\cos\alpha\cos\theta-b\sin\alpha\sin\theta\\ y=a\sin\alpha\cos\theta+b\cos\alpha\sin\theta\end{cases}(0^\circ\le\theta<360^\circ)$

令$c=a\cos\alpha$，$d=-b\sin\alpha$，$e=a\sin\alpha$，$f=b\cos\alpha$

則Γ之參數式可表示成$\begin{cases}x=c\cos\theta+d\sin\theta\\ y=e\cos\theta+f\sin\theta\end{cases}(0^\circ\le\theta<360^\circ)$　　，得證■

2.　**證明【定理二十三】**

【定理二十三】平均點的橢圓問題

設$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，…，$T_n(a_n，b_n)$為坐標平面上的 n 個定點$(n\ge2)$，另有一點 P，令$\theta_1=\theta$，$\theta_2=\theta+\alpha_1$，…，$\theta_m=\theta+\alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1}=-\theta+$

α_m，…，$\theta_n = -\theta + \alpha_{n-1}$，

(其中$1 \le m < n$且α_1，α_2，…，α_{m-1}，α_m，…，α_{n-1}為固定角度，$\alpha_0 = 0$)，今以T_1為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1得到R_1；以T_2為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_2得到R_2； ……；以T_n為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_n得到R_n。設M為R_1，R_2，…，R_n的平均點，即$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \cdots + \overrightarrow{OR_n})$，其中 O 為原點，

證明：若 P 點固定，則當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，M點會跟著改變，所有M點所成圖形為一橢圓，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$

【證明】

已知$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \alpha_1$，…，$\theta_m = \theta + \alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1} = -\theta + \alpha_m$，…，$\theta_n = -\theta + \alpha_{n-1}$

回到 P.11【定理四】的證明過程，式子(1)(2)，令$M(x', y')$則

$$nx' = x(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n) - y(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n) - a_1\cos\theta_1$$

$$+b_1\sin\theta_1 + a_1 - a_2\cos\theta_2 + b_2\sin\theta_2 + a_2 - \cdots - a_n\cos\theta_n + b_n\sin\theta_n + a_n$$

$$= x(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_m + \cos\theta_{m+1} + \cdots + \cos\theta_n)$$

$$-y(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_m + \sin\theta_{m+1} + \cdots + \sin\theta_n) - a_1\cos\theta_1 + b_1\sin\theta_1$$

$$+a_1 - a_2\cos\theta_2 + b_2\sin\theta_2 + a_2 - \cdots - a_m\cos\theta_m + b_m\sin\theta_m + a_m$$

$$-a_{m+1}\cos\theta_{m+1} + b_{m+1}\sin\theta_{m+1} + a_{m+1} - \cdots - a_n\cos\theta_n + b_n\sin\theta_n$$

$$+a_n \text{----------}(3)$$

因為$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \alpha_1$，…，$\theta_m = \theta + \alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1} = -\theta + \alpha_m$，…，$\theta_n = -\theta + \alpha_{n-1}$

代入(3)式，所以

$$nx' = x(\cos\theta + \cos(\theta + \alpha_1 + \cdots + \cos(\theta + \alpha_{m-1}) + \cos(-\theta + \alpha_m) + \cdots$$

$$+\cos(-\theta + \alpha_{n-1})) - y(\sin\theta + \sin(\theta + \alpha_1) + \cdots + \sin(\theta + \alpha_{m-1})$$

$$+ \sin(-\theta + \alpha_m) + \cdots + \sin(-\theta + \alpha_{n-1}) - a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_1$$

$$-a_2\cos(\theta + \alpha_1) + b_2\sin(\theta + \alpha_1) + a_2 - \cdots - a_m\cos(\theta + \alpha_{m-1})$$

$$+b_m\sin(\theta + \alpha_{m-1}) + a_m - a_{m+1}\cos(-\theta + \alpha_m) + b_{m+1}\sin(-\theta + \alpha_m)$$

$$+a_{m+1} - \cdots - a_n\cos(-\theta + \alpha_{n-1}) + b_n\sin(-\theta + \alpha_{n-1}) + a_n$$

$$= x(\cos\theta + \cos\theta\cos\alpha_1 - \sin\theta\sin\alpha_1 + \cdots + \cos\theta\cos\alpha_{m-1} - \sin\theta\sin\alpha_{m-1}$$

$$+\cos\theta\cos\alpha_m + \sin\theta\sin\alpha_m + \cdots + \cos\theta\cos\alpha_{n-1} + \sin\theta\sin\alpha_{n-1})$$

$$-y(\sin\theta + \sin\theta\cos\alpha_1 + \cos\theta\sin\alpha_1 + \cdots + \sin\theta\cos\alpha_{m-1} + \cos\theta\sin\alpha_{m-1}$$

$$-\sin\theta\cos\alpha_m + \cos\theta\sin\alpha_m - \cdots - \sin\theta\cos\alpha_{n-1} + \cos\theta\sin\alpha_{n-1}) - a_1\cos\theta$$

$$+ b_1\sin\theta + a_1 - a_2(\cos\theta\cos\alpha_1 - \sin\theta\sin\alpha_1) + b_2(\sin\theta\cos\alpha_1 + \cos\theta\sin\alpha_1)$$

$$+a_2 - \cdots - a_m(\cos\theta\cos\alpha_{m-1} - \sin\theta\sin\alpha_{m-1}) +$$

$$b_m(\sin\theta\cos\alpha_{m-1} + \cos\theta\sin\alpha_{m-1}) + a_m - a_{m+1}(\cos\theta\cos\alpha_m + \sin\theta\sin\alpha_m) +$$

$$b_{m+1}(-\sin\theta\cos\alpha_m + \cos\theta\sin\alpha_m) + a_{m+1} - \cdots - a_n(\cos\theta\cos\alpha_{n-1} +$$

$$\sin\theta\sin\alpha_{n-1}) + b_n(-\sin\theta\cos\alpha_{n-1} + \cos\theta\sin\alpha_{n-1}) + a_n$$

$$=\cos\theta(x + x\cos\alpha_1 + \cdots + x\cos\alpha_{m-1} + x\cos\alpha_m + \cdots + x\cos\alpha_{n-1} - y\sin\alpha_1 - \cdots$$

$$-y\sin\alpha_{m-1} - y\sin\alpha_m - \cdots - y\sin\alpha_{n-1} - a_1 - a_2\cos\alpha_1 + b_2\sin\alpha_1 - \cdots$$

$$-a_m\cos\alpha_{m-1} + b_m\sin\alpha_{m-1} - a_{m+1}\cos\alpha_m + b_{m+1}\sin\alpha_m - \cdots - a_n\cos\alpha_{n-1}$$

$$+b_n\sin\alpha_{n-1}) + \sin\theta(-x\sin\alpha_1 - \cdots - x\sin\alpha_{m-1} + x\sin\alpha_m + \cdots + x\sin\alpha_{n-1}$$

$-y - y\cos\alpha_1 - \cdots - y\cos\alpha_{m-1} + y\cos\alpha_m + \cdots + y\cos\alpha_{n-1} + b_1 + a_2\sin\alpha_1$

$+ b_2\cos\alpha_1 + \cdots + a_m\sin\alpha_{m-1} + b_m\cos\alpha_{m-1} - a_{m+1}\sin\alpha_m - b_{m+1}\cos\alpha_m - \cdots$

$-a_n\sin\alpha_{n-1} - b_n\cos\alpha_{n-1}) \quad +a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$----------(4)

回到 P.11【定理四】的證明過程，式子(2)，令$M(x'，y')$則

$ny' = x(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n) + y(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n)$

$-a_1\sin\theta_1 - b_1\cos\theta_1 + b_1 - a_2\sin\theta_2 - b_2\cos\theta_2 + b_2 - \cdots - a_n\sin\theta_n -$
$b_n\cos\theta_n + b_n$

$= x(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_m + \sin\theta_{m+1} + \cdots + \sin\theta_n)$

$-y(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_m + \cos\theta_{m+1} + \cdots + \cos\theta_n)$

$-a_1\sin\theta_1 - b_1\cos\theta_1 + b_1 - a_2\sin\theta_2 - b_2\cos\theta_2 + b_2 - \cdots - a_m\sin\theta_m$

$-b_m\cos\theta_m + b_m - a_{m+1}\sin\theta_{m+1} - b_{m+1}\cos\theta_{m+1} + b_{m+1} - \cdots - a_n\sin\theta_n$

$-b_n\cos\theta_n + b_n$----------(5)

因為$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \theta + \alpha_1$，$\cdots$，$\theta_m = \theta + \alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1} = -\theta + \alpha_m$，$\cdots$，$\theta_n = -\theta + \alpha_{n-1}$

代入(5)式，所以

$ny' = x(\sin\theta + \sin(\theta + \alpha_1) + \cdots + \sin(\theta + \alpha_{m-1}) + \sin(-\theta + \alpha_m) + \cdots$

$+\sin(-\theta + \alpha_{n-1})) + y(\cos\theta + \cos(\theta + \alpha_1) + \cdots + \cos(\theta + \alpha_{m-1})$

$+\cos(-\theta + \alpha_m) + \cdots + \cos(-\theta + \alpha_{n-1})) - a_1\sin\theta - b_1\cos\theta + b_1 - a_2\sin(\theta +$
$\alpha_1) - b_2\cos(\theta + \alpha_1) + b_2 - \cdots - a_m\sin(\theta + \alpha_{m-1}) - b_m\cos(\theta + \alpha_{m-1}) + b_m -$

$a_{m+1}\sin(-\theta+\alpha_m) - b_{m+1}\cos(-\theta+\alpha_m) \ +b_{m+1} - \cdots - a_n\sin(-\theta+\alpha_{n-1}) - b_n\cos(-\theta+\alpha_{n-1}) + b_n$

$= \ x(\sin\theta + \sin\theta\cos\alpha_1 + \cos\theta\sin\alpha_1 + \cdots + \sin\theta\cos\alpha_{m-1} + \cos\theta\sin\alpha_{m-1}$

$-\sin\theta\cos\alpha_m + \cos\theta\sin\alpha_m - \cdots - \sin\theta\cos\alpha_{n-1} + \cos\theta\sin\alpha_{n-1})$

$+y(\cos\theta + \cos\theta\cos\alpha_1 - \sin\theta\sin\alpha_1 + \cdots + \cos\theta\cos\alpha_{m-1} - \sin\theta\sin\alpha_{m-1}$

$+\cos\theta\cos\alpha_m + \ \sin\theta\sin\alpha_m + \cdots + \cos\theta\cos\alpha_{n-1} + \sin\theta\sin\alpha_{n-1}) - a_1\sin\theta$

$-b_1\cos\theta + b_1 - a_2(\sin\theta\cos\alpha_1 + \cos\theta\sin\alpha_1) - b_2(\cos\theta\cos\alpha_1 - \sin\theta\sin\alpha_1) + b_2$

$- \cdots - a_m(\sin\theta\cos\alpha_{m-1} + \cos\theta\sin\alpha_{m-1}) \ - b_m(\cos\theta\cos\alpha_{m-1} - \sin\theta\sin\alpha_{m-1}) +$

$b_m - a_{m+1}(-\sin\theta\cos\alpha_m + \cos\theta\sin\alpha_m) - b_{m+1}(\cos\theta\cos\alpha_m + \sin\theta\sin\alpha_m) +$

$b_{m+1} - \cdots - a_n(-\sin\theta\cos\alpha_{n-1} + \cos\theta\sin\alpha_{n-1}) - b_n(\cos\theta\cos\alpha_{n-1} +$

$\sin\theta\sin\alpha_{n-1}) + b_n$

$= \ \cos\theta(x\sin\alpha_1 + \cdots + x\sin\alpha_{m-1} + x\sin\alpha_m + \cdots + x\sin\alpha_{n-1} + y + y\cos\alpha_1 + \cdots$

$+y\cos\alpha_{m-1} + y\cos\alpha_m + \cdots + y\cos\alpha_{n-1} - b_1 - a_2\sin\alpha_1 - \ b_2\cos\alpha_1 - \cdots$

$-a_m\sin\alpha_{m-1} - \ b_m\cos\alpha_{m-1} - a_{m+1}\sin\alpha_m - b_{m+1}\cos\alpha_m \ - \cdots - a_n\sin\alpha_{n-1}$

$-b_n\cos\alpha_{n-1}) \ +\sin\theta(x + x\cos\alpha_1 + \cdots + x\cos\alpha_{m-1} - x\cos\alpha_m - \cdots - x\cos\alpha_{n-1} -$

$y\sin\alpha_1 - \cdots - \ y\sin\alpha_{m-1} + y\sin\alpha_m + \cdots + y\sin\alpha_{n-1} - a_1 - a_2\cos\alpha_1 +$

$b_2\sin\alpha_1 - \cdots - a_m\cos\alpha_{m-1} + \ b_m\sin\alpha_{m-1} + a_{m+1}\cos\alpha_m - b_{m+1}\sin\alpha_m + \cdots +$

$a_n\cos\alpha_{n-1} - \ b_n \ \sin\alpha_{n-1}) \ +b_1 + b_2 + \cdots + b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n$----------(6)

設$x + x\cos\alpha_1 + \cdots + x\cos\alpha_{m-1} - y\sin\alpha_1 - \cdots - \ y\sin\alpha_{m-1} - a_1 - a_2\cos\alpha_1 +$

$b_2\sin\alpha_1 - \cdots - a_m\cos\alpha_{m-1} + \ b_m\sin\alpha_{m-1} = c$

$x\cos\alpha_m + \cdots + x\cos\alpha_{n-1} - y\sin\alpha_m - \cdots - y\sin\alpha_{n-1} - a_{m+1}\cos\alpha_m + b_{m+1}\sin\alpha_m$

$-\cdots-\quad a_n\cos\alpha_{n-1}+b_n\sin\alpha_{n-1}=d$

$x\sin\alpha_1+\cdots+x\sin\alpha_{m-1}+y+y\cos\alpha_1+\cdots+y\cos\alpha_{m-1}-b_1-a_2\sin\alpha_1-b_2\cos\alpha_1-\cdots-a_m\sin\alpha_{m-1}-b_m\cos\alpha_{m-1}=e$

$x\sin\alpha_m+\cdots+x\sin\alpha_{n-1}+y\cos\alpha_m+\cdots+y\cos\alpha_{n-1}-a_{m+1}\sin\alpha_m-b_{m+1}\cos\alpha_m-\cdots-\quad a_n\sin\alpha_{n-1}-b_n\cos\alpha_{n-1}=f$

代入式子(4)(6)

得$nx'=\cos\theta(c+d)+\sin\theta(-e+f)+a_1+a_2+\cdots+a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n$

$ny'=\cos\theta(e+f)+\sin\theta(c-d)+b_1+b_2+\cdots+b_m+b_{m+1}+\cdots+b_n$

所以$\begin{cases}x'=\left(\frac{c}{n}+\frac{d}{n}\right)\cos\theta-\left(\frac{e}{n}-\frac{f}{n}\right)\sin\theta+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\ y'=\left(\frac{e}{n}+\frac{f}{n}\right)\cos\theta+\left(\frac{c}{n}-\frac{d}{n}\right)\sin\theta+\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\end{cases}$

將$M(x'，y')$平移至$M_1(x_1，y_1)$，使得$\begin{cases}x_1=\left(\frac{c}{n}+\frac{d}{n}\right)\cos\theta-\left(\frac{e}{n}-\frac{f}{n}\right)\sin\theta\\ y_1=\left(\frac{e}{n}+\frac{f}{n}\right)\cos\theta+\left(\frac{c}{n}-\frac{d}{n}\right)\sin\theta\end{cases}$

設隨著θ改變，所有點$M_1(x_1，y_1)$所成圖形為Γ_1，所有點$M(x'，y')$所成圖形為 Γ

則Γ_1平移向量$\vec{v}=(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$可得 Γ，$\Gamma_1$與 Γ 兩圖形全等----------(*)

我們先探討所有點$M_1(x_1，y_1)$所成的圖形Γ_1

令$c'=\frac{c}{n}+\frac{d}{n}$，$d'=-\left(\frac{e}{n}-\frac{f}{n}\right)$，$e'=\left(\frac{e}{n}+\frac{f}{n}\right)$，$f'=\left(\frac{c}{n}-\frac{d}{n}\right)$

則Γ_1：$\begin{cases}x_1=c'\cos\theta+d'\sin\theta\\ y_1=e'\cos\theta+f'\sin\theta\end{cases}$

由【引理二十二】橢圓參數式知：

當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，Γ_1圖形為橢圓，且中心為(0,0)

由(*)知Γ_1平移向量$\vec{v}=(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$可得 Γ

∴當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，Γ 圖形為橢圓，且中心為

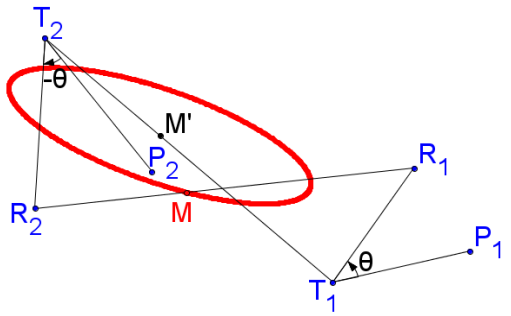
$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$

得證■

(二) 兩組旋轉時，加權點的橢圓軌跡

證明完平均點的情況後，我們又想：如果【定理二十三】的命題中，將平均點改為加權點，一個點 P 推廣至P_1，P_2，…，P_n，多個點呢？那 M 的軌跡還會是個橢圓嗎？於是我們先從最簡單的，只有四個點，分成兩組旋轉(一組旋轉θ，一組旋轉−θ)來探討，並發現 M 的軌跡真的也會是一個橢圓，我們將這個發現與證明寫成【定理二十四】。

【定理二十四】橢圓問題(一)



設$T_1(a_1,b_1)$，$T_2(a_2,b_2)$，$P_1(p_1,q_1)$，$P_2(p_2,q_2)$為坐標平面上的四個定點，

今以T_1為旋轉中心，將P_1旋轉θ得到R_1；以T_2為旋轉中心，將P_2點旋轉−θ得到R_2，將R_1,R_2分別以h_1,h_2加權至M，即$\overrightarrow{OM}=\frac{h_1\overrightarrow{OR_1}+h_2\overrightarrow{OR_2}}{h_1+h_2}$，其中O為原點，則當θ角在$0^\circ$到$360^\circ$之間逐漸變動時，M點的軌跡為一橢圓，中心為

$\left(\frac{h_1a_1+h_2a_2}{h_1+h_2},\frac{h_1b_1+h_2b_2}{h_1+h_2}\right)$

【證明】

∵以T_1為旋轉中心，將P_1旋轉θ得到R_1，設R_1坐標為$(x_1，y_1)$

則$x_1+iy_1=[(p_1-a_1)+i(q_1-b_1)](\cos\theta+i\sin\theta)+a_1+ib_1$

$x_1 = (p_1 - a_1)\cos\theta - (q_1 - b_1)\sin\theta + a_1$

$y_1 = (p_1 - a_1)\sin\theta + (q_1 - b_1)\cos\theta + b_1$

R_1坐標為$((p_1 - a_1)\cos\theta - (q_1 - b_1)\sin\theta + a_1$，$(p_1 - a_1)\sin\theta + (q_1 - b_1)\cos\theta + b_1)$

同理，R_2坐標為

$((p_2 - a_2)\cos(-\theta) - (q_2 - b_2)\sin(-\theta) + a_2$，$(p_2 - a_2)\sin(-\theta)$
$+ (q_2 - b_2)\cos(-\theta) + b_2)$

$= ((p_2 - a_2)\cos\theta + (q_2 - b_2)\sin\theta + a_2$，$-(p_2 - a_2)\sin\theta + (q_2 - b_2)\cos\theta + b_2)$

$\because M = \frac{h_1R_1 + h_2R_2}{h_1 + h_2}$，設M的坐標為$(x, y)$，則

$$x = \frac{h_1}{h_1 + h_2}\left((p_1 - a_1)\cos\theta - (q_1 - b_1)\sin\theta + a_1\right)$$

$$+ \frac{h_2}{h_1 + h_2}\left((p_2 - a_2)\cos\theta + (q_2 - b_2)\sin\theta + a_2\right)$$

$$= \left(\frac{h_1}{h_1 + h_2}(p_1 - a_1) + \frac{h_2}{h_1 + h_2}(p_2 - a_2)\right)\cos\theta$$

$$+ \left(-\frac{h_1}{h_1 + h_2}(q_1 - b_1) + \frac{h_2}{h_1 + h_2}(q_2 - b_2)\right)\sin\theta + \frac{h_1a_1 + h_2a_2}{h_1 + h_2} \text{ ----------(1)}$$

$$y = \frac{h_1}{h_1 + h_2}\left((p_1 - a_1)\sin\theta + (q_1 - b_1)\cos\theta + b_1\right)$$

$$+ \frac{h_2}{h_1 + h_2}(-(p_2 - a_2)\sin\theta + (q_2 - b_2)\cos\theta + b_2)$$

$$= \left(\frac{h_1}{h_1 + h_2}(q_1 - b_1) + \frac{h_2}{h_1 + h_2}(q_2 - b_2)\right)\cos\theta$$

$$+ \left(\frac{h_1}{h_1 + h_2}(p_1 - a_1) - \frac{h_2}{h_1 + h_2}(p_2 - a_2)\right)\sin\theta + \frac{h_1b_1 + h_2b_2}{h_1 + h_2} \text{ ----------(2)}$$

令$c=\frac{h_1}{h_1+h_2}(p_1-a_1)+\frac{h_2}{h_1+h_2}(p_2-a_2)$，$d=-\frac{h_1}{h_1+h_2}(q_1-b_1)+\frac{h_2}{h_1+h_2}(q_2-b_2)$，

$e=\frac{h_1}{h_1+h_2}(q_1-b_1)+\frac{h_2}{h_1+h_2}(q_2-b_2)$，$f=\frac{h_1}{h_1+h_2}(p_1-a_1)-\frac{h_2}{h_1+h_2}(p_2-a_2)$，

代入(1)(2)，可得

$$\begin{cases} x=c\cos\theta+d\sin\theta+\frac{h_1a_1+h_2a_2}{h_1+h_2} \\ y=e\cos\theta+f\sin\theta+\frac{h_1b_1+h_2b_2}{h_1+h_2} \end{cases}$$

設隨著θ改變，所有點M(x，y)所成圖形為Γ

將Γ平移向量$\left(-\frac{h_1a_1+h_2a_2}{h_1+h_2},-\frac{h_1b_1+h_2b_2}{h_1+h_2}\right)$，設得到圖形Γ′----------(*)

則Γ′的參數式為$\begin{cases} x=c\cos\theta+d\sin\theta \\ y=e\cos\theta+f\sin\theta \end{cases}$

由【引理二十二】橢圓參數式知：

當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，Γ′圖形為橢圓，且中心為(0,0)

由(*)知Γ′平移向量$\left(\frac{h_1a_1+h_2a_2}{h_1+h_2}，\frac{h_1b_1+h_2b_2}{h_1+h_2}\right)$可得Γ

∴當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，Γ圖形為橢圓，且中心為

$\left(\frac{h_1a_1+h_2a_2}{h_1+h_2}，\frac{h_1b_1+h_2b_2}{h_1+h_2}\right)$

得證■

(三) 多組旋轉並且旋轉後加入伸縮時，加權點的橢圓軌跡

在推完兩組旋轉時的加權點情形後，我們想將它延伸至多組旋轉，也就是有n組旋轉倍率為θ，m組旋轉倍率為(−θ)時的情況，我們並且加入伸縮，發現加權點 M 的軌跡仍為橢圓，我們將它寫成【定理二十五】橢圓問題(二)，可利用【定理二十四】橢圓問題(一)的結果來證明。

【定理二十五】橢圓問題(二)

設T_1，T_2，⋯，T_n，T_1'，T_2'，⋯，T_m'，P_1，P_2，⋯，P_n，P_1'，P_2'，⋯，P_m'均為平面上的定點。今以T_k為旋轉中心，將P_k旋轉$(\theta+\alpha_k)$再伸縮s_k倍得R_k點$(k=1,2,\cdots,n)$，以T_k'為旋轉中心，將P_k'旋轉$(-\theta+\alpha_k')$再伸縮s_k'倍得R_k'點$(k=1,2,\cdots,m)$

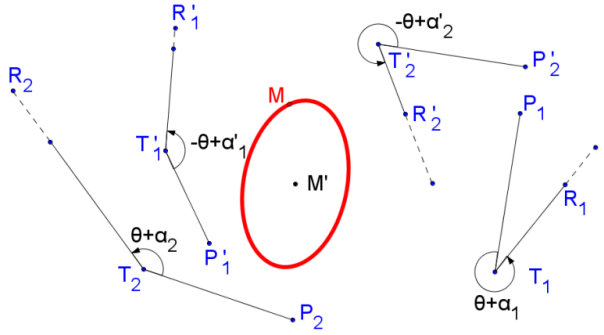
設M為R_1，R_2，⋯，R_n，R_1'，R_2'，⋯，R_m'分別以

h_1，h_2，⋯，h_n，h_1'，h_2'，⋯，h_m'為加權倍率得到的加權點，設M'為

T_1，T_2，⋯，T_n，T_1'，T_2'，⋯，T_m'分別以h_1，h_2，⋯，h_n，h_1'，h_2'，⋯，h_m'為加權倍率得到的加權點，

則隨著θ改變，M點的軌跡為一橢圓，中心為M'

【證明】



設T_1，T_2，⋯，T_n分別以

h_1，h_2，⋯，h_n為加權倍率得到的

加權點為T

R_1，R_2，⋯，R_n分別以

h_1，h_2，⋯，h_n為加權倍率得到的加權點為R

T_1'，T_2'，⋯，T_m'分別以h_1'，h_2'，⋯，h_m'為加權倍率得到的加權點為T'

R_1'，R_2'，⋯，R_m'分別以h_1'，h_2'，⋯，h_m'，為加權倍率得到的加權點為R'

∵M為R_1，R_2，⋯，R_n，R_1'，R_2'，⋯，R_m'分別以

h_1，h_2，⋯，h_n，h_1'，h_2'，⋯，h_m'為加權倍率得到的加權點

$$\therefore M=\frac{h_1R_1+h_2R_2+\cdots+h_nR_n+h_1'R_1'+h_2'R_2'+\cdots+h_m'R_m'}{h_1+h_2+\cdots+h_n+h_1'+h_2'+\cdots+h_m'}$$

令$h=h_1+h_2+\cdots+h_n$，$h'=h_1'+h_2'+\cdots+h_m'$，

則將R，R'分別以h，h'為加權倍率得到的加權點為$\frac{hR+h'R'}{h+h'}$

$$=\frac{(h_1+h_2+\cdots+h_n)\times\frac{h_1R_1+h_2R_2+\cdots+h_nR_n}{h_1+h_2+\cdots+h_n}+(h'_1+h'_2+\cdots+h'_m)\times\frac{h'_1R'_1+h'_2R'_2+\cdots+h'_mR'_m}{h'_1+h'_2+\cdots+h'_m}}{h_1+h_2+\cdots+h_n+h'_1+h'_2+\cdots+h'_m}$$

$$=\frac{h_1R_1+h_2R_2+\cdots+h_nR_n+h'_1R'_1+h'_2R'_2+\cdots+h'_mR'_m}{h_1+h_2+\cdots+h_n+h'_1+h'_2+\cdots+h'_m}=M$$

$\therefore$將R，R'分別以h，h'為加權倍率得到的加權點為M ----------(1)

同理，將T，T'分別以h，h'為加權倍率得到的加權點為M'

$\because$以T_k為旋轉中心，將P_k旋轉$(\theta+\alpha_k)$再伸縮s_k倍得R_k點$(k=1,2,\cdots,n)$，

R_1，R_2，$\cdots$，R_n分別以h_1，h_2，$\cdots$，h_n為加權倍率得到的加權點為R

T_1，T_2，$\cdots$，T_n分別以h_1，h_2，$\cdots$，h_n為加權倍率得到的加權點為T

由 P.44【定理二十一】知

在平面上必能找到一個定點P，以T為旋轉中心，將P旋轉θ可得R點 ----------(2)

$\because$以T'_k為旋轉中心，將P'_k旋轉$(-\theta+\alpha'_k)$再伸縮s'_k倍得R'_k點$(k=1,2,\cdots,m)$

R'_1，R'_2，$\cdots$，R'_m分別以h'_1，h'_2，$\cdots$，h'_m，為加權倍率得到的加權點為R'

T'_1，T'_2，$\cdots$，T'_m分別以h'_1，h'_2，$\cdots$，h'_m為加權倍率得到的加權點為T'

由【定理二十一】知

在平面上必能找到一個定點P'，以T'為旋轉中心，將P'旋轉$(-\theta)$可得R'點

----------(3)

由(1)(2)(3)知

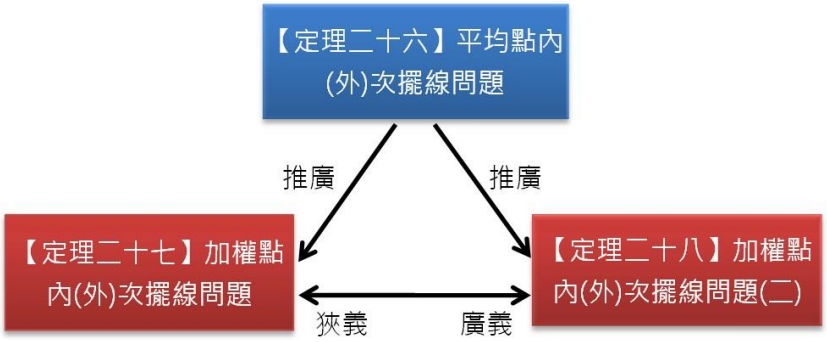
以T為旋轉中心，將P旋轉θ可得R點；以T'為旋轉中心，將P'旋轉$(-\theta)$可得R'點，

將R，R'分別以h，h'為加權倍率得到的加權點為M

由【定理二十四】橢圓問題(一)知

隨著θ變化，M點的軌跡為一橢圓，中心為T，T'分別以h，h'為加權倍率得到的加權點M'　得證■

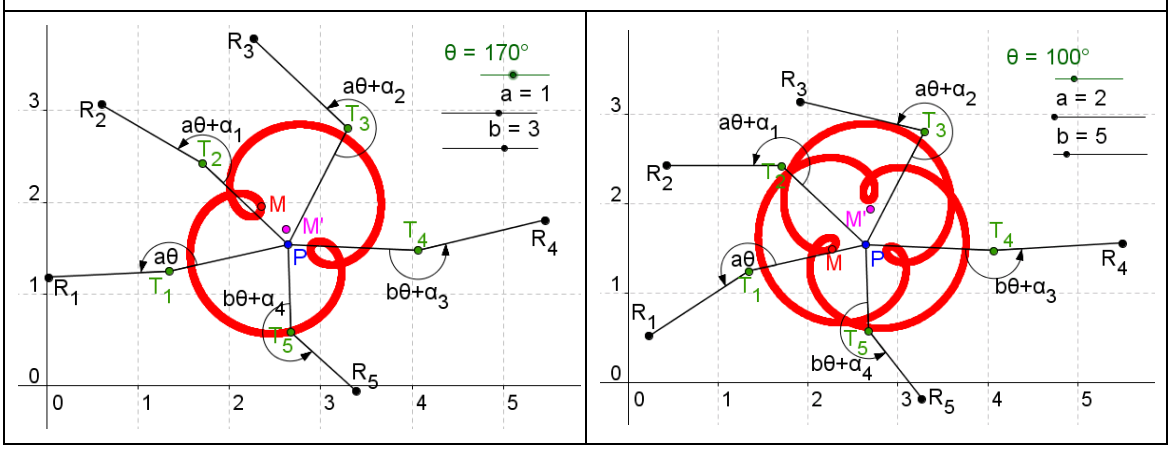
五、 加權點內、外次擺線軌跡問題

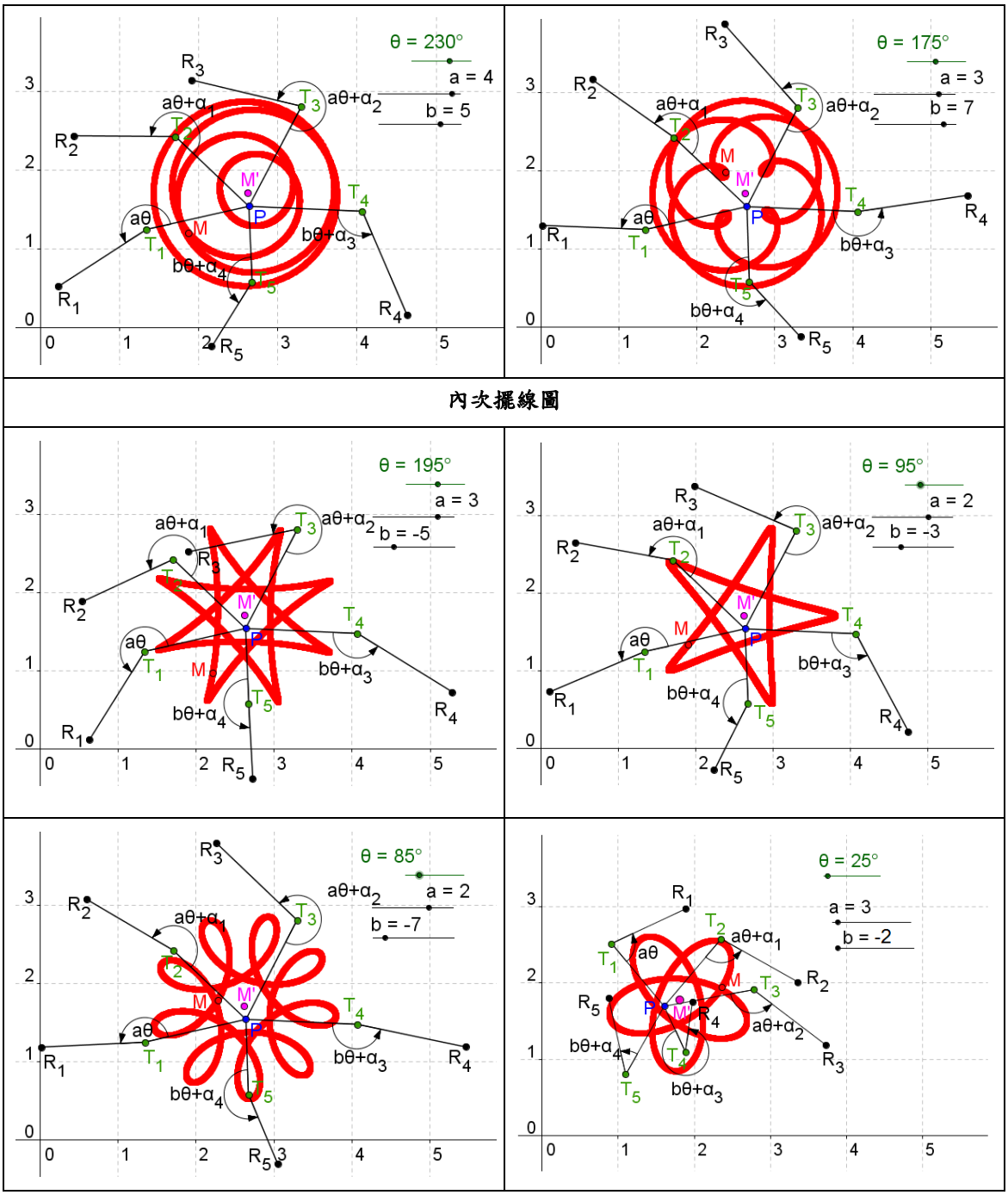


(一) 操控旋轉角度內θ值的兩種不同倍率，平均點得到內(外)次擺線軌跡

在平均點的橢圓問題中，我們將旋轉角度的倍率分成兩部分，其中一部分旋轉θ，另外一部分旋轉(−θ)，發現平均點M點的移動軌跡是橢圓。我們於是在想，如果將旋轉角度的倍率分成兩部分，其中一部分旋轉aθ，另外一部分旋轉 bθ，那平均點 M 的移動軌跡又會是什麼呢？用 Geogebra 測試之後發現，平均點 M 的軌跡隨著a，b代入不同的實數，得到各種不同的圖形（如下面八個圖），圖形很漂亮，有的像花朵，有的像星星、甜甜圈…，但不知它們的名稱及方程式。

外次擺線圖





內次擺線圖

我們上網找資料，也到圖書館翻閱書籍，覺得它們和內、外擺線及內、外次擺線的圖形很像，看完資料才知道內、外擺線是內、外次擺線的一種特殊情形。將參考資料結果彙整成表格(詳見 P.218【附錄四】)。接著我們應用三角函數著手證明我們的內(外)次擺線猜想是成立的，終於證明出來。我們將這結果表示成下面【定理二十六】:

【定理二十六】平均點內(外)次擺線問題

設$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，⋯，$T_n(a_n，b_n)$為坐標平面上的 n 個定點$(n \geq 2)$，另有一點 P，令$\theta_1 = a\theta$，$\theta_2 = a\theta + \alpha_1$，⋯，$\theta_m = a\theta + \alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1} = b\theta + \alpha_m$，⋯，$\theta_n = b\theta + \alpha_{n-1}$，(其中$1 \leq m < n$且$\alpha_1$，$\alpha_2$，⋯，$\alpha_{m-1}$，$\alpha_m$，⋯，$\alpha_{n-1}$為固定角度，$\alpha_0 = 0$，$a \neq b$，

$ab \neq 0$)，今以T_1為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1得到R_1；以T_2為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_2得到R_2； ……；以T_n為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_n得到R_n。

設 M 為R_1，R_2，⋯，R_n的平均點，即$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \cdots + \overrightarrow{OR_n})$，其中 O 為原點，

證明：若 P 點固定，則當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，M 點會跟著改變，而且

1、$ab < 0$時，所有 M 點所成圖形為內次擺線，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$

2、$ab > 0$時，所有 M 點所成圖形為外次擺線，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$

證明很長，故放在附錄，請參閱 P.220【附錄五】

(二) 兩組旋轉時，加權點的內、外次擺線軌跡

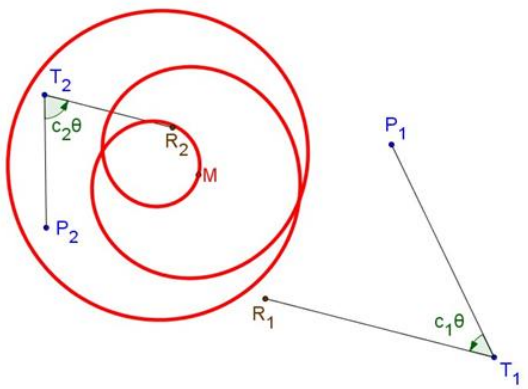
證明完平均點的情況後我們又想，如果【定理二十六】的命題中將平均點改為加權點，一個被旋轉點 P 推廣至 n 個點P_1，P_2，⋯，P_n呢？那 M 的軌跡還會是內、外次擺線嗎？於是我們先從最簡單的，只有四個點，分成兩組旋轉(一組旋轉$c_1\theta$，一組旋轉$c_2\theta$)來探討，並發現 M 的軌跡真的也會是內、外次擺線，我們將這個發現與證明寫成【定理二十七】

【定理二十七】加權點內(外)次擺線問題

設P_1，P_2，T_1，T_2為平面上四點，$c_1 \neq c_2$，以T_1為旋轉中心，將P_1旋轉$c_1\theta$得到R_1，

以T_2為旋轉中心，將P_2旋轉$c_2\theta$得到R_2。

設M為R_1，R_2分別以h_1，h_2為加權倍率得到的加權點，即$M=\frac{h_1R_1+h_2R_2}{h_1+h_2}$，則隨著θ的改變



當 $c_1c_2<0$時，M 點軌跡為內次擺線，且中心為$\frac{h_1T_1+h_2T_2}{h_1+h_2}$

當$c_1c_2>0$時，M 點軌跡為外次擺線，且中心為$\frac{h_1T_1+h_2T_2}{h_1+h_2}$

【證明】

設T_1坐標為$(a_1，b_1)$，T_2坐標為$(a_2，b_2)$，P_1坐標為$(p_1，q_1)$，P_2坐標為$(p_2，q_2)$

令R_1之坐標為(x_1,y_1)，R_2之坐標為(x_2,y_2)

∵以$T_1(a_1，b_1)$為旋轉中心，將$P_1(p_1，q_1)$旋轉$c_1\theta$得$R_1(x_1,y_1)$點

$$\therefore x_1+iy_1=[(p_1-a_1)+i(q_1-b_1)](\cos c_1\theta+i\sin c_1\theta)+a_1+ib_1$$

$$=\cos c_1\theta\,(p_1-a_1)-\sin c_1\theta\,(q_1-b_1)+a_1$$

$$+i[\sin c_1\theta\,(p_1-a_1)+\cos c_1\theta\,(q_1-b_1)+b_1]$$

$$\therefore\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos c_1\theta\,(p_1-a_1)-\sin c_1\theta\,(q_1-b_1)+a_1\\\sin c_1\theta\,(p_1-a_1)+\cos c_1\theta\,(q_1-b_1)+b_1\end{bmatrix}$$

∵以$T_2(a_2，b_2)$為旋轉中心，將$P_2(p_2，q_2)$旋轉$c_2\theta$得$R_2(x_2，y_2)$點

同理可得

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos c_2\theta\,(p_2-a_2)-\sin c_2\theta\,(q_2-b_2)+a_2\\\sin c_2\theta\,(p_2-a_2)+\cos c_2\theta\,(q_2-b_2)+b_2\end{bmatrix}$$

$M=\frac{h_1R_1+h_2R_2}{h_1+h_2}$，設M的坐標為$(x,y)$

則$x=\frac{1}{h_1+h_2}[h_1(\cos c_1\theta\,(p_1-a_1)-\sin c_1\theta\,(q_1-b_1)+a_1)$

$+h_2(\cos c_2\theta\,(p_2-a_2)-\sin c_2\theta\,(q_2-b_2)+a_2)]$---------(1)

$y=\frac{1}{h_1+h_2}[h_1(\sin c_1\theta\,(p_1-a_1)+\cos c_1\theta\,(q_1-b_1)+b_1)$

$+h_2(\sin c_2\theta\,(p_2-a_2)+\cos c_2\theta\,(q_2-b_2)+b_2)]$---------(2)

將$(p_1-a_1)+i(q_1-b_1)$及$(p_2-a_2)+i(q_2-b_2)$以極式表示

令

$(p_1-a_1)+i(q_1-b_1)=r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)=-r_1(\cos(\pi+\alpha_1)+i\sin(\pi+\alpha_1))$

$(p_2-a_2)+i(q_2-b_2)=r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)=-r_2(\cos(\pi+\alpha_2)+i\sin(\pi+\alpha_2))$

其中r_1，$r_2>0$

若$\frac{h_1}{h_1+h_2}>0$，則取$t_1=r_1$，$\beta_1=\alpha_1$，

若$\frac{h_1}{h_1+h_2}<0$，則取$t_1=-r_1$，$\beta_1=\pi+\alpha_1$，

則可滿足$(p_1-a_1)+i(q_1-b_1)=t_1(\cos\beta_1+i\sin\beta_1)$----------(3)

且$\frac{h_1t_1}{h_1+h_2}>0$----------(*)

若$-\frac{h_2c_2}{h_1t_1c_1}>0$，則取$t_2=r_2$，$\beta_2=\alpha_2$

若$-\frac{h_2c_2}{h_1t_1c_1}<0$，則取$t_2=-r_2$，$\beta_2=\pi+\alpha_2$

則可滿足$(p_2-a_2)+i(q_2-b_2)=t_2(\cos\beta_2+i\sin\beta_2)$----------(4)

且$-\frac{h_2t_2c_2}{h_1t_1c_1}>0$----------(#)

由(3)(4)式知

$p_1 - a_1 = t_1\cos\beta_1$，$q_1 - b_1 = t_1\sin\beta_1$，$p_2 - a_2 = t_2\cos\beta_2$，$q_2 - b_2 = t_2\sin\beta_2$

代入(1)式及(2)式，得

$$x = \frac{1}{h_1+h_2}[h_1(t_1\cos\beta_1\cos c_1\theta - t_1\sin\beta_1\sin c_1\theta + a_1)$$

$$+h_2(t_2\cos\beta_2\cos c_2\theta - t_2\sin\beta_2\sin c_2\theta + a_2)]$$

$$= \frac{1}{h_1+h_2}[h_1(t_1\cos(\beta_1 + c_1\theta) + a_1) + h_2(t_2\cos(\beta_2 + c_2\theta) + a_2)]$$

$$= \frac{1}{h_1+h_2}[h_1t_1\cos(\beta_1 + c_1\theta) + h_2t_2\cos(\beta_2 + c_2\theta) + h_1a_1 + h_2a_2]\text{----------}(5)$$

$$y = \frac{1}{h_1+h_2}[h_1(t_1\cos\beta_1\sin c_1\theta + t_1\sin\beta_1\cos c_1\theta + b_1)$$

$$+h_2(t_2\cos\beta_2\sin c_2\theta + t_2\sin\beta_2\cos c_2\theta + b_2)]$$

$$= \frac{1}{h_1+h_2}[h_1(t_1\sin(\beta_1 + c_1\theta) + b_1) + h_2(t_2\sin(\beta_2 + c_2\theta) + b_2)]$$

$$= \frac{1}{h_1+h_2}[h_1t_1\sin(\beta_1 + c_1\theta) + h_2t_2\sin(\beta_2 + c_2\theta) + h_1b_1 + h_2b_2]\text{----------}(6)$$

$\because c_1 \neq c_2$，令$\mu = \frac{c_2\beta_1 - c_1\beta_2}{c_2 - c_1}$，$\varphi = \frac{\beta_1 - \beta_2}{c_2 - c_1}$，$\theta' = \theta - \varphi$

則$\beta_1 + c_1\theta = \beta_1 + c_1\varphi + c_1(\theta - \varphi) = \beta_1 + c_1 \times \frac{\beta_1 - \beta_2}{c_2 - c_1} + c_1\theta' = \frac{c_2\beta_1 - c_1\beta_2}{c_2 - c_1} + c_1\theta'$

$$= \mu + c_1\theta'$$

$$B_2 + c_2\theta = \beta_2 + c_2\varphi + c_2(\theta - \varphi) = \beta_2 + c_2 \times \frac{\beta_1 - \beta_2}{c_2 - c_1} + c_2\theta' = \frac{c_2\beta_1 - c_1\beta_2}{c_2 - c_1} + c_2\theta'$$

$$= \mu + c_2\theta'$$

代入(5)(6)，得$M(x, y)$的軌跡參數式為

$$\Gamma：\begin{cases} x = \frac{1}{h_1+h_2}[h_1t_1\cos(\mu + c_1\theta') + h_2\,t_2\cos(\mu + c_2\theta') + h_1a_1 + h_2a_2] \\ y = \frac{1}{h_1+h_2}[h_1t_1\sin(\mu + c_1\theta') + h_2\,t_2\sin(\mu + c_2\theta') + h_1b_1 + h_2b_2] \end{cases}$$

將其軌跡圖形Γ平移向量($\frac{-h_1a_1-h_2a_2}{h_1+h_2}$，$\frac{-h_1b_1-h_2b_2}{h_1+h_2}$)，設得新圖形Γ′，則Γ′參數式為

$$\Gamma'：\begin{cases} x = \frac{1}{h_1+h_2}[h_1t_1\cos(\mu + c_1\theta') + h_2\,t_2\cos(\mu + c_2\theta')] \\ y = \frac{1}{h_1+h_2}[h_1t_1\sin(\mu + c_1\theta') + h_2\,t_2\sin(\mu + c_2\theta')] \end{cases}$$

將圖形Γ′以原點為旋轉中心，旋轉$-\mu$，設得新圖形Γ"，則Γ"參數式為

$$\Gamma''：\begin{cases} x = \frac{1}{h_1+h_2}[h_1t_1\cos(c_1\theta') + h_2\,t_2\cos(\,c_2\theta')] \\ y = \frac{1}{h_1+h_2}[h_1t_1\sin(c_1\theta') + h_2\,t_2\sin(\,c_2\theta')] \end{cases}$$

即$\Gamma''：\begin{cases} x = \frac{1}{h_1+h_2}[h_1t_1\cos(c_1\theta') + h_2\,t_2\cos(-c_2\theta')] \\ y = \frac{1}{h_1+h_2}[h_1t_1\,\sin(c_1\theta') - h_2\,t_2\sin(-\,c_2\theta')] \end{cases}$ ----------(7)

1. 若$c_1c_2 < 0$

令$\theta'' = c_1\theta'$，$r = -\frac{h_1t_1c_1}{(h_1+h_2)c_2}$，$R = \frac{h_1t_1(c_2-c_1)}{(h_1+h_2)c_2}$，$\lambda = -\frac{h_2t_2c_2}{h_1t_1c_1}$

由(*)式知$\frac{h_1t_1}{h_1+h_2} > 0$，$\therefore r > 0$

$R = \frac{h_1t_1(c_2-c_1)}{(h_1+h_2)c_2} = \frac{h_1t_1}{h_1+h_2}\left(1 - \frac{c_1}{c_2}\right) > \frac{h_1t_1}{h_1+h_2}\left(-\frac{c_1}{c_2}\right) = r$，$\therefore R > r$

由(#)式知$\lambda = -\frac{h_2t_2c_2}{h_1t_1c_1} > 0$

$R - r = \frac{h_1t_1(c_2-c_1)}{(h_1+h_2)c_2} + \frac{h_1t_1c_1}{(h_1+h_2)c_2} = \frac{h_1t_1}{h_1+h_2}$，

$\lambda r = \left(-\frac{h_2t_2c_2}{h_1t_1c_1}\right)(-\frac{h_1t_1c_1}{(h_1+h_2)c_2}) = \frac{h_2t_2}{h_1+h_2}$，

$\theta'' = c_1\theta'$，

$\frac{R-r}{r}\theta'' = \frac{\frac{h_1t_1}{h_1+h_2}}{-\frac{h_1t_1c_1}{(h_1+h_2)c_2}} \times c_1\theta' = -c_2\theta'$代入方程組(7)，得

$\Gamma'' : \begin{cases} x = (R-r)\cos\theta'' + \lambda r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta''\right) \\ y = (R-r)\sin\theta'' - \lambda r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta''\right) \end{cases}$，即為內次擺線參數式的形式，中心為(0,0)

所以Γ''的圖形為內次擺線，中心為(0,0)

$\because$圖形Γ'以原點為旋轉中心，旋轉$-\mu$，得圖形Γ''

$\therefore$圖形Γ''以原點為旋轉中心，旋轉μ，可得圖形Γ'

所以Γ'的圖形為內次擺線，中心也為(0,0)

$\because$圖形Γ平移向量$(\frac{-h_1a_1-h_2a_2}{h_1+h_2}, \frac{-h_1b_1-h_2b_2}{h_1+h_2})$，得圖形$\Gamma'$

$\therefore$圖形Γ'平移向量$(\frac{h_1a_1+h_2a_2}{h_1+h_2}, \frac{h_1b_1+h_2b_2}{h_1+h_2})$，得圖形$\Gamma$

$\therefore M(x,y)$的軌跡圖形Γ為內次擺線，中心為$(\frac{h_1a_1+h_2a_2}{h_1+h_2}, \frac{h_1b_1+h_2b_2}{h_1+h_2})$，即中心為$\frac{h_1T_1+h_2T_2}{h_1+h_2}$

2. 若$c_1c_2 > 0$，已知$c_1 \neq c_2$，不妨令$|c_1| < |c_2|$

$\therefore \frac{|c_1|}{|c_2|} < 1$，又因為$c_1c_2 > 0$，$\therefore \frac{c_1}{c_2} < 1$

令$\theta'' = c_1\theta'$，$r = \frac{h_1t_1c_1}{(h_1+h_2)c_2}$，$R = \frac{h_1t_1(c_2-c_1)}{(h_1+h_2)c_2}$，$\lambda = -\frac{h_2t_2c_2}{h_1t_1c_1}$

由(*)式知$\frac{h_1t_1}{h_1+h_2} > 0$，$\therefore r > 0$

$R = \frac{h_1t_1(c_2-c_1)}{(h_1+h_2)c_2} = \frac{h_1t_1}{h_1+h_2}\left(1-\frac{c_1}{c_2}\right) > 0$，

由(#)式知$\lambda = -\frac{h_2t_2c_2}{h_1t_1c_1} > 0$

$R + r = \frac{h_1t_1(c_2-c_1)}{(h_1+h_2)c_2} + \frac{h_1t_1c_1}{(h_1+h_2)c_2} = \frac{h_1t_1}{h_1+h_2}$，

$\lambda r = \left(-\frac{h_2t_2c_2}{h_1t_1c_1}\right) \times \frac{h_1t_1c_1}{(h_1+h_2)c_2} = -\frac{h_2t_2}{h_1+h_2}$，

$\theta'' = c_1\theta'$，

$\frac{R+r}{r}\theta'' = \frac{\frac{h_1t_1}{h_1+h_2}}{\frac{h_1t_1c_1}{(h_1+h_2)c_2}} \times c_1\theta' = c_2\theta'$ 代入方程組(7)，得

$$\Gamma'' : \begin{cases} x = (R+r)\cos\theta'' - \lambda r\cos\left(-\frac{R+r}{r}\theta''\right) \\ y = (R+r)\sin\theta'' + \lambda r\sin\left(-\frac{R+r}{r}\theta''\right) \end{cases}$$

即$\Gamma'' : \begin{cases} x = (R+r)\cos\theta'' - \lambda r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta''\right) \\ y = (R+r)\sin\theta'' - \lambda r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta''\right) \end{cases}$，此為外次擺線參數式的形式，中心為(0,0)

所以Γ''的圖形為外次擺線，中心為(0,0)

∵圖形Γ'以原點為旋轉中心，旋轉$-\mu$，得圖形Γ''

∴圖形Γ''以原點為旋轉中心，旋轉μ，可得圖形Γ'

所以Γ'的圖形為外次擺線，中心也為(0,0)

∵圖形Γ平移向量$\left(\frac{-h_1a_1-h_2a_2}{h_1+h_2}, \frac{-h_1b_1-h_2b_2}{h_1+h_2}\right)$，得圖形$\Gamma'$

∴圖形Γ'平移向量$\left(\frac{h_1a_1+h_2a_2}{h_1+h_2}, \frac{h_1b_1+h_2b_2}{h_1+h_2}\right)$，得圖形$\Gamma$

∴$M(x,y)$的軌跡圖形Γ為外次擺線，中心為$\left(\frac{h_1a_1+h_2a_2}{h_1+h_2}, \frac{h_1b_1+h_2b_2}{h_1+h_2}\right)$，即中心為

$\frac{h_1T_1+h_2T_2}{h_1+h_2}$

得證■

(三) 多組旋轉並且旋轉後加入伸縮時，加權點的內、外次擺線軌跡

在推完兩組旋轉時的加權點情形後，我們想將命題推廣，將它延伸至多組旋轉，也就是有 n 組旋轉倍率為$c\theta$，m組旋轉倍率為$c'\theta$的情況，並且旋轉後加入伸縮，發現加權點 M 的軌跡仍為內、外次擺線，寫成【定理二十八】，可利用【定理二十七】的結果來證明。

【定理二十八】加權點內(外)次擺線問題(二)

設T_1，T_2，…，T_n，T_1'，T_2'，…，T_m'，P_1，P_2，…，P_n，P_1'，P_2'，…，P_m'均為平面上的定點。$c \neq c'$，以T_k為旋轉中心，將P_k旋轉 $c\theta + \alpha_k$，再伸縮s_k倍得R_k點$(k = 1，2，\cdots，n)$，

以T_k'為旋轉中心，將P_k'旋轉$c'\theta + \alpha_k'$再伸縮s_k'倍得R_k'點$(k = 1，2，\cdots，m)$，

設M為R_1，R_2，…，R_n，R_1'，R_2'，…，R_m'分別以
h_1，h_2，…，h_n，h_1'，h_2'，…，h_m'為加權倍率得到的加權點，設M'為
T_1，T_2，…，T_n，T_1'，T_2'，…，T_m'分別以h_1，h_2，…，h_n，h_1'，h_2'，…，h_m'為加權倍率得到的加權點，則隨著θ的改變

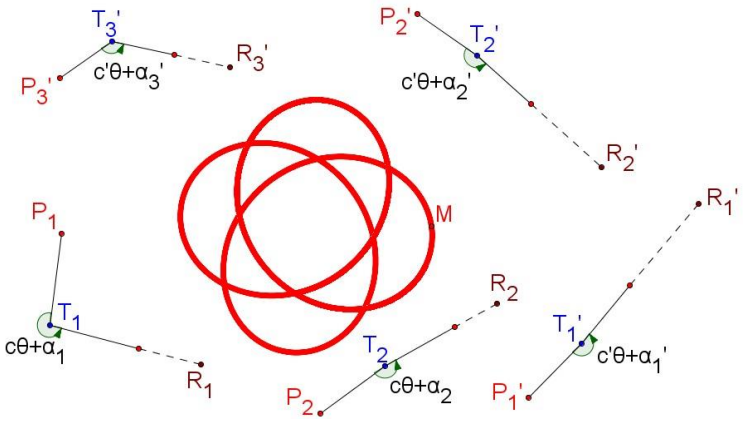
當$cc' < 0$時，M 點軌跡為內次擺線，中心為M'

當$cc' > 0$時，M 點軌跡為外次擺線，中心為M'

【證明】

設T_1，T_2，…，T_n分別以h_1，h_2，…，h_n為加權倍率得到的加權點為T

R_1，R_2，…，R_n分別以



h_1，h_2，⋯，h_n

為加權倍率得到的加權點為R

T_1'，T_2'，⋯，T_m'分別以h_1'，h_2'，⋯，h_m'

為加權倍率得到的加權點為T'

R_1'，R_2'，⋯，R_m'分別以h_1'，h_2'，⋯，h_m'，為加權倍率得到的加權點為R'

∵以T_k為旋轉中心，將P_k旋轉 $c\theta+\alpha_k$，再伸縮s_k倍得R_k點$(k=1，2，⋯，n)$

由 P.44【定理二十一】知：平面上能找到一點P

以T為旋轉中心，將P旋轉$c\theta$得到的點為R ----------(1)

∵以T_k'為旋轉中心，將P_k'旋轉$c'\theta+\alpha_k'$再伸縮s_k'倍得R_k'點$(k=1，2，⋯，m)$

同理由【定理二十一】知：平面上能找到一點P'

以T'為旋轉中心，將P'旋轉$c'\theta$得到的點為R' ----------(2)

∵M為R_1，R_2，⋯，R_n，R_1'，R_2'，⋯，R_m'分別以

h_1，h_2，⋯，h_n，h_1'，h_2'，⋯，h_m'為加權倍率得到的加權點

$$\therefore M=\frac{h_1R_1+h_2R_2+\cdots+h_nR_n+h_1'R_1'+h_2'R_2'+\cdots+h_m'R_m'}{h_1+h_2+\cdots+h_n+h_1'+h_2'+\cdots+h_m'}$$

令$h=h_1+h_2+\cdots+h_n$，$h'=h_1'+h_2'+\cdots+h_m'$，

則將R，R'分別以h，h'為加權倍率得到的加權點為$\frac{hR+h'R'}{h+h'}$

$$=\frac{(h_1+h_2+\cdots+h_n)\times\frac{h_1R_1+h_2R_2+\cdots+h_nR_n}{h_1+h_2+\cdots+h_n}+(h_1'+h_2'+\cdots+h_m')\times\frac{h_1'R_1'+h_2'R_2'+\cdots+h_m'R_m'}{h_1'+h_2'+\cdots+h_m'}}{h_1+h_2+\cdots+h_n+h_1'+h_2'+\cdots+h_m'}$$

$$=\frac{h_1R_1+h_2R_2+\cdots+h_nR_n+h_1'R_1'+h_2'R_2'+\cdots+h_m'R_m'}{h_1+h_2+\cdots+h_n+h_1'+h_2'+\cdots+h_m'}=M$$

∴將R，R′分別以h，h′為加權倍率得到的加權點為M ----------(3)

同理，將T，T′分別以h，h′為加權倍率得到的加權點為M′

由(1)(2)(3)知

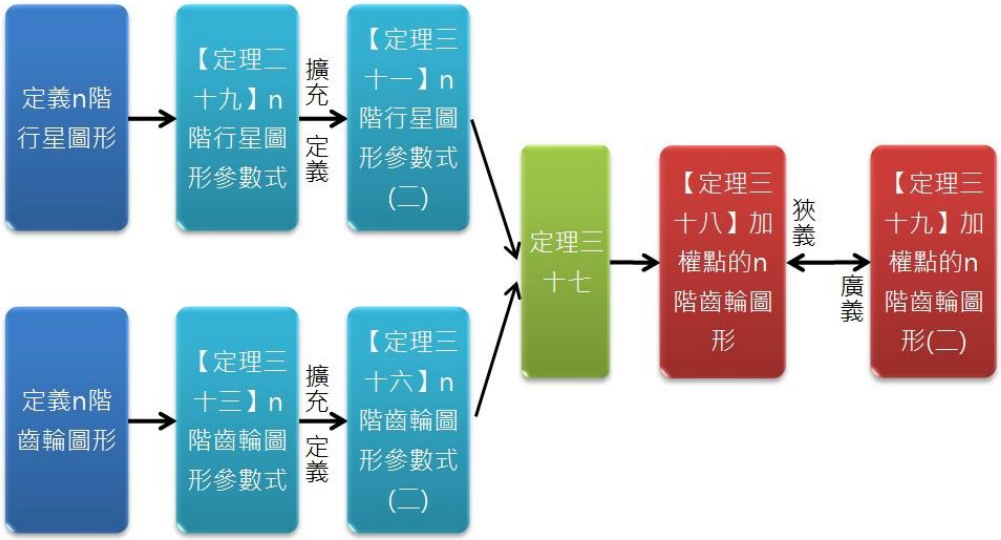
以T為旋轉中心，將P旋轉cθ得到的點為R；以T′為旋轉中心，將P′旋轉c′θ得到的點為R′，將R，R′分別以h，h′為加權倍率得到的加權點為M

由【定理二十七】知

1. 當$cc' < 0$時，M 點軌跡為內次擺線，中心為$\frac{hT+h'T'}{h+h'} = M'$

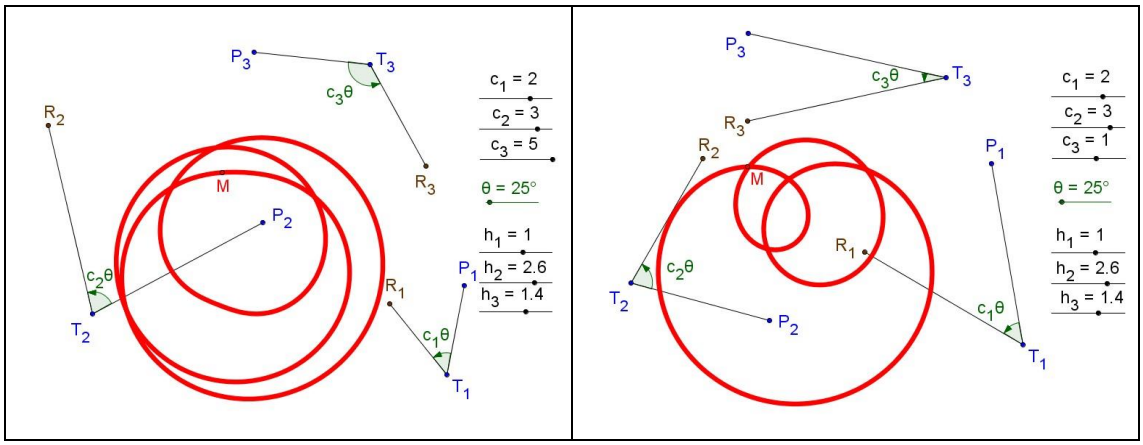
2. 當$cc' > 0$時，M 點軌跡為外次擺線，中心為$\frac{hT+h'T'}{h+h'} = M'$ 得證■

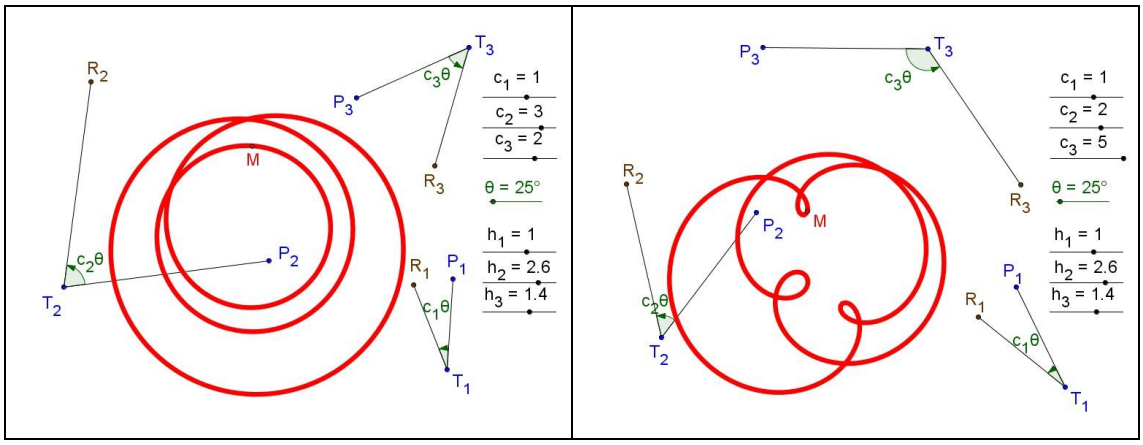
六、 n 階齒輪圖形與 n 階行星圖形



(一) 操控旋轉角度內θ值的 n 種不同倍率

在橢圓軌跡命題與內外次擺線軌跡命題中，我們分別操控了旋轉角度內θ值的正負值及其兩種倍率。因此我們想到，如果往更深入去推廣，操控θ值的 n 種不同倍率，也就是將旋轉角度改為$\theta_1 = c_1\theta$，$\theta_2 = c_2\theta$，$\theta_3 = c_3\theta$，…，$\theta_n = c_n\theta$時，加權點 M 的移動軌跡會變成什麼樣的圖形呢？在經過 Geogebra 測試後，我們得到了許多不同而又樣子很特別的軌跡，而且每次只要改變θ值倍率的數值滑桿時，跑出來的圖形又會和原本的軌跡大相逕庭，如下面四圖所示。





(二) 齒輪與行星軌跡的思考過程

首先，我們想知道這些圖形的方程式或參數式，於是努力上網查資料，也查了很多書，問了很多人，但都無功而返，陷入瓶頸。各種能試的方法都試過了，能做的也都做了，努力了很久但毫無進展，要放棄又覺得還是想再努力看看。最後我們決定：試看看自己把它們的參數式算出來。

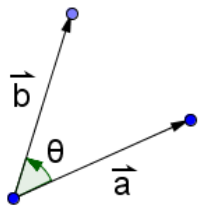
之前的研究內容給了我們靈感，如果θ值全部的倍率皆相同，加權點 M 的移動軌跡會是一個圓；如果θ值有兩種不同的倍率，M 的移動軌跡則會是當一個圓O_2在另一個圓O_1上滾動時，圓O_2之同心圓上某一點的軌跡，也就是內、外次擺線圖形。因此我們推想，在調整θ值的 n 種不同倍率後所得到的加權點 M 的移動軌跡，會不會就是當平面上有 n 組齒輪(第二組齒輪在第一組齒輪上滾動，第三組齒輪在第二組齒輪上滾動，…，第 n 組齒輪在第 n-1 組齒輪上滾動)時，最外層齒輪上某一點的軌跡呢？又我們發現：因為太陽固定，所以月球繞地球的軌跡為外次擺線。因此我們也推想，在調整θ值的 n 種不同倍率後所得到 M 的移動軌跡，會不會就是許多顆星球(把星球視為點)在同平面上互相轉動時，最外層星球的軌跡呢？

於是我們在此寫了【定理二十九】n階行星圖形參數式與【定理三十三】n階齒輪圖形參數式兩個定理，探討行星與齒輪的軌跡參數式，並進而研究它們與我們命題的關聯性，寫成【定理三十八】，放在 P.110。

(三) 研究行星繞行的軌跡

首先我們先研究行星繞行的軌跡。不過，在開始推導證明前，我們先給入幾個定義及定理，以方便表示後面的命題。

1. **符號$R_\theta(\vec{a}) = \vec{b}$的意義及引理**



設V代表所有平面向量所成的集合，定義函數$R_\theta : V \to V$，

$R_\theta(\vec{a}) = \vec{b}$表示將$\vec{a}$以始點為圓心旋轉θ所得的向量為$\vec{b}$

引理：$R_\theta(\vec{u}+\vec{v}) = R_\theta(\vec{u}) + R_\theta(\vec{v})$

證明：令$\vec{u} = (a, b)$，$\vec{v} = (c, d)$，則$\vec{u}+\vec{v} = (a+c, b+d)$，以複數坐標表示，

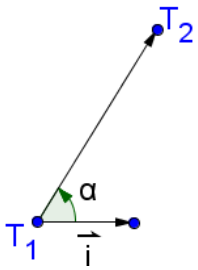
則$R_\theta(\vec{u}+\vec{v}) = [(a+c)+i(b+d)](\cos\theta + i\sin\theta)$

$= [(a+ib)+(c+id)](\cos\theta + i\sin\theta)$

$= (a+ib)(\cos\theta + i\sin\theta) + (c+id)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= R_\theta(\vec{u}) + R_\theta(\vec{v})$ 得證■

2. **定義輻角**

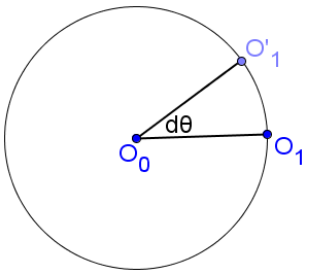


T_1，T_2為平面上兩點，設 x 軸正向的單位向量 $\vec{i}$ =(1,0)，如右圖，設$R_\alpha(\vec{i}) = \frac{\overrightarrow{T_1T_2}}{|\overrightarrow{T_1T_2}|}$，則定義$\overrightarrow{T_1T_2}$的輻角為α。

由輻角的定義，可得到下面的引理

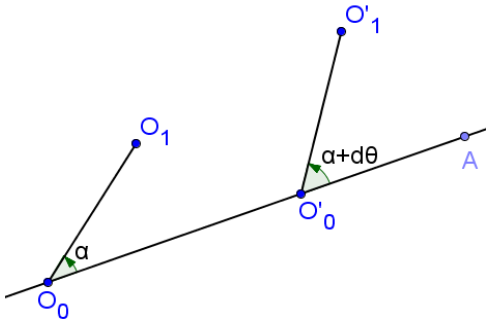
【引理】 設$\lvert\overrightarrow{T_1T_2}\rvert = r$，$\overrightarrow{T_1T_2}$的輻角為α，則$\overrightarrow{T_1T_2} = (r\cos\alpha，r\sin\alpha)$

3. **定義相對圓周運動**



O_0可能是定點也可能是動點，若O_1繞O_0旋轉，保持$\overline{O_0O_1}$為定長，則稱O_1相對於O_0作圓周運動

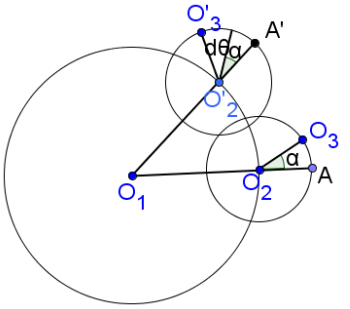
4. **定義角速度**



(1) 如右上圖：設O_0是定點，O_1繞O_0作圓周運動，在dt的時間內，O_1移動至O_1'，$\angle O_1O_0O_1' = d\theta$，則定義此時$O_1$相對於$O_2$作圓周運動的角速度$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

(2) 如右圖：設O_0獨立作直線運動(不受制於其他點)，O_1相對於O_0作圓周運動，在dt的時間內，O_0移動至O_0'，O_1移動至O_1'，如圖：設$\angle O_0'O_0O_1 = \alpha$，$\angle AO_0'O_1' = \alpha + d\theta$則定義此時$O_1$相對於$O_0$作圓周運動的角速度$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

5. **定義相對角速度**



設O_2相對於O_1作圓周運動，O_3相對於O_2作圓周運動，站在O_1觀察O_2與O_3，在dt的時間內，O_2移動至O_2'，O_3移動至O_3'，如右圖所示，$\angle AO_2O_3 = \alpha$，$\angle A'O_2'O_3' = \alpha + d\theta$，則定義此時$O_3$相對於$O_2$作圓周運動的相對角速度$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

而當O_2是靜止狀態時，O_3相對於O_2作圓周運動的相對角速度即為O_3相對於O_2作圓周運動的角速度

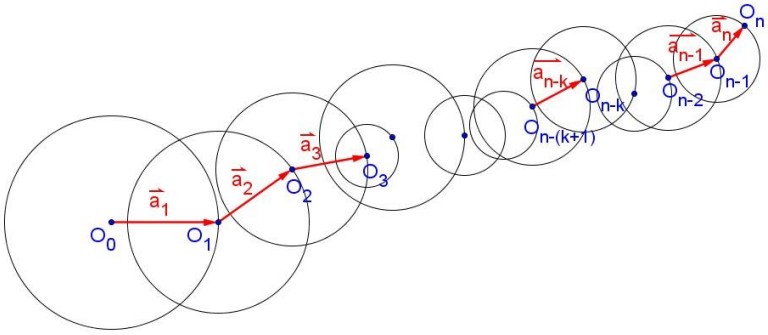
備註：角速度及相對角速度中dθ均為有向角，逆時針旋轉為正，順時針旋轉為負

6. **定義相對等速圓周運動**

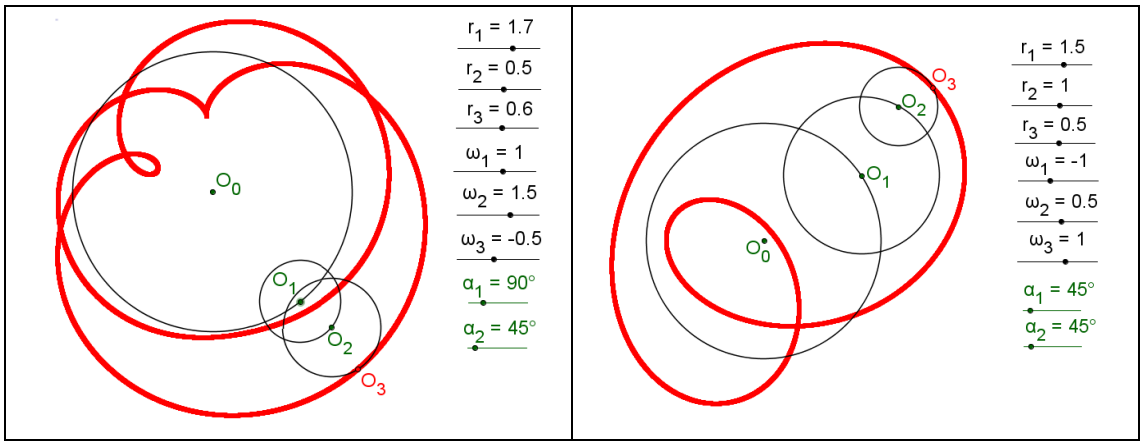
O_1可能是定點也可能是動點，若O_2繞O_1以等角速度(或等相對角速度)旋轉，保持$\overline{O_1O_2}$為定長，則稱O_2相對於O_1作等速圓周運動

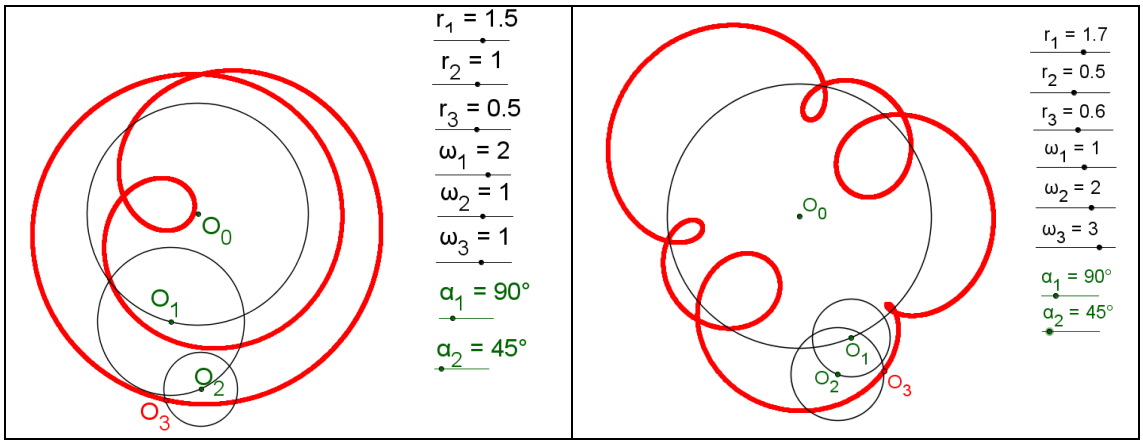
7. **定義 n 階行星圖形及其中心**

平面上有一個定點O_0及 n 個動點O_1，O_2，…，O_n，其中O_1相對於O_0作等速圓周運動，O_2相對於O_1作等速圓周運動，…，O_n相對於O_{n-1}作等速圓周運動，則 O_n 的軌跡稱為 n 階行星圖形，定點O_0稱為此 n 階行星圖形的中心。



下面四個圖是我們用 Geogebra 畫出來的 3 階行星圖形





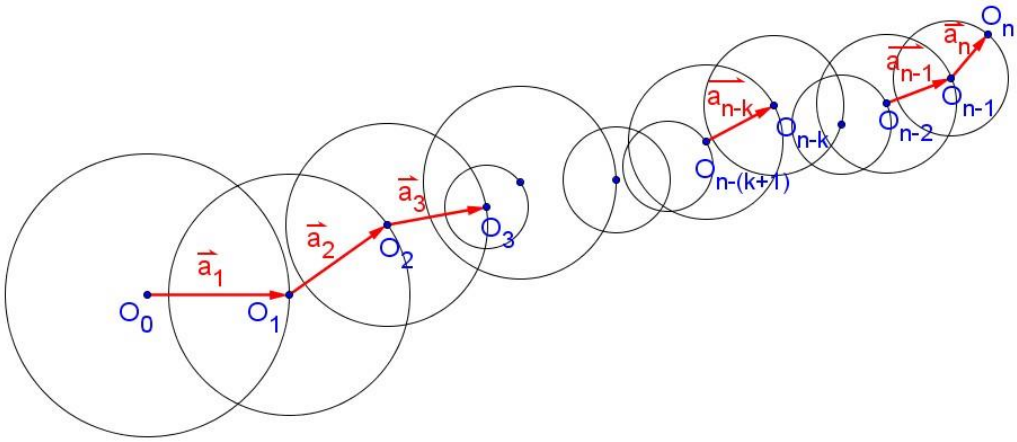
(四) 給入行星繞行的命題並證明

【定理二十九】n 階行星圖形參數式

平面上有一個定點O_0，及 n 個動點O_1，O_2，⋯，O_n。令O_0為原點，一開始$\overrightarrow{O_0O_1}$的輻角為0°，$\overline{O_0O_1}=r_1$，$\overrightarrow{O_1O_2}$的輻角為α_1，$\overline{O_1O_2}=r_2$，$\overrightarrow{O_2O_3}$的輻角為α_2，$\overline{O_2O_3}=r_3$，⋯，$\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$的輻角為$\alpha_{n-1}$，$\overline{O_{n-1}O_n}=r_n$。然後$O_1$相對於$O_0$作等速圓周運動，相對角速度$\omega_1$，保持$\overline{O_0O_1}=r_1$；$O_2$相對於$O_1$作等速圓周運動，相對角速度$\omega_2$，保持$\overline{O_1O_2}=r_2$；⋯；$O_n$相對於$O_{n-1}$作等速圓周運動，相對角速度$\omega_n$，保持$\overline{O_{n-1}O_n}=r_n$，其中$r_1$，$r_2$，⋯，$r_n>0$，$\omega_1$，$\omega_2$，⋯，$\omega_n\neq 0$，t 時間後設$O_n$坐標為$(x,y)$，則隨著 t 的改變，$O_n(x,y)$的軌跡為 n 階行星圖形，中心是(0,0)，且參數式為

$$x=r_1\cos(\omega_1 t)+r_2\cos(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots+r_n\cos(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$$

$$y=r_1\sin(\omega_1 t)+r_2\sin(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots+r_n\sin(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$$



【證明】

(一)

$\because O_0$為原點

由 n 階行星圖形的定義可得知：隨著t的變動，$O_n(x,y)$之軌跡為 n 階行星圖形，且中心是$O_0(0,0)$

(二)

1. 令原本尚未開始轉動時$\overrightarrow{O_0O_1}=\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{a_2}$，…，$\overrightarrow{O_{n-1}O_n}=\overrightarrow{a_n}$

   $\overrightarrow{O_0O_1}$輻角為0°，$\overline{O_0O_1}=r_1$，由 P.74 的引理知：

   將向量以複數坐標表示，則$\overrightarrow{a_1}=r_1(\cos 0+i\sin 0)$

   $\overrightarrow{O_1O_2}$輻角為α_1，$\overline{O_1O_2}=r_2$，同理$\overrightarrow{a_2}=r_2(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$

   ……

   $\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$輻角為$\alpha_{n-1}$，$\overline{O_{n-1}O_n}=r_n$，同理$\overrightarrow{a_n}=r_n(\cos\alpha_{n-1}+i\sin\alpha_{n-1})$

   ----------(*)

   設V代表所有向量所成的集合，定義函數R_θ：$V\to V$，

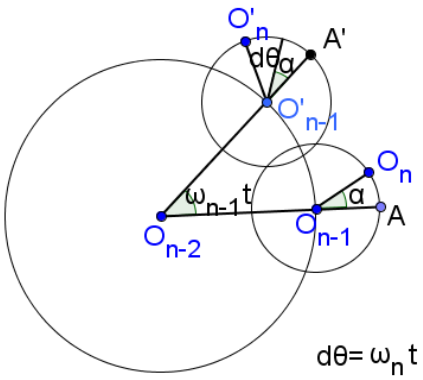
   $R_\theta(\vec{a})=\vec{b}$表示將$\vec{a}$以始點為圓心旋轉θ所得的向量為$\vec{b}$

2. (欲證：若O_{n-2}是靜止的，則 t 時間後

$\overrightarrow{O_{n-2}O_n} = R_{\omega_{n-1}t}(\overrightarrow{a_{n-1}}) + R_{\omega_{n-1}t} \circ R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n}))$

一開始$\overrightarrow{O_{n-1}O_n} = \overrightarrow{a_n}$，而$O_n$繞$O_{n-1}$以相對角速度$\omega_n$旋轉，

假設O_{n-1}是靜止的



則 t 時間後$\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$ 旋轉了$\omega_n t$

$\therefore$t 時間後$\overrightarrow{O_{n-1}O_n} = R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})$

----------(2)

則$\overrightarrow{O_{n-2}O_n} = \overrightarrow{O_{n-2}O_{n-1}} + \overrightarrow{O_{n-1}O_n} = \overrightarrow{a_{n-1}} + R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})$

但事實上O_{n-1}繞O_{n-2}以相對角速度ω_{n-1}旋轉，而O_n跟著O_{n-1}跑

所以$\overrightarrow{O_{n-2}O_{n-1}}$ 旋轉了$\omega_{n-1}t$，連帶$\overrightarrow{O_{n-2}O_n}$也旋轉了$\omega_{n-1}t$

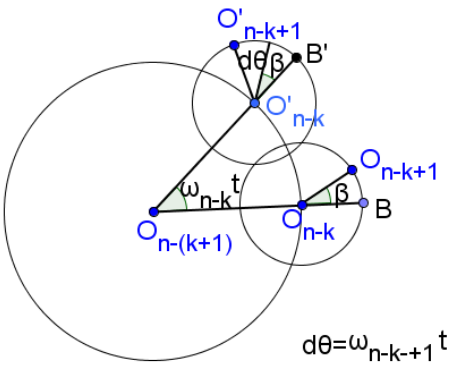
所以事實上$\overrightarrow{O_{n-2}O_n} = R_{\omega_{n-1}t}\left(\overrightarrow{a_{n-1}} + R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})\right)$

$= R_{\omega_{n-1}t}(\overrightarrow{a_{n-1}}) + R_{\omega_{n-1}t} \circ R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})$ ---------(3)

3. 推測當$1 \le m \le n$時，若O_{n-m}是靜止的，則 t 時間後

$\overrightarrow{O_{n-m}O_n} = R_{\omega_{n-m+1}t}(\overrightarrow{a_{n-m+1}}) + R_{\omega_{n-m+1}t} \circ R_{\omega_{n-m+2}t}(\overrightarrow{a_{n-m+2}}) + \cdots + R_{\omega_{n-m+1}t} \circ \cdots \circ R_{\omega_{n-1}t} \circ R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})$

以數學歸納法來證明：



(1) 當 m=1，2 時，由(2)式及(3)式得證

(2) 假設 m=k 時原式成立，即若O_{n-k}是靜止的，則 t 時間後

$\overrightarrow{O_{n-k}O_n}$

$= R_{\omega_{n-k+1}t}(\overrightarrow{a_{n-k+1}}) + R_{\omega_{n-k+1}t} \circ R_{\omega_{n-k+2}t}(\overrightarrow{a_{n-k+2}}) + \cdots$

$+ R_{\omega_{n-k+1}t} \circ \cdots \circ R_{\omega_{n-1}t} \circ R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})$

則 m=k+1 時，若$O_{n-(k+1)}$是靜止的，

假設O_{n-k}是一開始靜止的狀態，則

$\overrightarrow{O_{n-(k+1)}O_n} = \overrightarrow{O_{n-(k+1)}O_{n-k}} + \overrightarrow{O_{n-k}O_n}$

$= \overrightarrow{a_{n-k}} + R_{\omega_{n-k+1}t}(\overrightarrow{a_{n-k+1}}) + R_{\omega_{n-k+1}t} \circ R_{\omega_{n-k+2}t}(\overrightarrow{a_{n-k+2}})$

$+ \cdots + R_{\omega_{n-k+1}t} \circ \cdots \circ R_{\omega_{n-1}t} \circ R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})$

但事實上O_{n-k}繞$O_{n-(k+1)}$以相對角速度ω_{n-k}旋轉，而$O_{n-(k+1)}$是靜止的

所以 t 時間後$\overrightarrow{O_{n-(k+1)}O_{n-k}}$旋轉了$\omega_{n-k}t$

而O_{n-k}帶動 O_{n-k+1}， O_{n-k+2}，…，O_{n-1}，O_n跟著跑

∴連帶$\overrightarrow{O_{n-(k+1)}O_n}$也旋轉了$\omega_{n-k}t$， 所以事實上

$\overrightarrow{O_{n-(k+1)}O_n}$

$= R_{\omega_{n-k}t}\left[\overrightarrow{a_{n-k}} + R_{\omega_{n-k+1}t}(\overrightarrow{a_{n-k+1}}) + R_{\omega_{n-k+1}t} \circ R_{\omega_{n-k+2}t}(\overrightarrow{a_{n-k+2}}) + \cdots\right.$

$\left. + R_{\omega_{n-k+1}t} \circ \cdots \circ R_{\omega_{n-1}t} \circ R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})\right]$

$= R_{\omega_{n-k}t}(\overrightarrow{a_{n-k}}) + R_{\omega_{n-k}t} \circ R_{\omega_{n-k+1}t}(\overrightarrow{a_{n-k+1}}) + \cdots$

$+ R_{\omega_{n-k}t} \circ R_{\omega_{n-k+1}t} \circ \cdots \circ R_{\omega_{n-1}t} \circ R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})$

∴m=k+1 時原式也成立，

由數學歸納法得證當$1 \le m \le n$時，若O_{n-m}是靜止的，則 t 時間後

$\overrightarrow{O_{n-m}O_n} = R_{\omega_{n-m+1}t}(\overrightarrow{a_{n-m+1}}) + R_{\omega_{n-m+1}t} \circ R_{\omega_{n-m+2}t}(\overrightarrow{a_{n-m+2}}) + \cdots$

$+R_{\omega_{n-m+1}t}\circ\cdots\circ R_{\omega_{n-1}t}\circ R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})$　均成立

4. m=n 時，代入得

$\overrightarrow{O_0O_n}=R_{\omega_1 t}(\overrightarrow{a_1})+R_{\omega_1 t}\circ R_{\omega_2 t}(\overrightarrow{a_2})+\cdots+R_{\omega_1 t}\circ\cdots\circ R_{\omega_{n-1}t}\circ R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})$

---------(4)

原本尚未開始轉動時$\overrightarrow{O_0O_1}=\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{a_2}$，…，$\overrightarrow{O_{n-1}O_n}=\overrightarrow{a_n}$　由(*)式知：

$\overrightarrow{a_1}=r_1(\cos 0+i\sin 0)$，$\overrightarrow{a_2}=r_2(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$，…，$\overrightarrow{a_n}=r_n(\cos\alpha_{n-1}+i\sin\alpha_{n-1})$

代入(4)式，得

$\overrightarrow{O_0O_n}$

$=R_{\omega_1 t}(\overrightarrow{a_1})+R_{\omega_1 t}\circ R_{\omega_2 t}(\overrightarrow{a_2})+\cdots+R_{\omega_1 t}\circ\cdots\circ R_{\omega_{n-1}t}\circ R_{\omega_n t}(\overrightarrow{a_n})$

$=r_1(\cos 0+i\sin 0)(\cos\omega_1 t+i\sin\omega_1 t)$

$+r_2(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(\cos\omega_2 t+i\sin\omega_2 t)(\cos\omega_1 t+i\sin\omega_1 t)+\cdots$

$+r_n(\cos\alpha_{n-1}+i\sin\alpha_{n-1})(\cos\omega_n t+i\sin\omega_n t)(\cos\omega_{n-1}t+i\sin\omega_{n-1}t)\cdots$

$(\cos\omega_1 t+i\sin\omega_1 t)$

$=r_1(\cos\omega_1 t+i\sin\omega_1 t)+r_2[\cos(\alpha_1+\omega_2 t+\omega_1 t)+i\sin(\alpha_1+\omega_2 t+\omega_1 t)]$

$+\cdots+r_n[\cos(\alpha_{n-1}+\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t)+i\sin(\alpha_{n-1}+\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t)]$　-----(5)

又O_0為原點，O_n坐標為(x,y)，所以$\overrightarrow{O_0O_n}=x+iy$與(5)式比較可得

$x=r_1\cos(\omega_1 t)+r_2\cos(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots$

$+r_n\cos(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$

y

$$= r_1 \sin(\omega_1 t) + r_2 \sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots$$

$$+ r_n \sin(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$$

得證■

(五) 在【定理二十九】中，放寬 r_1，r_2，…，r_n可正可負的思考過程

在【定理二十九】n 階行星圖形參數式中，如果我們保持$\overline{O_0O_1} = |r_1|$，$\overline{O_1O_2} = |r_2|$，…，$\overline{O_{n-1}O_n} = |r_n|$，允許$r_1$，$r_2$，…，$r_n$可以是正數，也可以是負數，但不能為 0。那麼【定理二十九】應該如何修正命題才會成立呢？我們想往這方面研究。

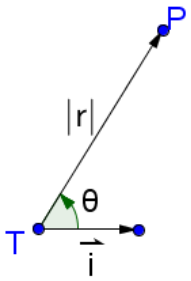
(六) 引進相對輻角

如圖：設$|\overrightarrow{TP}| = |r|$，$\overrightarrow{TP}$的輻角為θ，則$\overrightarrow{TP} = (|r|\cos\theta，|r|\sin\theta)$

(1) $r > 0$時，$\overrightarrow{OP} = (r\cos\theta，r\sin\theta)$

(2) $r < 0$時，$\overrightarrow{OP} = (-r\cos\theta，-r\sin\theta)$

$= (r\cos(\pi + \theta)，r\sin(\pi + \theta))$



1. **定義相對輻角**

設$|\overrightarrow{TP}| = |r|$，$\overrightarrow{TP}$的輻角為θ， 定義：$\overrightarrow{TP}$的相對輻角為α，其中 (1) $r > 0$時，$\alpha = \theta$　　(2) $r < 0$時，$\alpha = \pi + \theta$

2. **由上面的討論及定義，可以得到【引理三十】**

【引理三十】 設$|\overrightarrow{TP}| = |r|$，$\overrightarrow{TP}$相對輻角為α，則$\overrightarrow{TP} = (r\cos\alpha，r\sin\alpha)$

(七) 把 r_1，r_2，…，r_{2n-1}放寬為可正可負，推廣成【定理三十一】

引進相對輻角之後，我們可以把r_1，r_2，…，r_{2n-1}放寬為可正可負，P.77【定理二十九】n 階行星圖形參數式可以將它推廣成【定理三十一】

【定理三十一】n 階行星圖形參數式(二)

平面上有一個定點O_0，及 n 個動點O_1，O_2，⋯，O_n。令O_0為原點，一開始$\overrightarrow{O_0O_1}$相對輻角為0°，$\overline{O_0O_1}=|r_1|$，$\overrightarrow{O_1O_2}$相對輻角為α_1，$\overline{O_1O_2}=|r_2|$，$\overrightarrow{O_2O_3}$相對輻角為α_2，$\overline{O_2O_3}=|r_3|$，⋯，$\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$相對輻角為$\alpha_{n-1}$，$\overline{O_{n-1}O_n}=|r_n|$。然後$O_1$相對於$O_0$作等速圓周運動，相對角速度$\omega_1$，保持$\overline{O_0O_1}=|r_1|$；$O_2$相對於$O_1$作等速圓周運動，相對角速度$\omega_2$，保持$\overline{O_1O_2}=|r_2|$；⋯； O_n相對於O_{n-1}作等速圓周運動，相對角速度ω_n，保持$\overline{O_{n-1}O_n}=|r_n|$，其中$r_1$，$r_2$，⋯，$r_n$可以是正數或負數，但不為0，$\omega_1$，$\omega_2$，⋯，$\omega_n\neq 0$，t 時間後設$O_n$坐標為$(x,y)$，則隨著 t 的改變，$O_n(x,y)$的軌跡為 n 階行星圖形，中心是(0,0)，且參數式為

$$x=r_1\cos(\omega_1 t)+r_2\cos(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots+r_n\cos(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$$

$$y=r_1\sin(\omega_1 t)+r_2\sin(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots+r_n\sin(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$$

【證明】(請參考 P.77【定理二十九】的圖)

一、由 P.76 n 階行星圖形的定義知：$O_n(x,y)$的軌跡為 n 階行星圖形，中心是$O_0(0,0)$

二、設原本尚未開始轉動時$\overrightarrow{O_0O_1}=\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{a_2}$，⋯，$\overrightarrow{O_{n-1}O_n}=\overrightarrow{a_n}$

$\overrightarrow{O_0O_1}$相對輻角為0°，$\overline{O_0O_1}=|r_1|$，由【引理三十】知

將向量以複數坐標表示，則$\overrightarrow{a_1}=r_1(\cos 0+i\sin 0)$

$\overrightarrow{O_1O_2}$相對輻角為α_1，$\overline{O_1O_2}=|r_2|$，由【引理三十】知$\overrightarrow{a_2}=r_2(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$

……

$\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$相對輻角為$\alpha_{n-1}$，$\overline{O_{n-1}O_n}=|r_n|$，同理$\overrightarrow{a_n}=r_n(\cos\alpha_{n-1}+i\sin\alpha_{n-1})$

其餘與 P.77【定理二十九】n 階行星圖形參數式的證明完全相同

得證■

在證明完行星繞行問題後，我們轉而探討 n 組齒輪滾動的軌跡。同樣地，在開始之前，我們先給入一個定義。

(八) 定義 n 階齒輪圖形及其中心

平面上有$2n-1$個圓O_1，O_2，…，O_{2n-1}。O_3為O_2之同心圓，且O_2與O_1相切；O_5為O_4之同心圓，且O_4與O_3相切；…；O_{2n-1}為O_{2n-2}之同心圓，且O_{2n-2}與O_{2n-3}相切。設O_1之圓心為T_1，且T_1為定點，O_2、O_3之圓心為T_2，O_4、O_5之圓心為T_3，…，O_{2n-2}、O_{2n-1}之圓心為T_n。

現讓O_2帶動O_3以相同轉速在O_1上滾動，O_4帶動O_5以相同轉速在O_3上滾動，…，O_{2n-2}帶動O_{2n-1}以相同轉速在O_{2n-3}上滾動。滿足：在相同時間內

O_2滾過O_1的弧長對於T_2的圓心角＝O_4滾過O_3的弧長對於T_2的圓心角

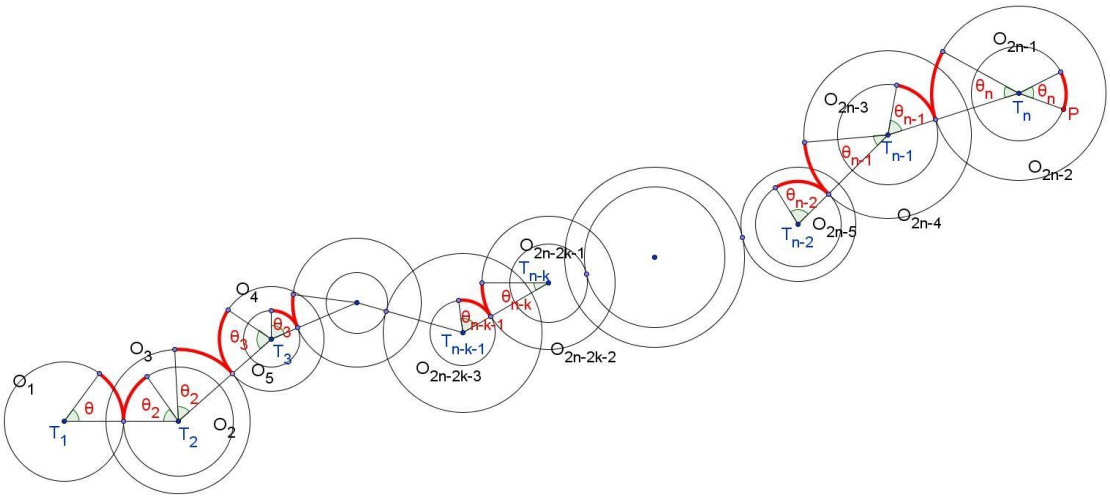
O_4滾過O_3的弧長對於T_3的圓心角＝O_6滾過O_5的弧長對於T_3的圓心角

……

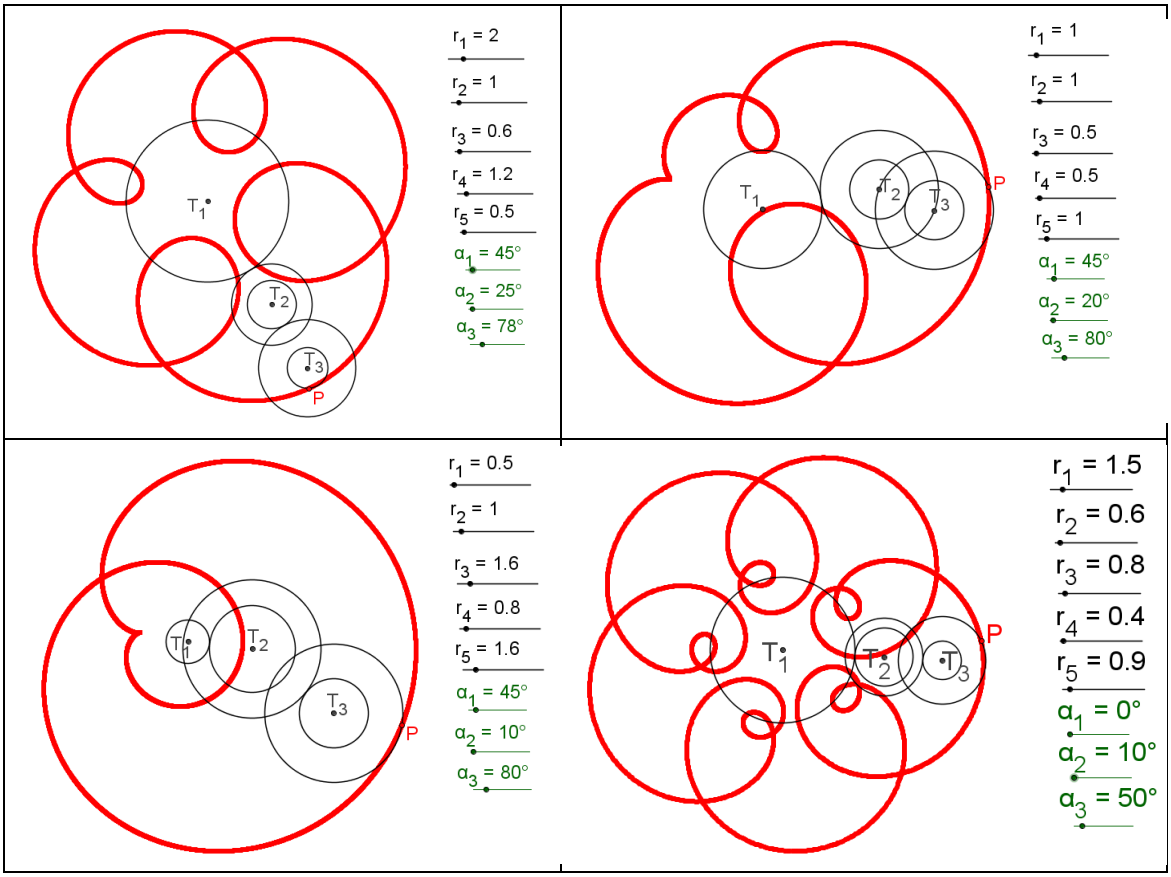
O_{2n-4}滾過O_{2n-5}的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝O_{2n-2}滾過O_{2n-3}的弧長對於T_{n-1}的圓心角

而當中所有的滾動皆為純滾動，也就是接觸面間不會產生相對滑動。令P為圓O_{2n-1}上一點，

則P(x，y)之軌跡我們稱之為 n 階齒輪圖形，定點T_1稱為此 n 階齒輪圖形的中心。



下面四個圖是我們用 Geogebra 畫出來的 3 階齒輪圖形



(九) 將滾動分解成先自轉再公轉

1. 如下面圖(一)、圖(二)：圓O_2繞圓O_1滾動，使 B 滾動至B'

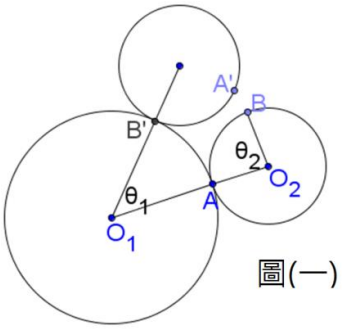
   我們可以將之分成兩個步驟進行，

(步驟一) O_2的圓心先固定，圓O_2自轉圓心角θ_2，使 B 轉至 A 處。

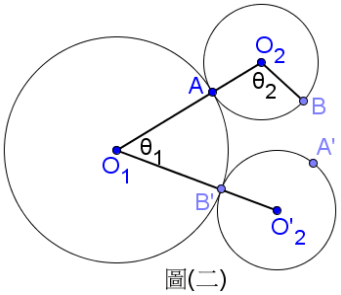
(步驟二)整個圓O_2再對圓O_1**滑動**公轉O_1的圓心角θ_1，使步驟一 B 轉至 A 處後，接著滑動至B'。

這兩個步驟(圓心先固定，圓自轉動，再整個圓滑動公轉)完成後，與“O_2繞圓O_1滾動，使 B 滾動至B'”結果是一樣的。

我們下面【定理三十三】的證明方法，就是將滾動分成兩個步驟(圓心先固定，圓自轉動，再整個圓滑動公轉)來做處理。



圖(一)



圖(二)

2. 承上面第 1 點，如 P.76 圖(一)，第一步驟：圓O_2自轉圓心角θ_2，使 B 轉至 A 處。因為是逆時針轉，所以$\theta_2 > 0$，第二步驟：整個圓O_2再對圓O_1**滑動**公轉O_1的圓心角θ_1，使步驟一 B 轉至 A 處後，接著滑動至B'。由於切點由 A 向B'滑動為逆時針旋轉，這種情形我們規定$\theta_1 > 0$

   如 P.76 圖(二)，第一步驟：圓O_2自轉圓心角θ_2，使 B 轉至 A 處。因為是順時針轉，所以$\theta_2 < 0$，第二步驟：整個圓O_2再對圓O_1**滑動**公轉O_1的圓心角θ_1，使步驟一 B 轉至 A 處後，接著滑動至B'。由於切點由 A 向B'滑動為順時針旋轉，這種情形我們規定$\theta_1 < 0$

   由以上的規定及討論知：圖(一)、圖(二)的θ_1，θ_2必同號，我們可得到【引理三十二】

【引理三十二】

當圓O_2與圓O_1外切，圓O_2繞圓O_1滾動時，設滾過的弧長，對於O_1的圓心角為θ_1，對於O_2的圓心角為θ_2，則θ_1與θ_2必同號

(十) 給入齒輪軌跡的命題並證明

【定理三十三】n 階齒輪圖形參數式

平面上有$2n-1$個圓O_1，O_2，…，O_{2n-1}，半徑分別為r_1，r_2，…，r_{2n-1}。O_3為O_2之同心圓，且O_2與O_1外切；O_5為O_4之同心圓，且O_4與O_3外切；…，O_{2n-1}為O_{2n-2}之同心圓，且O_{2n-2}與O_{2n-3}外切。設O_1之圓心為T_1，且T_1為定點，O_2、O_3之圓心為T_2，O_4、O_5之圓心為T_3，…，O_{2n-2}、O_{2n-1}之圓心為T_n。

令P為圓O_{2n-1}上一點，原本尚未滾動時$\overrightarrow{T_1T_2}$的輻角為$0°$，$\overrightarrow{T_2T_3}$的輻角為α_1，$\overrightarrow{T_3T_4}$的輻角為α_2，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n}$的輻角為$\alpha_{n-2}$，$\overrightarrow{T_nP}$的輻角為$\alpha_{n-1}$。

現讓O_2帶動O_3以相同轉速在O_1上滾動，O_4帶動O_5以相同轉速在O_3上滾動，…，O_{2n-2}帶動O_{2n-1}以相同轉速在O_{2n-3}上滾動。滿足：在相同時間內

O_2滾過O_1的弧長對於T_2的圓心角＝O_4滾過O_3的弧長對於T_2的圓心角

O_4滾過O_3的弧長對於T_3的圓心角＝O_6滾過O_5的弧長對於T_3的圓心角

……

O_{2n-4}滾過O_{2n-5}的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝O_{2n-2}滾過O_{2n-3}的弧長對於T_{n-1}的圓心角

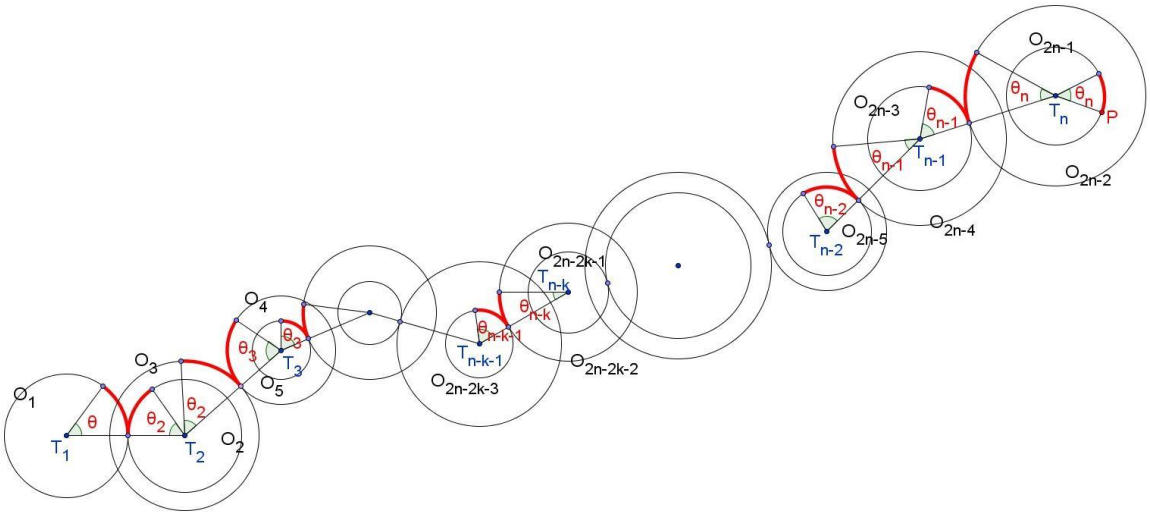
而當中所有的滾動皆為純滾動，也就是接觸面間不會產生相對滑動。設T_1為原點，當O_2帶動O_3以相同轉速在O_1上滾動，$\overrightarrow{T_1T_2}$的輻角由$0°$變為θ，

令$\theta_1=\theta$，$\theta_k=\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2k-3}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2k-2}}\theta$ $(k=2，3，\cdots，n)$，則隨著θ的變動，$P(x，y)$之軌跡為 n 階齒輪圖形，中心是$(0,0)$，且參數式為

$$x=(r_1+r_2)\cos\theta_1+(r_3+r_4)\cos(\theta_1+2\theta_2+\alpha_1)+(r_5+r_6)\cos(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\alpha_2)+\cdots+(r_{2n-3}+r_{2n-2})\cos(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-2})+r_{2n-1}\cos(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha_{n-1})$$

$$y=(r_1+r_2)\sin\theta_1+(r_3+r_4)\sin(\theta_1+2\theta_2+\alpha_1)+(r_5+r_6)\sin(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\alpha_2)+\cdots+(r_{2n-3}+r_{2n-2})\sin(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-2})+r_{2n-1}\sin(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha_{n-1})$$

【證明】



(一)

$\because T_1$為原點

由 n 階齒輪圖形的定義可得知：隨著θ的變動，$P(x，y)$之軌跡為 n 階齒輪圖形，中心是$T_1(0,0)$

(二)

令原本尚未滾動時$\overrightarrow{T_1T_2}=\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{T_2T_3}=\overrightarrow{a_2}$，$\cdots$，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n}=\overrightarrow{a_{n-1}}$，$\overrightarrow{T_nP}=\overrightarrow{a_n}$

而當時$\overrightarrow{T_1T_2}$的輻角為$0°$，$\overrightarrow{T_2T_3}$的輻角為α_1，$\overrightarrow{T_3T_4}$的輻角為α_2，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n}$的輻角為$\alpha_{n-2}$，$\overrightarrow{T_nP}$的輻角為$\alpha_{n-1}$

且$|\overrightarrow{a_1}| = |\overrightarrow{T_1T_2}| = r_1 + r_2$，$|\overrightarrow{a_2}| = |\overrightarrow{T_2T_3}| = r_3 + r_4$，⋯，

$|\overrightarrow{a_{n-1}}| = |\overrightarrow{T_{n-1}T_n}| = r_{2n-3} + r_{2n-2}$，$|\overrightarrow{a_n}| = |\overrightarrow{T_nP}| = r_{2n-1}$

由 P.82【引理三十】知：將向量以極式表示，可得

$\overrightarrow{a_1} = (r_1 + r_2)(\cos 0 + i\sin 0)$，$\overrightarrow{a_2} = (r_3 + r_4)(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$，⋯

$\overrightarrow{a_{n-1}} = (r_{2n-3} + r_{2n-2})\,(\cos\alpha_{n-2} + i\sin\alpha_{n-2})$，$\overrightarrow{a_n} = r_{2n-1}(\cos\alpha_{n-1} + i\sin\alpha_{n-1})$

----------(#)

已知在相同時間內，

O_2滾過O_1的弧長對於T_2的圓心角＝O_4滾過O_3的弧長對於T_2的圓心角

O_4滾過O_3的弧長對於T_3的圓心角＝O_6滾過O_5的弧長對於T_3的圓心角

……

O_{2n-4}滾過O_{2n-5}的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝O_{2n-2}滾過O_{2n-3}的弧長對於T_{n-1}的圓心角

設當O_2帶動O_3以相同轉速在O_1上滾動，$\overrightarrow{T_1T_2}$的輻角由$0°$變為θ時，

O_2滾過O_1的弧長對於T_2的圓心角＝O_4滾過O_3的弧長對於T_2的圓心角＝θ_2

O_4滾過O_3的弧長對於T_3的圓心角＝O_6滾過O_5的弧長對於T_3的圓心角＝θ_3

……

O_{2n-4}滾過O_{2n-5}的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝O_{2n-2}滾過O_{2n-3}的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝θ_{n-1}

O_{2n-2}滾過O_{2n-3}的弧長對於T_n的圓心角為θ_n

則$|r_1\theta| = |r_2\theta_2| = O_2$滾過$O_1$的弧長，由【引理三十二】知：$\theta$，$\theta_2$同號

又r_1，$r_2 > 0$ $\therefore r_1\theta = r_2\theta_2$ 所以$\theta_2 = \frac{r_1}{r_2}\theta$

$|r_3\theta_2| = |r_4\theta_3| = O_4$滾過$O_3$的弧長，同理$\theta_3 = \frac{r_3}{r_4}\theta_2$

$|r_5\theta_3| = |r_6\theta_4| = O_6$滾過$O_5$的弧長，同理$\theta_4 = \frac{r_5}{r_6}\theta_3$

……

$|r_{2n-3}\theta_{n-1}| = |r_{2n-2}\theta_n| = O_{2n-2}$滾過$O_{2n-3}$的弧長，同理$\theta_n = \frac{r_{2n-3}}{r_{2n-2}}\theta_{n-1}$

令$\theta_1 = \theta$，可得遞迴定義$\begin{cases} \theta_2 = \frac{r_1}{r_2}\theta \\ \theta_k = \frac{r_{2k-3}}{r_{2k-2}}\theta_{k-1} \ (k = 2，3，\cdots，n) \end{cases}$

可得$\theta_k = \frac{r_1 r_3 r_5 \cdots r_{2k-3}}{r_2 r_4 r_6 \cdots r_{2k-2}}\theta \ (k = 2，3，\cdots，n)$

----------(##)

原本尚未滾動時$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{T_2T_3} = \overrightarrow{a_2}$，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n} = \overrightarrow{a_{n-1}}$，$\overrightarrow{T_nP} = \overrightarrow{a_n}$

由 P.85 知：滾動可分成兩個步驟(1)圓心先固定，圓自轉動(2)再整個圓滑動公轉，我們用這種方法來證明

1. 首先圓O_{2n-2}帶著O_{2n-1}對圓O_{2n-3}滾動，分解為兩步驟

   (1) 設T_n不動，一開始$\overrightarrow{T_nP} = \overrightarrow{a_n}$，$\overrightarrow{T_nP}$以$T_n$為圓心隨著圓$O_{2n-2}$、$O_{2n-1}$自轉圓心角$\theta_n$後，得$\overrightarrow{T_nP} = R_{\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$

   $\overrightarrow{T_{n-1}P} = \overrightarrow{T_{n-1}T_n} + \overrightarrow{T_nP} = \overrightarrow{a_{n-1}} + R_{\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$

(2) 然後$\overrightarrow{T_{n-1}P}$隨著圓$O_{2n-2}$、$O_{2n-1}$對圓$O_{2n-3}$滑動公轉$T_{n-1}$的圓心角$\theta_{n-1}$後，

得$\overrightarrow{T_{n-1}P} = R_{\theta_{n-1}}\left(\overrightarrow{a_{n-1}} + R_{\theta_n}(\overrightarrow{a_n})\right)$

$= R_{\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}}) + R_{\theta_{n-1}}(R_{\theta_n}(\overrightarrow{a_n}))$

$= R_{\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}}) + R_{\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$ ----------(*)

2. 接著圓O_{2n-4}帶著O_{2n-3}對圓O_{2n-5}滾動，但圓O_{2n-2}、O_{2n-1}會對圓O_{2n-3}滾動，所以會被圓O_{2n-3}帶動。可視為O_{2n-4}、O_{2n-3}、O_{2n-2}、O_{2n-1}構成的整個系統隨著O_{2n-4}對圓O_{2n-5}滾動。分解為兩步驟

(3) 設T_{n-1}不動，$\overrightarrow{T_{n-1}P}$隨著$O_{2n-4}$、$O_{2n-3}$、$O_{2n-2}$、$O_{2n-1}$構成的整個系統，以$T_{n-1}$為圓心自轉圓心角$\theta_{n-1}$後，得

$\overrightarrow{T_{n-1}P} = R_{\theta_{n-1}}\left(R_{\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}}) + R_{\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})\right)$

$= R_{\theta_{n-1}}\left(R_{\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})\right) + R_{\theta_{n-1}}(R_{\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n}))$

$= R_{2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}}) + R_{2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$

$\overrightarrow{T_{n-2}P} = \overrightarrow{T_{n-2}T_{n-1}} + \overrightarrow{T_{n-1}P} = \overrightarrow{a_{n-2}} + R_{2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}}) + R_{2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$

(4) 然後$\overrightarrow{T_{n-2}P}$隨著$O_{2n-4}$、$O_{2n-3}$、$O_{2n-2}$、$O_{2n-1}$構成的整個系統，對圓$O_{2n-5}$滑動公轉$T_{n-2}$的圓心角$\theta_{n-2}$後，得

$\overrightarrow{T_{n-2}P} = R_{\theta_{n-2}}\left(\overrightarrow{a_{n-2}} + R_{2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}}) + R_{2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})\right)$

$= R_{\theta_{n-2}}(\overrightarrow{a_{n-2}}) + R_{\theta_{n-2}+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}}) + R_{\theta_{n-2}+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$ ----------(**)

3. 如此繼續下去，到$\overrightarrow{T_{n-m}P}$時，我們猜測：當$1 \le m \le n-1$，先圓心固定自轉，再滑動公轉後(即圓$O_{2n-2m}$帶著$O_{2n-2m+1}$、$O_{2n-2m+2}$、⋯、$O_{2n-1}$對圓$O_{2n-2m-1}$滾動後)

$\overrightarrow{T_{n-m}P} = R_{\theta_{n-m}}(\overrightarrow{a_{n-m}}) + R_{\theta_{n-m}+2\theta_{n-m+1}}(\overrightarrow{a_{n-m+1}}) + \cdots$

$+R_{\theta_{n-m}+2\theta_{n-m+1}+2\theta_{n-m+2}+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})+R_{\theta_{n-m}+2\theta_{n-m+1}+2\theta_{n-m+2}+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$

用數學歸納法來證明

(1) m=1，2時，由(*)式及(**)式得證

(2) 假設 m=k 時原式成立，即

$$\overrightarrow{T_{n-k}P} = R_{\theta_{n-k}}(\overrightarrow{a_{n-k}}) + R_{\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}}(\overrightarrow{a_{n-k+1}}) + \cdots$$

$$+R_{\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$

$$+R_{\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$$

則 m=k+1 時

圓$O_{2n-2k-2}$帶著圓$O_{2n-2k-1}$、O_{2n-2k}、⋯、O_{2n-1}構成的整個系統對圓$O_{2n-2k-3}$滾動。分

解為兩步驟

(i) 設T_{n-k}不動，$\overrightarrow{T_{n-k}P}$隨著圓$O_{2n-2k-2}$、$O_{2n-2k-1}$、$O_{2n-2k}$、⋯、$O_{2n-1}$構成的整個系統，以$T_{n-k}$為圓心自轉圓心角$\theta_{n-k}$後，得

$$\overrightarrow{T_{n-k}P} = R_{\theta_{n-k}}(R_{\theta_{n-k}}(\overrightarrow{a_{n-k}}) + R_{\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}}(\overrightarrow{a_{n-k+1}}) + \cdots$$

$$+R_{\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$

$$+R_{\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n}))$$

$$= R_{2\theta_{n-k}}(\overrightarrow{a_{n-k}}) + R_{2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}}(\overrightarrow{a_{n-k+1}}) + \cdots$$

$$+R_{2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$

$$+R_{2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$$

$$\therefore \overrightarrow{T_{n-k-1}P} = \overrightarrow{T_{n-k-1}T_{n-k}} + \overrightarrow{T_{n-k}P}$$

$$= \overrightarrow{a_{n-k-1}} + R_{2\theta_{n-k}}(\overrightarrow{a_{n-k}}) + R_{2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}}(\overrightarrow{a_{n-k+1}}) + \cdots$$

$$+R_{2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$

$$+R_{2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$$

(ii) 然後$\overrightarrow{T_{n-k-1}P}$隨著圓$O_{2n-2k-2}$、$O_{2n-2k-1}$、$O_{2n-2k}$、⋯、$O_{2n-1}$構成的整個系統，對圓$O_{2n-2k-3}$滑動公轉$T_{n-k-1}$的圓心角$\theta_{n-k-1}$後，得

$$\overrightarrow{T_{n-k-1}P} = R_{\theta_{n-k-1}}(\overrightarrow{a_{n-k-1}} + R_{2\theta_{n-k}}(\overrightarrow{a_{n-k}})$$

$$+R_{2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}}(\overrightarrow{a_{n-k+1}}) + \cdots$$

$$+R_{2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$

$$+R_{2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n}))$$

$$= R_{\theta_{n-k-1}}(\overrightarrow{a_{n-k-1}}) + R_{\theta_{n-k-1}+2\theta_{n-k}}(\overrightarrow{a_{n-k}})$$

$$+R_{\theta_{n-k-1}+2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}}(\overrightarrow{a_{n-k+1}}) + \cdots$$

$$+R_{\theta_{n-k-1}+2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$

$$+R_{\theta_{n-k-1}+2\theta_{n-k}+2\theta_{n-k+1}+2\theta_{n-k+2}+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$$

m=k+1 時原式也成立

由數學歸納法得證：當$1 \le m \le n-1$

原式$\overrightarrow{T_{n-m}P} = R_{\theta_{n-m}}(\overrightarrow{a_{n-m}}) + R_{\theta_{n-m}+2\theta_{n-m+1}}(\overrightarrow{a_{n-m+1}}) + \cdots$

$$+R_{\theta_{n-m}+2\theta_{n-m+1}+2\theta_{n-m+2}+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$

$$+R_{\theta_{n-m}+2\theta_{n-m+1}+2\theta_{n-m+2}+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$$ 均成立

4. $m = n-1$時，代入上式得

$$\overrightarrow{T_1P} = R_{\theta_1}(\overrightarrow{a_1}) + R_{\theta_1+2\theta_2}(\overrightarrow{a_2}) + \cdots + R_{\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$

$+R_{\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$----------(1)

由 P.89(#)式知

$\overrightarrow{a_1} = (r_1 + r_2)(\cos 0 + i\sin 0)$，$\overrightarrow{a_2} = (r_3 + r_4)(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$，$\cdots$

$\overrightarrow{a_{n-1}} = (r_{2n-3} + r_{2n-2})\,(\cos\alpha_{n-2} + i\sin\alpha_{n-2})$，

$\overrightarrow{a_n} = r_{2n-1}(\cos\alpha_{n-1} + i\sin\alpha_{n-1})$

代入(1)式

$\overrightarrow{T_1P}$

$= R_{\theta_1}(\overrightarrow{a_1}) + R_{\theta_1+2\theta_2}(\overrightarrow{a_2}) + \cdots\ +R_{\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$

$+R_{\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$

$= (r_1 + r_2)(\cos 0 + i\sin 0)\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$+(r_3 + r_4)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_1)\,(\cos(\,\theta_1 + 2\theta_2) + i\sin(\theta_1 + 2\theta_2)) + \cdots$

$+(r_{2n-3} + r_{2n-2})\,(\cos\alpha_{n-2} + i\sin\alpha_{n-2})\,(\cos(\,\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1})$

$+i\sin(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1})) + r_{2n-1}(\cos\alpha_{n-1} + i\sin\alpha_{n-1})$

$(\cos(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n))\ \ +i\sin\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots$

$+2\theta_{n-1} + \theta_n))$

$= (r_1 + r_2)(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$+(r_3 + r_4)(\cos(\,\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_1) + i\sin(\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_1)) + \cdots$

$+(r_{2n-3} + r_{2n-2})(\cos(\,\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1}+\alpha_{n-2}) + i\sin(\theta_1 +$

$2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-2}))$

$+r_{2n-1}(\cos(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_{n-1})\ + i\sin(\theta_1 +$

$2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_{n-1}))$ ----------(2)

又T_1為原點，$P(x,y)$，所以

$\overrightarrow{T_1P} = x + iy$，與(2)式比較實部與虛部，可得

$x = (r_1 + r_2)\cos\theta_1 + (r_3 + r_4)\cos(\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_1) + \cdots$

$+(r_{2n-3} + r_{2n-2})\ \cos(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-2})$

$+r_{2n-1}\cos(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_{n-1})$

$y = (r_1 + r_2)\sin\theta_1 + (r_3 + r_4)\sin(\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_1) + \cdots$

$+(r_{2n-3} + r_{2n-2})\sin(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-2})$

$+r_{2n-1}\sin(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_{n-1})$

由 P.90(##)式知$\theta_1 = \theta$，$\theta_k = \frac{r_1 r_3 r_5 \ldots r_{2k-3}}{r_2 r_4 r_6 \ldots r_{2k-2}}\theta(k = 2，3，\cdots，n)$

得證■

(十一)　在【定理三十三】的命題中，放寬r_1，r_2，…，r_{2n-1}可正可負，讓兩圓可以外切滾動也可以內切滾動的思考過程

在【定理三十三】命題中，r_1，r_2，…，r_{2n-1}表長度必須為正數，更重要的是，【定理三十三】只限於外切滾動的情況。我們很想放寬條件，讓兩圓除了外切滾動外也可以內切滾動，就像內、外次擺線可外切滾動也可內切滾動一樣。為了達成此目標，我們設圓O_1，O_2，…，O_{2n-1}的半徑分別為$|r_1|$，$|r_2|$，…，$|r_{2n-1}|$，允許r_1，r_2，…，r_{2n-1}可以是正數，也可以是負數，但不能為 0。並且作如下的定義

【定義】

設兩圓O_1，O_2相切，半徑分別為$|r_1|$，$|r_2|$，

定義：(1)$r_1r_2>0$時表兩圓外切

(2)$r_1r_2<0$時表兩圓內切

(十二)　r_1，r_2可正可負時，討論兩圓圓心的距離

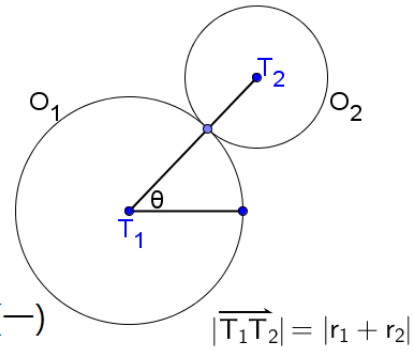
設兩圓O_1，O_2相切，半徑分別為$|r_1|$，$|r_2|$，圓心分別為T_1，T_2，$\overrightarrow{T_1T_2}$輻角為θ

(一)$r_1r_2>0$時，表兩圓O_1，O_2外切，如圖(一)

$|\overrightarrow{T_1T_2}|=|r_1|+|r_2|$

(1)　r_1，$r_2>0$時，$|r_1|+|r_2|=r_1+r_2$

(2)　r_1，$r_2<0$時，$|r_1|+|r_2|=-(r_1+r_2)$



圖(一)

(二) $r_1r_2<0$時，表兩圓O_1，O_2內切，半徑大的在外，半徑小的在內

1.　$|r_1|>|r_2|$時，如圖(二)$|\overrightarrow{T_1T_2}|=|r_1|-|r_2|$

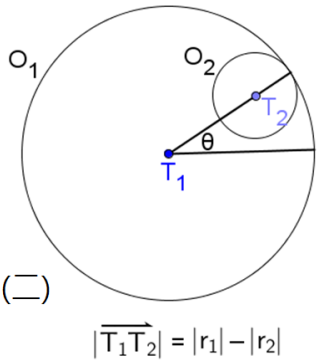
(1)　$r_1>0$，$r_2<0$時

$|\overrightarrow{T_1T_2}|=|r_1|-|r_2|=r_1+r_2$

(2)　$r_1<0$，$r_2>0$時

$|\overrightarrow{T_1T_2}|=|r_1|-|r_2|=-r_1-r_2$

$=-(r_1+r_2)$



圖(二)

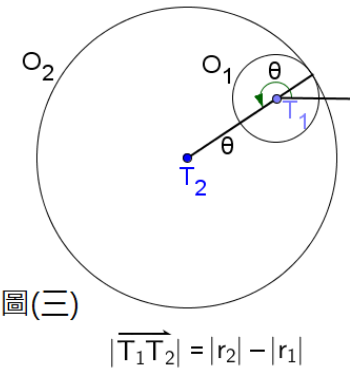
2.　$|r_1|<|r_2|$時，如圖(三) $|\overrightarrow{T_1T_2}|=|r_2|-|r_1|$

(1)　$r_1<0$，$r_2>0$時

$|\overrightarrow{T_1T_2}|=|r_2|-|r_1|=r_2+r_1=r_1+r_2$

(2)　$r_1>0$，$r_2<0$時

$|\overrightarrow{T_1T_2}|=|r_2|-|r_1|=-r_2-r_1=-(r_1+r_2)$



圖(三)

3. $|r_1| = |r_2|$時，圓O_1與圓O_2重合，無法滾動，不合

即$r_1 + r_2 = 0$時無法滾動，是不合的，將之排除在外，不予討論。

綜合上面的討論，我們將r_1，r_2分成六類

(1) r_1，$r_2 > 0$ (2) $|r_1| > |r_2|$且$r_1 > 0$，$r_2 < 0$ (3) $|r_1| < |r_2|$且$r_1 < 0$，$r_2 > 0$

(4) r_1，$r_2 < 0$ (5) $|r_1| > |r_2|$且$r_1 < 0$，$r_2 > 0$ (6) $|r_1| < |r_2|$且$r_1 > 0$，$r_2 < 0$

發現：

當(1)(2)(3)三種情形時，$\left|\overrightarrow{T_1T_2}\right| = r_1 + r_2$

當(4)(5)(6)三種情形時，$\left|\overrightarrow{T_1T_2}\right| = -(r_1 + r_2)$

而(1)(2)(3)三種情形可合併成$r_1 + r_2 > 0$，(4)(5)(6)三種情形可合併成

$r_1 + r_2 < 0$

$\therefore$我們將r_1，r_2分成兩類：$r_1 + r_2 > 0$及$r_1 + r_2 < 0$

當$r_1 + r_2 > 0$時，$\left|\overrightarrow{T_1T_2}\right| = r_1 + r_2$

當$r_1 + r_2 < 0$時，$\left|\overrightarrow{T_1T_2}\right| = -(r_1 + r_2)$

由以上的討論，我們可得到下面的結論

設兩圓O_1，O_2相切，半徑分別為$|r_1|$，$|r_2|$，圓心分別為T_1，T_2，

$r_1r_2 > 0$表兩圓外切，$r_1r_2 < 0$表兩圓內切，則$\left|\overrightarrow{T_1T_2}\right| = |r_1 + r_2|$，

當$\overrightarrow{T_1T_2}$輻角為θ時，則$\overrightarrow{T_1T_2} = (|r_1 + r_2|\cos\theta，|r_1 + r_2|\sin\theta)$

$r_1 + r_2 > 0$時，$\overrightarrow{T_1T_2} = ((r_1 + r_2)\cos\theta，(r_1 + r_2)\sin\theta)$

$r_1 + r_2 < 0$時，$\overrightarrow{T_1T_2} = \left(-(r_1 + r_2)\cos\theta，-(r_1 + r_2)\sin\theta\right)$

$= ((r_1 + r_2)\cos(\pi + \theta)，(r_1 + r_2)\sin(\pi + \theta))$

(十三)　定義兩圓圓心的相對輻角

設兩圓O_1，O_2相切，半徑分別為$|r_1|$，$|r_2|$，圓心分別為T_1，T_2，$\overrightarrow{T_1T_2}$輻角為θ

當$r_1+r_2>0$時，定義$\overrightarrow{T_1T_2}$的相對輻角$\alpha=\theta$

當$r_1+r_2<0$時，定義$\overrightarrow{T_1T_2}$的相對輻角$\alpha=\pi+\theta$

由上面的結論及定義我們可得到【引理三十四】

【引理三十四】

設兩圓O_1，O_2相切，半徑分別為$|r_1|$，$|r_2|$，圓心分別為T_1，T_2，

$r_1r_2>0$表兩圓外切，$r_1r_2<0$表兩圓內切，

$\overrightarrow{T_1T_2}$的相對輻角為α，則$\overrightarrow{T_1T_2}=((r_1+r_2)\cos\alpha，(r_1+r_2)\sin\alpha)$

(十四)　探討r_1，r_2，θ_1，θ_2正負號之間的關係

設兩圓O_1，O_2相切，半徑分別為$|r_1|$，$|r_2|$，$r_1r_2>0$表兩圓外切，$r_1r_2<0$表兩圓內切，

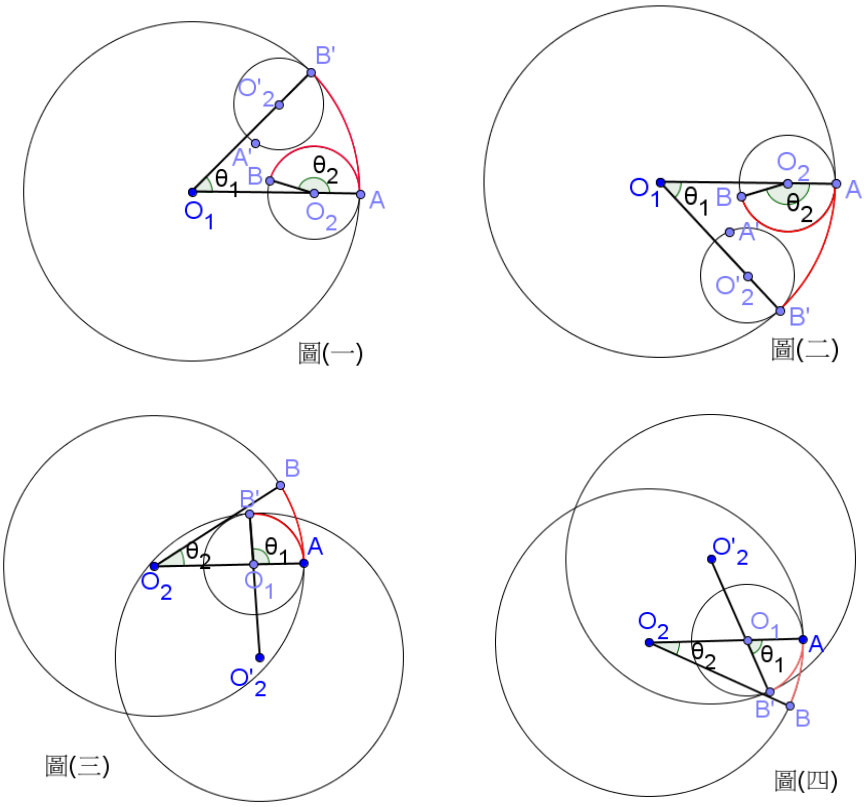
令圓O_2緊貼著圓O_1作不滑動的純滾動，設滾過的弧長，對於O_1的圓心角為θ_1，對於O_2的圓心角為θ_2，其中θ_1，θ_2均為有向角。我們想探討r_1，r_2，θ_1，θ_2正負號之間的關係：

(一)當$r_1r_2>0$時，表兩圓外切，即圓O_2與圓O_1外切，緊貼著圓O_1滾動。此時角度的正負，我們已在 P.87 作規定。由【引理三十二】得知：θ_1，θ_2必同號 $\therefore$ $\theta_1\theta_2>0$

(二)當$r_1r_2<0$時，表兩圓內切，有兩種可能情形，

$|r_1|>|r_2|$時，圓O_2在圓O_1內部，緊貼著圓O_1滾動。如下面圖(一)、圖(二)

$|r_2| > |r_1|$時，圓O_2在圓O_1外部，緊貼著圓O_1滾動。如下面圖(三)、圖(四)此時角度的正負，我們在此規定及說明：



1. 如圖(一)、圖(二)、圖(三)、圖(四)：圓O_2繞圓O_1作不滑動的純滾動，使 B 滾動至B'，我們可以將之分成兩個步驟進行，

   (步驟一) O_2的圓心先固定，圓O_2自轉圓心角θ_2，使 B 轉至 A 處。

   (步驟二)圓O_2再對圓O_1**滑動**公轉O_1的圓心角θ_1，使步驟一 B 轉至 A 處後，接著滑動至B'

   這兩個步驟(圓心先固定，圓自轉動，再整個圓滑動公轉)完成後，與“O_2繞圓O_1滾動，使 B 滾動至B'”結果是一樣的。

2. 承上面第 1 點

(1) 如圖(一)，步驟一：圓O_2自轉圓心角θ_2，使 B 轉至 A 處。因為是順時針轉，所以$\theta_2 < 0$，

步驟二：整個圓O_2再對圓O_1**滑動**公轉O_1的圓心角θ_1，使步驟一 B 轉至 A 處後，接著滑動至B'。由於切點由 A 向B'滑動為逆時針旋轉，這種情形我們規定$\theta_1 > 0$。

(2) 如圖(二)，步驟一：圓O_2自轉圓心角θ_2，使 B 轉至 A 處。因為是逆時針轉，所以$\theta_2 > 0$，

步驟二：整個圓O_2再對圓O_1**滑動**公轉O_1的圓心角θ_1，使步驟一 B 轉至 A 處後，接著滑動至B'。由於切點由 A 向B'滑動為順時針旋轉，這種情形我們規定$\theta_1 < 0$

(3) 如圖(三)，步驟一：圓O_2自轉圓心角θ_2，使 B 轉至 A 處。因為是順時針轉，所以$\theta_2 < 0$，

步驟二：整個圓O_2再對圓O_1**滑動**公轉O_1的圓心角θ_1，使步驟一 B 轉至 A 處後，接著滑動至B'。由於切點由 A 向B'滑動為逆時針旋轉，這種情形我們規定$\theta_1 > 0$

(4) 如圖(四)，步驟一：圓O_2自轉圓心角θ_2，使 B 轉至 A 處。因為是逆時針轉，所以$\theta_2 > 0$，

步驟二：整個圓O_2再對圓O_1**滑動**公轉O_1的圓心角θ_1，使步驟一 B 轉至 A 處後，接著滑動至B'。由於切點由 A 向B'滑動為順時針旋轉，這種情形我們規定$\theta_1 < 0$

我們發現(1)(2)(3)(4)四種情形均滿足$\theta_1\theta_2 < 0$

由上面的規定及討論，我們得到【引理三十五】

【引理三十五】

設圓O_2與圓O_1相切，令圓O_1、圓O_2的半徑分別為$|r_1|$、$|r_2|$。圓O_2繞圓O_1滾動時，設滾過的弧長，對於O_1的圓心角為θ_1，對於O_2的圓心角為θ_2，則

1. $r_1r_2 > 0$時，$\theta_1\theta_2 > 0$

2. $r_1r_2 < 0$時，$\theta_1\theta_2 < 0$

(十五)　把r_1，r_2，…，r_{2n-1}放寬為可正可負，兩圓可內切滾動也可以外切滾動，推廣成【定理三十六】

引進相對輻角之後，我們可以把r_1，r_2，⋯，r_{2n-1}放寬成可正可負，P.87【定理三十三】n 階齒輪圖形參數式可以將它推廣成【定理三十六】

【定理三十六】n 階齒輪圖形參數式(二)

若平面上有$2n-1$個圓O_1，O_2，…，O_{2n-1}，其半徑分別為$|r_1|$，$|r_2|$，…，$|r_{2n-1}|$，其中r_1，r_2，⋯，r_{2n-1}可以為正數或負數，但不為0，而且r_1+r_2，r_3+r_4，⋯，$r_{2n-3}+r_{2n-2}$均不為0，

O_3為O_2之同心圓且O_2與O_1相切，O_5為O_4之同心圓且O_4與O_3相切，…，O_{2n-1}為O_{2n-2}之同心圓且O_{2n-2}與O_{2n-3}相切。O_1之圓心為T_1，T_1為定點，O_2、O_3之圓心為T_2，O_4、O_5之圓心為T_3，…，O_{2n-2}、O_{2n-1}之圓心為T_n。

令P為圓O_{2n-1}上一點，原本尚未滾動時$\overrightarrow{T_1T_2}$的相對輻角為0°，$\overrightarrow{T_2T_3}$的相對輻角為α_1，$\overrightarrow{T_3T_4}$的相對輻角為α_2，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n}$的相對輻角為$\alpha_{n-2}$，$\overrightarrow{T_nP}$的相對輻角為$\alpha_{n-1}$。

現讓O_2帶動O_3以相同轉速在O_1上滾動，O_4帶動O_5以相同轉速在O_3上滾動，…，O_{2n-2}帶動O_{2n-1}以相同轉速在O_{2n-3}上滾動。滿足：在相同時間內

O_2滾過O_1的弧長對於T_2的圓心角＝O_4滾過O_3的弧長對於T_2的圓心角

O_4滾過O_3的弧長對於T_3的圓心角＝O_6滾過O_5的弧長對於T_3的圓心角

……

O_{2n-4}滾過O_{2n-5}的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝O_{2n-2}滾過O_{2n-3}的弧長對於T_{n-1}的圓心角

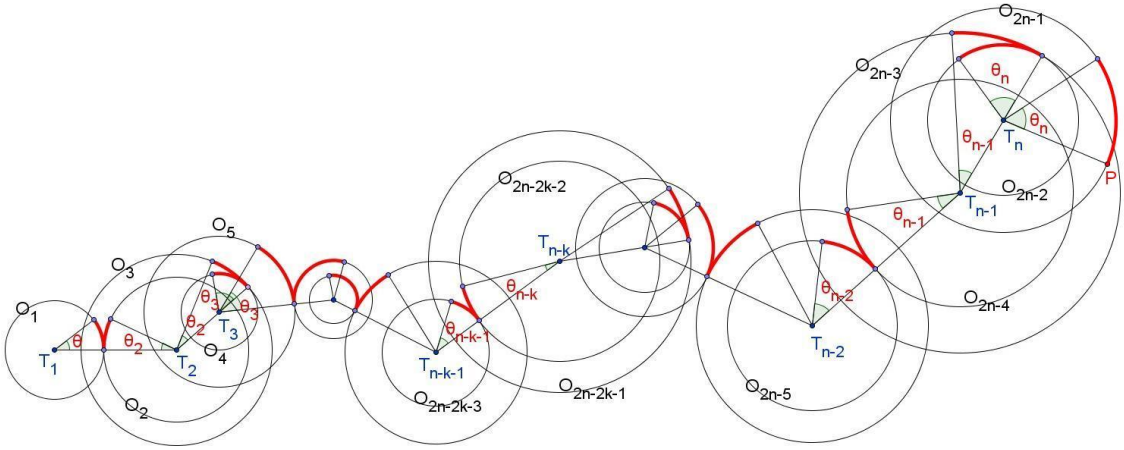
而當中所有的滾動皆為純滾動，也就是接觸面間不會產生相對滑動。設T_1為原點，當O_2帶動O_3以相同轉速在O_1上滾動，$\overrightarrow{T_1T_2}$的相對輻角由$0°$變為θ，

令$\theta_1 = \theta$，$\theta_k = \frac{r_1r_3r_5\ldots r_{2k-3}}{r_2r_4r_6\ldots r_{2k-2}}\theta(k = 2，3，\cdots，n)$，則隨著$\theta$的變動，$P(x，y)$之軌跡為 n 階齒輪圖形，中心是$(0,0)$，且參數式為

$$
\begin{aligned}
x = {} & (r_1 + r_2)\cos\theta_1 + (r_3 + r_4)\cos(\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_1) \\
& +(r_5 + r_6)\cos(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \alpha_2) + \cdots \\
& +(r_{2n-3} + r_{2n-2})\cos(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-2}) \\
& +r_{2n-1}\cos(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_{n-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = {} & (r_1 + r_2)\sin\theta_1 + (r_3 + r_4)\sin(\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_1) \\
& +(r_5 + r_6)\sin(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \alpha_2) + \cdots \\
& +(r_{2n-3} + r_{2n-2})\sin(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-2}) \\
& +r_{2n-1}\sin(\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_{n-1})
\end{aligned}
$$

【證明】



一、由 P.84 n階齒輪圖形的定義知：P(x, y)的軌跡為n階齒輪圖形，中心為$T_1(0,0)$

二、令原本尚未滾動時$\overrightarrow{T_1T_2}=\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{T_2T_3}=\overrightarrow{a_2}$，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n}=\overrightarrow{a_{n-1}}$，$\overrightarrow{T_nP}=\overrightarrow{a_n}$

而當時$\overrightarrow{T_1T_2}$的相對輻角為0°，$\overrightarrow{T_2T_3}$的相對輻角為α_1，$\overrightarrow{T_3T_4}$的相對輻角為α_2，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n}$的相對輻角為$\alpha_{n-2}$，$\overrightarrow{T_nP}$的相對輻角為$\alpha_{n-1}$

由 P.98【引理三十四】知：將向量以極式表示，可得

$\overrightarrow{a_1}=(r_1+r_2)(\cos 0+i\sin 0)$，$\overrightarrow{a_2}=(r_3+r_4)(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$，……，

$\overrightarrow{a_{n-1}}=(r_{2n-3}+r_{2n-2})\,(\cos\alpha_{n-2}+i\sin\alpha_{n-2})$，

$\overrightarrow{a_n}=r_{2n-1}(\cos\alpha_{n-1}+i\sin\alpha_{n-1})$

已知在相同時間內，

O_2滾過O_1的弧長對於T_2的圓心角＝O_4滾過O_3的弧長對於T_2的圓心角

O_4滾過O_3的弧長對於T_3的圓心角＝O_6滾過O_5的弧長對於T_3的圓心角

……

O_{2n-4}滾過O_{2n-5}的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝O_{2n-2}滾過O_{2n-3}的弧長對於T_{n-1}的圓心角

設當O_2帶動O_3以相同角速度在O_1上滾動，$\overrightarrow{T_1T_2}$的輻角由$0°$變為θ時，

O_2滾過O_1的弧長對於T_2的圓心角＝O_4滾過O_3的弧長對於T_2的圓心角＝θ_2

O_4滾過O_3的弧長對於T_3的圓心角＝O_6滾過O_5的弧長對於T_3的圓心角＝θ_3

……

O_{2n-4}滾過O_{2n-5}的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝O_{2n-2}滾過O_{2n-3}的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝θ_{n-1}

O_{2n-2}滾過O_{2n-3}的弧長對於T_n的圓心角為θ_n

則$|r_1\theta| = |r_2\theta_2| = O_2$滾過$O_1$的弧長 $\therefore \frac{|r_1|}{|r_2|} = \frac{|\theta_2|}{|\theta|}$

但由 P.101【引理三十五】知r_1r_2與$\theta\theta_2$同號 $\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta_2}{\theta}$，所以$\theta_2 = \frac{r_1}{r_2}\theta$

$|r_3\theta_2| = |r_4\theta_3| = O_4$滾過$O_3$的弧長，同理$\theta_3 = \frac{r_3}{r_4}\theta_2$

$|r_5\theta_3| = |r_6\theta_4| = O_6$滾過$O_5$的弧長，同理$\theta_4 = \frac{r_5}{r_6}\theta_3$

……

$|r_{2n-3}\theta_{n-1}| = |r_{2n-2}\theta_n| = O_{2n-2}$滾過$O_{2n-3}$的弧長，同理$\theta_n = \frac{r_{2n-3}}{r_{2n-2}}\theta_{n-1}$

令$\theta_1 = \theta$，得遞迴定義$\begin{cases} \theta_2 = \frac{r_1}{r_2}\theta \\ \theta_k = \frac{r_{2k-3}}{r_{2k-2}}\theta_{k-1} \ (k = 2，3，\cdots，n) \end{cases}$

可得$\theta_k = \frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2k-3}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2k-2}}\theta \quad (k = 2，3，\cdots，n)$

其餘，與 P.87【定理三十三】n 階齒輪圖形參數式的證明完全相同　　得證■

備註：

1. 【定理三十三】n 階齒輪圖形參數式只限於外切滾動的情況。【定理三十六】n 階齒輪圖形參數式(二)可內切滾動也可外切滾動，才能真正涵蓋 P.84 n 階齒輪圖形的定義相切滾動所包含的所有狀況。

2. 二階齒輪圖形即是內、外次擺線。(詳見 P.189 的討論)

(十六) n 階行星圖形與 n 階齒輪圖形代表著相同的圖形

我們仔細比對了 n 階行星圖形與 n 階齒輪圖形的參數式及圖形，發現它們是等價且可互換的圖形！我們將這個發現寫成【定理三十七】。

【定理三十七】

設所有 n 階行星圖形所成集合為A，所有 n 階齒輪圖形所成集合為B，

即設 $A=\{\Gamma|\Gamma$ 為 n 階行星圖形$\}$，$B=\{\Gamma|\Gamma$ 為 n 階齒輪圖形$\}$

則(1)$A=B$

(2)同一個圖形，在 n 階行星圖形的定義下，與在 n 階齒輪圖形的定義下，所得到的中心是一樣的

【證明】

為了區隔兩參數式中r_1，r_2，…，r_n的不同，我們將 P.83【定理三十一】參數式中的r_1，r_2，…，r_n以R_1，R_2，…，R_n來表示

1. 設$\Gamma\in A$，由 P.76 n 階行星圖形的定義

   我們可以定坐標，令O_0為原點，一開始$\overrightarrow{O_0O_1}$相對輻角為0°，

   $\therefore\Gamma$中心為(0,0)，由 P.83【定理三十一】知：Γ軌跡參數式可表示成

$x = R_1\cos(\omega_1 t) + R_2\cos(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots + R_{n-1}\cos(\omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-2}) + R_n\cos(\omega_n t + \omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$ ----------(1)

$y = R_1\sin(\omega_1 t) + R_2\sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots + R_{n-1}\sin(\omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-2}) + R_n\sin(\omega_n t + \omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$ ----------(2)

其中R_1，R_2，$\cdots$，$R_n \neq 0$，ω_1，ω_2，$\cdots$，$\omega_n \neq 0$

我們將其換元成【定理三十六】的參數式形式

令$r_1 = \frac{\omega_2}{2\omega_1+\omega_2}R_1$，$r_2 = \frac{2\omega_1}{2\omega_1+\omega_2}R_1$，$r_3 = \frac{\omega_3}{\omega_2+\omega_3}R_2$，$r_4 = \frac{\omega_2}{\omega_2+\omega_3}R_2$，$r_5 = \frac{\omega_4}{\omega_3+\omega_4}R_3$，

$r_6 = \frac{\omega_3}{\omega_3+\omega_4}R_3$，$r_7 = \frac{\omega_5}{\omega_4+\omega_5}R_4$，$r_8 = \frac{\omega_4}{\omega_4+\omega_5}R_4$，$\cdots$，$r_{2n-5} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}+\omega_{n-1}}R_{n-2}$，

$r_{2n-4} = \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-2}+\omega_{n-1}}R_{n-2}$，$r_{2n-3} = \frac{2\omega_n}{\omega_{n-1}+2\omega_n}R_{n-1}$，$r_{2n-2} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-1}+2\omega_n}R_{n-1}$，

$r_{2n-1} = R_n$，$\theta = \omega_1 t$，

則$2 \times \frac{r_1}{r_2}\theta = \frac{2\omega_2}{2\omega_1} \times \omega_1 t = \omega_2 t$ ，

$2 \times \frac{r_1 r_3 r_5 \ldots r_{2k-3}}{r_2 r_4 r_6 \ldots r_{2k-2}}\theta = \frac{2\omega_2}{2\omega_1} \times \frac{\omega_3}{\omega_2} \times \frac{\omega_4}{\omega_3} \times \cdots \times \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}} \times \omega_1 t = \omega_k t$ $(k = 1,2,\cdots,n-1)$，

$$\frac{r_1 r_3 r_5 \ldots r_{2n-3}}{r_2 r_4 r_6 \ldots r_{2n-2}}\theta = \frac{r_1 r_3 r_5 \ldots r_{2n-5} r_{2n-3}}{r_2 r_4 r_6 \ldots r_{2n-4} r_{2n-2}}\theta$$

$$= \frac{\omega_2}{2\omega_1} \times \frac{\omega_3}{\omega_2} \times \frac{\omega_4}{\omega_3} \times \cdots \times \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}} \times \frac{2\omega_n}{\omega_{n-1}} \times \omega_1 t = \omega_n t$$

$r_1 + r_2 = R_1$，$r_3 + r_4 = R_2$，$\cdots$，$r_{2n-3} + r_{2n-2} = R_{n-1}$，$r_{2n-1} = R_n$，$\theta = \omega_1 t$，

$\left(2 \times \frac{r_1}{r_2} + 1\right)\theta = (\omega_2 + \omega_1)t$，$\cdots\cdots$，

$$\left(2 \times \frac{r_1 r_3 r_5 \ldots r_{2n-5}}{r_2 r_4 r_6 \ldots r_{2n-4}} + 2 \times \frac{r_1 r_3 r_5 \ldots r_{2n-7}}{r_2 r_4 r_6 \ldots r_{2n-6}} + \cdots + 2 \times \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} + 2 \times \frac{r_1}{r_2} + 1\right)\theta$$

$$= (\omega_{n-1} + \omega_{n-2} + \cdots + \omega_1)\, t$$

$$\left(\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-3}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-2}}+2\times\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-5}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-4}}+2\times\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-7}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-6}}+\cdots+2\times\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\times\frac{r_1}{r_2}+1\right)\theta$$

$$=(\omega_n+\omega_{n-1}+\cdots+\omega_1)\,t$$

($\because R_1$，R_2，…，$R_n\neq 0$，ω_1，ω_2，…，$\omega_n\neq 0$，$\therefore r_1$，r_2，…，$r_{2n-1}\neq 0$ 且r_1+r_2，r_3+r_4，…，$r_{2n-3}+r_{2n-2}$均不為0)

代入(1)(2)式，得

$$x=(r_1+r_2)\cos\theta+(r_3+r_4)\cos((2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_1)+\cdots+(r_{2n-3}+r_{2n-2})\cos[(2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-5}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-4}}+2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-7}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-6}}+\cdots+2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_{n-2}]+r_{2n-1}\cos[(\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-3}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-2}}+2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-5}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-4}}+2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-7}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-6}}+\cdots+2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_{n-1}]$$

$$y=(r_1+r_2)\sin\theta+(r_3+r_4)\sin((2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_1)+\cdots+(r_{2n-3}+r_{2n-2})\sin[(2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-5}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-4}}+2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-7}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-6}}+\cdots+2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_{n-2}]\ +r_{2n-1}\sin[(\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-3}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-2}}+2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-5}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-4}}+2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-7}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-6}}+\cdots+2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_{n-1}]$$

此即為【定理三十六】所得的參數式形式

$$x=(r_1+r_2)\cos\theta_1+(r_3+r_4)\cos(\theta_1+2\theta_2+\alpha_1)+\cdots$$
$$+(r_{2n-3}+r_{2n-2})\ \cos(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-2})$$
$$+r_{2n-1}\cos(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha_{n-1})$$

$$y=(r_1+r_2)\sin\theta_1+(r_3+r_4)\sin(\theta_1+2\theta_2+\alpha_1)+\cdots$$
$$+(r_{2n-3}+r_{2n-2})\sin(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-2})$$
$$+r_{2n-1}\sin(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha_{n-1})$$

其中$\theta_1=\theta$，$\theta_k=\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2k-3}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2k-2}}\theta$ $(k=2，3，\cdots，n)$

∴Γ也是 n 階齒輪圖形的一種，而且由【定理三十六】知：中心為(0,0)

所以$\Gamma\in B$

∴A是B的子集合，而且兩種定義下的中心均為(0,0) ----------(*)

2. 設$\Gamma\in B$，由 P.84 n 階齒輪圖形的定義

我們可以定坐標，令T_1為原點，一開始原本尚未滾動時$\overrightarrow{T_1T_2}$的輻角為0°，

∴Γ中心為(0,0)，由 P.101【定理三十六】知：Γ軌跡參數式可表示成

$$x=(r_1+r_2)\cos\theta_1+(r_3+r_4)\cos(\theta_1+2\theta_2+\alpha_1)+\cdots$$
$$+(r_{2n-3}+r_{2n-2})\cos(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-2})$$
$$+r_{2n-1}\cos(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha_{n-1})$$

$$y=(r_1+r_2)\sin\theta_1+(r_3+r_4)\sin(\theta_1+2\theta_2+\alpha_1)+\cdots$$
$$+(r_{2n-3}+r_{2n-2})\sin(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-2})$$
$$+r_{2n-1}\sin(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha_{n-1})$$

其中$\theta_1=\theta$，$\theta_k=\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2k-3}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2k-2}}\theta$ $(k=2，3，\cdots，n)$，而且

$r_1，r_2，\cdots，r_{2n-1}\neq 0$且$r_1+r_2$， r_3+r_4，…， $r_{2n-3}+r_{2n-2}$均不為0，即

$$x=(r_1+r_2)\cos\theta+(r_3+r_4)\cos((2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_1)$$
$$+(r_5+r_6)\cos((2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_2)+\cdots+(r_{2n-3}+$$
$$r_{2n-2})\cos[(2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-5}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-4}}+2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-7}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-6}}+\cdots+2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_{n-2}]+$$
$$\cos[(\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-3}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-2}}+2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-5}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-4}}+2\frac{r_1r_3r_5\cdots r_{2n-7}}{r_2r_4r_6\cdots r_{2n-6}}+\cdots+2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+$$
$$\alpha_{n-1}]$$ ----------(3)

$y=(r_1+r_2)\sin\theta+(r_3+r_4)\sin((2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_1)$ $+(r_5+r_6)\sin((2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+$

$2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_2)+\cdots\cdots$

$+(r_{2n-3}+r_{2n-2})\sin[(2\frac{r_1r_3r_5\ldots r_{2n-5}}{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}+2\frac{r_1r_3r_5\ldots r_{2n-7}}{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-6}}+\cdots+2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\frac{r_1}{r_2}+$

$1)\theta+\alpha_{n-2}]$ $+r_{2n-1}\sin[(\frac{r_1r_3r_5\ldots r_{2n-3}}{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}+2\frac{r_1r_3r_5\ldots r_{2n-5}}{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}+2\frac{r_1r_3r_5\ldots r_{2n-7}}{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-6}}+\cdots+$

$2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\frac{r_1}{r_2}+1)\theta+\alpha_{n-1}]$ ----------(4)

我們將其換元成 P.83【定理三十一】的參數式形式

令 $r_1+r_2=R_1$，$r_3+r_4=R_2$，$r_5+r_6=R_3$，…， $r_{2n-3}+r_{2n-2}=R_{n-1}$，$r_{2n-1}=R_n$，$\theta=t$，

$\omega_1=1$，$2\frac{r_1}{r_2}=\omega_2$，$2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}=\omega_3$，…，$2\frac{r_1r_3r_5\ldots r_{2n-5}}{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}=\omega_{n-1}$，$\frac{r_1r_3r_5\ldots r_{2n-3}}{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}=\omega_n$

則$\theta=\omega_1t$，$\left(2\frac{r_1}{r_2}+1\right)\theta=(\omega_2+\omega_1)t$，$\left(2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\frac{r_1}{r_2}+1\right)\theta=(\omega_3+\omega_2+\omega_1)t$，……，

$\left(\frac{r_1r_3r_5\ldots r_{2n-3}}{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}+2\frac{r_1r_3r_5\ldots r_{2n-5}}{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}+2\frac{r_1r_3r_5\ldots r_{2n-7}}{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-6}}+\cdots+2\frac{r_1r_3}{r_2r_4}+2\frac{r_1}{r_2}+1\right)\theta$

$=(\omega_n+\omega_{n-1}+\cdots+\omega_1)\,t$

($\because r_1+r_2, r_3+r_4, \cdots, r_{2n-3}+r_{2n-2}, r_{2n-1}$均不為0 $\therefore R_1$，R_2，…，$R_n\neq 0$)

代入(3)(4)式，得

$x=R_1\cos(\omega_1t)+R_2\cos(\omega_2t+\omega_1t+\alpha_1)+\cdots+R_{n-1}\cos(\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1t+\alpha_{n-2})+R_n\cos(\omega_nt+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1t+\alpha_{n-1})$

$y=R_1\sin(\omega_1t)+R_2\sin(\omega_2t+\omega_1t+\alpha_1)+\cdots+R_{n-1}\sin(\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1t+\alpha_{n-2})+R_n\sin(\omega_nt+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1t+\alpha_{n-1})$

由 P.83【定理三十一】知：Γ也是 n 階行星圖形的一種，而且中心為(0,0)

所以$\Gamma \in A$

$\therefore$B是A的子集合，而且兩種定義下的中心均為(0,0)　　----------(#)

3. 由(*)及(#)知：A是B的子集合而且B是A的子集合，而且兩種定義下的中心是一樣的

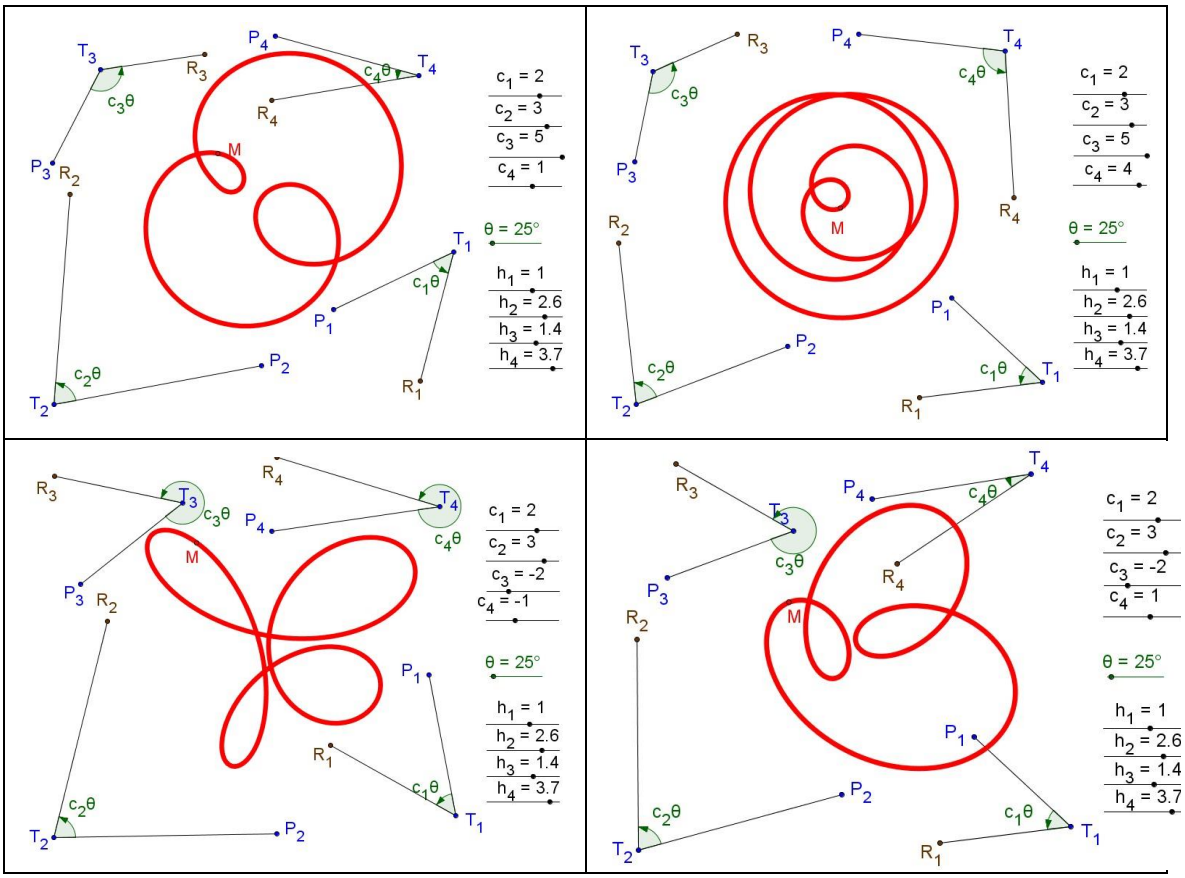
$\therefore A = B$，而且兩種定義下的中心是一樣的，得證■

(十七)　P.73 所提到的操控旋轉角度θ值的 n 種不同倍率時，加權點M的軌跡為 n 階齒輪圖形(也是 n 階行星圖形)

在證明完 n 階行星圖形與 n 階齒輪圖形的等價性後，我們接著探討它們與原本操控旋轉角度θ值的 n 種不同倍率命題的關聯性，並發現加權點M之軌跡即是 n 階齒輪圖形(也是 n 階行星圖形)，我們將這個命題寫成【定理三十八】。

【定理三十八】加權點的 n 階齒輪圖形

設T_1，T_2，⋯，T_n及P_1，P_2，⋯，P_n均為平面上的點，T_k與P_k相異$(k = 1,2,\cdots,n)$。c_1，c_2，⋯，c_n兩兩相異，且均不為 0。今以T_1為旋轉中心將P_1旋轉$c_1\theta$至R_1，以T_2為旋轉中心將P_2旋轉$c_2\theta$至R_2，…，以T_n為旋轉中心將P_n旋轉$c_n\theta$至R_n。設M為R_1，R_2，⋯，R_n分別以h_1，h_2，⋯，h_n為加權倍率所得的加權點，即$M = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，則隨著θ改變，M之軌跡是 n 階齒輪圖形(也是 n 階行星圖形)，中心為$\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k T_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$



(上面四圖為 4 階的圖形)

【證明】

設T_1，T_2，⋯，T_n的坐標分別為

$T_1(a_1,b_1)$，$T_2(a_2,b_2)$，$T_3(a_3,b_3)$，⋯，$T_n(a_n,b_n)$，

P_1，P_2，⋯，P_n的坐標分別為$P_1(p_1,q_1)$，$P_2(p_2,q_2)$，$P_3(p_3,q_3)$，…，$P_n(p_n,q_n)$

令R_1之坐標為(x_1,y_1)，R_2之坐標為(x_2,y_2)，⋯，R_n之坐標為(x_n,y_n)

∵以$T_1(a_1，b_1)$為旋轉中心，將$P_1(p_1，q_1)$旋轉$c_1\theta$得$R_1(x_1,y_1)$點

$$\therefore x_1+iy_1=[(p_1-a_1)+i(q_1-b_1)](\cos c_1\theta+i\sin c_1\theta)+a_1+ib_1$$

$$=\cos c_1\theta\,(p_1-a_1)-\sin c_1\theta\,(q_1-b_1)+a_1$$

$$+i[\sin c_1\theta\,(p_1-a_1)+\cos c_1\theta\,(q_1-b_1)+b_1]$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos c_1\theta\,(p_1 - a_1) - \sin c_1\theta\,(q_1 - b_1) + a_1 \\ \sin c_1\theta\,(p_1 - a_1) + \cos c_1\theta\,(q_1 - b_1) + b_1 \end{bmatrix}$$

$\because$ 以$T_2(a_2$，$b_2)$為旋轉中心，將$P_2(p_2$，$q_2)$旋轉$c_2\theta$得$R_2(x_2$，$y_2)$點，同理可得

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos c_2\theta\,(p_2 - a_2) - \sin c_2\theta\,(q_2 - b_2) + a_2 \\ \sin c_2\theta\,(p_2 - a_2) + \cos c_2\theta\,(q_2 - b_2) + b_2 \end{bmatrix}$$

……

$\because$ 以$T_n(a_n$，$b_n)$為旋轉中心，將$P_n(p_n$，$q_n)$旋轉$c_n\theta$得$R_n(x_n$，$y_n)$點，同理可得

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos c_n\theta\,(p_n - a_n) - \sin c_n\theta\,(q_n - b_n) + a_n \\ \sin c_n\theta\,(p_n - a_n) + \cos c_n\theta\,(q_n - b_n) + b_n \end{bmatrix}$$

$M = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，設M的坐標為$(x, y)$，則

$$x = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k(\cos c_k\theta(p_k - a_k) - \sin c_k\theta(q_k - b_k) + a_k)}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}[h_1(\cos c_1\theta\,(p_1 - a_1) - \sin c_1\theta\,(q_1 - b_1) + a_1) + h_2(\cos c_2\theta\,(p_2 - a_2) - \sin c_2\theta\,(q_2 - b_2) + a_2) + \cdots + h_n(\cos c_n\theta\,(p_n - a_n) - \sin c_n\theta\,(q_n - b_n) + a_n)]$$

----------(1)

$$y = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\sin c_k\theta(p_k - a_k) + \cos c_k\theta(q_k - b_k) + b_k)h_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}[h_1(\sin c_1\theta\,(p_1 - a_1) + \cos c_1\theta\,(q_1 - b_1) + b_1) + h_2(\sin c_2\theta\,(p_2 - a_2) + \cos c_2\theta\,(q_2 - b_2) + b_2) + \cdots + h_n(\sin c_n\theta\,(p_n - a_n) + \cos c_n\theta\,(q_n - b_n) + b_n)]$$

----------(2)

將$(p_k - a_k) + i(q_k - b_k)$以極式表示

令$(p_k - a_k) + i(q_k - b_k) = v_k\,(\cos\delta_k + i\sin\delta_k)$ ，$(k = 1,2,\cdots,n)$

故$p_k - a_k = v_k\cos\delta_k$, $q_k - b_k = v_k\sin\delta_k$，$(k = 1,2,\cdots,n)$

$(\because T_k$與P_k相異$\therefore (a_k, b_k) \neq (p_k, q_k) \therefore p_k - a_k$與$q_k - b_k$不會同時為$0 \therefore v_k \neq 0 (k = 1,2,\cdots,n))$

將$p_k - a_k = v_k \cos\delta_k, q_k - b_k = v_k \sin\delta_k$，代入(1)式，得

$$x = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}[h_1(v_1 \cos\delta_1 \cos c_1\theta - v_1 \sin\delta_1 \sin c_1\theta + a_1) + h_2(v_2 \cos\delta_2 \cos c_2\theta - v_2 \sin\delta_2 \sin c_2\theta + a_2) + \cdots + h_n(v_n \cos\delta_n \cos c_n\theta - v_n \sin\delta_n \sin c_n\theta + a_n)]$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}[h_1(v_1\cos(\delta_1 + c_1\theta) + a_1) + h_2(v_2\cos(\delta_2 + c_2\theta) + a_2) + \cdots + h_n(v_n\cos(\delta_n + c_n\theta) + a_n)]$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}[h_1 v_1 \cos(\delta_1 + c_1\theta) + h_2 v_2 \cos(\delta_2 + c_2\theta) + \cdots + h_n v_n \cos(\delta_n + c_n\theta) + (h_1 a_1 + h_2 a_2 + \cdots + h_n a_n)] \quad \text{----------(3)}$$

將$p_k - a_k = v_k \cos\delta_k, q_k - b_k = v_k \sin\delta_k$，代入(2)式，得

$$y = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}[h_1(v_1 \sin c_1\theta \cos\delta_1 + v_1 \cos c_1\theta \sin\delta_1 + b_1) + h_2(v_2 \sin c_2\theta \cos\delta_2 + v_2 \cos c_2\theta \sin\delta_2 + b_2) + \cdots + h_n(v_n \sin c_n\theta \cos\delta_n + v_n \cos c_n\theta \sin\delta_n + b_n)]$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k} h_1[(v_1\sin(\delta_1 + c_1\theta) + b_1) + h_2(v_2\sin(\delta_2 + c_2\theta) + b_2) + \cdots + h_n(v_n\sin(\delta_n + c_n\theta) + b_n)]$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}[h_1 v_1\sin(\delta_1 + c_1\theta) + h_2 v_2\sin(\delta_2 + c_2\theta) + \cdots + h_n v_n\sin(\delta_n + c_n\theta) + (h_1 b_1 + h_2 b_2 + \cdots + h_n b_n)] \quad \text{----------(4)}$$

令$r_k = \frac{h_k v_k}{\sum_{i=1}^{n} h_i}$，$\beta_k = \delta_k$(k=1，2，⋯，n)，$\omega_1 = c_1$，$\omega_2 = c_2 - c_1$，$\omega_3 = c_3 - c_2$，$\omega_4 = c_4 - c_3$，⋯，$\omega_n = c_n - c_{n-1}$，$t = \theta$

$(\because v_k \neq 0$，$h_k \neq 0 \therefore r_k \neq 0\ (k = 1,2,\cdots,n)$，

$\because c_1$，c_2，$\cdots$，c_n兩兩相異，且均不為 $0 \therefore \omega_1$，ω_2，$\cdots$，$\omega_n \neq 0)$

故$\frac{h_k v_k}{\sum_{i=1}^{n} h_i} = r_k$，$\delta_k = \beta_k (k = 1，2，\cdots，n)$，

$c_1 = \omega_1$，$c_2 = \omega_2 + \omega_1$，$\cdots$，$c_n = \omega_n + \omega_{n-1} + \cdots + \omega_1$，

代入(3)(4)式，得

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1) + r_2 \cos(\omega_2 t + \omega_1 t + \beta_2) + \cdots + r_n \cos(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \beta_n) + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}(h_1 a_1 + h_2 a_2 + \cdots + h_n a_n)$$

$$y = r_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) + r_2 \sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \beta_2) + \cdots + r_n \sin(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \beta_n) + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}(h_1 b_1 + h_2 b_2 + \cdots + h_n b_n)$$

設 M(x,y)的軌跡圖形為 Γ，

將 Γ 平移向量$(-\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}(h_1 a_1 + h_2 a_2 + \cdots + h_n a_n)$，$-\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}(h_1 b_1 + h_2 b_2 + \cdots + h_n b_n))$，設得到圖形$\Gamma'$，則$\Gamma'$的參數式為

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1) + r_2 \cos(\omega_2 t + \omega_1 t + \beta_2) + \cdots + r_n \cos(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \beta_n)$$

$$y = r_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) + r_2 \sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \beta_2) + \cdots + r_n \sin(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \beta_n)$$

接著將Γ'以原點為旋轉中心旋轉$-\beta_1$，設得到圖形Γ''，

則Γ''的參數式為

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t) + r_2 \cos(\omega_2 t + \omega_1 t + \beta_2 - \beta_1) + \cdots + r_n \cos(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \beta_n - \beta_1)$$

$y = r_1 \sin(\omega_1 t) + r_2 \sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \beta_2 - \beta_1) + \cdots + r_n \sin(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \beta_n - \beta_1)$

令$\beta_2 - \beta_1 = \alpha_1$，$\beta_3 - \beta_1 = \alpha_2$，…，$\beta_n - \beta_1 = \alpha_{n-1}$，得

$x = r_1 \cos(\omega_1 t) + r_2 \cos(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots + r_n \cos(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$

$y = r_1 \sin(\omega_1 t) + r_2 \sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots + r_n \sin(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$

由 P.83【定理三十一】知：Γ''為 n 階行星圖形，且中心為(0,0)

$\because \Gamma'$以原點為旋轉中心旋轉$-\beta_1$，得到圖形Γ''

$\therefore \Gamma''$以原點為旋轉中心旋轉β_1可得到Γ'

$\therefore \Gamma'$為 n 階行星圖形，且中心為(0,0)

$\because \Gamma$ 平移向量$(-\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}(h_1 a_1 + h_2 a_2 + \cdots + h_n a_n)$，$-\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}(h_1 b_1 + h_2 b_2 + \cdots + h_n b_n))$，得到圖形$\Gamma'$

$\therefore \Gamma'$平移向量$(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}(h_1 a_1 + h_2 a_2 + \cdots + h_n a_n)$，$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}(h_1 b_1 + h_2 b_2 + \cdots + h_n b_n))$，可得到圖形 Γ

$\therefore$M(x,y)的軌跡圖形 Γ 為 n 階行星圖形，

且中心為$(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}(h_1 a_1 + h_2 a_2 + \cdots + h_n a_n)$，

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}(h_1 b_1 + h_2 b_2 + \cdots + h_n b_n)) = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k T_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

又由【定理三十七】知：M(x,y)的軌跡圖形 Γ 既是 n 階行星圖形，也是 n 階齒輪圖形，且中心為$\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k T_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$　得證■

(十八)　將【定理三十八】延伸至廣義的情況

現在我們將命題延伸至廣義的情況，讓每一個旋轉倍率都有許多組旋轉在進行，也就是有m_1組旋轉的旋轉角度倍率為$c_1\theta$，有m_2組旋轉的旋轉角度倍率為$c_2\theta$，…，有m_n組旋轉的旋轉角度倍率為$c_n\theta$，並且旋轉後加入伸縮。我們發現加權點 M 的軌跡仍然是 n 階齒輪圖形(也是 n 階行星圖形)，寫成【定理三十九】。

【定理三十九】加權點的 n 階齒輪圖形(二)

設$P_{1\,1}, P_{1\,2}, \cdots, P_{1\,m_1}, P_{2\,1}, P_{2\,2}, \cdots, P_{2\,m_2}, \cdots\cdots, P_{n\,1}, P_{n\,2}, \cdots, P_{n\,m_n}$及

$T_{1\,1}, T_{1\,2}, \cdots, T_{1\,m_1}, T_{2\,1}, T_{2\,2}, \cdots, T_{2\,m_2}, \cdots\cdots, T_{n\,1}, T_{n\,2}, \cdots, T_{n\,m_n}$均為平面上的定點，

以$T_{1\,k}$為旋轉中心，將$P_{1\,k}$旋轉$c_1\theta + a_{1\,k}$，再伸縮$s_{1\,k}$倍得$R_{1\,k}$點$(k = 1,2,\cdots,m_1)$；

以$T_{2\,k}$為旋轉中心，將$P_{2\,k}$旋轉$c_2\theta + a_{2\,k}$，再伸縮$s_{2\,k}$倍得$R_{2\,k}$點$(k = 1,2,\cdots,m_2)$；

……

以$T_{n\,k}$為旋轉中心，將$P_{n\,k}$旋轉$c_n\theta + a_{n\,k}$，再伸縮$s_{n\,k}$倍得$R_{n\,k}$點$(k = 1,2,\cdots,m_n)$，

設 M 為 $R_{1\,1}, R_{1\,2}, \cdots, R_{1\,m_1}, R_{2\,1}, R_{2\,2}, \cdots, R_{2\,m_2}, \cdots\cdots, R_{n\,1}, R_{n\,2}, \cdots, R_{n\,m_n}$分別以 $h_{1\,1}, h_{1\,2}, \cdots, h_{1\,m_1}, h_{2\,1}, h_{2\,2}, \cdots, h_{2\,m_2}, \cdots, h_{n\,1}, h_{n\,2}, \cdots, h_{n\,m_n}$為加權倍率得到的加權點，

M'為 $T_{1\,1}, T_{1\,2}, \cdots, T_{1\,m_1}, T_{2\,1}, T_{2\,2}, \cdots, T_{2\,m_2}, \cdots\cdots, T_{n\,1}, T_{n\,2}, \cdots, T_{n\,m_n}$分別以 $h_{1\,1}, h_{1\,2}, \cdots, h_{1\,m_1}, h_{2\,1}, h_{2\,2}, \cdots, h_{2\,m_2}, \cdots, h_{n\,1}, h_{n\,2}, \cdots, h_{n\,m_n}$為加權倍率得到的加權點，

則隨著θ改變，M 點軌跡為 n 階齒輪圖形(也是 n 階行星圖形)，中心為M'

【證明】

令

$R_{1\,1}, R_{1\,2}, \cdots, R_{1\,m_1}$

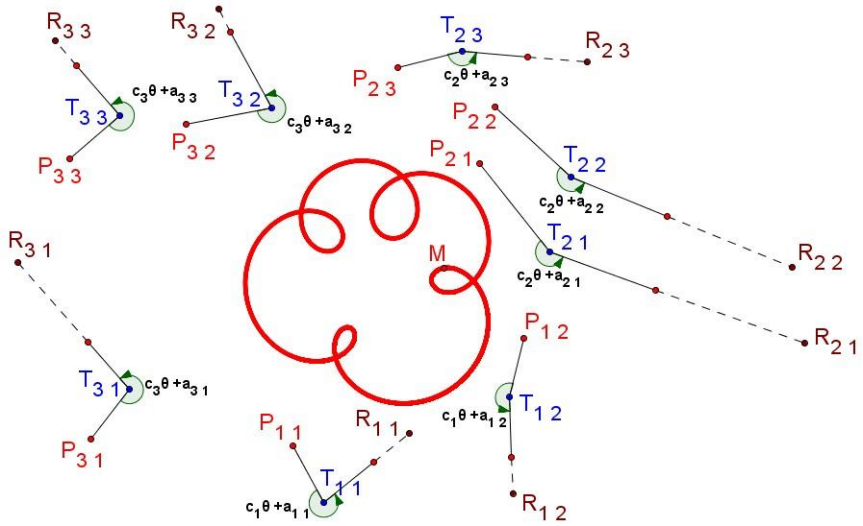
分別以

$h_{1\,1}, h_{1\,2}, \cdots, h_{1\,m_1}$

為加權倍率得到

的加權點為R_1'，

$R_{2\,1}, R_{2\,2}, \cdots, R_{2\,m_2}$



分別以$h_{2\,1}, h_{2\,2}, \cdots, h_{2\,m_2}$為加權倍率得到的加權點為$R_2$'，

……

$R_{n\,1}, R_{n\,2}, \cdots, R_{n\,m_n}$分別以$h_{n\,1}, h_{n\,2}, \cdots, h_{n\,m_n}$為加權倍率得到的加權點為$R_n$'

令$T_{1\,1}, T_{1\,2}, \cdots, T_{1\,m_1}$分別以$h_{1\,1}, h_{1\,2}, \cdots, h_{1\,m_1}$為加權倍率得到的加權點為$T_1$'，

$T_{2\,1}, T_{2\,2}, \cdots, T_{2\,m_2}$分別以$h_{2\,1}, h_{2\,2}, \cdots, h_{2\,m_2}$為加權倍率得到的加權點為$T_2$'，

……

$T_{n\,1}, T_{n\,2}, \cdots, T_{n\,m_n}$分別以$h_{n\,1}, h_{n\,2}, \cdots, h_{n\,m_n}$為加權倍率得到的加權點為$T_n$'

$\because$M 為 $R_{1\,1}, R_{1\,2}, \cdots, R_{1\,m_1}, R_{2\,1}, R_{2\,2}, \cdots, R_{2\,m_2}, \cdots\cdots, R_{n\,1}, R_{n\,2}, \cdots, R_{n\,m_n}$分別以

$h_{1\,1}, h_{1\,2}, \cdots, h_{1\,m_1}, h_{2\,1}, h_{2\,2}, \cdots, h_{2\,m_2}, \cdots, h_{n\,1}, h_{n\,2}, \cdots, h_{n\,m_n}$為加權倍率得到的加權點，所以

$$M = \frac{\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k}R_{1k} + \sum_{k=1}^{m_2} h_{2k}R_{2k} + \cdots + \sum_{k=1}^{m_n} h_{nk}R_{nk}}{\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k} + \sum_{k=1}^{m_2} h_{2k} + \cdots + \sum_{k=1}^{m_n} h_{nk}}$$

設$\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k} = h_{1\,1} + h_{1\,2} + \cdots + h_{1\,m_1} = h_1$ ，

$\sum_{k=1}^{m_2} h_{2k} = h_{2\,1} + h_{2\,2} + \cdots + h_{2\,m_2} = h_2$

……

$\sum_{k=1}^{m_n} h_{nk} = h_{n\,1} + h_{n\,2} + \cdots + h_{n\,m_n} = h_n$

則將$R_1', R_2', \cdots, R_n'$分別以$h_1, h_2, \cdots, h_n$為加權倍率得到的加權點為

$$\frac{h_1R_1' + h_2R_2' + \cdots + h_nR_n'}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}$$

$$= \frac{\left(\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k}\right) \times \frac{\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k}R_{1k}}{\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k}} + \left(\sum_{k=1}^{m_2} h_{2k}\right) \times \frac{\sum_{k=1}^{m_2} h_{2k}R_{2k}}{\sum_{k=1}^{m_2} h_{2k}} + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{m_n} h_{nk}\right) \times \frac{\sum_{k=1}^{m_n} h_{nk}R_{nk}}{\sum_{k=1}^{m_n} h_{nk}}}{\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k} + \sum_{k=1}^{m_2} h_{2k} + \cdots + \sum_{k=1}^{m_n} h_{nk}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k}R_{1k} + \sum_{k=1}^{m_2} h_{2k}R_{2k} + \cdots + \sum_{k=1}^{m_n} h_{nk}R_{nk}}{\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k} + \sum_{k=1}^{m_2} h_{2k} + \cdots + \sum_{k=1}^{m_n} h_{nk}} = M$$

$\therefore$將$R_1', R_2', \cdots, R_n'$分別以$h_1, h_2, \cdots, h_n$為加權倍率得到的加權點為 M

----------(1)

$\because M'$為 $T_{1\,1}, T_{1\,2}, \cdots, T_{1\,m_1}, T_{2\,1}, T_{2\,2}, \cdots, T_{2\,m_2}, \cdots\cdots, T_{n\,1}, T_{n\,2}, \cdots, T_{n\,m_n}$分別以 $h_{1\,1}, h_{1\,2}, \cdots, h_{1\,m_1}, h_{2\,1}, h_{2\,2}, \cdots, h_{2\,m_2}, \cdots, h_{n\,1}, h_{n\,2}, \cdots, h_{n\,m_n}$為加權倍率得到的加權點

同理，將$T_1', T_2', \cdots, T_n'$分別以$h_1, h_2, \cdots, h_n$為加權倍率得到的加權點為M'

----------(2)

$\because$以$T_{1\,k}$為旋轉中心，將$P_{1\,k}$旋轉$c_1\theta + a_{1\,k}$，再伸縮s_{1k}倍得$R_{1\,k}$點$(k = 1,2,\cdots,m_1)$

由 P.44【定理二十一】加權點繞圓問題(二)知

在平面中必能找到一定點P_1'，滿足以T_1'為旋轉中心，將P_1'旋轉$c_1\theta$角可得到點R_1'。

$\because$以$T_{2\,k}$為旋轉中心，將$P_{2\,k}$旋轉$c_2\theta + a_{2\,k}$，再伸縮s_{2k}倍得$R_{2\,k}$點$(k = 1,2,\cdots,m_2)$

同理，在平面中必能找到一定點P_2'，滿足以T_2'為旋轉中心，將P_2'旋轉$c_2\theta$角可得到點R_2'。

……

$\because$ 以$T_{n\,k}$為旋轉中心，將$P_{n\,k}$旋轉$c_n\theta + a_{n\,k}$，再伸縮s_{nk}倍得$R_{n\,k}$點$(k = 1,2,\cdots,m_n)$

同理，在平面中必能找到一定點P_n'，滿足以T_n'為旋轉中心，將P_n'旋轉$c_n\theta$角可得到點R_n'。

由上面的討論可得知：

以T_1'為旋轉中心，將P_1'旋轉$c_1\theta$角可得到點R_1'；以T_2'為旋轉中心，將P_2'旋轉$c_2\theta$角可得到點R_2'；…；以T_n'為旋轉中心，將P_n'旋轉$c_n\theta$角可得到點R_n'

----------(3)

又由(1)(2)知

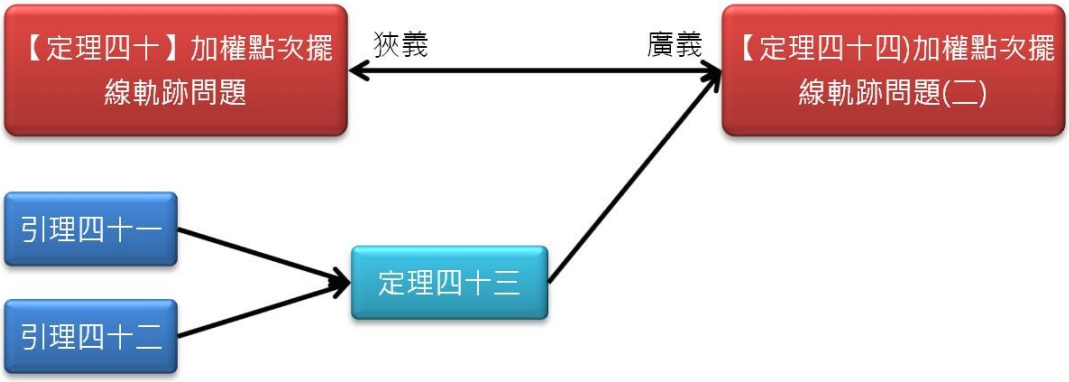
將$R_1', R_2', \cdots, R_n'$分別以$h_1, h_2, \cdots, h_n$為加權倍率得到的加權點為 M

將$T_1', T_2', \cdots, T_n'$分別以$h_1, h_2, \cdots, h_n$為加權倍率得到的加權點為M'

由【定理三十八】知：

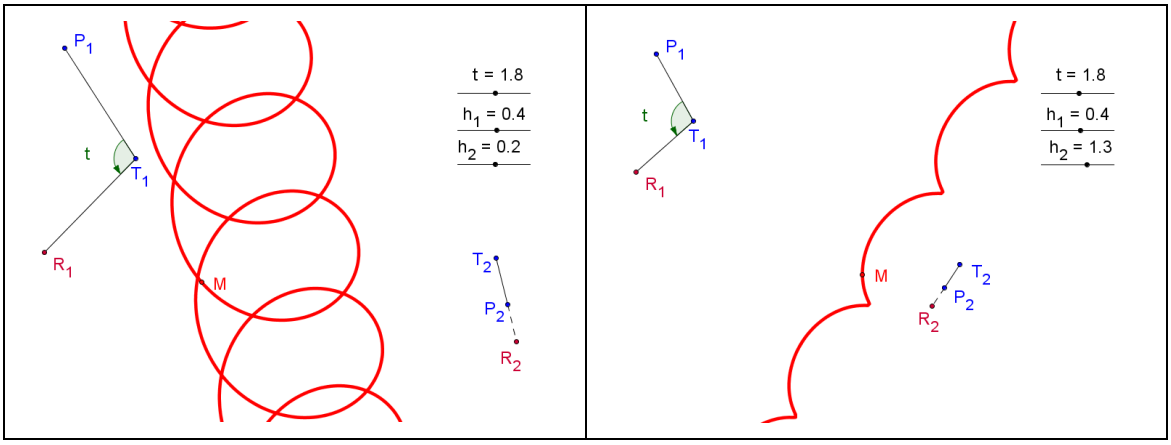
隨著θ變化，M之軌跡為 n 階齒輪圖形(也是 n 階行星圖形)，且中心為M'　　得證■

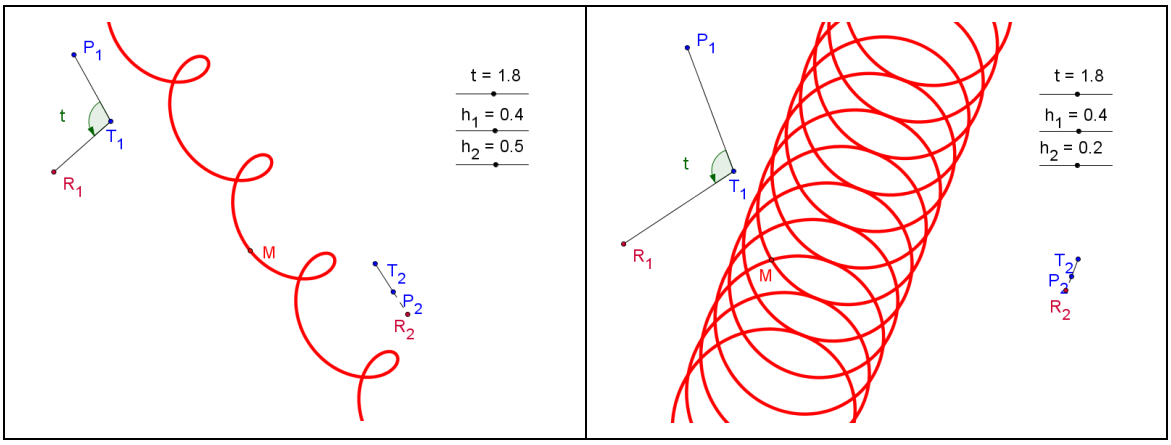
七、 加權點的次擺線軌跡問題



(一) 一組旋轉及一組伸縮，加權點的軌跡是次擺線

在研究完操控各種旋轉角度倍率時，所得到加權點 M 的不同軌跡後，我們想到，如果在命題中不只有旋轉，除了旋轉後伸縮之外，若還加入一組純伸縮時會發生甚麼事？因此我們將最簡單的形式在 Geogebra 上作圖並研究其軌跡，也就是平面上有四點T_1，T_2與 P_1，P_2，其中一組旋轉 t 角(以T_1為旋轉中心，將P_1旋轉 t 角)，另外一組伸縮 t 倍(以T_2為伸縮中心，將P_2伸縮 t 倍)，再將得到的兩個點作加權得到 M。經過觀察並查閱資料後，我們發現 M 點隨著 t 改變時軌跡會是數學上的「次擺線」，如圖所示。我們著手證明，證出之後將它寫成【定理四十】。

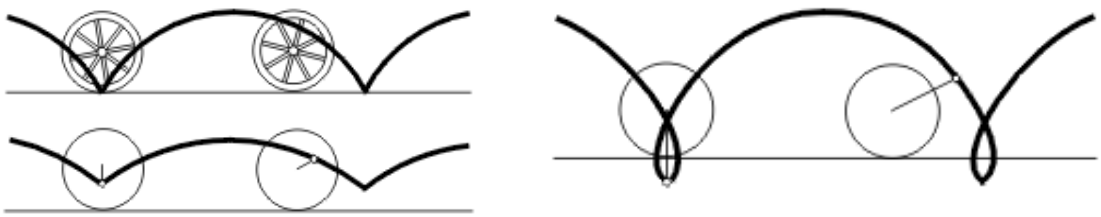




(二) 介紹次擺線

證明【定理四十】之前，我們先介紹次擺線的定義：

當一個圓在一直線上作不滑動的純滾動時，圓周上的一個定點所形成的軌跡稱為「擺線」(cycloid)；圓內部的一個定點所形成的軌跡稱為短擺線(curtate cycloid)；圓外部的一個定點所形成的軌跡稱為長擺線 (prolate cycloid)。短擺線與長擺線合稱為次擺線(trochoid，見下圖）



次擺線的參數式為$\begin{cases} x = r(t - \lambda \sin t) \\ y = r(1 - \lambda \cos t) \end{cases}$ $t \in R$ (其中r，$\lambda > 0$)

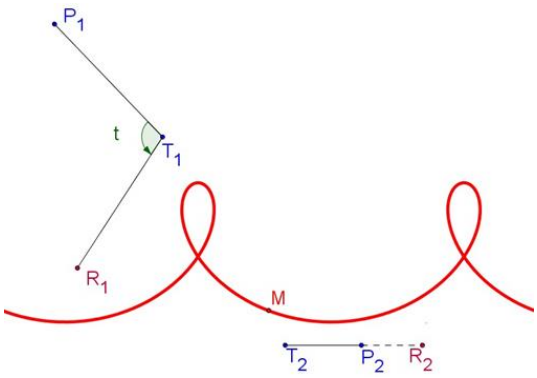
($\lambda = 1$時為擺線，我們在【定理四十】命題中視擺線為次擺線的一種特殊狀況，不另作討論)

(三) 將一組旋轉及一組伸縮的次擺線軌跡問題，寫成【定理四十】並證明之

【定理四十】加權點次擺線軌跡問題

設T_1，T_2，P_1，P_2為平面上四個點，其中T_1，P_1相異，T_2，P_2相異。以T_1為旋轉中心，將P_1旋轉t角得到R_1，以 T_2為伸縮中心將P_2伸縮t倍得到R_2。設 M 為將R_1，R_2 分別以h_1，h_2為加權倍率得到的加權點，即$M=\frac{h_1R_1+h_2R_2}{h_1+h_2}$，則隨著t的變化，M之軌跡為次擺線。

【證明】



將圖形坐標化，定x軸，y軸。我們選取x軸使之平行$\overline{T_2P_2}$，令T_1，T_2，P_1，P_2坐標分別為

$T_1(a_1,b_1)$，$T_2(a_2,b_2)$，$P_1(p_1,q_1)$，$P_2(p_2,q_2)$

$\because$x軸平行$\overline{T_2P_2}$

$\therefore b_2=q_2$

$\because$以T_1為旋轉中心，將P_1旋轉t角可得R_1，

設R_1坐標為(x_1,y_1)

$$\therefore x_1+iy_1=[(p_1-a_1)+i(q_1-b_1)](\cos t+i\sin t)+a_1+ib_1$$

$$=(p_1-a_1)\cos t-(q_1-b_1)\sin t+a_1+i[(p_1-a_1)\sin t+(q_1-b_1)\cos t+b_1]$$

$\therefore R_1$坐標為$\left((p_1-a_1)\cos t-(q_1-b_1)\sin t+a_1，(p_1-a_1)\sin t+(q_1-b_1)\cos t+b_1\right)$

以T_2為伸縮中心，將P_2點伸縮t倍，得到點R_2，

$\therefore \overrightarrow{T_2R_2} = t\,\overrightarrow{T_2P_2}$，令$R_2$坐標為$(x_2, y_2)$

則$(x_2 - a_2, y_2 - b_2) = t(p_2 - a_2, q_2 - b_2) = t(p_2 - a_2, 0)(\because b_2 = q_2)$

$\therefore x_2 = t(p_2 - a_2) + a_2$，$y_2 = b_2$

$\therefore R_2$坐標為$\left((p_2 - a_2)t + a_2，b_2\right)$

$M = \frac{h_1R_1 + h_2R_2}{h_1 + h_2}$ ，令$M(x, y)$

則$x = \frac{1}{h_1+h_2}\left(h_1\left((p_1 - a_1)\cos t - (q_1 - b_1)\sin t + a_1\right) + h_2\left((p_2 - a_2)t + a_2\right)\right)$

$= \frac{h_1}{h_1+h_2}\left((p_1 - a_1)\cos t - (q_1 - b_1)\sin t + a_1\right) + \frac{h_2}{h_1+h_2}\left((p_2 - a_2)t + a_2\right)$

$= \frac{h_1}{h_1+h_2}(p_1 - a_1)\cos t - \frac{h_1}{h_1+h_2}(q_1 - b_1)\sin t + \frac{h_1}{h_1+h_2}a_1 + \frac{h_2}{h_1+h_2}(p_2 - a_2)t$

$+ \frac{h_2}{h_1+h_2}a_2$-----(1)

$y = \frac{1}{h_1+h_2}\left(h_1\left((p_1 - a_1)\sin t + (q_1 - b_1)\cos t + b_1\right) + h_2b_2\right)$

$= \frac{h_1}{h_1+h_2}\left((p_1 - a_1)\sin t + (q_1 - b_1)\cos t + b_1\right) + \frac{h_2}{h_1+h_2}b_2$

$= \frac{h_1}{h_1+h_2}(p_1 - a_1)\sin t + \frac{h_1}{h_1+h_2}(q_1 - b_1)\cos t + \frac{h_1}{h_1+h_2}b_1 + \frac{h_2}{h_1+h_2}b_2$ ----------(2)

將$\frac{h_1}{h_1+h_2}(q_1 - b_1) + i\frac{h_1}{h_1+h_2}(p_1 - a_1)$ 表示成極式

令$\frac{h_1}{h_1+h_2}(q_1 - b_1) + i\frac{h_1}{h_1+h_2}(p_1 - a_1) = s(\cos\delta + i\sin\delta)$

$= -s(\cos(\pi + \delta) + i\sin(\pi + \delta))$

其中$s > 0$

令$-\frac{h_2}{h_1+h_2}(p_2-a_2)=r$ ， ----------(3)

因為$T_2(a_2,b_2)$，$P_2(p_2,q_2)$為相異兩點，且$b_2=q_2$，$\therefore a_2\neq p_2$，$\therefore r\neq 0$

當$r>0$時，取$v=-s<0$，令$\alpha=\pi+\delta$

當$r<0$時，取$v=s>0$，令$\alpha=\delta$

則$\frac{h_1}{h_1+h_2}(q_1-b_1)+i\frac{h_1}{h_1+h_2}(p_1-a_1)=v(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$\therefore\frac{h_1}{h_1+h_2}(q_1-b_1)=v\cos\alpha$ ， $\frac{h_1}{h_1+h_2}(p_1-a_1)=v\sin\alpha$ ----------(*)

令 $\lambda=-\frac{v}{r}$，則$\lambda>0$ ----------(4)

將(*)代入(1)(2)兩式，得

$$x=v\sin\alpha\cos t-v\cos\alpha\sin t+\frac{h_1}{h_1+h_2}a_1+\frac{h_2}{h_1+h_2}(p_2-a_2)t+\frac{h_2}{h_1+h_2}a_2$$

$$y=v\sin\alpha\sin t+v\cos\alpha\cos t+\frac{h_1}{h_1+h_2}b_1+\frac{h_2}{h_1+h_2}b_2$$

化簡得

$$x=v\sin(\alpha-t)+\frac{h_1}{h_1+h_2}a_1+\frac{h_2}{h_1+h_2}(p_2-a_2)t+\frac{h_2}{h_1+h_2}a_2$$

$$y=v\cos(\alpha-t)+\frac{h_1}{h_1+h_2}b_1+\frac{h_2}{h_1+h_2}b_2$$

令$t'=\alpha-t$ $\therefore t=\alpha-t'$，代入上面兩式，得

$$x=v\sin t'+\frac{h_1}{h_1+h_2}a_1+\frac{h_2}{h_1+h_2}(p_2-a_2)\alpha-\frac{h_2}{h_1+h_2}(p_2-a_2)t'+\frac{h_2}{h_1+h_2}a_2 \text{----------(5)}$$

$$y=v\cos t'+\frac{h_1}{h_1+h_2}b_1+\frac{h_2}{h_1+h_2}b_2 \text{----------(6)}$$

由(3)(4)式知：$-\frac{h_2}{h_1+h_2}(p_2-a_2)=r$，$\lambda=-\frac{v}{r}$　$\therefore v=-\lambda r$

代入(5)(6)兩式，得

$$x=-r\lambda\sin t'+\frac{h_1}{h_1+h_2}a_1+\frac{h_2}{h_1+h_2}(p_2-a_2)\alpha+r\,t'+\frac{h_2}{h_1+h_2}a_2$$

$$y=-r\lambda\cos t'+\frac{h_1}{h_1+h_2}b_1+\frac{h_2}{h_1+h_2}b_2$$

設$M(x,y)$軌跡圖形為 Γ，

將 Γ 平移向量$\left(-\frac{h_1}{h_1+h_2}a_1-\frac{h_2}{h_1+h_2}(p_2-a_2)\alpha-\frac{h_2}{h_1+h_2}a_2,-\frac{h_1}{h_1+h_2}b_1-\frac{h_2}{h_1+h_2}b_2+r\right)$，

設得到圖形Γ'，則Γ'參數式為

$$\begin{cases}x=-r\lambda\sin t'+r\,t'=r(t'-\lambda\sin t')\\ y=-r\lambda\cos t'+r=r(1-\lambda\cos t')\end{cases}$$

即Γ'：$\begin{cases}x=r(t'-\lambda\sin t')\\ y=r(1-\lambda\cos t')\end{cases}$ ----------(#)

1. 當$r>0$時

   此即為次擺線的形式

   $\therefore\Gamma'$圖形為次擺線

   又Γ'經過平移可得$M(x,y)$的軌跡圖形 Γ

   $\therefore\Gamma$ 圖形也為次擺線

2. 當$r<0$時，令$r'=-r$，則$r'>0$，將$r=-r'$代入(#)，得

   Γ'：$\begin{cases}x=-r'(t'-\lambda\sin t')\\ y=-r'(1-\lambda\cos t')\end{cases}$

   由於Γ'：$\begin{cases}x=-r'(t'-\lambda\sin t')\\ y=-r'(1-\lambda\cos t')\end{cases}$ 與 Γ''：$\begin{cases}x=r'(t'-\lambda\sin t')\\ y=r'(1-\lambda\cos t')\end{cases}$ 兩圖形對稱於

   (0,0)

Γ''圖形為次擺線，而Γ'為Γ''的點對稱圖形

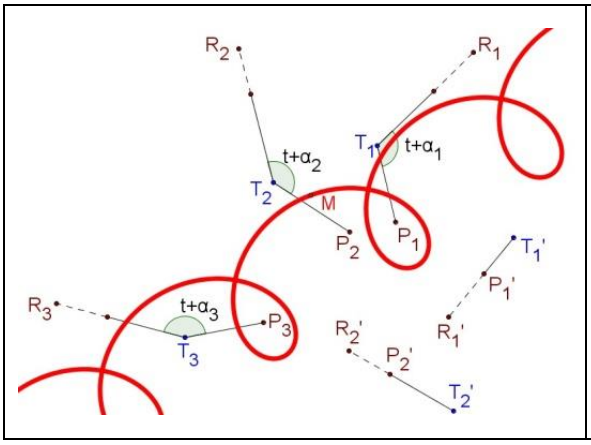
$\therefore \Gamma'$圖形也為次擺線

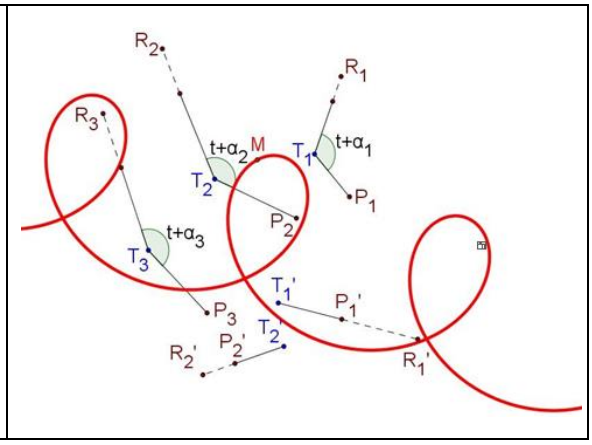
又Γ'經過平移可得$M(x,y)$的軌跡圖形Γ

$\therefore \Gamma$ 圖形也為次擺線，得證■

(四) 將【定理四十】推廣成多組旋轉及多組伸縮，加權點的軌跡仍是次擺線

我們將命題延伸，如果一組旋轉變成多組旋轉(並且加入旋轉後伸縮)，一組純伸縮也變成多組純伸縮(每一組伸縮倍率都不同)時，最後得到的加權點 M 的軌跡會是怎樣呢?我們猜測它有可能仍然會是次擺線，利用Geogebra測試之後證實我們的猜測是正確的(如下面兩圖)，我們將它寫成【定理四十四】放在 P.131





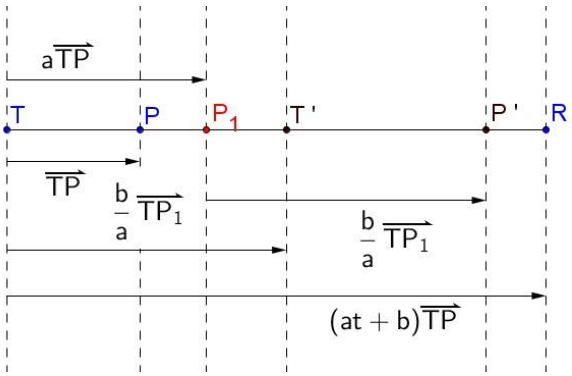
(五) 證明中會用到的引理

在開始證明【定理四十四】之前，我們先介紹兩個引理及一個定理，來輔助之後的證明。

【引理四十一】

設 P，T為平面上兩點，以T為伸縮中心，將P伸縮$(at+b)$倍得到R點(其中$a \neq 0$)則平面中必能找到兩點P'，T'，以T'為伸縮中心，將P'伸縮t倍可得R點，而且P'，T'與 t 無關，不會隨著t的改變而改變

【證明】



設以T為伸縮中心，將P伸縮a倍得P_1點

$\therefore \overrightarrow{TP_1} = a\overrightarrow{TP}$

$\because$以T為伸縮中心，將P伸縮$(at+b)$倍可得R點

$\therefore \overrightarrow{TR} = (at+b)\overrightarrow{TP} = \left(t+\frac{b}{a}\right)a\overrightarrow{TP} = \left(t+\frac{b}{a}\right)\overrightarrow{TP_1}$

取P'，T'兩點，使得$\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{P_1P'} = \frac{b}{a}\overrightarrow{TP_1}$，

其中P'，T'的選取只與T，P_1，a，b有關，與 t 無關。而P_1的選取與T，P，a有關，也與 t 無關

所以P'，T'的選取與 t 無關，不會隨著 t 的改變而改變----------(*)

$\because \overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{P_1P'}$　$\therefore \overrightarrow{OT'} - \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP_1}$　$\therefore \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OT'}$

$\therefore \overrightarrow{TP_1} = \overrightarrow{T'P'}$，即$\overrightarrow{T'P'} = \overrightarrow{TP_1}$

設以T'為伸縮中心，將P'伸縮 t 倍可得R'點　$\therefore \overrightarrow{T'R'} = t\,\overrightarrow{T'P'}$

則$\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TT'} + \overrightarrow{T'R'} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TT'} + t\,\overrightarrow{T'P'} = \overrightarrow{OT} + \frac{b}{a}\overrightarrow{TP_1} + t\,\overrightarrow{TP_1}$

$= \overrightarrow{OT} + \left(t+\frac{b}{a}\right)\overrightarrow{TP_1} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TR} = \overrightarrow{OR}$

$\therefore R'$與R是同一點

$\therefore$以T'為伸縮中心，將P'伸縮t倍可得R點，而由(*)知P'，T'的選取與 t 無關，不會隨著 t 的改變而改變，得證■

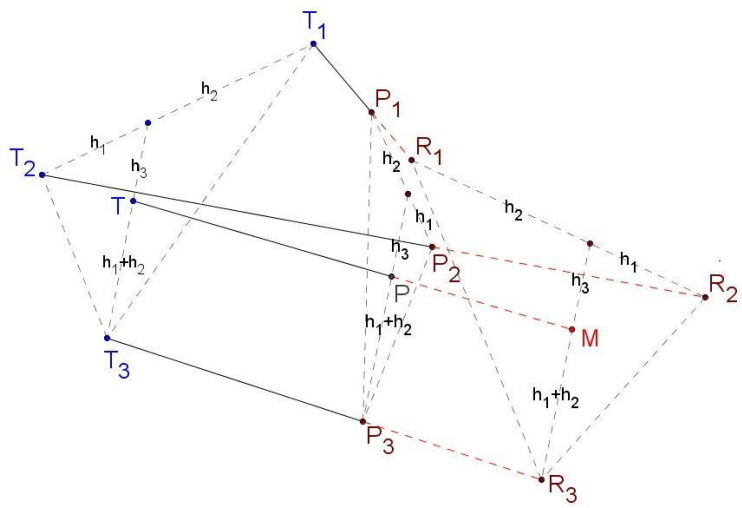
【引理四十二】

設T_1，T_2，…，T_n，P_1，P_2，…，P_n均為平面上的點，以T_1為伸縮中心，將P_1伸縮t倍得到R_1，以T_2為伸縮中心，將P_2伸縮t倍得到R_2，…，以T_n為伸縮中心，將P_n伸縮t倍得到R_n。

設h_1，h_2，…，$h_n \neq 0$，令$M = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，$P = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k P_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，$T = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k T_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，

則以T為伸縮中心，將P伸縮t倍可得 M 點

【證明】



∵以T_1為伸縮中心，將P_1伸縮t倍，可得R_1

$\therefore \overrightarrow{T_1R_1} = t\overrightarrow{T_1P_1}$

令 O 為原點

$\therefore \overrightarrow{OR_1} - \overrightarrow{OT_1} = t(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OT_1})$

即$\overrightarrow{OR_1} = t(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OT_1}) + \overrightarrow{OT_1}$，

同理$\overrightarrow{OR_2} = t(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OT_2}) + \overrightarrow{OT_2}$，⋯，$\overrightarrow{OR_n} = t(\overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OT_n}) + \overrightarrow{OT_n}$

我們簡寫成

$R_1 = t(P_1 - T_1) + T_1$，$R_2 = t(P_2 - T_2) + T_2$，…，$R_n = t(P_n - T_n) + T_n$

$M = \frac{h_1R_1 + h_2R_2 + \cdots + h_nR_n}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}$

$= \frac{h_1t(P_1 - T_1) + h_1T_1 + h_2t(P_2 - T_2) + h_2T_2 + \cdots + h_nt(P_n - T_n) + h_nT_n}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}$

$$=\frac{h_1P_1t-h_1T_1t+h_1T_1+h_2P_2t-h_2T_2t+h_2T_2+\cdots+h_nP_nt-h_nT_nt+h_nT_n}{h_1+h_2+\cdots+h_n}$$

$$=\frac{h_1P_1t+h_2P_2t+\cdots+h_nP_nt-h_1T_1t-h_2T_2t-\cdots-h_nT_nt+h_1T_1+h_2T_2+\cdots+h_nT_n}{h_1+h_2+\cdots+h_n}$$

$$=\frac{h_1P_1+h_2P_2+\cdots+h_nP_n}{h_1+h_2+\cdots+h_n}t-\frac{h_1T_1+h_2T_2+\cdots+h_nT_n}{h_1+h_2+\cdots+h_n}t+\frac{h_1T_1+h_2T_2+\cdots+h_nT_n}{h_1+h_2+\cdots+h_n}$$

$\because P=\frac{h_1P_1+h_2P_2+\cdots+h_nP_n}{h_1+h_2+\cdots+h_n}$，$T=\frac{h_1T_1+h_2T_2+\cdots+h_nT_n}{h_1+h_2+\cdots+h_n}$

$M=Pt-Tt+T=(P-T)t+T$

$\therefore M-T=t(P-T)$

即$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OT}=t\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OT}\right)$

$\therefore\overrightarrow{TM}=t\overrightarrow{TP}$

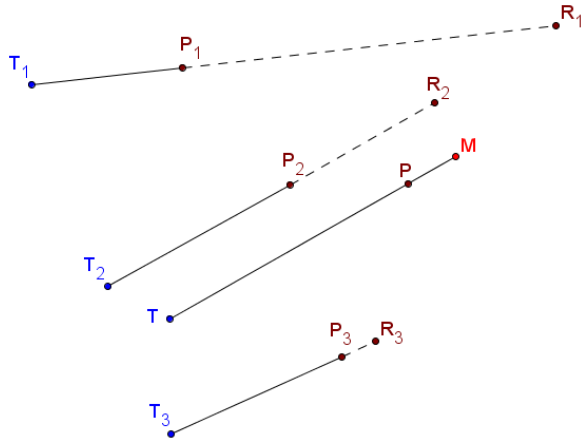
∴以T為伸縮中心，將P伸縮t倍可得 M 點

得證■

【定理四十三】

設T_1，T_2，…，T_n，P_1，P_2，…，P_n均為平面上的點，a_1，a_2，⋯，$a_n\neq 0$，以T_1為伸縮中心，將P_1伸縮(a_1t+b_1)倍，得到R_1，以T_2為伸縮中心，將P_2伸縮(a_2t+b_2)倍，得到R_2，…，以T_n為伸縮中心，將P_n伸縮(a_nt+b_n)倍，得到R_n。設 M 為將R_1，R_2，…，R_n分別以h_1，h_2，…，h_n為加權倍率得到的加權點，即$M=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kR_k}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$，則在平面中必能找到兩點P，T，以T為伸縮中心，將P伸縮t倍可得 M 點，而且P，T與t無關，不會隨著t的改變而改變

【證明】



∵以T_1為伸縮中心，將P_1伸縮(a_1t+b_1)倍，可得R_1

由【引理四十一】知

在平面上必能找到T_1'，P_1'，以T_1'為伸縮中心，將P_1'伸縮t倍可得R_1，且T_1'，P_1'與 t 無關

∵以T_2為伸縮中心，將P_2伸縮(a_2t+b_2)倍，可得R_2，同理

在平面中必能找到T_2'，P_2'，以T_2'為伸縮中心，將P_2'伸縮t倍可得R_2，且T_2'，P_2'與 t 無關

……

∵以T_n為伸縮中心，將P_n伸縮(a_nt+b_n)倍，可得R_n，同理

在平面中必能找到T_n'，P_n'，以T_n'為伸縮中心，將P_n'伸縮t倍可得R_n，且T_n'，P_n'與 t 無關

∴以T_1'為伸縮中心，將P_1'伸縮t倍可得R_1，以T_2'為伸縮中心，將P_2'伸縮t倍可得R_2，…，以T_n'為伸縮中心，將P_n'伸縮t倍可得R_n

已知$M=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kR_k}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$，令$P=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kP_k'}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$，$T=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kT_k'}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$

由【引理四十二】知

以T為伸縮中心，將P伸縮t倍可得 M 點。

因為T_1'，T_2'，…，T_n'，P_1'，P_2'，…，P_n'均與 t 無關

∴P，T與t無關，不會隨著t的改變而改變

得證■

(六) 證明 P.126 所提到的【定理四十四】加權點次擺線軌跡問題(二)

【定理四十四】加權點次擺線軌跡問題(二)

T_1，T_2，⋯，T_n，P_1， P_2，⋯，P_n，T_1'，T_2'，⋯，T_m'，P_1'，P_2'，⋯，P_m'均為平面上的點，

以T_k為旋轉中心，將P_k旋轉$(t+\alpha_k)$，再伸縮s_k倍得到R_k點$(k=1，2，⋯，n)$，

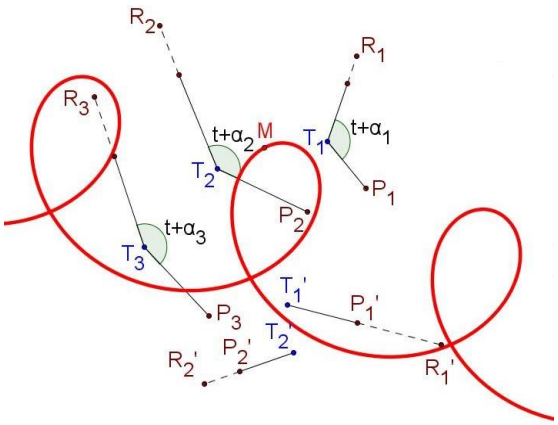
以T_k'為伸縮中心，將P_k'伸縮$(a_k t+b_k)$倍得到R_k'點$(k=1，2，⋯，m)$。

設 M 為將R_1 ，R_2，⋯，R_n， R_1'，R_2'，⋯，R_m'分別以

h_1 ，h_2，⋯，h_n，h_1'， h_2'，⋯，h_m'

為加權倍率得到的加權點，則隨著t的變化，M之軌跡為次擺線。

【證明】



令R為將R_1 ，R_2，⋯，R_n分別以

h_1 ，h_2，⋯，h_n為加權倍率得到的加權點

令R'為將R_1'，R_2'，⋯，R_m'分別以

h_1'， h_2'，⋯，h_m'為加權倍率得到的加權點

即$R=\frac{h_1R_1+h_2R_2+\cdots+h_nR_n}{h_1+h_2+\cdots+h_n}$ ，$R'=\frac{h_1'R_1'+h_2'R_2'+\cdots+h_m'R_m'}{h_1'+h_2'+\cdots+h_m'}$

令$h_1+h_2+\cdots+h_n=h$， $h_1'+h_2'+\cdots+h_m'=h'$

則將R，R′分別以 h，h′為加權倍率得到的加權點

$$=\frac{hR+h'R'}{h+h'}=\frac{h_1R_1+h_2R_2+\cdots+h_nR_n+h'_1R'_1+h'_2R'_2+\cdots+h'_mR'_m}{h_1+h_2+\cdots+h_n+h'_1+h'_2+\cdots+h'_m}=M$$

∴將R，R′分別以 h，h′為加權倍率得到的加權點為 M

∵以T_k為旋轉中心，將P_k旋轉$(t+\alpha_k)$，再伸縮s_k倍得到R_k點$(k=1，2，\cdots，n)$

又R為將R_1，R_2，⋯，R_n分別以h_1，h_2，⋯，h_n為加權倍率得到的加權點

由 P.44【定理二十一】知：

在平面上必能找到兩定點 P，T，以T為旋轉中心，將P旋轉 t 可得R點 ----------(1)

∵以T'_k為伸縮中心，將P'_k伸縮$(a_k t+b_k)$得到R'_k點$(k=1，2，\cdots，m)$

又R′為將R'_1，R'_2，⋯，R'_m分別以h'_1，h'_2，⋯，h'_m為加權倍率得到的加權點

由【定理四十三】知：

在平面上必能找到兩點P′，T′，以T′為伸縮中心，將P′伸縮t倍可得R′點 ----------(2)

由(1)(2)知

以T為旋轉中心，將P旋轉 t 可得R點；以T′為伸縮中心，將P′伸縮t倍可得R′點

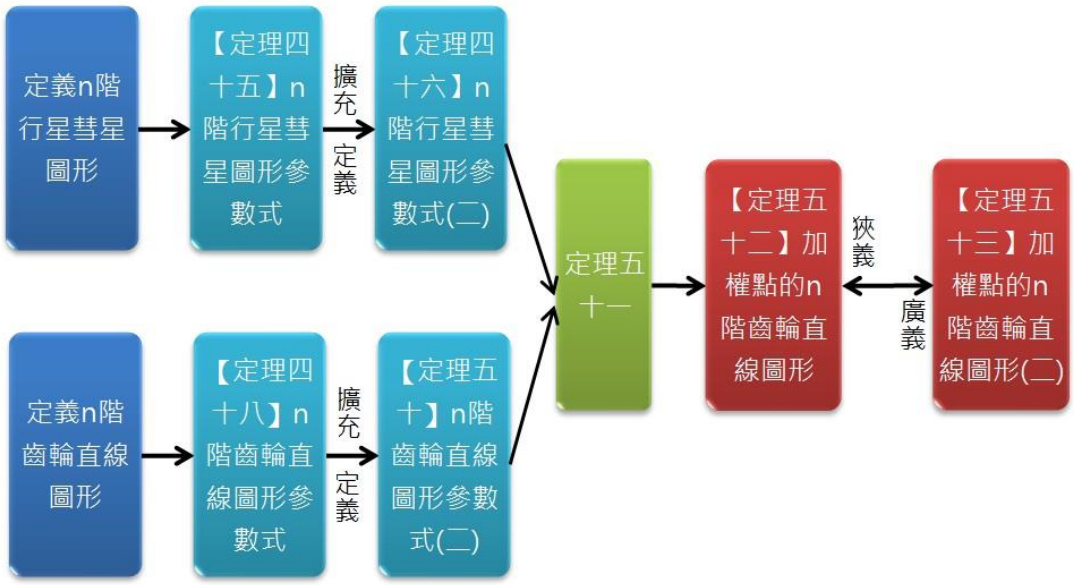
又M為將R，R′分別以 h，h′為加權倍率得到的加權點

由 P.122【定理四十】知：

隨著t變化，M點的軌跡為次擺線

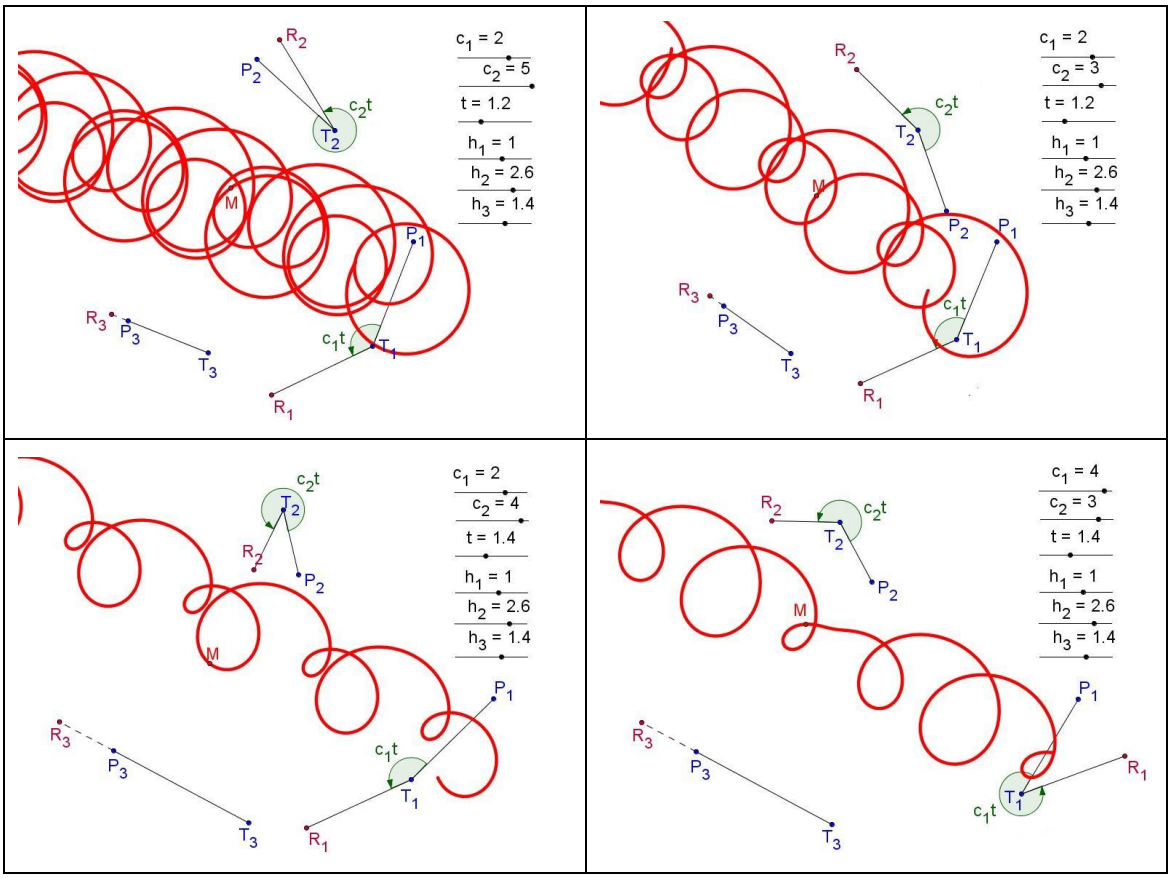
得證■

八、 n 階行星彗星圖形與 n 階齒輪直線圖形



(一) 操控旋轉角度內t值的 n 種不同倍率再加上一組伸縮

我們在【定理四十】的命題中，只考慮到一組旋轉再加上一組純伸縮的情況，並發現得到的加權點 M 的軌跡會是次擺線。現在我們想，若讓命題以 n 階齒輪命題的方式延伸，旋轉的部分改為操控旋轉角度內 t 值的 n 種倍率(c_1，c_2，…，c_n)，也就是以T_1為旋轉中心，將P_1旋轉c_1t至R_1；以T_2為旋轉中心，將P_2旋轉c_2t至R_2；…；以T_n為旋轉中心，將P_n旋轉c_nt至R_n，並將伸縮的部分移至第 n+1 組的兩點P_{n+1}與T_{n+1}，以T_{n+1}為伸縮中心，將P_{n+1}伸縮t倍至R_{n+1}，再將R_{n+1}與R_1，R_2，…，R_n作加權得到加權點 M，隨t變動時 M 的移動軌跡又會是怎樣呢？我們用 Geogebra 畫出如下的圖形：



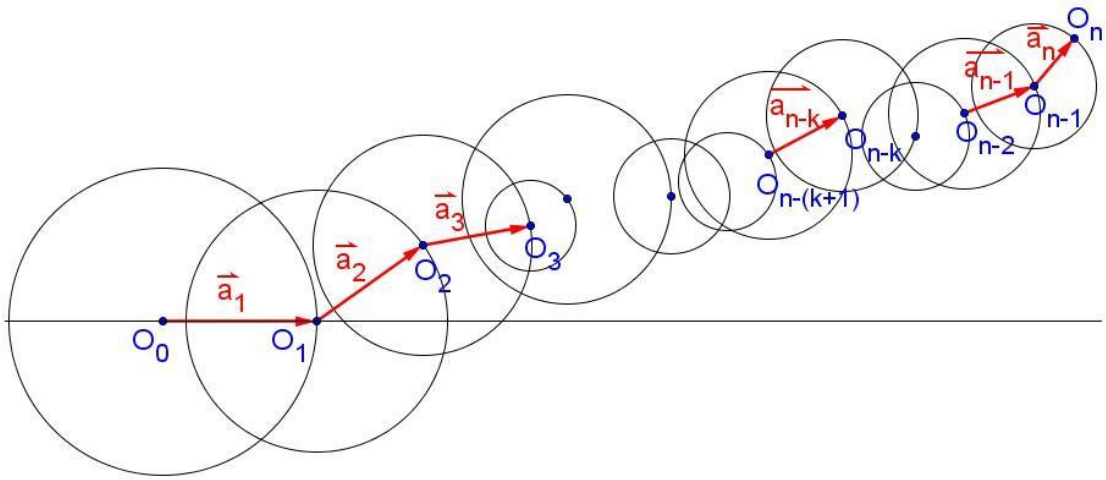
(二) 齒輪直線圖形及行星彗星繞行的思考過程

我們在想：R_1，R_2，…，R_n與 P.110【定理三十八】加權點的 n 階齒輪圖形的情形是一樣的，圖形是 n 階齒輪圖形(也是 n 階行星圖形)，加了一組純伸縮之後呢？純伸縮得到的圖形是直線，所以R_{n+1}與R_1，R_2，…，R_n作加權得到加權點 M 的軌跡，會不會是 n 組齒輪在直線上滾動時最外層齒輪上一點的軌跡呢？又會不會是 n 階行星繞行命題中，O_0由原本的定點改成做直線運動時，最外層行星的軌跡呢？我們於是著手研究及證明，寫成【定理四十五】及【定理四十八】，探討它們的軌跡及參數式，並進而研究它們與我們命題的關聯性，寫成【定理五十二】放在 P.164。

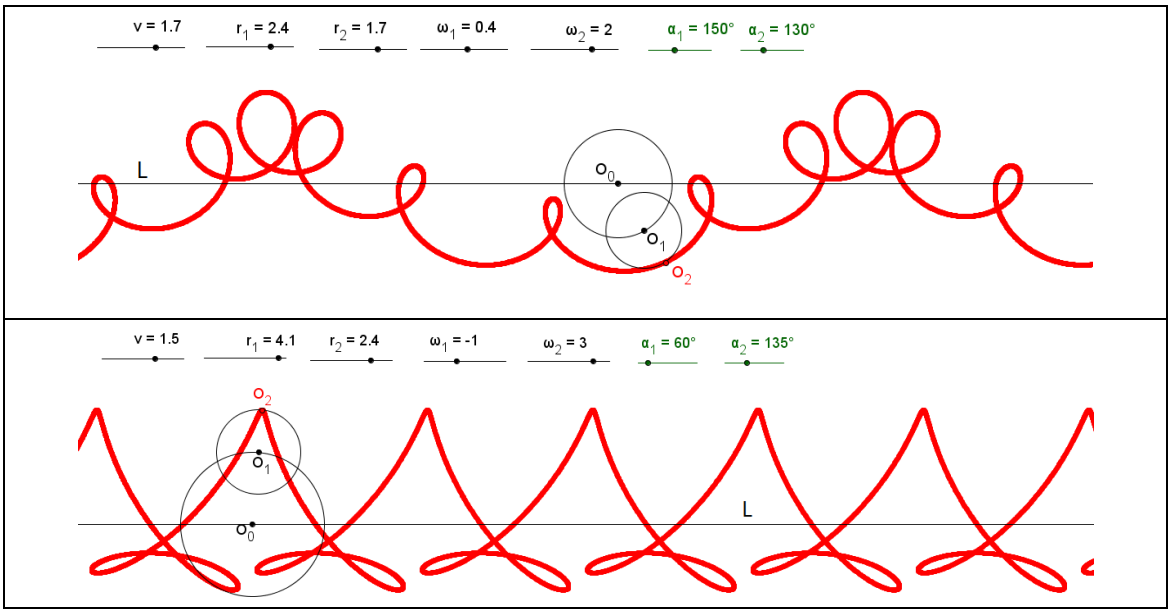
我們先研究行星彗星繞行的軌跡，不過在開始推導證明之前，先給入一個定義，以方便表示後面的命題。

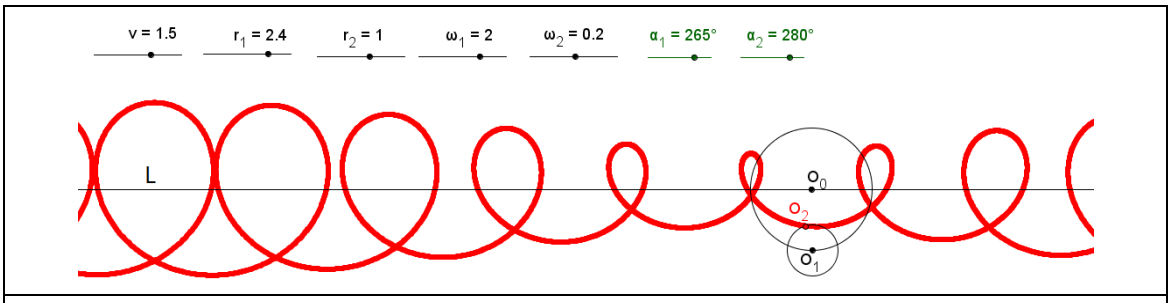
(三) 定義 n 階行星彗星圖形及準線

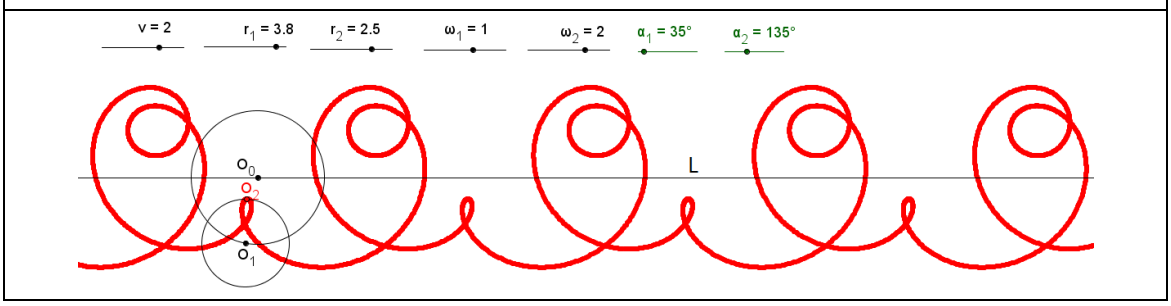
若平面上有$n+1$個點O_0，O_1，O_2，…，O_n。設一開始O_0，O_1在直線 L 上，然後O_0以等速在 L 上直線前進，而O_1相對於 O_0作等速圓周運動，O_2相對於O_1作等速圓周運動，⋯ ，O_n相對於O_{n-1}作等速圓周運動，則O_n的軌跡稱為 n 階行星彗星圖形，而O_0等速直線前進的軌跡(即直線 L)稱為此圖形的準線



下面四個圖是我們用 Geogebra 畫出來的 2 階行星彗星圖形







(四) 證明【定理四十五】

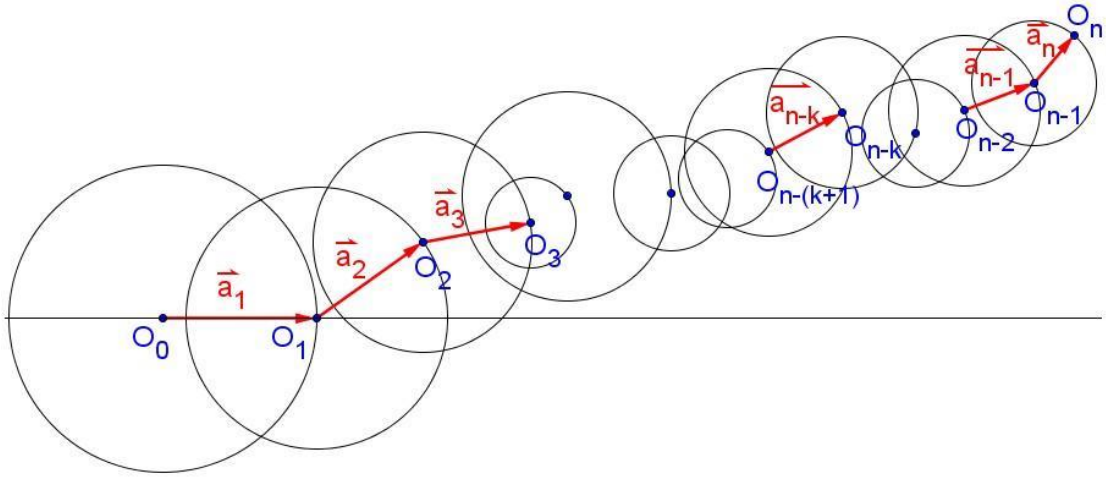
【定理四十五】n 階行星彗星圖形參數式

平面上有(n+1)個點O_0，O_1，O_2，⋯，O_n。一開始 O_0位於原點，$\overrightarrow{O_0O_1}$輻角為0°，$\overrightarrow{O_1O_2}$輻角為α_1，$\overrightarrow{O_2O_3}$輻角為α_2，⋯，$\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$輻角為$\alpha_{n-1}$。然後$O_0$以等速直線前進，在單位時間內移動向量$\vec{v}=(v,0)$，而$O_1$相對於 O_0作等速圓周運動，相對角速度ω_1，保持$\overline{O_0O_1}=r_1$；O_2相對於O_1作等速圓周運動，相對角速度ω_2，保持$\overline{O_1O_2}=r_2$；⋯；O_n相對於O_{n-1}作等速圓周運動，相對角速度ω_n，保持$\overline{O_{n-1}O_n}=r_n$，其中$r_1$，$r_2$，⋯，$r_n>0$，$v$，$\omega_1$，$\omega_2$，⋯，$\omega_n\neq 0$，

t 時間後設O_n坐標為(x,y)，則隨著 t 的改變，$O_n(x,y)$的軌跡為 n 階行星彗星圖形，且準線為 x 軸，參數式為

$$x=vt+r_1\cos(\omega_1 t)+r_2\cos(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots+r_n\cos(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$$

$$y=r_1\sin(\omega_1 t)+r_2\sin(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots+r_n\sin(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$$



【證明】

一、由 P.135 n 階行星彗星圖形及準線的定義知：$O_n(x,y)$的軌跡為 n 階行星彗星圖形，且準線為O_0等速直線前進的軌跡 x 軸

二、由 P.77【定理二十九】知：

若O_0保持在原點不動，則 t 時間後$O_n(x,y)$的軌跡參數式為

$$x = r_1\cos(\omega_1 t) + r_2\cos(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots$$

$$+r_n\cos(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$$

$$y = r_1\sin(\omega_1 t) + r_2\sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots$$

$$+r_n\sin(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$$

則此時

$$\overrightarrow{O_0O_n}$$

$$= (r_1\cos(\omega_1 t) + r_2\cos(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots + r_n\cos(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots$$

$$+ \omega_1 t + \alpha_{n-1})，r_1\sin(\omega_1 t) + r_2\sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots$$

$$+ r_n\sin(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1}))$$

但事實上O_0由原點以等速直線前進，在單位時間內移動向量$\vec{v} = (v, 0)$

$\therefore$t 時間後O_0坐標應為$(vt, 0)$

而隨著O_0直線移動，會帶動O_1，O_2，…，O_n整個系統跟著移動

所以$\overrightarrow{O_0O_n}$不會改變

令O為原點，則 t 時間後

$\overrightarrow{OO_0} = (vt, 0)$

$\overrightarrow{OO_n} = \overrightarrow{OO_0} + \overrightarrow{O_0O_n}$

$$= (vt, 0) + (r_1\cos(\omega_1 t) + r_2\cos(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots + r_n\cos(\omega_n t + \omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})，r_1\sin(\omega_1 t) + r_2\sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots + r_n\sin(\omega_n t + \omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1}))$$

令$O_n(x, y)$，則

$$x = vt + r_1\cos(\omega_1 t) + r_2\cos(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots + r_n\cos(\omega_n t + \omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$$

$$y = r_1\sin(\omega_1 t) + r_2\sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots + r_n\sin(\omega_n t + \omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$$

得證■

(五) 把 r_1，r_2，…，r_n放寬為可正可負，推廣成【定理四十六】

與之前同樣的道理，引進相對輻角之後，我們可以把r_1，r_2，…，r_n放寬成可正可負，【定理四十五】n 階行星彗星圖形參數式可以將它推廣成【定理四十六】

【定理四十六】n 階行星彗星圖形參數式(二)

平面上有(n+1)個點O_0，O_1，O_2，…，O_n。一開始 O_0位於原點，$\overrightarrow{O_0O_1}$相對輻角為0°，$\overrightarrow{O_1O_2}$相對輻角為α_1，$\overrightarrow{O_2O_3}$相對輻角為α_2，…，$\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$相對輻角為$\alpha_{n-1}$。然後$O_0$以等速直線前進，在單位時間內移動向量$\vec{v}=(v,0)$，而$O_1$相對於 O_0作等速圓周運動，角速度ω_1，保持$\overline{O_0O_1}=|r_1|$；O_2相對於O_1作等速圓周運動，相對角速度ω_2，保持$\overline{O_1O_2}=|r_2|$；…； O_n相對於O_{n-1}作等速圓周運動，相對角速度ω_n，保持$\overline{O_{n-1}O_n}=|r_n|$，其中$r_1$，$r_2$，…，$r_n$可以是正數或負數，但不為0，$\omega_1$，$\omega_2$，…，$\omega_n\neq 0$，$v\neq 0$。t 時間後設$O_n$坐標為$(x,y)$，則隨著 t 的改變，$O_n(x,y)$的軌跡為 n 階行星彗星圖形，且準線為 x 軸，參數式為

$$x=vt+r_1\cos(\omega_1 t)+r_2\cos(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots+r_n\cos(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$$

$$y=r_1\sin(\omega_1 t)+r_2\sin(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots+r_n\sin(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$$

【證明】

一、由 P.135 n 階行星彗星圖形及準線的定義知：$O_n(x,y)$的軌跡為 n 階行星彗星圖形，且準線為O_0等速直線前進的軌跡 x 軸

二、設原本尚未開始轉動時$\overrightarrow{O_0O_1}=\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{a_2}$，…，$\overrightarrow{O_{n-1}O_n}=\overrightarrow{a_n}$

$\overrightarrow{O_0O_1}$相對輻角為0°，$\overline{O_0O_1}=|r_1|$，由 P.82【引理三十】知

將向量以複數坐標表示，則$\overrightarrow{a_1}=r_1(\cos 0+i\sin 0)$

$\overrightarrow{O_1O_2}$相對輻角為α_1，$\overline{O_1O_2}=|r_2|$，同理$\overrightarrow{a_2}=r_2(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$

……

$\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$相對輻角為$\alpha_{n-1}$，$\overline{O_{n-1}O_n}=|r_n|$，同理$\overrightarrow{a_n}=r_n(\cos\alpha_{n-1}+i\sin\alpha_{n-1})$

其餘與 P.136【定理四十五】n 階行星彗星圖形參數式的證明完全相同，得證■

接著我們來研究 n 組齒輪在直線上滾動時的情形，先給入一個定義。

(六) 定義 n 階齒輪直線圖形及準線

若平面上有一直線 L 及2n個圓O_1，O_2，…，O_{2n}，其中O_1與O_2為同心圓，圓心為T_1，且O_1與L相切；O_3與O_4為同心圓，圓心為T_2，且O_3與O_2相切；…；O_{2n-1}與O_{2n}為同心圓，圓心為T_n，且O_{2n-1}與O_{2n-2}相切。

現讓O_1帶動O_2以相等轉速在直線 L 上滾動，O_3帶動O_4以相等轉速在O_2上滾動，…，O_{2n-1}帶動O_{2n}以相等轉速在O_{2n-2}上滾動，並且滿足：在相同時間內，

O_1在直線 L 上滾動過的弧長對於T_1的圓心角＝O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_1的圓心角

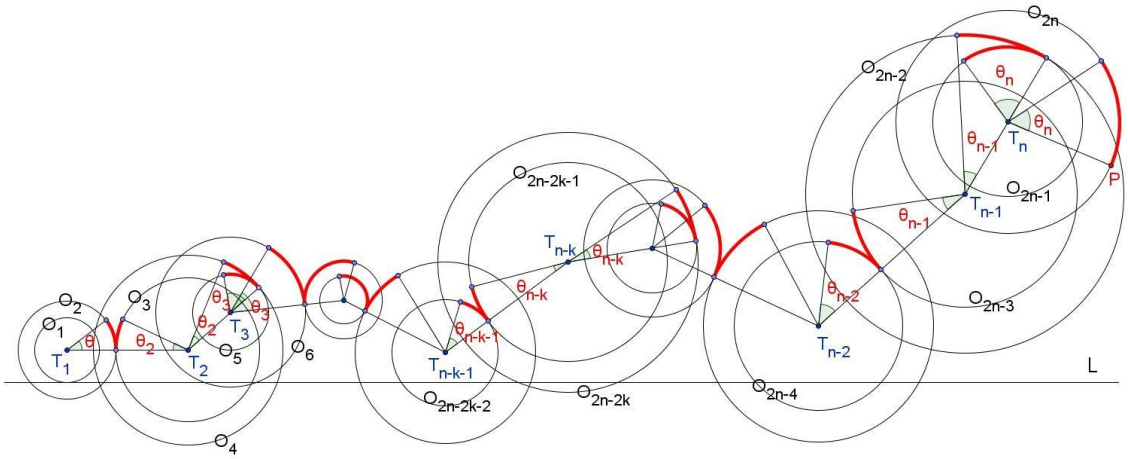
O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_2的圓心角＝O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_2的圓心角

O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_3的圓心角＝O_7在O_6上滾動過的弧長對於T_3的圓心角

……

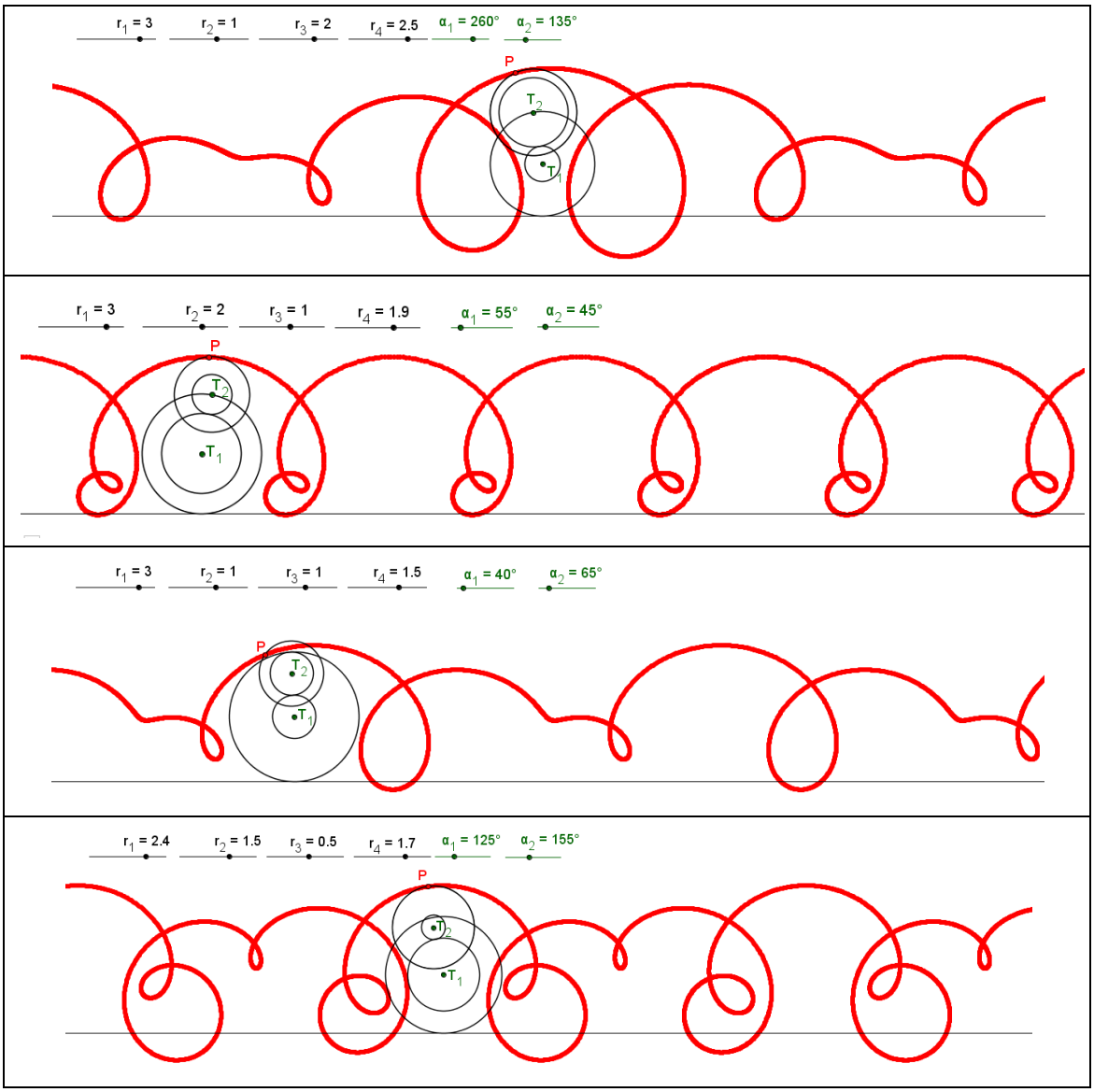
O_{2n-3}在O_{2n-4}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝O_{2n-1}在O_{2n-2}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角。

而當中所有的滾動皆為純滾動，也就是接觸面間不會產生相對滑動。令P為圓O_{2n}上一點，則 P 點的軌跡稱為 n 階齒輪直線圖形，O_1圓心的軌跡稱為此圖形的準線。



註：可看出準線必平行直線 L

下面四個圖是我們用 Geogebra 畫出來的 2 階齒輪直線圖形



(七) 介紹引理及將“圓在直線上滾動分成兩個步驟”作說明

在證明【定理四十八】之前先介紹一個引理，並且將“圓在直線上滾動分成兩個步驟”作說明，以方便定理的證明。

1. **介紹引理**

【引理四十七】

設一開始圓 O 與x軸相切於 A(0,0)，且圓O的圓心在 y 軸正向上，圓 O 半徑為 r，則當圓 O 在x軸上滾動θ角時，圓心 O 會移動到$O'(-r\theta, r)$

【證明】一開始圓 O 與直線相切於 A(0,0)

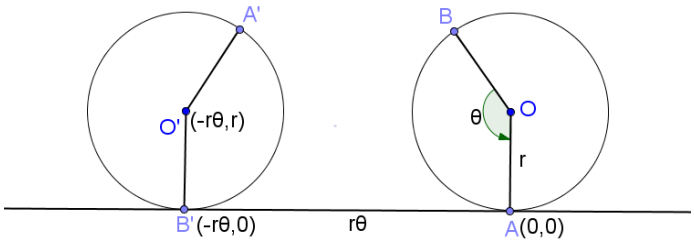
(1) 如圖(一)，圓O逆時針旋轉，使B滾動至B′，因為逆時針旋轉 $\therefore \theta > 0$，

$\overline{AB'} = AB$弧長$= r\theta$

B′在 A 點左方

$\therefore B'$坐標為$(-r\theta, 0)$

$\therefore O'$坐標為$(-r\theta, r)$



圖(一)逆時針旋轉θ>0

(2) 如圖(二)，圓O順時針旋轉，使B滾動至B′，因為順時針旋轉

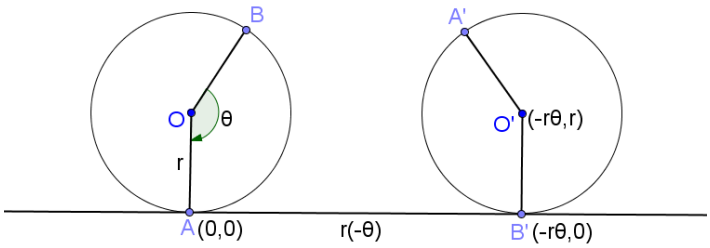
$\therefore \theta < 0$，

$\overline{AB'} = AB$弧長$= r(-\theta)$

B′在 A 點右方

$\therefore B'$坐標為$(-r\theta, 0)$

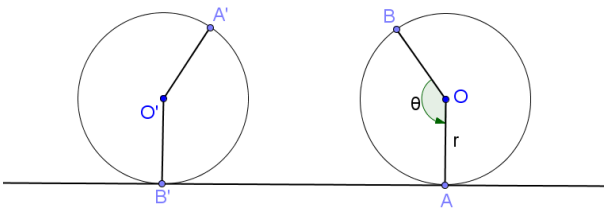
$\therefore O'$坐標為$(-r\theta, r)$



圖(二)順時針旋轉θ＜0

綜合(1)(2)可得知：設一開始圓 O 與直線相切於 A(0,0)，圓 O 半徑為r，則當圓 O 在直線滾動θ角時，圓心 $O(0, r)$會移動到$O'(-r\theta, r)$　　得證■

2. **接著，我們將圓在直線上滾動分成兩個步驟，說明如下：**



如圖：圓O繞直線滾動，使 B 滾動至B′

我們可以將之分成兩個步驟進行，

(步驟一)圓 O的圓心先固定，圓O自轉圓心角θ，使 B 轉至 A 處。

(步驟二)整個圓O再對直線**滑動**，使步驟一 B 轉至 A 處後，接著滑動至B′。

這兩個步驟(圓心先固定，圓自轉動，再整個圓對直線**滑動**)完成後，與“圓O繞直線滾動，使 B 滾動至B′”結果是一樣的。

我們下面【定理四十八】的證明方法，就是將圓繞直線滾動分成兩個步驟(圓心先固定，圓自轉動，再整個圓對直線滑動)來做處理。

(八) 證明【定理四十八】

【定理四十八】n 階齒輪直線圖形參數式

設平面上有一直線 L 及2n個圓O_1，O_2，…，O_{2n}，其半徑分別為r_1，r_2，…，r_{2n}，O_1與O_2為同心圓，圓心為T_1，且O_1與L相切；O_3與O_4為同心圓，圓心為T_2，且O_3與O_2外切；…；O_{2n-1}與O_{2n}為同心圓，圓心為T_n，且O_{2n-1}與O_{2n-2}外切。

令P為圓O_{2n}上一點，且$\overrightarrow{T_1T_2}$之輻角為α_1，$\overrightarrow{T_2T_3}$之輻角為α_2，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n}$之輻角為$\alpha_{n-1}$，$\overrightarrow{T_nP}$之輻角為$\alpha_n$，令 L 為x軸，一開始圓$O_1$與 L 相切於(0,0)，且圓$O_1$的圓心在 y 軸正向上

現讓O_1帶動O_2以相等轉速在 L 上滾動，O_3帶動O_4以相等轉速在O_2上滾動，…，O_{2n-1}帶動O_{2n}以相等轉速在O_{2n-2}上滾動，並且滿足：在相同時間內，

O_1在直線 L 上滾動過的弧長對於T_1的圓心角＝O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_1的圓心角

O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_2的圓心角＝O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_2的圓心角

O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_3的圓心角＝O_7在O_6上滾動過的弧長對於T_3的圓心角

……

O_{2n-3}在O_{2n-4}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝O_{2n-1}在O_{2n-2}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角。

而當中所有的滾動皆為純滾動，也就是接觸面間不會產生相對滑動。圓O_1與直線 L 切於(0,0)的狀態下開始滾動，滾動了θ角，此時設 P 點坐標為(x, y)，

令$\theta_1 = \theta$，$\theta_k = \frac{r_2 r_4 r_6 \cdots r_{2k-2}}{r_3 r_5 r_7 \cdots r_{2k-1}}\theta$ $(k = 2，3，\cdots，n)$，則P點隨θ變動所成軌跡為 n 階齒輪直線圖形，準線為$y = r_1$，參數式為

$$x = -r_1\theta_1 + (r_2 + r_3)\cos(2\theta_1 + \alpha_1) + (r_4 + r_5)\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2) + \cdots$$

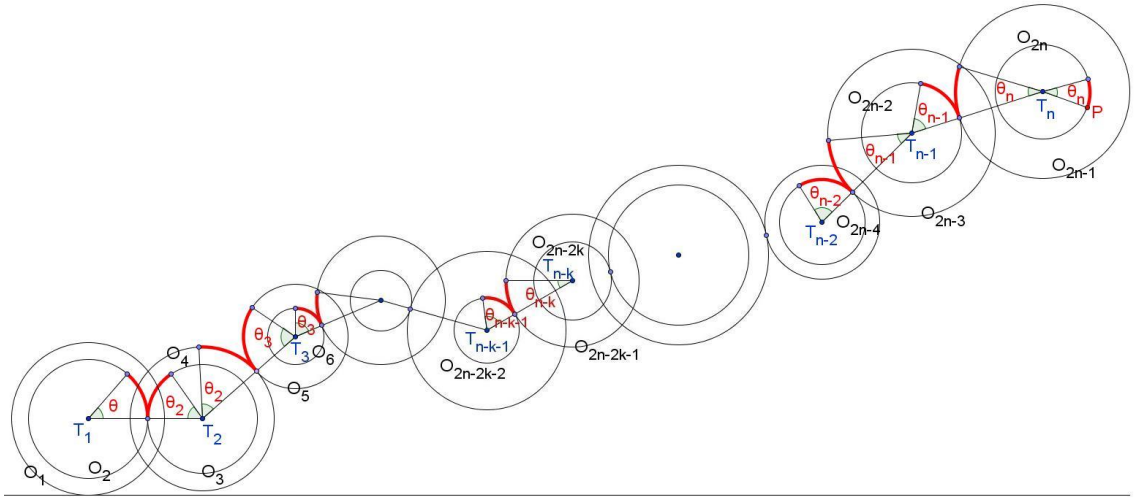
$$+(r_{2n-2} + r_{2n-1})\ \cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-1})$$

$$+r_{2n}\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_n)$$

$$y = r_1 + (r_2 + r_3)\sin(2\theta_1 + \alpha_1) + (r_4 + r_5)\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2) + \cdots$$

$$+(r_{2n-2} + r_{2n-1})\ \sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-1})$$

$$+r_{2n}\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_n)$$



【證明】

一、由 P.140 n 階齒輪直線圖形及準線的定義知:P 點的軌跡為 n 階齒輪直線圖形，且準線為O_1圓心的軌跡$y = r_1$

二、我們仿照 P.87【定理三十三】n 階齒輪圖形參數式的想法來證明

令原本尚未滾動時$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{T_2T_3} = \overrightarrow{a_2}$，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n} = \overrightarrow{a_{n-1}}$，$\overrightarrow{T_nP} = \overrightarrow{a_n}$

而當時$\overrightarrow{T_1T_2}$之輻角為α_1，$\overrightarrow{T_2T_3}$之輻角為α_2，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n}$之輻角為$\alpha_{n-1}$，$\overrightarrow{T_nP}$之輻角為$\alpha_n$，

且$|\overrightarrow{a_1}| = |\overrightarrow{T_1T_2}| = r_2 + r_3$，$|\overrightarrow{a_2}| = |\overrightarrow{T_2T_3}| = r_4 + r_5$，⋯，

$|\overrightarrow{a_{n-1}}| = |\overrightarrow{T_{n-1}T_n}| = r_{2n-2} + r_{2n-1}$，$|\overrightarrow{a_n}| = |\overrightarrow{T_nP}| = r_{2n}$

由 P.74 的引理知：將向量以極式表示，可得

$\overrightarrow{a_1} = (r_2 + r_3)(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$，$\overrightarrow{a_2} = (r_4 + r_5)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$，⋯

$\overrightarrow{a_{n-1}} = (r_{2n-2} + r_{2n-1})\,(\cos\alpha_{n-1} + i\sin\alpha_{n-1})$，$\overrightarrow{a_n} = r_{2n}(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$

----------(1)

1. 已知在相同時間內，

O_1在直線 L 上滾動過的弧長對於T_1的圓心角＝ O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_1的圓心角

O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_2的圓心角＝ O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_2的圓心角

O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_3的圓心角
＝ O_7在O_6上滾動過的弧長對於T_3的圓心角

……

O_{2n-3}在O_{2n-4}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角
＝ O_{2n-1}在O_{2n-2}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角。

設當圓O_1與直線 L 切於(0,0)的狀態下開始滾動，滾動了θ角時

O_1在直線 L 上滾動過的弧長對於T_1的圓心角＝ O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_1的圓心角＝ θ_1

O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_2的圓心角＝ O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_2的圓心角＝ θ_2

O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_3的圓心角
＝ O_7在O_6上滾動過的弧長對於T_3的圓心角 ＝ θ_3

……

O_{2n-3}在O_{2n-4}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角
＝ O_{2n-1}在O_{2n-2}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝ θ_{n-1}

O_{2n-1}滾過O_{2n-2}的弧長對於T_n的圓心角為θ_n

則$\theta_1 = \theta$

$|r_2\theta_1| = |r_3\theta_2| = O_3$滾過$O_2$的弧長，由 P.87【引理三十二】知：$\theta_1$，$\theta_2$同號，

又r_1，$r_2 > 0$ 所以$r_2\theta_1 = r_3\theta_2$，$\therefore \theta_2 = \frac{r_2}{r_3}\theta_1 = \frac{r_2}{r_3}\theta$

$|r_4\theta_2| = |r_5\theta_3| = O_5$滾過$O_4$的弧長，同理$\theta_3 = \frac{r_4}{r_5}\theta_2$

$|r_6\theta_3| = |r_7\theta_4| = O_7$滾過$O_6$的弧長，同理$\theta_4 = \frac{r_6}{r_7}\theta_3$

……

$|r_{2n-2}\theta_{n-1}| = |r_{2n-1}\theta_n| = O_{2n-1}$滾過$O_{2n-2}$的弧長，同理$\theta_n = \frac{r_{2n-2}}{r_{2n-1}}\theta_{n-1}$

得遞迴定義$\begin{cases} \theta_2 = \frac{r_2}{r_3}\theta \\ \theta_k = \frac{r_{2k-2}}{r_{2k-1}}\theta_{k-1} \quad (k = 2，3，\cdots，n) \end{cases}$

可得$\theta_k = \frac{r_2 r_4 r_6 \cdots r_{2k-2}}{r_3 r_5 r_7 \cdots r_{2k-1}}\theta \quad (k = 2，3，\cdots，n)$

2. 原本尚未滾動時$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{T_2T_3} = \overrightarrow{a_2}$，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n} = \overrightarrow{a_{n-1}}$，$\overrightarrow{T_nP} = \overrightarrow{a_n}$

   如圖，我們不看直線 L 與圓O_1，剩下的$(2n-1)$個圓與 P.87【定理三十三】的$(2n-1)$個圓情形是相同的。由【定理三十三】得知

   當圓O_1、O_2及圓心T_1保持不動，其他$(2n-2)$個圓滾動完後

   $\overrightarrow{T_1P} = R_{\theta_1}(\overrightarrow{a_1}) + R_{\theta_1+2\theta_2}(\overrightarrow{a_2}) + \cdots + R_{\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$

   $+R_{\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$ ----------(由 P.94 式子(1)得知)

3. 但事實上圓O_1帶著圓O_2在直線上滾動，

   $\because O_3$帶動O_4在O_2上滾動，…，O_{2n-1}帶動O_{2n}在O_{2n-2}上滾動，

   $\therefore$可視為圓O_1帶著圓O_2及O_3、O_4、O_5、O_6、$\cdots O_{2n-1}$、O_{2n}構成的整個系統在直線上滾動

由 P.141 的討論知：圓繞直線滾動可分解成兩個步驟(圓心先固定，圓自轉動，再整個圓對直線滑動)，我們用此方法來證明

(1) 先讓圓心T_1固定，圓O_1帶著圓O_2及O_3、O_4、O_5、O_6、$\cdots O_{2n-1}$、O_{2n}構成的整個系統自轉θ_1角($\theta_1=\theta$)

則$\overrightarrow{T_1P}$也會轉動θ_1

$$\therefore \overrightarrow{T_1P}=R_{\theta_1}(R_{\theta_1}(\overrightarrow{a_1})+R_{\theta_1+2\theta_2}(\overrightarrow{a_2})+\cdots+R_{\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$
$$+R_{\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n}))$$
$$=R_{2\theta_1}(\overrightarrow{a_1})+R_{2\theta_1+2\theta_2}(\overrightarrow{a_2})+\cdots+R_{2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$
$$+R_{2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$$

(2) 接著圓O_1帶著圓O_2及O_3、O_4、O_5、O_6、$\cdots O_{2n-1}$、O_{2n}構成的整個系統在直線 L 上滑動

$|r_1\theta_1|$長

但平移不會影響向量

$$\therefore \overrightarrow{T_1P}\text{仍然}=R_{2\theta_1}(\overrightarrow{a_1})+R_{2\theta_1+2\theta_2}(\overrightarrow{a_2})+\cdots+R_{2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$
$$+R_{2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$$

4. 設$O(0,0)$為原點，

一開始圓O_1與x軸切於$(0,0)$，半徑為r_1，圓心在 y 軸正向上，圓O_1在x軸上滾動θ_1角

則由 P.142 的【引理四十七】知：圓心會移動到$(-r_1\theta_1,r_1)$

$\therefore T_1$會移動至$(-r_1\theta_1,r_1)$，又$O(0,0)$為原點

$$\therefore \overrightarrow{OT_1}=(-r_1\theta_1,r_1)$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT_1}+\overrightarrow{T_1P}$$

$$= (-r_1\theta_1, r_1) + R_{2\theta_1}(\overrightarrow{a_1}) + R_{2\theta_1+2\theta_2}(\overrightarrow{a_2}) + \cdots$$

$$+R_{2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})+R_{2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$$ ----------(*)

由證明一開始 P.145 的(1)式得知

$\overrightarrow{a_1} = (r_2 + r_3)(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$，$\overrightarrow{a_2} = (r_4 + r_5)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$，$\cdots$

$\overrightarrow{a_{n-1}} = (r_{2n-2} + r_{2n-1})\,(\cos\alpha_{n-1} + i\sin\alpha_{n-1})$，$\overrightarrow{a_n} = r_{2n}(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$

代入(*)式，則

$$\overrightarrow{OP} = (-r_1\theta_1, r_1) + R_{2\theta_1}(\overrightarrow{a_1}) + R_{2\theta_1+2\theta_2}(\overrightarrow{a_2}) + \cdots$$

$$+R_{2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}}(\overrightarrow{a_{n-1}})$$

$$+R_{2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n}(\overrightarrow{a_n})$$

$$= (-r_1\theta_1 + ir_1) + (r_2 + r_3)(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\,(\cos2\,\theta_1 + i\sin 2\theta_1)$$

$$+(r_4 + r_5)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\,(\cos(2\,\theta_1 + 2\theta_2) + i\sin(2\theta_1 + 2\theta_2)) + \cdots$$

$$+(r_{2n-2} + r_{2n-1})\,(\cos\alpha_{n-1} + i\sin\alpha_{n-1})\,(\cos(\,2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1}) + i\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1})) + r_{2n}(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)\,(\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n) + i\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n))$$

$$= (-r_1\theta_1 + ir_1) + (r_2 + r_3)(\cos(2\theta_1 + \alpha_1) + i\sin(2\theta_1 + \alpha_1))$$

$$+(r_4 + r_5)(\cos(\,2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2) + i\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2)) + \cdots + (r_{2n-2} + r_{2n-1})(\cos(\,2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1}+\alpha_{n-1}) + i\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-1})) + r_{2n}(\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_n) + i\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_n))$$

----------(**)

又O為原點，P(x, y)，所以

$\overrightarrow{OP} = x + iy$，與(**)式比較實部與虛部，可得

$$x = -r_1\theta_1 + (r_2 + r_3)\cos(2\theta_1 + \alpha_1) + (r_4 + r_5)\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2) + \cdots$$

$$+(r_{2n-2} + r_{2n-1})\ \cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-1})$$

$$+r_{2n}\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_n)$$

$$y = r_1 + (r_2 + r_3)\sin(2\theta_1 + \alpha_1) + (r_4 + r_5)\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2) + \cdots$$

$$+(r_{2n-2} + r_{2n-1})\ \sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-1})$$

$$+r_{2n}\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_n)$$

其中$\theta_1 = \theta$，$\theta_k = \frac{r_2 r_4 r_6 \cdots r_{2k-2}}{r_3 r_5 r_7 \cdots r_{2k-1}}\theta$ $(k = 2，3，\cdots，n)$　　，得證■

(九) 在【定理四十八】命題中，探討 r_1，r_2，…，r_{2n}可正可負時的情形

在【定理四十八】n 階齒輪直線圖形參數式中，一樣地我們希望可以藉由放寬讓r_1，r_2，…，r_{2n}可正可負，來解決兩圓可外切滾動也可內切滾動的問題。兩圓相切滾動的情形，在將 P.87【定理三十三】n 階齒輪圖形參數式推廣至 P.101【定理三十六】n 階齒輪圖形參數式(二)的過程中已討論過，我們沿用之前的想法和得到的結論。但圓O_1在直線L上滾動，當$r_1 < 0$時幾何意義為何呢？我們作如下的規定：

【定義】

設 L 為 x 軸，圓O_1在直線 L 上滾動，我們定義：

1. 若$r_1 > 0$，則表示圓O_1在L的上方滾動
2. 若$r_1 < 0$，則表示圓O_1在L的下方滾動

(十) 介紹引理

由上面的定義，可以得到【引理四十九】

【引理四十九】

設一開始圓O與x軸相切於A(0,0)，圓O半徑為|r|，

則當圓O在x軸上滾動θ角時，圓心O會移動到$O'(-r\theta, r)$

【證明】一開始圓O與直線相切於A(0,0)

(一)$r > 0$時，表示圓O在L的上方滾動

(1) 如圖(一)，圓O逆時針旋轉，使B滾動至B′，因為逆時針旋轉

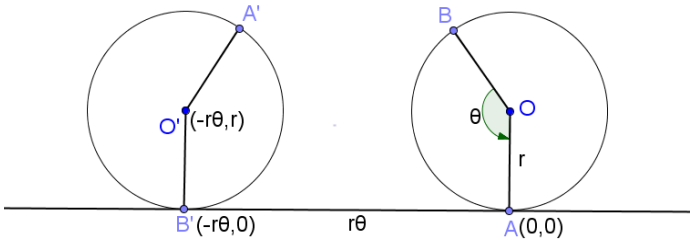
$\therefore \theta > 0$，

$\overline{AB'} =$ AB弧長$= r\theta$

B′在 A 點左方

$\therefore$ B′坐標為$(-r\theta, 0)$

$\therefore$ O′坐標為$(-r\theta, r)$



圖(一)逆時針旋轉θ>0

(2) 如圖(二)，圓O順時針旋轉，使B滾動至B′，因為順時針旋轉

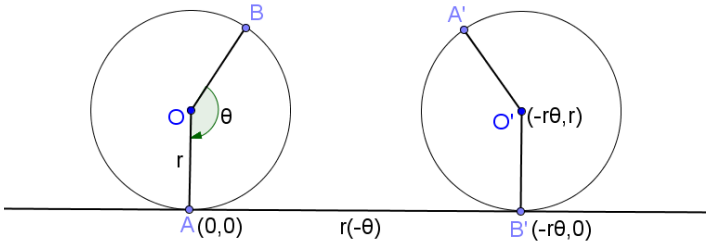
$\therefore \theta < 0$，

$\overline{AB'} =$ AB弧長$= r(-\theta)$

B′在 A 點右方

$\therefore$ B′坐標為$(-r\theta, 0)$

$\therefore$ O′坐標為$(-r\theta, r)$

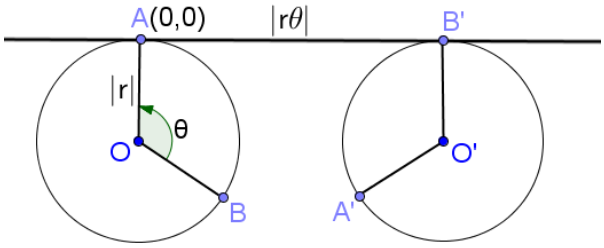


圖(二)順時針旋轉θ＜0

(二)$r < 0$時，表示圓O在L的下方滾動

(3) 如圖(三)，圓O逆時針旋轉，使B滾動至B′，因為逆時針旋轉 $\therefore$ $\theta > 0$，

$\overline{AB'} =$ AB弧長$= |r\theta| = -r\theta$



圖(三)逆時針旋轉θ>0

B'在 A 點右方

$\therefore B'$坐標為$(-r\theta, 0)$

$\therefore O'$坐標為$(-r\theta, r)$

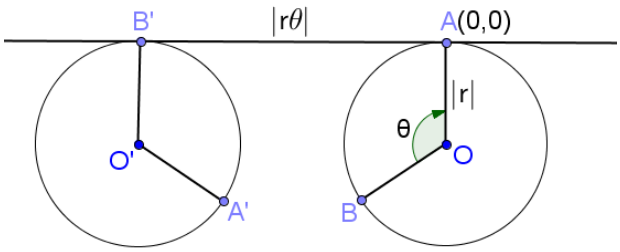
(4) 如圖(四)，圓O順時針旋轉，使B滾動至B'，因為順時針旋轉 $\therefore \theta < 0$，

$\overline{AB'} = AB$弧長$= |r\theta| = r\theta$

B'在 A 點左方

$\therefore B'$坐標為$(-r\theta, 0)$

$\therefore O'$坐標為$(-r\theta, r)$



圖(四)順時針旋轉θ<0

綜合(1)(2)(3)(4)可得知：設一開始圓O與直線相切於A(0,0)，圓O半徑為r，則當圓O在直線滾動θ角時，圓心$O(0, r)$會移動到$O'(-r\theta, r)$　　得證■

(十一)　把 r_1，r_2，…，r_{2n}放寬為可正可負，推廣成【定理五十】

有了之前的理論基礎及【引理四十九】，我們可以將 P.143【定理四十八】n 階齒輪直線圖形參數式推廣成【定理五十】

【定理五十】n 階齒輪直線圖形參數式(二)

平面上有一直線 L 及2n個圓O_1，O_2，⋯，O_{2n}，其半徑分別為$|r_1|$，$|r_2|$，⋯，$|r_{2n}|$，其中r_1，r_2，⋯，r_{2n}可以為正數或負數，但不為0，而且$r_2 + r_3$，$r_4 + r_5$，⋯，$r_{2n-2} + r_{2n-1}$均不為0，O_1與O_2為同心圓，圓心為T_1，且O_1與L相切；O_3與O_4為同心圓，圓心為T_2，且O_3與O_2相切；⋯；O_{2n-1}與O_{2n}為同心圓，圓心為T_n，且O_{2n-1}與O_{2n-2}相切。

令P為圓O_{2n}上一點，且一開始$\overrightarrow{T_1T_2}$之相對輻角為α_1，$\overrightarrow{T_2T_3}$之相對輻角為α_2，⋯，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n}$之相對輻角為$\alpha_{n-1}$，$\overrightarrow{T_nP}$之相對輻角為$\alpha_n$，令 L 為x軸，一開始圓$O_1$與 L 軸切於(0,0)，

現讓O_1帶動O_2以相等轉速在 L 上滾動，O_3帶動O_4以相等轉速在O_2上滾動，…，O_{2n-1}帶動O_{2n}以相等轉速在O_{2n-2}上滾動，並且滿足：在相同時間內，

O_1在直線 L 上滾動過的弧長對於T_1的圓心角＝O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_1的圓心角

O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_2的圓心角＝O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_2的圓心角

O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_3的圓心角＝O_7在O_6上滾動過的弧長對於T_3的圓心角

……

O_{2n-3}在O_{2n-4}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角＝O_{2n-1}在O_{2n-2}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角。

而當中所有的滾動皆為純滾動，也就是接觸面間不會產生相對滑動。圓O_1與直線 L 切於(0,0)的狀態下開始滾動，滾動了θ角，此時設 P 點坐標為(x, y)，

令$\theta_1 = \theta$，$\theta_k = \frac{r_2 r_4 r_6 \cdots r_{2k-2}}{r_3 r_5 r_7 \cdots r_{2k-1}}\theta$ $(k = 2，3，\cdots，n)$，則P點隨θ變動所成軌跡為 n 階齒輪直線圖形，準線為$y = r_1$，參數式為

$$x = -r_1\theta_1 + (r_2 + r_3)\cos(2\theta_1 + \alpha_1) + (r_4 + r_5)\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2) + \cdots$$

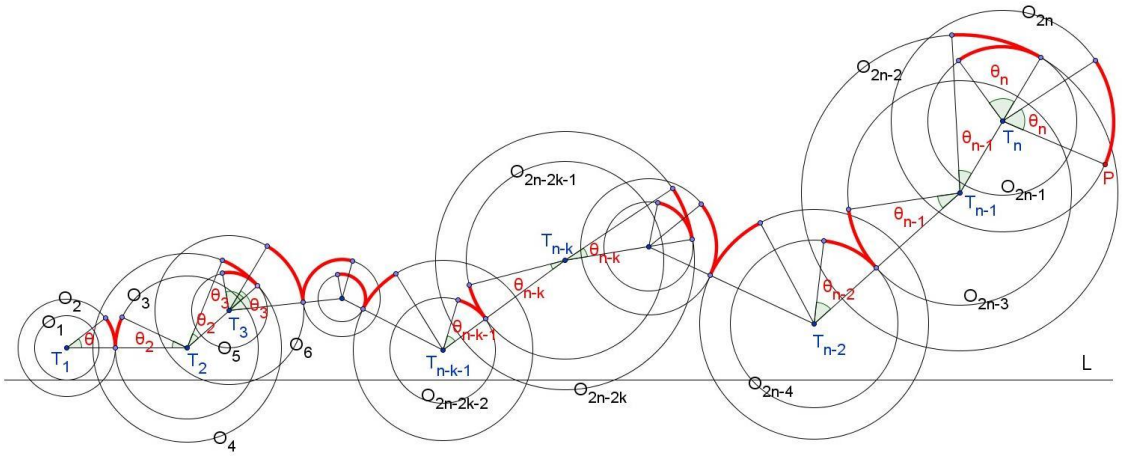
$$+(r_{2n-2} + r_{2n-1})\ \cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-1})$$

$$+r_{2n}\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_n)$$

$$y = r_1 + (r_2 + r_3)\sin(2\theta_1 + \alpha_1) + (r_4 + r_5)\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2) + \cdots$$

$$+(r_{2n-2} + r_{2n-1})\ \sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-1})$$

$$+r_{2n}\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_n)$$



【證明】

一、由 P.140 n 階齒輪直線圖形及準線的定義知:P 點的軌跡為 n 階齒輪直線圖形，且準線為O_1圓心的軌跡$y = r_1$

二、令原本尚未滾動時$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{T_2T_3} = \overrightarrow{a_2}$，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n} = \overrightarrow{a_{n-1}}$，$\overrightarrow{T_nP} = \overrightarrow{a_n}$

而當時$\overrightarrow{T_1T_2}$之相對輻角為α_1，$\overrightarrow{T_2T_3}$之相對輻角為α_2，…，$\overrightarrow{T_{n-1}T_n}$之相對輻角為$\alpha_{n-1}$，$\overrightarrow{T_nP}$之相對輻角為$\alpha_n$，由 P.98【引理三十四】知：將向量以極式表示，可得

$\overrightarrow{a_1} = (r_2 + r_3)(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$，$\overrightarrow{a_2} = (r_4 + r_5)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$，…

$\overrightarrow{a_{n-1}} = (r_{2n-2} + r_{2n-1})(\cos\alpha_{n-1} + i\sin\alpha_{n-1})$，$\overrightarrow{a_n} = r_{2n}(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$

1. 已知在相同時間內，

O_1在直線 L 上滾動過的弧長對於T_1的圓心角＝O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_1的圓心角

O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_2的圓心角＝O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_2的圓心角

O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_3的圓心角

＝O_7在O_6上滾動過的弧長對於T_3的圓心角

……

O_{2n-3}在O_{2n-4}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角

$= O_{2n-1}$在O_{2n-2}上滾動過的弧長對於T_{n-1}

的圓心角。

設當圓O_1與直線 L 切於(0,0)的狀態下開始滾動，滾動了θ角時

O_1在直線 L 上滾動過的弧長對於T_1的圓心角$= O_3$在O_2上滾動過的弧長對於T_1的圓心角$= \theta_1$

O_3在O_2上滾動過的弧長對於T_2的圓心角$= O_5$在O_4上滾動過的弧長對於T_2的圓心角$= \theta_2$

O_5在O_4上滾動過的弧長對於T_3的圓心角

$= O_7$在O_6上滾動過的弧長對於T_3的圓心角 $= \theta_3$

……

O_{2n-3}在O_{2n-4}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角

$= O_{2n-1}$在O_{2n-2}上滾動過的弧長對於T_{n-1}的圓心角$= \theta_{n-1}$

O_{2n-1}滾過O_{2n-2}的弧長對於T_n的圓心角為θ_n

則$\theta_1 = \theta$

$|r_2\theta_1| = |r_3\theta_2| = O_3$滾過$O_2$的弧長$\therefore \frac{|r_2|}{|r_3|} = \frac{|\theta_2|}{|\theta_1|}$，但由 P.101【引理三十五】知$r_2 r_3$與$\theta_1\theta_2$同號

所以$\frac{r_2}{r_3} = \frac{\theta_2}{\theta_1}$　$\therefore \theta_2 = \frac{r_2}{r_3}\theta_1 = \frac{r_2}{r_3}\theta$

$|r_4\theta_2| = |r_5\theta_3| = O_5$滾過$O_4$的弧長，同理$\theta_3 = \frac{r_4}{r_5}\theta_2$

$|r_6\theta_3| = |r_7\theta_4| = O_7$滾過$O_6$的弧長，同理$\theta_4 = \frac{r_6}{r_7}\theta_3$

……

$|r_{2n-2}\theta_{n-1}| = |r_{2n-1}\theta_n| = O_{2n-1}$滾過$O_{2n-2}$的弧長，同理$\theta_n = \frac{r_{2n-2}}{r_{2n-1}}\theta_{n-1}$

得遞迴定義$\begin{cases} \theta_2 = \frac{r_2}{r_3}\theta \\ \theta_k = \frac{r_{2k-2}}{r_{2k-1}}\theta_{k-1}\ (k = 2，3，\cdots，n) \end{cases}$，

可得$\theta_k = \frac{r_2 r_4 r_6 \cdots r_{2k-2}}{r_3 r_5 r_7 \cdots r_{2k-1}}\theta\ \ (k = 2，3，\cdots，n)$

其餘與 P.143【定理四十八】n 階齒輪直線圖形參數式證法相同 ，得證■

備註

1. 【定理四十八】n 階齒輪直線圖形參數式只限於外切滾動的情況,【定理五十】n 階齒輪直線圖形參數式(二)可內切滾動也可外切滾動，才能真正涵蓋 P.140 n 階齒輪直線圖形的定義相切滾動所包含的所有狀況。

2. 一階齒輪直線圖形即是次擺線。(詳見 P.189 的討論)

(十二) n 階行星彗星圖形與 n 階齒輪直線圖形代表著相同的圖形

同樣地，我們比對了 n 階行星彗星圖形與 n 階齒輪直線圖形的參數式及圖形，換元後發現它們也是等價且可互換的圖形。我們將這個發現寫成【定理五十一】。

【定理五十一】

設所有 n 階行星彗星圖形所成集合為A，所有 n 階齒輪直線圖形所成集合為B，即設 A= $\{\Gamma|\Gamma$ 為 n 階行星彗星圖形$\}$，B = $\{\Gamma|\Gamma$ 為 n 階齒輪直線圖形$\}$

則(1)A = B

(2)同一個圖形，在 n 階行星彗星圖形的定義下，與在 n 階齒輪直線圖形的定義下，所得到的準線是一樣的

【證明】

為了區隔兩參數式中r_1，r_2，…，r_n的不同，我們將【定理四十六】參數式中的r_1，r_2，…，r_n以R_1，R_2，…，R_n來表示

1. 若$\Gamma \in A$，由 P.135 n 階行星彗星圖形的定義

我們可以定坐標，一開始令O_0位於原點，$\overrightarrow{O_0O_1}$輻角為0°(即準線 L 為x軸：$y = 0$)，

由 P.139【定理四十六】知：Γ軌跡參數式可表示成

$$x = vt + R_1\cos(\omega_1 t) + R_2\cos(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots$$

$$+R_n\cos(\omega_n t + \omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$$

$$= vt + R_1\cos(\omega_1 t) + R_2\cos(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + R_3\cos(\omega_3 t + \omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_2) + \cdots + R_{n-1}\cos(\omega_{n-1}t + \omega_{n-2}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-2}) + R_n\cos(\omega_n t + \omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1}) \quad \text{----------(1)}$$

$$y = R_1\sin(\omega_1 t) + R_2\sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + \cdots$$

$$+R_n\sin(\omega_n t + \omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$$

$$= R_1\sin(\omega_1 t) + R_2\sin(\omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1) + R_3\sin(\omega_3 t + \omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_2) + \cdots + R_{n-1}\sin(\omega_{n-1}t + \omega_{n-2}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-2}) + R_n\sin(\omega_n t + \omega_{n-1}t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1}) \text{----------(2)}$$

其中R_1，R_2，…，$R_n \neq 0$，v，ω_1，ω_2，…，$\omega_n \neq 0$

令$r_1 = -2 \times \frac{v}{\omega_1}$，$\theta = \frac{\omega_1 t}{2}$，$\alpha_1' = 0$，$\alpha_2' = \alpha_1$，…，$\alpha_{n-1}' = \alpha_{n-2}$，$\alpha_n' = \alpha_{n-1}$，

$r_2 = \frac{\omega_2}{\omega_2+\omega_1}R_1$，$r_3 = \frac{\omega_1}{\omega_2+\omega_1}R_1$，$r_4 = \frac{\omega_3}{\omega_3+\omega_2}R_2$，$r_5 = \frac{\omega_2}{\omega_3+\omega_2}R_2$，…，

$r_{2n-4} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-1}+\omega_{n-2}}R_{n-2}$， $r_{2n-3} = \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}+\omega_{n-2}}R_{n-2}$，$r_{2n-2} = \frac{2\omega_n}{2\omega_n+\omega_{n-1}}R_{n-1}$，

$r_{2n-1} = \frac{\omega_{n-1}}{2\omega_n+\omega_{n-1}}R_{n-1}$，$r_{2n} = R_n$

($\because R_1$，R_2，⋯，$R_n \neq 0$，v，ω_1，ω_2，⋯，$\omega_n \neq 0$ $\therefore r_1$，r_2，⋯，$r_{2n} \neq 0$)

則$-r_1\theta = 2 \times \frac{v}{\omega_1} \times \frac{\omega_1 t}{2} = vt$，$r_2 + r_3 = R_1$，$r_4 + r_5 = R_2$，…，$r_{2n-2} + r_{2n-1} = R_{n-1}$，

($\because R_1$，R_2，⋯，$R_n \neq 0$ $\therefore r_2 + r_3$，$r_4 + r_5$，，…，$r_{2n-2} + r_{2n-1}$均不為 0)

且$2\theta = \omega_1 t$，$2 \times \frac{r_2}{r_3}\theta = 2 \times \frac{\omega_2}{\omega_1} \times \frac{\omega_1 t}{2} = \omega_2 t$，

$2 \times \frac{r_2 r_4}{r_3 r_5}\theta = 2 \times \frac{\omega_2}{\omega_1} \times \frac{\omega_3}{\omega_2} \times \frac{\omega_1 t}{2} = \omega_3 t$，⋯，

$$2 \times \frac{r_2 r_4 r_6 \dots r_{2n-4}}{r_3 r_5 r_7 \dots r_{2n-3}}\theta = 2 \times \frac{\omega_2}{\omega_1} \times \frac{\omega_3}{\omega_2} \times \frac{\omega_4}{\omega_3} \times \cdots \times \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}} \times \frac{\omega_1 t}{2} = \omega_{n-1} t$$

$$\frac{r_2 r_4 r_6 \dots r_{2n-2}}{r_3 r_5 r_7 \dots r_{2n-1}}\theta = \frac{r_2 r_4 r_6 \dots r_{2n-4} r_{2n-2}}{r_3 r_5 r_7 \dots r_{2n-3} r_{2n-1}}\theta$$

$$= \frac{\omega_2}{\omega_1} \times \frac{\omega_3}{\omega_2} \times \frac{\omega_4}{\omega_3} \times \cdots \times \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}} \times \frac{2\omega_n}{\omega_{n-1}} \times \frac{\omega_1 t}{2} = \omega_n t$$

$\therefore 2\theta + \alpha_1' = 2\theta = \omega_1 t$，

$\left(2 \times \frac{r_2}{r_3} + 2\right)\theta + \alpha_2' = 2 \times \frac{r_2}{r_3}\theta + 2\theta + \alpha_1 = \omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_1$，…，

$$\left(2 \times \frac{r_2 r_4 r_6 \dots r_{2n-4}}{r_3 r_5 r_7 \dots r_{2n-3}} + 2 \times \frac{r_2 r_4 r_6 \dots r_{2n-6}}{r_3 r_5 r_7 \dots r_{2n-5}} + \cdots + 2 \times \frac{r_2 r_4}{r_3 r_5} + 2 \times \frac{r_2}{r_3} + 2\right)\theta + \alpha_{n-1}'$$

$$= \omega_{n-1} t + \omega_{n-2} t + \cdots + \omega_2 t + \omega_1 t + \alpha_{n-2}$$

$$\left(\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-1}}+2\times\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}+2\times\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-6}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-5}}+\cdots+2\times\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+2\times\frac{r_2}{r_3}+2\right)\theta+\alpha_n'$$

$$=\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1}$$

代入(1)(2)兩式，得

$$x=-r_1\theta+(r_2+r_3)\cos(2\theta+\alpha_1')+(r_4+r_5)\cos\left(\left(2\frac{r_2}{r_3}+2\right)\theta+\alpha_2'\right)+\cdots+(r_{2n-2}+r_{2n-1})\cos\left(\left(2\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}+2\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-6}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-5}}+\cdots+2\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+2\frac{r_2}{r_3}+2\right)\theta+\alpha_{n-1}'\right)+r_{2n}\cos\left(\left(\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-1}}+2\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}+2\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-6}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-5}}+\cdots+2\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+2\frac{r_2}{r_3}+2\right)\theta+\alpha_n'\right)$$

$$y=(r_2+r_3)\sin(2\theta+\alpha_1')+(r_4+r_5)\sin\left(\left(2\frac{r_2}{r_3}+2\right)\theta+\alpha_2'\right)+\cdots+(r_{2n-2}+r_{2n-1})\sin\left(\left(2\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}+2\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-6}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-5}}+\cdots+2\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+2\frac{r_2}{r_3}+2\right)\theta+\alpha_{n-1}'\right)+r_{2n}\sin\left(\left(\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-1}}+2\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}+2\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-6}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-5}}+\cdots+2\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+2\frac{r_2}{r_3}+2\right)\theta+\alpha_n'\right)$$

令$\theta_1=\theta$，$\theta_k=\frac{r_2r_4r_6\cdots r_{2k-2}}{r_3r_5r_7\cdots r_{2k-1}}\theta$ $(2\le k\le n，k\in N)$，則Γ軌跡參數式為

$$x=-r_1\theta_1+(r_2+r_3)\cos(2\theta_1+\alpha_1')+(r_4+r_5)\cos(2\theta_1+2\theta_2+\alpha_2')+\cdots$$

$$+(r_{2n-2}+r_{2n-1})\cos(2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-1}')$$

$$+r_{2n}\cos(2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha_n')$$

$$y=(r_2+r_3)\sin(2\theta_1+\alpha_1')+(r_4+r_5)\sin(2\theta_1+2\theta_2+\alpha_2')+\cdots$$

$$+(r_{2n-2}+r_{2n-1})\sin(2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-1}')$$

$+r_{2n}\sin(2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha'_n)$

將 Γ 圖形平移向量$(0,r_1)$，設得圖形Γ'，則Γ'參數式為

$x=-r_1\theta_1+(r_2+r_3)\cos(2\theta_1+\alpha'_1)+(r_4+r_5)\cos(2\theta_1+2\theta_2+\alpha'_2)+\cdots$

$+(r_{2n-2}+r_{2n-1})\cos(2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha'_{n-1})$

$+r_{2n}\cos(2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha'_n)$

$y=r_1+(r_2+r_3)\sin(2\theta_1+\alpha'_1)+(r_4+r_5)\sin(2\theta_1+2\theta_2+\alpha'_2)+\cdots$

$+(r_{2n-2}+r_{2n-1})\sin(2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha'_{n-1})$

$+r_{2n}\sin(2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha'_n)$

由 P.152【定理五十】知

Γ'即為 n 階齒輪直線圖形，且準線為$y=r_1$

將Γ'平移向量$(0,-r_1)$得Γ

故Γ為 n 階齒輪直線圖形，且準線為$y=0$

∴Γ ∈ B，且兩種定義的準線均為$y=0$

∴A 為 B 的子集合，且兩種定義下的準線是一樣的 ----------(*)

2. 若Γ ∈ B，由 P.140 n 階齒輪直線圖形的定義

將圖形坐標化，

我們可以定坐標，令 L 為x軸，圓O_1與L切於(0,0)，設圓O_1半徑為$|r_1|$

由 P.150 的定義知：$r_1>0$表圓O_1在 L 的上方滾動，$r_1<0$表圓O_1在 L 的下方滾動

則準線(O_1圓心的軌跡)為$y = r_1$

由 P.152【定理五十】知：Γ軌跡參數式可表示成

$$x = -r_1\theta_1 + (r_2 + r_3)\cos(2\theta_1 + \alpha_1') + (r_4 + r_5)\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2') + \cdots$$

$$+(r_{2n-2} + r_{2n-1})\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-1}')$$

$$+r_{2n}\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_n')$$

$$y = r_1 + (r_2 + r_3)\sin(2\theta_1 + \alpha_1') + (r_4 + r_5)\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2') + \cdots$$

$$+(r_{2n-2} + r_{2n-1})\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-1}')$$

$$+r_{2n}\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_n')$$

其中r_1，r_2，⋯，$r_{2n} \neq 0$，$r_2 + r_3$，$r_4 + r_5$，⋯，$r_{2n-2} + r_{2n-1}$均不為 0，

且$\theta_1 = \theta$，$\theta_k = \frac{r_2 r_4 r_6 \cdots r_{2k-2}}{r_3 r_5 r_7 \cdots r_{2k-1}}\theta$ $(2 \leq k \leq n$，$k \in N)$，

即

$$x = -r_1\theta + (r_2 + r_3)\cos(2\theta + \alpha_1') + (r_4 + r_5)\cos\left(\left(2 + 2 \times \frac{r_2}{r_3}\right)\theta + \alpha_2'\right) + \cdots +$$

$$(r_{2n-2} + r_{2n-1})\cos\left(\left(2 + 2 \times \frac{r_2}{r_3} + 2 \times \frac{r_2 r_4}{r_3 r_5} + \cdots + 2 \times \frac{r_2 r_4 r_6 \ldots r_{2n-4}}{r_3 r_5 r_7 \ldots r_{2n-3}}\right)\theta + \alpha_{n-1}'\right) +$$

$$r_{2n}\cos\left(\left(2 + 2\frac{r_2}{r_3} + 2\frac{r_2 r_4}{r_3 r_5} + \cdots + 2 \times \frac{r_2 r_4 r_6 \ldots r_{2n-4}}{r_3 r_5 r_7 \ldots r_{2n-3}} + \frac{r_2 r_4 r_6 \ldots r_{2n-2}}{r_3 r_5 r_7 \ldots r_{2n-1}}\right)\theta + \alpha_n'\right)$$

----------(3)

$$y = r_1 + (r_2 + r_3)\sin(2\theta + \alpha_1') + (r_4 + r_5)\sin\left(\left(2 + 2 \times \frac{r_2}{r_3}\right)\theta + \alpha_2'\right) + \cdots +$$

$$(r_{2n-2} + r_{2n-1})\sin\left(\left(2 + 2 \times \frac{r_2}{r_3} + 2 \times \frac{r_2 r_4}{r_3 r_5} + \cdots + 2 \times \frac{r_2 r_4 r_6 \ldots r_{2n-4}}{r_3 r_5 r_7 \ldots r_{2n-3}}\right)\theta + \alpha_{n-1}'\right) +$$

$$r_{2n}\sin\left(\left(2+2\frac{r_2}{r_3}+2\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+\cdots+2\times\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}+\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-1}}\right)\theta+\alpha'_n\right)$$

----------(4)

令$t=\theta+\frac{\alpha'_1}{2}(\therefore\theta=t-\frac{\alpha'_1}{2})$，$v=-r_1$，$R_1=r_2+r_3$，$R_2=r_4+r_5$，

$R_3=r_6+r_7$，…，$R_{n-1}=r_{2n-2}+r_{2n-1}$，$R_n=r_{2n}$

$\omega_1=2$，$\omega_2=2\times\frac{r_2}{r_3}$，$\omega_3=2\times\frac{r_2r_4}{r_3r_5}$，…，$\omega_{n-1}=2\times\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}$，

$\omega_n=\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-1}}$，

($\because r_2+r_3$，r_4+r_5，⋯，$r_{2n-2}+r_{2n-1}$，r_{2n}均不為0 $\therefore R_1$，R_2，R_3，…，$R_n\neq 0$

$\because r_1$，r_2，⋯，$r_{2n}\neq 0$ $\therefore\omega_1$，ω_2，⋯，$\omega_n\neq 0$)

令$\alpha_1=-\alpha'_1\left(1+\frac{r_2}{r_3}\right)+\alpha'_2$， $\alpha_2=-\alpha'_1\left(1+\frac{r_2}{r_3}+\frac{r_2r_4}{r_3r_5}\right)+\alpha'_3$， ⋯⋯，

$\alpha_{n-2}=-\alpha'_1\left(1+\frac{r_2}{r_3}+\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+\cdots+\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}\right)+\alpha'_{n-1}$，

$$\alpha_{n-1}=-\alpha'_1\left(1+\frac{r_2}{r_3}+\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+\cdots+\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}+\frac{1}{2}\times\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-1}}\right)+\alpha'_n$$

則$-r_1\theta=v\left(t-\frac{\alpha'_1}{2}\right)=vt-\frac{v\alpha'_1}{2}=vt+\frac{r_1\alpha'_1}{2}=\frac{r_1\alpha'_1}{2}+vt$，

$\omega_1t=2t=2\theta+\alpha'_1$

$\omega_2t+\omega_1t+\alpha_1=(\omega_1+\omega_2)t+\alpha_1$

$$=\left(2+2\times\frac{r_2}{r_3}\right)\left(\theta+\frac{\alpha'_1}{2}\right)-\alpha'_1\left(1+\frac{r_2}{r_3}\right)+\alpha'_2$$

$$=\left(2\times\frac{r_2}{r_3}+2\right)\theta+\alpha'_2，$$

……

$$\omega_{n-1}t+\omega_{n-2}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-2}=(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\cdots+\omega_{n-1})t+\alpha_{n-2}$$

$$=\left(2+2\times\frac{r_2}{r_3}+2\times\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+\cdots+2\times\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}\right)\left(\theta+\frac{\alpha_1'}{2}\right)$$
$$-\alpha_1'\left(1+\frac{r_2}{r_3}+\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+\cdots+\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}\right)+\alpha_{n-1}'$$

$$=\left(2+2\times\frac{r_2}{r_3}+2\times\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+\cdots+2\times\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}\right)\theta+\alpha_{n-1}'$$

$$\omega_n t+\omega_{n-1}t+\omega_{n-2}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1}$$

$$=(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\cdots+\omega_n)t+\alpha_{n-1}$$

$$=\left(2+2\times\frac{r_2}{r_3}+2\times\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+\cdots+2\times\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}+\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-1}}\right)\left(\theta+\frac{\alpha_1'}{2}\right)$$
$$-\alpha_1'\left(1+\frac{r_2}{r_3}+\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+\cdots+\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}+\frac{1}{2}\times\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-1}}\right)+\alpha_n'$$

$$=\left(2+2\times\frac{r_2}{r_3}+2\times\frac{r_2r_4}{r_3r_5}+\cdots+2\times\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-4}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-3}}+\frac{r_2r_4r_6\ldots r_{2n-2}}{r_3r_5r_7\ldots r_{2n-1}}\right)\theta+\alpha_n'$$

代入(3)(4)兩式，得

$$x=\frac{r_1\alpha_1'}{2}+vt+R_1\cos(\omega_1 t)+R_2\cos(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots+R_{n-1}\cos(\omega_{n-1}t+$$
$$\omega_{n-2}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-2})+R_n\cos(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$$

$$y=r_1+R_1\sin(\omega_1 t)+R_2\sin(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)$$
$$+\cdots+R_{n-1}\sin(\omega_{n-1}t+\omega_{n-2}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-2})$$
$$+R_n\sin(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$$

將 Γ 圖形平移向量$(-\frac{r_1\alpha_1'}{2},-r_1)$，設得到圖形$\Gamma'$，則$\Gamma'$參數式為

$$x=vt+R_1\cos(\omega_1 t)+R_2\cos(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots+R_{n-1}\cos(\omega_{n-1}t+$$
$$\omega_{n-2}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-2})+R_n\cos(\omega_n t+\omega_{n-1}t+\cdots+\omega_1 t+\alpha_{n-1})$$

$$y=R_1\sin(\omega_1 t)+R_2\sin(\omega_2 t+\omega_1 t+\alpha_1)+\cdots$$

$+R_n \sin(\omega_n t + \omega_{n-1} t + \cdots + \omega_1 t + \alpha_{n-1})$

由 P.139【定理四十六】知：Γ'即為 n 階行星彗星圖形，且準線為x軸：$y = 0$

將Γ'平移向量$\left(\frac{r_1 \alpha_1'}{2}, r_1\right)$可得$\Gamma$

故Γ為 n 階行星彗星圖形，且準線為$y = r_1$

$\therefore \Gamma \in A$，且兩種定義的準線均為$y = r_1$

$\therefore$B是A的子集合，且兩種定義下的準線是一樣的 ----------(#)

由(*)(#)知：$A = B$，而且兩種定義下的準線是一樣的 得證■

(十三) P.133 所提到的操控旋轉角度t值的 n 種不同倍率外加一組伸縮，加權點M之軌跡為 n 階齒輪直線圖形(也是 n 階行星彗星圖形)

在證明完 n 階行星彗星圖形與 n 階齒輪直線圖形的等價性後，我們接著探討它們與原本操控旋轉角度t值的 n 種不同倍率，外加一組伸縮命題的關聯性，並發現加權點M之軌跡即是 n 階齒輪直線圖形(也是 n 階行星彗星圖形)，我們將這個命題寫成【定理五十二】。

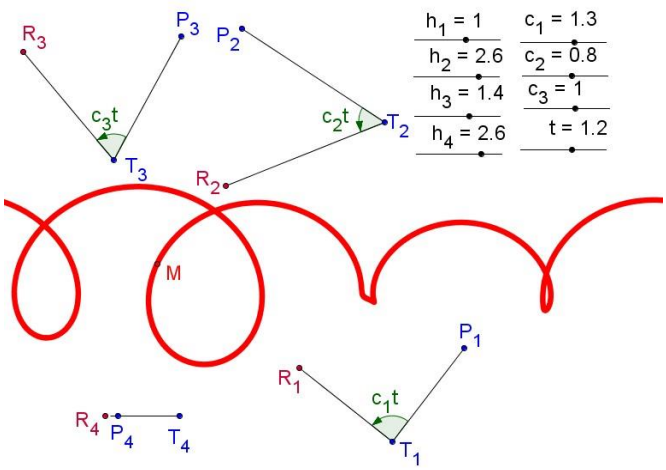
【定理五十二】加權點的 n 階齒輪直線圖形

設T_1，T_2，$\cdots$，T_n，T_{n+1}，P_1，P_2，$\cdots$，P_n，P_{n+1}均為平面上的點，

T_k與P_k相異$(k=1,2,\cdots,n+1)$。今以T_1為旋轉中心將P_1旋轉$c_1 t$至R_1，以T_2為旋轉中心將P_2旋轉$c_2 t$至R_2，$\cdots$，以T_n為旋轉中心將P_n旋轉$c_n t$至R_n，以T_{n+1}為伸縮中心將P_{n+1}伸縮t倍至R_{n+1}，其中c_1，c_2，$\cdots$，c_n兩兩相異，且均不為 0。設 M 為R_1，R_2，R_3，$\cdots$，R_{n+1}分別以h_1，h_2，$\cdots$，h_n，h_{n+1}為加權倍率得到的加權點，T 為T_1，T_2，$\cdots$，T_n，T_{n+1}分別以h_1，h_2，$\cdots$，h_n，h_{n+1}為加權倍率得到的加權點。則隨著t的變化，

M之軌跡為n階齒輪直線圖形(也是n階行星彗星圖形)，此圖形的準線平行$\overline{T_{n+1}P_{n+1}}$且過T

【證明】



我們將圖形坐標化，定x軸，y軸，使x軸平行$\overline{T_{n+1}P_{n+1}}$

設

$T_1(a_1,b_1)$，$T_2(a_2,b_2)$，$T_3(a_3,b_3)$，…，$T_n(a_n,b_n)$ ，$T_{n+1}(a_{n+1},b_{n+1})$

$P_1(p_1,q_1)$， $P_2(p_2,q_2)$，$P_3(p_3,q_3)$，…，$P_n(p_n,q_n)$，$P_{n+1}(p_{n+1},q_{n+1})$

$\because$x軸平行$\overline{T_{n+1}P_{n+1}}$

$\therefore b_{n+1}=q_{n+1}$

$\because$以T_1為旋轉中心將P_1旋轉c_1t至R_1，以T_2為旋轉中心將P_2旋轉c_2t至R_2，…，以T_n為旋轉中心將P_n旋轉c_nt至R_n，令$M'=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kR_k}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$

由【定理三十八】的證明過程中 P.113(3)(4)式(在此θ以 t 表示)知：

令$p_k-a_k=v_k\cos\delta_k, q_k-b_k=v_k\sin\delta_k\ (k=1，2，…，n)$，

($\because p_k-a_k=v_k\cos\delta_k, q_k-b_k=v_k\sin\delta_k$，又$T_k$與$P_k$相異$\therefore(a_k,b_k)\neq(p_k,q_k)$ $\therefore$ p_k-a_k與q_k-b_k不會同時為0 $\therefore v_k\neq 0(k=1，2，…，n)$)

則$M'(x',y')$的坐標可表示成

$$x'=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}h_k}[h_1v_1\cos(\delta_1+c_1t)+h_2v_2\cos(\delta_2+c_2t)+\cdots+h_nv_n\cos(\delta_n+c_nt)+(h_1a_1+h_2a_2+\cdots+h_na_n)]$$

$$y' = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}[h_1\, v_1 \sin(\delta_1 + c_1 t) + h_2\, v_2 \sin(\delta_2 + c_2 t) + \cdots + h_n\, v_n \sin(\delta_n + c_n t) +$$

$$(h_1 b_1 + h_2 b_2 + \cdots + h_n b_n)]$$

$\because$以T_{n+1}為伸縮中心將P_{n+1}伸縮t倍至R_{n+1}

$\therefore \overrightarrow{T_{n+1}R_{n+1}} = t\overrightarrow{T_{n+1}P_{n+1}}$

令R_{n+1}坐標為(x_{n+1}, y_{n+1})

則$(x_{n+1} - a_{n+1}, y_{n+1} - b_{n+1}) = t(p_{n+1} - a_{n+1}, q_{n+1} - b_{n+1})$

$\therefore x_{n+1} = t(p_{n+1} - a_{n+1}) + a_{n+1}$，

$y_{n+1} = t(q_{n+1} - b_{n+1}) + b_{n+1} = b_{n+1}(\because q_{n+1} = b_{n+1})$

$\therefore R_{n+1}$坐標為$(t(p_{n+1} - a_{n+1}) + a_{n+1}$，$b_{n+1})$

$$M = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n+1} h_k} = \frac{(\sum_{k=1}^{n} h_k R_k) + h_{n+1} R_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1} h_k} = \frac{M' \sum_{k=1}^{n} h_k + h_{n+1} R_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1} h_k}$$

設$M(x, y)$，$\because M = \frac{M' \sum_{k=1}^{n} h_k + h_{n+1} R_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1} h_k}$ $\therefore$

$$x = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} h_k}\Big[\, h_1 v_1 \cos(c_1 t + \delta_1) + h_2 v_2 \cos(c_2 t + \delta_2) + \cdots + h_n v_n \cos(c_n t + \delta_n) +$$

$$(h_1 a_1 + h_2 a_2 + \cdots + h_n a_n) + h_{n+1}\big((p_{n+1} - a_{n+1})t + a_{n+1}\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} h_k}[h_1 v_1 \cos(c_1 t + \delta_1) + h_2 v_2 \cos(c_2 t + \delta_2) + \cdots + h_n v_n \cos(c_n t + \delta_n) +$$

$$h_{n+1}(p_{n+1} - a_{n+1})t + (h_1 a_1 + h_2 a_2 + \cdots + h_n a_n + h_{n+1} a_{n+1})] \text{ ----------(*)}$$

$$y = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} h_k}[h_1 v_1 \sin(c_1 t + \delta_1) + h_2 v_2 \sin(c_2 t + \delta_2) + \cdots + h_n v_n \sin(c_n t + \delta_n) +$$

$$(h_1 b_1 + h_2 b_2 + \cdots + h_n b_n + h_{n+1} b_{n+1})] \text{ ----------(\#)}$$

令$\frac{h_i v_i}{\sum_{k=1}^{n+1} h_k} = r_i$，$\frac{h_i a_i}{\sum_{k=1}^{n+1} h_k} = a_i'$，$\frac{h_i b_i}{\sum_{k=1}^{n+1} h_k} = b_i'$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

令$r_{n+1}=\frac{h_{n+1}(p_{n+1}-a_{n+1})}{\sum_{k=1}^{n+1}h_k}$，$a'_{n+1}=\frac{h_{n+1}a_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1}h_k}$，$b'_{n+1}=\frac{h_{n+1}b_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1}h_k}$

$(\because v_i\neq 0$，$h_i\neq 0\ \ \therefore r_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$

$\because T_{n+1}$與P_{n+1}相異，又$b_{n+1}=q_{n+1}\ \ \therefore a_{n+1}\neq p_{n+1}$

$\therefore r_{n+1}\neq 0)$

代入(*)(#)，得

$$x=r_1\cos(c_1t+\delta_1)+r_2\cos(c_2t+\delta_2)+\cdots+r_n\cos(c_nt+\delta_n)+r_{n+1}t$$
$$+(a'_1+a'_2+\cdots+a'_n+a'_{n+1})$$

$$y=r_1\sin(c_1t+\delta_1)+r_2\sin(c_2t+\delta_2)+\cdots+r_n\sin(c_nt+\delta_n)$$
$$+(b'_1+b'_2+\cdots+b'_n+b'_{n+1})$$

其中$a'_1+a'_2+\cdots+a'_n+a'_{n+1}=(\sum_{i=1}^{n}\frac{h_ia_i}{\sum_{k=1}^{n+1}h_k})+\frac{h_{n+1}a_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1}h_k}=\frac{\sum_{k=1}^{n+1}h_ka_k}{\sum_{k=1}^{n+1}h_k}$

$b'_1+b'_2+\cdots+b'_n+b'_{n+1}=(\sum_{i=1}^{n}\frac{h_ib_i}{\sum_{k=1}^{n+1}h_k})+\frac{h_{n+1}b_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1}h_k}=\frac{\sum_{k=1}^{n+1}h_kb_k}{\sum_{k=1}^{n+1}h_k}$

$\therefore(a'_1+a'_2+\cdots+a'_n+a'_{n+1}$，$b'_1+b'_2+\cdots+b'_n+b'_{n+1})$恰為

T_1，T_2，$\cdots$，T_n，T_{n+1}分別以h_1，h_2，$\cdots$，h_n，h_{n+1}為加權倍率得到的加權點 T

----------(*)

設$M(x,y)$的軌跡圖形為Γ，

將Γ平移向量$\left(-(a'_1+a'_2+\cdots+a'_n+a'_{n+1})，-(b'_1+b'_2+\cdots+b'_n+b'_{n+1})\right)$，

設得到圖形Γ'，則Γ'參數式為

$$x=r_{n+1}t+r_1\cos(c_1t+\delta_1)+r_2\cos(c_2t+\delta_2)+\cdots+r_n\cos(c_nt+\delta_n)\text{----------}(5)$$

$$y=r_1\sin(c_1t+\delta_1)+r_2\sin(c_2t+\delta_2)+\cdots+r_n\sin(c_nt+\delta_n)\ \ \text{----------}(6)$$

令$v = r_{n+1}$，$\omega_1 = c_1$，$\omega_2 = c_2 - c_1$，$\omega_3 = c_3 - c_2$，…，$\omega_{n-1} = c_{n-1} - c_{n-2}$，

$\omega_n = c_n - c_{n-1}$

$t' = t + \frac{\delta_1}{c_1}$，$\alpha_1 = \frac{-c_2}{c_1}\delta_1 + \delta_2$，$\alpha_2 = \frac{-c_3}{c_1}\delta_1 + \delta_3$，⋯，$\alpha_{n-1} = \frac{-c_n}{c_1}\delta_1 + \delta_n$

則$\omega_1 = c_1$，$\omega_2 + \omega_1 = c_2$，$\omega_3 + \omega_2 + \omega_1 = c_3$，…，$\omega_n + \omega_{n-1} + \cdots + \omega_1 = c_n$

$t = t' - \frac{\delta_1}{c_1}$ $\therefore c_1 t + \delta_1 = c_1\left(t' - \frac{\delta_1}{c_1}\right) + \delta_1 = c_1 t' = \omega_1 t'$

$c_2 t + \delta_2 = c_2\left(t' - \frac{\delta_1}{c_1}\right) + \delta_2 = c_2 t' - \frac{c_2}{c_1}\delta_1 + \delta_2 = (\omega_2 + \omega_1)t' + \alpha_1$，⋯，

$c_n t + \delta_n = c_n\left(t' - \frac{\delta_1}{c_1}\right) + \delta_n = c_n t' - \frac{c_n}{c_1}\delta_1 + \delta_n = (\omega_n + \omega_{n-1} + \cdots + \omega_1)t' + \alpha_{n-1}$

$r_{n+1} t = v\left(t' - \frac{\delta_1}{c_1}\right) = vt' - \frac{\delta_1}{c_1} v$

代入(5) (6)兩式，得Γ'參數式為

$$x = vt' - \frac{\delta_1}{c_1} v + r_1 \cos(\omega_1 t') + r_2 \cos\big((\omega_2 + \omega_1)t' + \alpha_1\big) + \cdots + r_n \cos((\omega_n + \omega_{n-1} + \cdots + \omega_1)t' + \alpha_{n-1})$$

$$y = r_1 \sin(\omega_1 t') + r_2 \sin\big((\omega_2 + \omega_1)t' + \alpha_1\big) + \cdots + r_n \sin\big((\omega_n + \omega_{n-1} + \cdots + \omega_1)t' + \alpha_{n-1}\big)$$

將Γ'圖形平移向量$(\frac{\delta_1}{c_1} v，0)$，設得到圖形$\Gamma''$，

則Γ''參數式為

$$x = vt' + r_1 \cos(\omega_1 t') + r_2 \cos\big((\omega_2 + \omega_1)t' + \alpha_1\big) + \cdots + r_n \cos((\omega_n + \omega_{n-1} + \cdots + \omega_1)t' + \alpha_{n-1})$$

$$y = r_1 \sin(\omega_1 t') + r_2 \sin\big((\omega_2 + \omega_1)t' + \alpha_1\big) + \cdots$$
$$+ r_n \sin\big((\omega_n + \omega_{n-1} + \cdots + \omega_1)t' + \alpha_{n-1}\big)$$

此即為 P.139【定理四十六】參數式的形式

所以Γ''圖形為 n 階行星彗星圖形，且O_0的軌跡為 x 軸，∴準線為 x 軸

∵將Γ'圖形平移向量$(\frac{\delta_1}{c_1}v，0)$，得到圖形$\Gamma''$

∴將Γ''圖形平移向量$(-\frac{\delta_1}{c_1}v，0)$，得到圖形$\Gamma'$

∴Γ'圖形為 n 階行星彗星圖形，準線也為 x 軸

∵將Γ平移向量$\big(-(a_1' + a_2' + \cdots + a_n' + a_{n+1}')，-(b_1' + b_2' + \cdots + b_n' + b_{n+1}')\big)$，得到圖形$\Gamma'$

∴將Γ'平移向量$\big(a_1' + a_2' + \cdots + a_n' + a_{n+1}'，b_1' + b_2' + \cdots + b_n' + b_{n+1}'\big)$，得到圖形$\Gamma$

∴Γ圖形為 n 階行星彗星圖形，

準線平行 x 軸且過點$\big(a_1' + a_2' + \cdots + a_n' + a_{n+1}'，b_1' + b_2' + \cdots + b_n' + b_{n+1}'\big)$

由(*)知$\big(a_1' + a_2' + \cdots + a_n' + a_{n+1}'，b_1' + b_2' + \cdots + b_n' + b_{n+1}'\big)$恰為 T 點，

∴Γ圖形為 n 階行星彗星圖形，準線平行 x 軸且過 T 點

∵x軸平行$\overline{T_{n+1}P_{n+1}}$ ∴準線平行$\overline{T_{n+1}P_{n+1}}$且過 T 點

又由 P.156【定理五十一】知：n 階行星彗星圖形也就是 n 階齒輪直線圖形，

∴Γ圖形為 n 階齒輪直線圖形，也是 n 階行星彗星圖形，準線平行$\overline{T_{n+1}P_{n+1}}$且過 T 點

得證■

(十四)　將【定理五十二】延伸至廣義的情況

我們一樣將命題延伸至廣義的情況，有m_1組旋轉的旋轉角度倍率為c_1t，有m_2組旋轉的旋轉角度倍率為c_2t，…，有m_n組旋轉的旋轉角度倍率為c_nt，且每一個旋轉完成後都會再對旋轉中心作伸縮，多組旋轉伸縮後可得到一些點；同時，有 m 組伸縮倍率為$d_kt+b_k(k=1，2，\ldots，m)$的伸縮在進行，m組伸縮後也得到一些點。將所有得到的點作加權，設加權點為 M。我們發現 M 的軌跡仍然是 n 階齒輪直線圖形(也是 n 階行星彗星圖形)，寫成【定理五十三】。

【定理五十三】加權點的 n 階齒輪直線圖形(二)

設$T_{1\,1}$，$T_{1\,2}$，…，$T_{1\,m_1}$，$T_{2\,1}$，$T_{2\,2}$，…，$T_{2\,m_2}$，…，$T_{n\,1}$，$T_{n\,2}$，…，$T_{n\,m_n}$，及$P_{1\,1}$，$P_{1\,2}$，…，$P_{1\,m_1}$，$P_{2\,1}$，$P_{2\,2}$，…，$P_{2\,m_2}$，…，$P_{n\,1}$，$P_{n\,2}$，…，$P_{n\,m_n}$均為平面上的點，

以$T_{1\,k}$為旋轉中心，將$P_{1\,k}$旋轉$c_1t+a_{1\,k}$，再伸縮s_{1k}倍得$R_{1\,k}$點$(k=1,2,\cdots,m_1)$；

以$T_{2\,k}$為旋轉中心，將$P_{2\,k}$旋轉$c_2t+a_{2\,k}$，再伸縮s_{2k}倍得$R_{2\,k}$點$(k=1,2,\cdots,m_2)$；

……

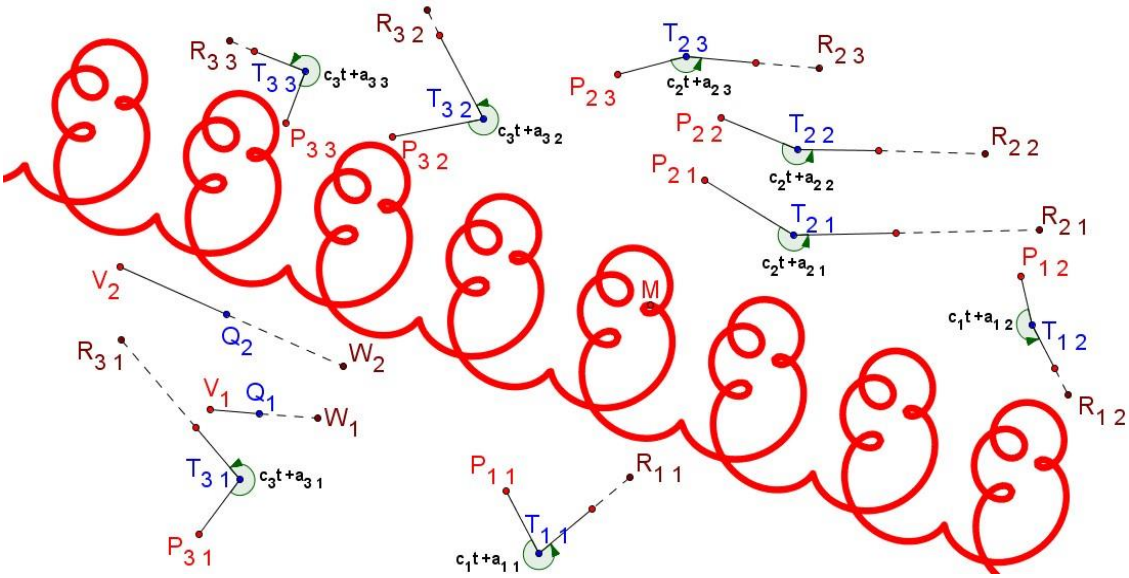
以$T_{n\,k}$為旋轉中心，將$P_{n\,k}$旋轉$c_nt+a_{n\,k}$，再伸縮s_{nk}倍得$R_{n\,k}$點$(k=1,2,\cdots,m_n)$。

設V_1，V_2，…，V_m，Q_1，Q_2，…，Q_m均為平面上的點，

以V_k為伸縮中心，將Q_k 伸縮(d_kt+b_k)倍得W_k點$(k=1，2，\ldots，m)$

令 M 為將$R_{1\,1},R_{1\,2},\cdots,R_{1\,m_1},R_{2\,1},R_{2\,2},\cdots,R_{2\,m_2},\cdots\cdots,R_{n\,1},R_{n\,2},\cdots,R_{n\,m_n}$，$W_1,W_2,\cdots,W_m$分別以$h_{1\,1},h_{1\,2},\cdots,h_{1\,m_1},h_{2\,1},h_{2\,2},\cdots,h_{2\,m_2},\cdots,h_{n\,1},h_{n\,2},\cdots,h_{n\,m_n}$，$l_1,l_2,\cdots,l_m$為加權倍率得到的加權點，則隨著 t 改變，M 點軌跡為 n 階齒輪直線圖形(也是 n 階行星彗星圖形)

【證明】



已知：

以$T_{1\,k}$為旋轉中心，將$P_{1\,k}$旋轉$c_1t+a_{1\,k}$，再伸縮s_{1k}倍得$R_{1\,k}$點$(k=1,2,\cdots,m_1)$；以$T_{2\,k}$為旋轉中心，將$P_{2\,k}$旋轉$c_2t+a_{2\,k}$，再伸縮s_{2k}倍得$R_{2\,k}$點$(k=1,2,\cdots,m_2)$；……；以$T_{n\,k}$為旋轉中心，將$P_{n\,k}$旋轉$c_nt+a_{n\,k}$，再伸縮s_{nk}倍得$R_{n\,k}$點$(k=1,2,\cdots,m_n)$

此條件與 P.116【定理三十九】完全相同(θ改成 t)，參考【定理三十九】的證明過程

令$R_{1\,1},R_{1\,2},\ldots,R_{1\,m_1}$分別以$h_{1\,1},h_{1\,2},\ldots,h_{1\,m_1}$為加權倍率得到的加權點為$R_1'$，

$R_{2\,1},R_{2\,2},\ldots,R_{2\,m_2}$分別以$h_{2\,1},h_{2\,2},\ldots,h_{2\,m_2}$為加權倍率得到的加權點為$R_2'$，

……

$R_{n\,1},R_{n\,2},\ldots,R_{n\,m_n}$分別以$h_{n\,1},h_{n\,2},\ldots,h_{n\,m_n}$為加權倍率得到的加權點為$R_n'$

令$T_{1\,1},T_{1\,2},\ldots,T_{1\,m_1}$分別以$h_{1\,1},h_{1\,2},\ldots,h_{1\,m_1}$為加權倍率得到的加權點為$T_1'$，

$T_{2\,1},T_{2\,2},\ldots,T_{2\,m_2}$分別以$h_{2\,1},h_{2\,2},\ldots,h_{2\,m_2}$為加權倍率得到的加權點為$T_2'$，

……

$T_{n\,1}, T_{n\,2}, \dots, T_{n\,m_n}$分別以$h_{n\,1}, h_{n\,2}, \dots, h_{n\,m_n}$為加權倍率得到的加權點為$T_n'$

由【定理三十九】證明過程中，P.119 敘述(3)知：(θ改成 t)

可找到點P_1'，P_2'，…，P_n'(P_1'，P_2'，…，P_n'與t無關)，滿足：

以T_1'為旋轉中心，將P_1'旋轉c_1t角可得到點R_1'；以T_2'為旋轉中心，將P_2'旋轉c_2t角可得到點R_2'；…；以T_n'為旋轉中心，將P_n'旋轉c_nt角可得到點R_n'

----------(*)

∵以V_1為伸縮中心，將Q_1 伸縮(d_1t+b_1)倍得W_1點，以V_2為伸縮中心，將Q_2 伸縮(d_2t+b_2)倍得W_2點，…，以V_m為伸縮中心，將Q_m 伸縮(d_mt+b_m)倍得W_m點

令$W_1, W_2, \cdots, W_m$分別以$l_1, l_2, \cdots, l_m$,為加權倍率得到的加權點為W

由 P.129【定理四十三】知：

在平面上必能找到兩點Q'，V'，滿足：以V'為伸縮中心，將Q'伸縮 t 倍可得 W。

----------(#)

∵M 為$R_{1\,1}, R_{1\,2}, \cdots, R_{1\,m_1}, R_{2\,1}, R_{2\,2}, \cdots, R_{2\,m_2}, \cdots\cdots, R_{n\,1}, R_{n\,2}, \cdots, R_{n\,m_n}$,

$W_1, W_2, \cdots, W_m$分別以$h_{1\,1}, h_{1\,2}, \cdots, h_{1\,m_1}, h_{2\,1}, h_{2\,2}, \cdots, h_{2\,m_2}, \cdots, h_{n\,1}, h_{n\,2}, \cdots, h_{n\,m_n}$,

$l_1, l_2, \cdots, l_m$為加權倍率得到的加權點，所以

$$M=\frac{\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k}R_{1k}+\sum_{k=1}^{m_2} h_{2k}R_{2k}+\cdots+\sum_{k=1}^{m_n} h_{nk}R_{nk}+\sum_{k=1}^{m} l_kW_k}{\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k}+\sum_{k=1}^{m_2} h_{2k}+\cdots+\sum_{k=1}^{m_n} h_{nk}+\sum_{k=1}^{m} l_k}$$

設 $\sum_{k=1}^{m_1} h_{1k}=h_{1\,1}+h_{1\,2}+\cdots+h_{1\,m_1}=h_1$ ，

$\sum_{k=1}^{m_2} h_{2k}=h_{2\,1}+h_{2\,2}+\cdots+h_{2\,m_2}=h_2$

……

$\sum_{k=1}^{m_n} h_{nk}=h_{n\,1}+h_{n\,2}+\cdots+h_{n\,m_n}=h_n$

$\sum_{k=1}^{m} l_k=l_1+l_2+\cdots+l_m=l$

則將$R_1', R_2', \cdots, R_n', W$分別以$h_1, h_2, \cdots, h_n, l$為加權倍率得到的加權點為

$$\frac{h_1R_1'+h_2R_2'+\cdots+h_nR_n'+lW}{h_1+h_2+\cdots+h_n+l}$$

$$=\frac{(\sum_{k=1}^{m_1}h_{1k})\times\frac{\sum_{k=1}^{m_1}h_{1k}R_{1k}}{\sum_{k=1}^{m_1}h_{1k}}+(\sum_{k=1}^{m_2}h_{2k})\times\frac{\sum_{k=1}^{m_2}h_{2k}R_{2k}}{\sum_{k=1}^{m_2}h_{2k}}+\cdots+(\sum_{k=1}^{m_n}h_{nk})\times\frac{\sum_{k=1}^{m_n}h_{nk}R_{nk}}{\sum_{k=1}^{m_n}h_{nk}}+(\sum_{k=1}^{m}l_k)\times\frac{\sum_{k=1}^{m}l_kW_k}{\sum_{k=1}^{m}l_k}}{\sum_{k=1}^{m_1}h_{1k}+\sum_{k=1}^{m_2}h_{2k}+\cdots+\sum_{k=1}^{m_n}h_{nk}+\sum_{k=1}^{m}l_k}$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{m_1}h_{1k}R_{1k}+\sum_{k=1}^{m_2}h_{2k}R_{2k}+\cdots+\sum_{k=1}^{m_n}h_{nk}R_{nk}+\sum_{k=1}^{m}l_kW_k}{\sum_{k=1}^{m_1}h_{1k}+\sum_{k=1}^{m_2}h_{2k}+\cdots+\sum_{k=1}^{m_n}h_{nk}}=M$$

∴將$R_1', R_2', \cdots, R_n'$， W分別以$h_1, h_2, \cdots, h_n, l$為加權倍率得到的加權點為 M

又由敘述(*)(#)知：

以T_1'為旋轉中心，將P_1'旋轉c_1t角可得到點R_1'；以T_2'為旋轉中心，將P_2'旋轉c_2t角可得到點R_2'；…；以T_n'為旋轉中心，將P_n'旋轉c_nt角可得到點R_n'；以V'為伸縮中心，將Q'伸縮 t 倍可得 W

由【定理五十二】知：

隨著 t 改變，M 點軌跡為 n 階齒輪直線圖形(也是 n 階行星彗星圖形)

得證■

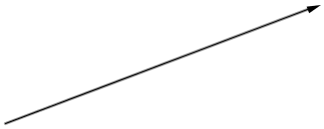
九、 空間中的橢圓

(一) 介紹有向直線及有向直線的旋轉

在研究完平面幾何中大部分的情況後，我們想更進一步研究命題在空間中的情形，因此找尋了一些跟空間幾何相關的資料研讀。在此我們先對有向直線及有向直線的旋轉作說明：

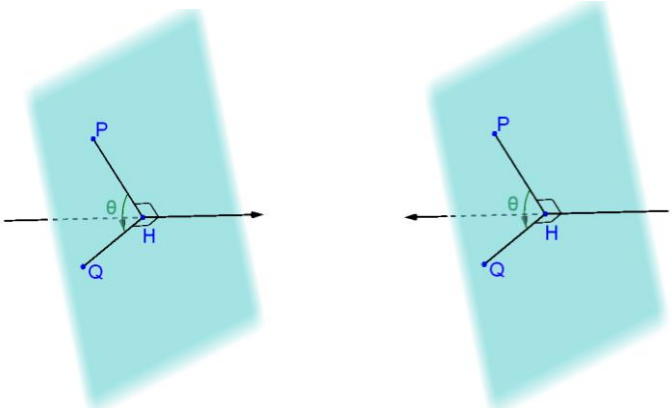
1. **定義有向直線：**

我們將直線指定兩個相反的方向，如果指定其中一個為正方向(如圖中用箭頭表示)，另一個就是負方向，指定了正方向的直線稱為有向直線。例如：指定從O(0,0)到E(1,0)的方向為正方向的有向直線，稱為x軸。



2. **定義有向直線的旋轉：**

設L為一有向直線，P為空間中一點，H為P在L上的投影點，E為過P，H且與L垂直的平面，在平面E上以H為旋轉中心將P旋轉θ至Q，則稱

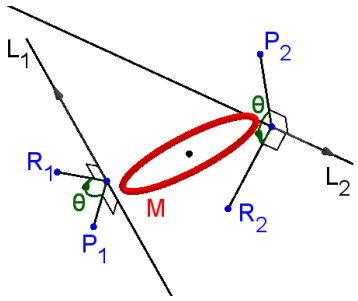


以有向直線L為旋轉軸，將P旋轉θ至Q。θ的正負符號以右手定則來規定：伸出右手大拇指朝向有向直線的正方向，另外四指彎曲。若旋轉方向與四指彎曲

的方向相同，則稱此旋轉方向為正；若旋轉方向與四指彎曲的方向不同，則稱此旋轉方向為負。例如：上左圖中$\theta > 0$，上右圖中$\theta < 0$

(二) 空間中橢圓的思考過程

我們發現空間中的旋轉，可由有向直線為軸將點作旋轉，因此只要當該直線方向相反時，即可視為旋轉角度反向；換個方式講，就是從旋轉θ變為旋轉$(-\theta)$。這樣的形式即是過去我們所證明的橢圓命題形式(見 P.46)，因此我們直覺猜測，當空間中有一些點分別以一些有向直線為軸作旋轉時，旋轉角度若皆為θ，加權點 M 的軌跡便很有可能是橢圓。我們後來用 Geogebra 3D 作了一些實際模擬，發現它的確是橢圓的軌跡，寫成【定理五十五】空間橢圓。



(三) 介紹引理

證明【定理五十五】空間橢圓之前，得先知道空間中橢圓的參數式，因此先介紹一個引理。

【引理五十四】空間橢圓參數式

設Γ為空間中的曲線，則

Γ之參數式可表示成$\begin{cases} x = a\cos\theta + b\sin\theta \\ y = c\cos\theta + d\sin\theta \\ z = e\cos\theta + f\sin\theta \end{cases}$ $(0^\circ \le \theta < 360^\circ) \Longleftrightarrow \Gamma$為一橢圓，且中心為$(0,0,0)$

【證明】

$(\Longrightarrow)$

一、e，f 同時為0時，Γ之參數式為$\begin{cases} x = a\cos\theta + b\sin\theta \\ y = c\cos\theta + d\sin\theta \quad (0^\circ \le \theta < 360^\circ) \\ z = 0 \end{cases}$

由 P.47【引理二十二】知：Γ圖形為xy平面上的橢圓，中心為(0,0,0)

二、e，f 不同時為0時

(一)$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$時，

(欲證$\begin{vmatrix} c & e \\ d & f \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} e & a \\ f & b \end{vmatrix}$不會同時為0，使用反證法)

假設$\begin{vmatrix} c & e \\ d & f \end{vmatrix} = 0$，且$\begin{vmatrix} e & a \\ f & b \end{vmatrix} = 0$

則$cf = de$，且$af = be$ ----------(1)

$\therefore acf = ade$，且$acf = bce$

$\therefore ade = bce$

$\therefore (ad - bc)e = 0$，但$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ $\therefore ad - bc \neq 0$

$\therefore e = 0$，

但e，f 不同時為0，$\therefore f \neq 0$

$e = 0$代入(1)式，得$cf = 0$ 且 $af = 0$

$\because f \neq 0$ $\therefore c = 0$且$a = 0$ $\therefore \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$

與已知$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$矛盾，所以假設錯誤

$\therefore \begin{vmatrix} c & e \\ d & f \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} e & a \\ f & b \end{vmatrix}$不會同時為0 ----------(2)

設$\overrightarrow{u_1} = (a, c, e)$，$\overrightarrow{u_2} = (b, d, f)$

$\because \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ $\therefore \overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$為空間中不平行的兩向量，

若平面 E 表由$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$所展開成的平面，

設(x, y, z)為平面 E 上任一點，則

(x, y, z)可表示成，$(x, y, z) = s(a, c, e) + t(b, d, f)$，其中$s$，$t \in R$

$\therefore$平面E參數式為$\begin{cases} x = as + b\,t \\ y = cs + dt \\ z = es + ft \end{cases}$ $(s，t \in R)$

當$s = \cos\theta$，$t = \sin\theta(0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ)$時，

$\begin{cases} x = a\cos\theta + b\sin\theta \\ y = c\cos\theta + d\sin\theta \\ z = e\cos\theta + f\sin\theta \end{cases}$ $(0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ)$，即為$\Gamma$

$\therefore \Gamma$為E的子集合，即Γ在平面E上

$\therefore \Gamma$是一個平面 E 上的曲線

$\because$平面 E 為由$\overrightarrow{u_1} = (a, c, e)$，$\overrightarrow{u_2} = (b, d, f)$所展開成的平面

$\therefore \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = \left(\begin{vmatrix} c & e \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} e & a \\ f & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\right)$為平面 E 的法向量

而$\vec{n} = (0,0,1)$為xy平面的法向量

$\because (\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}) \cdot \vec{n} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore$平面 E 的法向量$\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}$與xy平面的法向量$\vec{n}$不垂直

$\therefore$平面 E 與xy平面不垂直

又由(2)知：$\begin{vmatrix} c & e \\ d & f \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} e & a \\ f & b \end{vmatrix}$不會同時為0

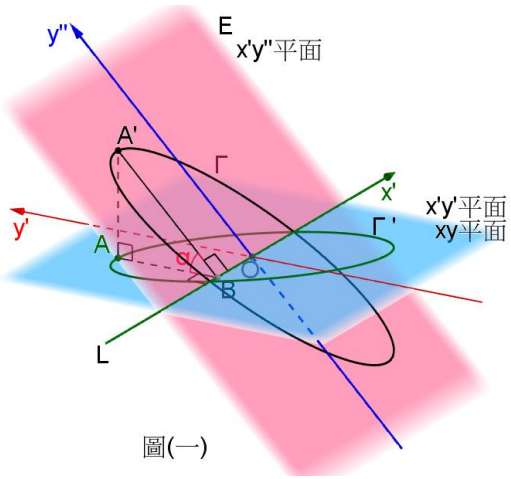
$\therefore$平面 E 的法向量$\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}$與xy平面的法向量$\vec{n}$不平行

∴平面 E 與xy平面不平行

設平面 E 與xy平面相交於直線 L，且

兩面角中的銳角為α

如圖(一)



圖(一)

令Γ在xy平面上的投影圖形為Γ′，

則Γ′參數式為$\begin{cases} x = a\cos\theta + b\sin\theta \\ y = c\cos\theta + d\sin\theta \quad (0^\circ \le \theta < 360^\circ) \\ z = 0 \end{cases}$

由【引理二十二】知：Γ′圖形為一橢圓，圓心為(0,0,0)

∵(0,0,0)在平面 E 上(s=t=0 時)，(0,0,0)也在xy平面上

∴(0,0,0)在直線 L 上

在xy平面上我們重新定坐標軸，令直線 L 為x′軸，空間坐標中的(0,0,0)定為原點O(0,0)，xy平面上過O(0,0)且垂直 L 的直線定為y′軸。

在平面 E 上我們也定坐標軸，令直線 L 為x′軸，空間坐標中的(0,0,0)定為原點O(0,0)，

平面 E 上過O(0,0)且垂直 L 的直線定為y"軸。

由三垂線定理知：y"軸投影到xy平面上為y′軸。

定坐標軸時，我們令y"軸正向投影到xy平面上為y′軸正向

在xy平面中，若使用新坐標軸x'，y'建立坐標系時，此時我們稱之為$x'y'$平面

在平面 E 中，若使用新坐標軸x'，y''建立坐標系時，此時我們稱之為$x'y''$平面

$\because \Gamma'$在xy平面上圖形為一橢圓，且圓心為(0,0)，使用新坐標軸x'，y'

由【引理二十二】知Γ'在$x'y'$平面可表示成$\begin{cases} x' = a'\cos\theta' + b'\sin\theta' \\ y' = c'\cos\theta' + d'\sin\theta' \end{cases}$ $(0^\circ \leq \theta' < 360^\circ)$

設A點在$x'y'$平面上，A'在平面E上，且A為A'在xy平面上的投影點，

如 P.178 圖(一)，作$\overline{AB} \perp x'$軸，且交x'軸於B，由三垂線定理知$\overline{A'B} \perp x'$軸

$\therefore$A，A'的x'軸坐標相同，

設A點在$x'y'$平面上的坐標表示為(x_0, y_0)，設A'在$x'y''$平面的坐標表示為(x_0, y)

$\therefore \overline{A'B} = |y|$，$\overline{AB} = |y_0|$，又α為銳角 $\therefore \overline{AB} = \overline{A'B}\cos\alpha$ $\therefore |y_0| = |y|\cos\alpha$

$\therefore |y| = |y_0|\sec\alpha$

$\because y''$正向投影到xy平面上，為y'軸正向$\therefore$y與y_0正負號會相同

$\therefore y = y_0 \sec\alpha$ $\therefore A'$在$x'y''$平面的坐標表示為$(x_0，y_0 \sec\alpha)$

若 A 為Γ'圖形上任一點，

則 A 在$x'y'$平面可表示成$(a'\cos\theta' + b'\sin\theta'，c'\cos\theta' + d'\sin\theta')$ 其中 $0^\circ \leq \theta' < 360^\circ$

$\therefore A'$在$x'y''$平面可表示成$(a'\cos\theta' + b'\sin\theta'，(c'\cos\theta' + d'\sin\theta')\sec\alpha)$

$= (a'\cos\theta' + b'\sin\theta'，c'\sec\alpha\cos\theta' + d'\sec\alpha\sin\theta')$

∵平面 E 與xy平面不垂直

∴平面 E 上的圖形Γ，投影在xy平面上得Γ′，點與點之間有一對一的對應關係

∴隨著θ′在0°到360°之間逐漸變動，A 在Γ′圖形上逐漸變動繞橢圓Γ′一圈，對應的A′的軌跡恰為Γ

∴A′(x′, y″)的軌跡Γ在x′y″平面的參數式為

$$\Gamma：\begin{cases} x' = a'\cos\theta' + b'\sin\theta' \\ y'' = c'\sec\alpha\cos\theta' + d'\sec\alpha\sin\theta' \end{cases} (0^\circ \le \theta' < 360^\circ)$$

令$c'\sec\alpha = c''$，$d'\sec\alpha = d''$

則Γ在x′y″平面參數式為$\begin{cases} x' = a'\cos\theta' + b'\sin\theta' \\ y'' = c''\cos\theta' + d''\sin\theta' \end{cases} (0^\circ \le \theta' < 360^\circ)$

由【引理二十二】知：在x′y″平面上，Γ圖形為橢圓，中心為O(0,0)

回到空間坐標可得知：Γ圖形為橢圓，中心為(0,0,0)

(二)$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$時，

1. 若$a = 0$，$b = 0$

則Γ之參數式可表示成$\begin{cases} x = 0 \\ y = c\cos\theta + d\sin\theta \\ z = e\cos\theta + f\sin\theta \end{cases} (0^\circ \le \theta < 360^\circ)$

由【引理二十二】知：Γ圖形為yz平面上的橢圓，圓心為O(0,0,0)

2. 若$c=0$，$d=0$

則Γ之參數式可表示成$\begin{cases} x = a\cos\theta + b\sin\theta \\ y = 0 \\ z = e\cos\theta + f\sin\theta \end{cases}$ $(0^\circ \le \theta < 360^\circ)$

由【引理二十二】知：Γ圖形為xz平面上的橢圓，圓心為$O(0,0,0)$

3. 若a，b不全為0且c，d不全為0

(1) $c \ne 0$時，令$\frac{a}{c}=k$ $\therefore a = ck$

$\because \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ $\therefore ad - bc = 0$ $\therefore ckd - bc = 0$，$c(kd-b)=0$

$\because c \ne 0$ $\therefore kd - b = 0$ $\therefore b = dk$

(2) $d \ne 0$時，令$\frac{b}{d}=k$ $\therefore b = dk$

$\because \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ $\therefore ad - bc = 0$ $\therefore ad - dkc = 0$，$d(a-kc)=0$

$\because d \ne 0$ $\therefore a - kc = 0$ $\therefore a = ck$

由(1)(2)知：存在k，使$a = ck$且$b = dk$，$\because$a，b不全為0 $\therefore k \ne 0$

代入$x = a\cos\theta + b\sin\theta$，$y = c\cos\theta + d\sin\theta$

得$x = ck\cos\theta + dk\sin\theta = k(c\cos\theta + d\sin\theta)$

Γ之參數式可表示成

$\begin{cases} x = k(c\cos\theta + d\sin\theta) \\ y = c\cos\theta + d\sin\theta \\ z = e\cos\theta + f\sin\theta \end{cases}$ $(0^\circ \le \theta < 360^\circ)$

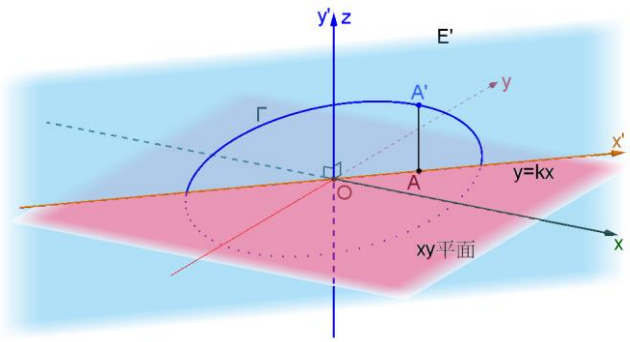
$\therefore x = ky$

設E'為“過xy平面上直線$x = ky$，且垂直

xy平面”的平面

則Γ圖形在平面E′上

在平面E′上定坐標軸，取xy平面上直線$x = ky$為x'軸，取空間中的z軸為y'軸



∴$x'y'$平面上的原點(0,0)恰為空間坐標中的(0,0,0)

設A'為 Γ 上的點，

則在空間中A'的坐標可表示成

$(k(c\cos\theta + d\sin\theta)，c\cos\theta + d\sin\theta，e\cos\theta + f\sin\theta)$

設A'在xy上的投影點為A，則A的空間坐標為

$(k(c\cos\theta + d\sin\theta)，c\cos\theta + d\sin\theta，0)$

A在xy平面的坐標為$(k(c\cos\theta + d\sin\theta)，c\cos\theta + d\sin\theta)$

令 O 為原點，

則$\overrightarrow{OA} = (k(c\cos\theta + d\sin\theta)，c\cos\theta + d\sin\theta)$

$$= (c\cos\theta + d\sin\theta)(k, 1) = \sqrt{k^2 + 1}(c\cos\theta + d\sin\theta)\frac{(k,1)}{\sqrt{k^2+1}}$$

取向量$\frac{(k,1)}{\sqrt{k^2+1}}$當成$x'$軸正向上的單位向量 $\vec{i}$ ，則$\overrightarrow{OA} = \sqrt{k^2 + 1}(c\cos\theta + d\sin\theta)\vec{i}$

在平面E'中，若使用新坐標軸x'，y'建立坐標系時，此時我們稱之為$x'y'$平面，

則A在$x'y'$平面上的坐標表示為$(\sqrt{k^2+1}(c\cos\theta+d\sin\theta),0)$

設A'在$x'y'$平面上的坐標表示為(x',y')，

$\because \overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}$

$\therefore A'$在$x'y'$平面上的坐標表示為$(\sqrt{k^2+1}(c\cos\theta+d\sin\theta),e\cos\theta+f\sin\theta)$

$\because$所有A'所成圖形為Γ

$\therefore \Gamma$在$x'y'$平面上的參數式為$\begin{cases} x'=\sqrt{k^2+1}(c\cos\theta+d\sin\theta) \\ y'=e\cos\theta+f\sin\theta \end{cases}(0^\circ\le\theta<360^\circ)$

令$\sqrt{k^2+1}c=c'$，$\sqrt{k^2+1}d=d'$

則Γ的參數式為$\begin{cases} x'=c'\cos\theta+d'\sin\theta \\ y'=e\cos\theta+f\sin\theta \end{cases}(0^\circ\le\theta<360^\circ)$

由【引理二十二】知：Γ圖形為橢圓，且中心為$x'y'$平面上的原點$(0,0)$

$\therefore \Gamma$圖形為橢圓，且中心為空間坐標中的$(0,0,0)$

$(\Longleftarrow)$

已知Γ為一橢圓，且中心為$(0,0,0)$

$\because \Gamma$為橢圓

$\therefore \Gamma$整個圖形必共平面，設此平面為 E，則 E 過橢圓的中心$(0,0,0)$

在平面 E 上訂定坐標軸x'軸及y'軸(兩坐標軸垂直)，將中心$O(0,0,0)$訂為原點$O'(0,0)$

在平面 E 中，若使用新坐標軸x'，y'建立坐標系時，此時我們稱之為$x'y'$平面，

則在$x'y'$平面上，Γ為橢圓且中心為$O'(0,0)$

由 P.47【引理二十二】知：

在$x'y'$平面上，Γ之參數式可表示成$\begin{cases} x' = c'\cos\theta + d'\sin\theta \\ y' = e'\cos\theta + f'\sin\theta \end{cases}$ $(0^\circ \le \theta < 360^\circ)$

設$A(x,y,z)$為空間中Γ上任一點，

則在$x'y'$平面上，

A必可表示成$A(c'\cos\theta + d'\sin\theta，e'\cos\theta + f'\sin\theta)$，其中$\theta$為某個角度，

$0^\circ \le \theta < 360^\circ$

令$\vec{u} = (c'，e')$，$\vec{v} = (d'，f')$為$x'y'$平面上的兩向量

則在$x'y'$平面上，

$\overrightarrow{O'A} = (c'\cos\theta + d'\sin\theta，e'\cos\theta + f'\sin\theta)$

$= (c'，e')\cos\theta + (d'，f')\sin\theta$

$= \vec{u}\cos\theta + \vec{v}\sin\theta$ ----------(1)

回到空間坐標

令$\vec{u}$，$\vec{v}$在空間中的坐標表示法分別為$\vec{u} = (a,c,e)$，$\vec{v} = (b,d,f)$

$O'(0,0)$為$O(0,0,0)$，A為(x,y,z)

代入(1)式，得

$(x,y,z) = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A} = (a,c,e)\cos\theta + (b,d,f)\sin\theta$

$= (a\cos\theta + b\sin\theta, c\cos\theta + d\sin\theta, e\cos\theta + f\sin\theta)$

$$\therefore\ \Gamma:\begin{cases} x = a\cos\theta + b\sin\theta \\ y = c\cos\theta + d\sin\theta\ \ (0^\circ \le \theta < 360^\circ) \\ z = e\cos\theta + f\sin\theta \end{cases}$$ ，得證■

(四) 證明【定理五十五】

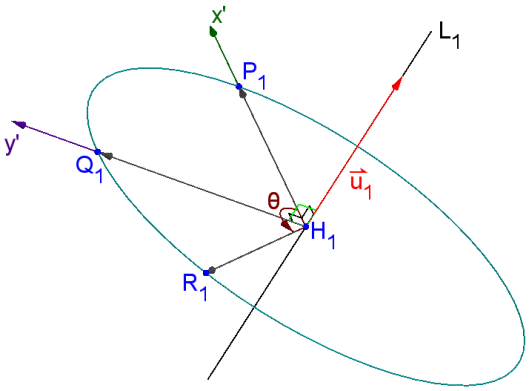
接下來我們將當初發現的空間中橢圓軌跡寫成命題並證明。

【定理五十五】空間橢圓

設L_1，L_2，…，L_n為空間中的有向直線，P_1，P_2，…，P_n為空間中的點，P_1，P_2，…，P_n在L_1，L_2，…，L_n上的投影點分別為H_1，H_2，…，H_n。

以直線L_1為旋轉軸將P_1旋轉θ得到R_1，以直線L_2為旋轉軸將P_2旋轉θ得到R_2，…，以直線L_n為旋轉軸將P_n旋轉θ得到R_n。設 M 為將R_1，R_2，…，R_n分別以h_1，h_2，…，h_n為加權倍率得到的加權點，M'為將H_1，H_2，…，H_n分別以h_1，h_2，…，h_n為加權倍率得到的加權點。則當θ在0°到360°之間變動時，M點的軌跡為一橢圓，且中心為M'

【證明】



設$\overrightarrow{u_1} = (d_1, e_1, f_1)$為與$L_1$正向同向的一個向量

又$\overleftrightarrow{H_1P_1} \perp L_1 \therefore \overrightarrow{H_1P_1} \perp \overrightarrow{u_1}$

令$H_1(a_1, b_1, c_1)$，$\overrightarrow{H_1P_1} = (p_1, q_1, r_1)$

令以L_1為旋轉軸將P_1旋轉90°得到Q_1

令$\overrightarrow{H_1Q_1} = (g_1, s_1, m_1)$

$\because$以直線L_1為旋轉軸將P_1旋轉θ得到R_1，以L_1為旋轉軸將P_1旋轉90°得到Q_1，

又P_1在L_1的投影點為H_1

$\therefore \overline{H_1R_1} = \overline{H_1P_1} = \overline{H_1Q_1}$(設長度為r) ，且$H_1$，$P_1$，$Q_1$，$R_1$共平面，且$\overline{H_1P_1}$垂直$\overline{H_1Q_1}$

在此平面上定坐標，令$\overleftrightarrow{H_1P_1}$為$x'$軸，$\overleftrightarrow{H_1Q_1}$為$y'$軸，$H_1$為原點，$\overrightarrow{H_1P_1} = (r, 0)$，$\overrightarrow{H_1Q_1} = (0, r)$

$\because$以直線L_1為旋轉軸將P_1旋轉θ得到R_1 $\therefore R_1$坐標為(rcosθ，rsinθ)

$\therefore \overrightarrow{H_1R_1} = (r\cos\theta，r\sin\theta) = \cos\theta\,\overrightarrow{H_1P_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{H_1Q_1}$

回到空間坐標

$\overrightarrow{H_1R_1} = \cos\theta\,\overrightarrow{H_1P_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{H_1Q_1} = \cos\theta\,(p_1, q_1, r_1) + \sin\theta\,(g_1, s_1, m_1)$

令 O 為原點，且$\overrightarrow{OH_1} = (a_1, b_1, c_1)$

$\overrightarrow{OR_1} = \overrightarrow{H_1R_1} + \overrightarrow{OH_1} = \cos\theta\,(p_1, q_1, r_1) + \sin\theta\,(g_1, s_1, m_1) + (a_1, b_1, c_1)$

得R_1坐標為$(p_1\cos\theta + g_1\sin\theta + a_1，q_1\cos\theta + s_1\sin\theta + b_1，r_1\cos\theta + m_1\sin\theta + c_1)$

依同樣方法可得

R_2坐標為$(p_2\cos\theta + g_2\sin\theta + a_2，q_2\cos\theta + s_2\sin\theta + b_2，r_2\cos\theta + m_2\sin\theta + c_2)$

……

R_n坐標為$(p_n\cos\theta + g_n\sin\theta + a_n，q_n\cos\theta + s_n\sin\theta + b_n，r_n\cos\theta + m_n\sin\theta + c_n)$

$M = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} h_k}\Big(h_1\big(p_1\cos\theta + g_1\sin\theta + a_1，q_1\cos\theta + s_1\sin\theta + b_1，r_1\cos\theta + m_1\sin\theta + c_1\big)$$

$$+ h_2\big(p_2\cos\theta + g_2\sin\theta + a_2，q_2\cos\theta + s_2\sin\theta + b_2，r_2\cos\theta + m_2\sin\theta + c_2\big) + \cdots$$

$$+ h_n\big(p_n\cos\theta + g_n\sin\theta + a_n，q_n\cos\theta + s_n\sin\theta + b_n，r_n\cos\theta + m_n\sin\theta + c_n\big)\Big)$$

設$M(x,y,z)$，則

$$x = \frac{h_1p_1+h_2p_2+\cdots+h_np_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}\cos\theta + \frac{h_1g_1+h_2g_2+\cdots+h_ng_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}\sin\theta + \frac{h_1a_1+h_2a_2+\cdots+h_na_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

$$y = \frac{h_1q_1+h_2q_2+\cdots+h_nq_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}\cos\theta + \frac{h_1s_1+h_2s_2+\cdots+h_ns_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}\sin\theta + \frac{h_1b_1+h_2b_2+\cdots+h_nb_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

$$z = \frac{h_1r_1+h_2r_2+\cdots+h_nr_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}\cos\theta + \frac{h_1m_1+h_2m_2+\cdots+h_nm_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}\sin\theta + \frac{h_1c_1+h_2c_2+\cdots+h_nc_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

令$\frac{h_1p_1+h_2p_2+\cdots+h_np_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = a'$，$\frac{h_1g_1+h_2g_2+\cdots+h_ng_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = b'$，$\frac{h_1q_1+h_2q_2+\cdots+h_nq_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = c'$，

$\frac{h_1s_1+h_2s_2+\cdots+h_ns_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = d'$，$\frac{h_1r_1+h_2r_2+\cdots+h_nr_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = e'$，$\frac{h_1m_1+h_2m_2+\cdots+h_nm_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = f'$

則$x = a'\cos\theta + b'\sin\theta + \frac{h_1a_1+h_2a_2+\cdots+h_na_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$

$$y = c'\cos\theta + d'\sin\theta + \frac{h_1b_1+h_2b_2+\cdots+h_nb_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

$$z = e'\cos\theta + f'\sin\theta + \frac{h_1c_1+h_2c_2+\cdots+h_nc_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

當θ從0°到360°之間逐漸變動時，設 M 的軌跡圖形為 Γ，

將 Γ 平移向量$\left(-\frac{h_1a_1+h_2a_2+\cdots+h_na_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}, -\frac{h_1b_1+h_2b_2+\cdots+h_nb_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}, -\frac{h_1c_1+h_2c_2+\cdots+h_nc_n}{\sum_{k=1}^{n} h_k}\right)$，設得到圖形$\Gamma'$

則Γ'參數式為$\begin{cases} x = a'\cos\theta + b'\sin\theta \\ y = c'\cos\theta + d'\sin\theta \\ z = e'\cos\theta + f'\sin\theta \end{cases}$ $(0^\circ \le \theta \le 360^\circ)$

由【引理五十四】空間橢圓參數式知：Γ'為一橢圓，且中心為$(0,0,0)$

$\because \Gamma'$平移向量$\left(\frac{h_1a_1+h_2a_2+\cdots+h_na_n}{\sum_{k=1}^{n}h_k}, \frac{h_1b_1+h_2b_2+\cdots+h_nb_n}{\sum_{k=1}^{n}h_k}, \frac{h_1c_1+h_2c_2+\cdots+h_nc_n}{\sum_{k=1}^{n}h_k}\right)$可得 Γ，

$\therefore \Gamma'$與 Γ 兩圖形全等

$\therefore \Gamma$ 圖形為一橢圓，且中心為$\left(\frac{h_1a_1+h_2a_2+\cdots+h_na_n}{\sum_{k=1}^{n}h_k}, \frac{h_1b_1+h_2b_2+\cdots+h_nb_n}{\sum_{k=1}^{n}h_k}, \frac{h_1c_1+h_2c_2+\cdots+h_nc_n}{\sum_{k=1}^{n}h_k}\right)$

即為M'

$\therefore$則當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，M 點會跟著改變，所有 M 點所成圖形為一橢圓，且中心為M'，

得證■

柒、　討論

一、　二階齒輪圖形即是內(外)次擺線

由 P.84 n 階齒輪圖形的定義知，$n=2$時二階齒輪圖形的定義為：設平面上有三個圓O_1，O_2，O_3，其中O_3為O_2的同心圓，且O_2與O_1相切。O_1為定圓，現讓O_2帶動O_3以相同轉速在O_1上滾動，令 P 為O_3上一點，則 P 點軌跡稱為二階齒輪圖形。我們可得知二階齒輪圖形即是內(外)次擺線，寫成下面定理。

承上面二階齒輪圖形的定義，設圓O_1，O_2，O_3的半徑分別為為$|r_1|$，$|r_2|$，$|r_3|$，其中r_1，r_2，r_3，r_1+r_2均不為 0，則

$r_1r_2>0$時或(二)$r_1r_2<0$且$|r_1|<|r_2|$時，二階齒輪圖形為外次擺線

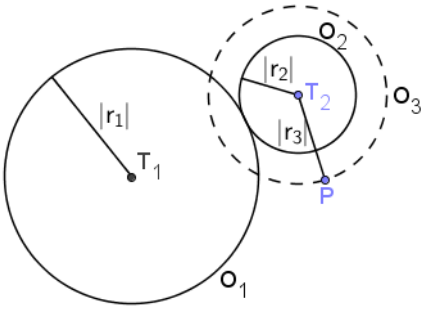
(三)$r_1r_2<0$且$|r_1|>|r_2|$時，二階齒輪圖形為內次擺線。

且中心與 n 階齒輪圖形 n=2 時我們所定義的中心相同。

(詳細證明請參閱 P.234【附錄六】)

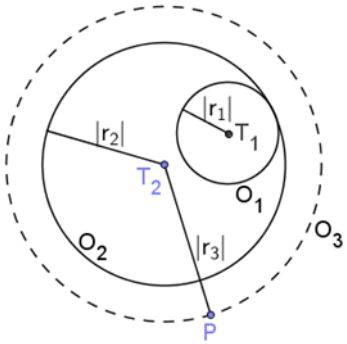
(一) $r_1r_2>0$時

由定義中知：$r_1r_2>0$表O_1，O_2外切，故情形如下圖，P 點軌跡為外次擺線



(二) $r_1r_2<0$且$|r_1|<|r_2|$時

由定義知：$r_1r_2<0$表示O_1和O_2內切，$\because|r_1|<|r_2|\therefore O_2$比$O_1$大，故情形如下圖，P 點軌跡為外次擺線

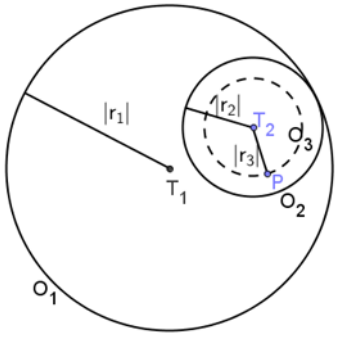


(三) $r_1r_2 < 0$且$|r_2| < |r_1|$時

從定義知：$r_1r_2 < 0$表示O_1，O_2內切，

$\because |r_2| < |r_1| \therefore O_1$比$O_2$大，

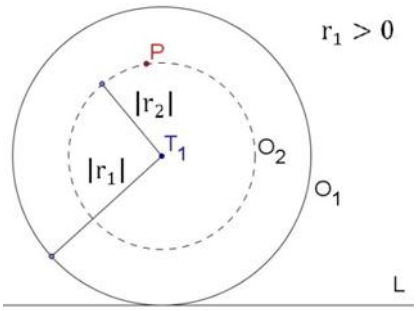
故情形如右圖，P 點軌跡為內次擺線



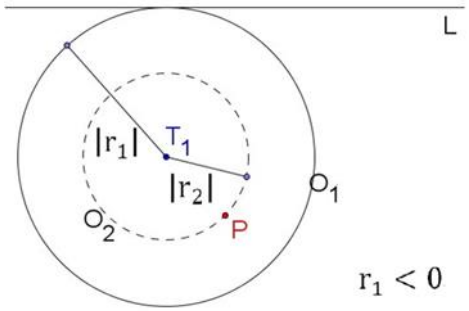
二、 一階齒輪直線圖形即是次擺線

n 階齒輪直線圖形中，當 n=1 時一階齒輪直線圖形即是次擺線。 (證明請參閱 P.242 附錄七)

(一)當$r_1 > 0$時表示圓在直線上方滾動

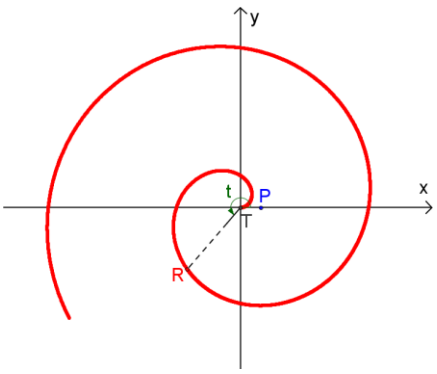


(二)當$r_1 < 0$時表示圓在直線下方滾動



捌、　未來展望

一、　阿基米德螺線



在平面部分，我們若定義變數為 t，則T_k對P_k所做的旋轉後伸縮都是以T_k為旋轉中心，將P_k旋轉$c_k t+\alpha_k$再伸縮s_k倍(c_k, α_k, s_k為固定常數)，而沒有讓旋轉角度和伸縮倍率同時都與變數 t 相關。我們思考過一個很直觀的命題：

設以 T 為旋轉中心將 P 旋轉 t 角再伸縮 t 倍得到 R 點，則當 t 變動時，R 的軌跡為阿基米德螺線。

【證明】

定坐標軸，如圖：令 T 為原點，P 在 x 軸正向上，y 軸過 T 點且垂直 x 軸，

設$\overline{TP}=a(\therefore a>0)$，則T，P坐標分別為T(0，0)，P(a，0)

∵以 T 為旋轉中心將 P 旋轉 t 角再伸縮 t 倍得到 R 點 ∴R 點坐標為

R(at cos t，at sin t)，

即R點軌跡為阿基米德螺線　　得證■

我們將命題延伸：

以T_k為旋轉中心將P_k旋轉 t 角再伸縮 t 倍得到R_k(其中 k=1，2，…，n)，取R_1，R_2，…，R_n分別以h_1，h_2，…，h_n為加權倍率的加權點 M，則當 t 變動時，M 點的軌跡為阿基米德螺線。

【證明】

設T_k的坐標為$(a_k，b_k)$，P_k的坐標為$(p_k，q_k)$　$(k=1，2，\cdots，n)$

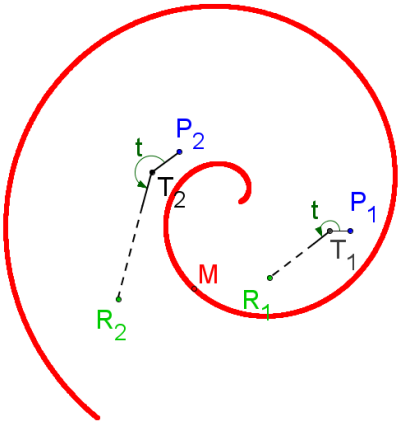
∵以T_k為旋轉中心將P_k旋轉 t 角再伸縮 t 倍得R_k，設R_k坐標為$(x_k，y_k)$，則

$$x_k + iy_k = [(p_k - a_k) + i(q_k - b_k)](\cos t + i\sin t)t + a_k + ib_k$$

$$\therefore x_k = t\big((p_k - a_k)\cos t - (q_k - b_k)\sin t\big) + a_k$$

$$y_k = t\big((p_k - a_k)\sin t + (q_k - b_k)\cos t\big) + b_k$$ ，　所以

R_k坐標為$\big(t\big((p_k - a_k)\cos t - (q_k - b_k)\sin t\big) + a_k，t\big((p_k - a_k)\sin t + (q_k - b_k)\cos t\big) + b_k\big)$



又$M = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，設M的坐標為$(x，y)$，則

$$x = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k\big(t\big((p_k - a_k)\cos t - (q_k - b_k)\sin t\big) + a_k\big)}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k(p_k - a_k)}{\sum_{k=1}^{n} h_k} t\cos t - \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k(q_k - b_k)}{\sum_{k=1}^{n} h_k} t\sin t + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

$$y = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k\big(t\big((p_k - a_k)\sin t + (q_k - b_k)\cos t\big) + b_k\big)}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k(p_k - a_k)}{\sum_{k=1}^{n} h_k} t\sin t + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k(q_k - b_k)}{\sum_{k=1}^{n} h_k} t\cos t + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

令$u = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k(p_k - a_k)}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$，$v = \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k(q_k - b_k)}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$　，則

$$x = ut\cos t - vt\sin t + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} \qquad \text{----------(1)}$$

$$y = ut\sin t + vt\cos t + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} \qquad \text{----------(2)}$$

將$u + iv$以極式表示

令$u + iv = a(\cos\delta + i\sin\delta)$，且$a \geq 0$，$u = a\cos\delta$ ，$v = a\sin\delta$

代入(1)(2)式可得

$$x = at\cos\delta\cos t - at\sin\delta\sin t + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = at\cos(t+\delta) + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

$$y = at\cos\delta\sin t + at\sin\delta\cos t + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} = at\sin(t+\delta) + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$$

令M點軌跡為Γ，則

$$\Gamma：\begin{cases} x = at\cos(t+\delta) + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} \\ y = at\sin(t+\delta) + \frac{\sum_{k=1}^{n} h_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k} \end{cases}$$

將Γ平移向量$(-\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$ ，$-\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k})$，設得圖形$\Gamma'$ ----------(*)

則Γ'：$\begin{cases} x = at\cos(t+\delta) \\ y = at\sin(t+\delta) \end{cases}$

將Γ'以原點為旋轉中心旋轉$-\delta$，設得圖形Γ'' ----------(#)

則Γ''：$\begin{cases} x = at\cos t \\ y = at\sin t \end{cases}$ $\therefore$ Γ''為阿基米德螺線

由(#)知：將Γ''以原點為旋轉中心旋轉δ可得Γ' $\therefore$ Γ'為阿基米德螺線

由(*)知：將Γ'平移向量$(\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$ ，$\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k})$可得Γ

$\therefore$ Γ為阿基米德螺線 得證■

我們希望未來能將上述命題做延伸，讓旋轉角度推廣為c_1t，c_2t，⋯，c_nt，並把伸縮倍率由t延伸至$d_kt+b_k(k=1，2，⋯，n)$。

另外，我們也希望能研究當伸縮中心與旋轉中心不是同一點的情況，例如：

以T_k為旋轉中心將P_k旋轉 t 至R_k，再以T_k'為伸縮中心，將R_k伸縮 t 倍至R_k' (k=1，2，⋯，n)，將R_1'，R_2'，⋯，R_n'分別以h_1，h_2，⋯，h_n為加權倍率加權至 M 點，並探討 M 點隨著 t 變化時的軌跡特性。

二、 空間中的廣義命題

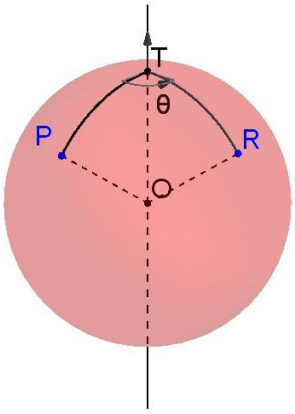
在空間方面，我們從【定理五十五】空間橢圓命題中得知：當旋轉角度皆為θ時，加權點 M 的軌跡會是橢圓。我們未來希望能研究將旋轉角度變為
$c_1\theta$，$c_2\theta$，⋯，$c_n\theta$，甚至引入伸縮變換，探討 M 點的軌跡特性。

三、 球面上的命題

除了空間以外，我們也想把命題推廣到球面。球面上兩點之中點、球面三角形的五心在數學上皆有定義，我們只需定義球面的旋轉變換與伸縮變換，便可寫出球面的命題，因此我們希望未來可以朝這方面延伸發展。下面是我們想出來的球面上旋轉及伸縮的定義：

1. 定義球面上旋轉：T，P為球面上兩點，在球面上以T為旋轉中心將P旋轉θ至R的意義如下：

   T，P為球面上兩點，O為球心，如圖。設以有向直線OT(正方向為由 O 向 T)為旋轉軸將P旋轉θ所得的點為 R，則稱在球面上以T為旋轉中心將P旋轉θ至R

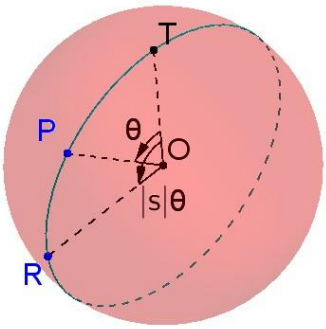


2. 定義球面上伸縮：T，P為球面上兩點，以T為伸縮中心將P伸縮s倍至R的意義如下：

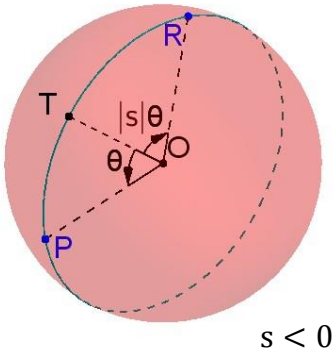
T，P為球面上兩點， O為球心，∠TOP ＝ θ，設R在過P，T的大圓C上，且∠TOR ＝ |s|θ。

當s ＞ 0時，∠TOP與∠TOR同向；當s ＜ 0時，∠TOP與∠TOR反向；當s ＝ 0時，R點即為T點，

如下面兩圖所示。則稱在球面上以T為伸縮中心將P伸縮s倍至R



s ＞ 0



s ＜ 0

四、 其他的幾何變換

還有一些幾何變換，如對稱、反演，我們希望未來可以以動直線、動圓為對稱軸及反演圓對P點做對稱及反演，再探討加權點的軌跡。我們也想將這些變換放入空間命題，將對稱軸改為對稱面，反演圓改為反演球作更進一步的研究。

玖、 結論

設平面上有 n 個定點$T_k(k=1,2,\cdots,n)$，另有一動點 P。以T_k為旋轉中心，將 P 旋轉θ_k，再伸縮s_k倍得R_k。設M為R_k分別以h_k為加權倍率得到的加權點，即$M=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kR_k}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$。在此前提下，我們可得到下列結論第一、二點

一、 固定點問題

n	$\mathbf{s_k}$	$\mathbf{h_k}$	**M為固定點時θ_k的條件**	**備註**
2	皆為 1	皆為 1	$\lvert\theta_2-\theta_1\rvert=180^\circ$	此為海盜藏寶問題
$n\geq 2$且 $n\in N$	皆為 1	皆為 1	$\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k=0$ $\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k=0$	
	任意實數	任意實數	$\sum_{k=1}^{n}h_ks_k\cos\theta_k=0$ $\sum_{k=1}^{n}h_ks_k\sin\theta_k=0$	

二、相似軌跡問題

1. 若旋轉角度為任意實數時,則加權點 M 不再是固定點,會隨 P 點變動而變動。令 P 點的變動軌跡為 Γ，M 點的變動軌跡為Γ'，則 Γ 與Γ'相似

2. 承 1.，若再使各個旋轉中心T_k隨 P 點移動，其移動軌跡皆與 Γ 相似，則平均點 M 的變動軌跡Γ'仍然會與 Γ 相似。

第三、四點探討當θ變動時，加權點的軌跡

三、加權點繞圓問題

設$T_k, P_k(k=1,2,\cdots,n)$為平面上的點。以T_k為旋轉中心，將P_k旋轉θ_k，再伸縮s_k倍得R_k

加權點 M	旋轉方式	軌跡	軌跡圖形中心	備註
$\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$	$\theta_k=\theta$，$s_k=1$	圓形	$\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k T_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$	以$\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k T_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$為旋轉中心，將$\frac{\sum_{k=1}^{n} h_k P_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$旋轉$\theta$角可得 M 點
	$\theta_k=\theta+\alpha_k$，α_k, s_k為任意固定值			

四、加權點橢圓軌跡問題與內、外次擺線軌跡問題

設$T_i, P_i(i=1,2,\cdots,m)$，$T_j', P_j'(j=1,2,\cdots,n)$均為平面上的點。以$T_i$為旋轉中心，將$P_i$旋轉$c\theta$，再伸縮$s_i$倍得$R_i$，以$T_j'$為旋轉中心，將$P_j'$旋轉$c'\theta$，再伸縮$s_j'$倍得$R_j'$

加權點	**旋轉方式**	**軌跡**	**軌跡圖形中心**
$\frac{\sum_{i=1}^{m} h_i R_i+\sum_{j=1}^{n} h'_j R'_j}{\sum_{i=1}^{m} h_i+\sum_{j=1}^{n} h'_j}$	$c=1$，$c'=-1$	橢圓	$\frac{\sum_{i=1}^{m} h_i T_i+\sum_{j=1}^{n} h'_j T'_j}{\sum_{i=1}^{m} h_i+\sum_{j=1}^{n} h'_j}$
	$cc'<0$	內次擺線	
	$cc'>0$	外次擺線	

第五點及第七點中，c_1，c_2，…，c_n兩兩相異，且均不為 0

五、n 階齒輪圖形與 n 階行星圖形

1. T_k及$P_k(k=1,2,\cdots,n)$均為平面上的點。今以T_k為旋轉中心將P_k旋轉$c_k\theta$至R_k。設M為R_k分別以h_k為加權倍率所得的加權點，即$M=\frac{\sum_{k=1}^{n} R_k h_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$。則隨著$\theta$改變，

M之軌跡是我們於 P.84 定義的 n 階齒輪圖形(也是 n 階行星圖形)，中心為 $\frac{\sum_{k=1}^{n} T_k h_k}{\sum_{k=1}^{n} h_k}$

2. T_{ij}與$P_{ij}(i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m_i)$均為平面上的定點。以T_{ij}為旋轉中心，將P_{ij}旋轉$c_i\theta+a_{ij}$，再伸縮s_{ij}倍得R_{ij}點。再將R_{ij}以h_{ij}為加權倍率加權至 M 點，即$M=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}R_{ij})}{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m_i} h_{ij})}$ 時，M隨θ變化時的移動軌跡為我們於 P.84 定義的 n 階齒輪圖形(也是 n 階行星圖形)，軌跡中心M'為$\frac{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}T_{ij})}{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m_i} h_{ij})}$。

六、次擺線軌跡圖形

T_i，P_i，T_j'，$P_j'(i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m)$均為平面上的點，以T_i為旋轉中心，將P_i旋轉$(t+\alpha_i)$，再伸縮s_i倍得到R_i點；以T_j'為伸縮中心，將P_j'伸縮(a_jt+b_j)得到R_j'點。設 M 為將R_i，R_j'分別以h_i，h_j'為加權倍率得到的加權點，即$M=\frac{\sum_{i=1}^{n} h_i R_i+\sum_{j=1}^{m} h_j' R_j'}{\sum_{i=1}^{n} h_i+\sum_{j=1}^{m} h_j'}$，則隨著t的變化，M的軌跡為次擺線。

七、n 階齒輪直線圖形與 n 階行星彗星圖形

1. 設T_k，$P_k(k=1,2,\cdots,n)$，T_{n+1}， P_{n+1}均為平面上的點，今以T_k為旋轉中心將P_k旋轉c_kt至$R_k(k=1,2,\cdots,n)$，以T_{n+1}為伸縮中心將P_{n+1}伸縮t倍至R_{n+1}。將R_k，R_{n+1}分別以h_k，h_{n+1}為加權倍率取加權點 M，即$M=\frac{(\sum_{k=1}^{n} h_k R_k)+h_{n+1}R_{n+1}}{(\sum_{k=1}^{n} h_k)+h_{n+1}}$。則隨著t的變化，M之軌跡為我們於 P.140 定義的 n 階齒輪直線圖形(也是 n 階行星彗星圖形)，且$\overline{T_{n+1}P_{n+1}}$平行此圖形的準線

2. $T_{ij}, P_{ij}\left(i=1,2,\cdots,n\right.$，$\left.j=1,2,\cdots,m_i\right)$，$V_k, Q_k(k=1$，2，…，m)均為平面上的定點。以$T_{ij}$為旋轉中心，將$P_{ij}$旋轉$c_it+a_{ij}$，再伸縮$s_{ij}$倍得$R_{ij}$點；以$V_k$為伸縮中心，將$Q_k$ 伸縮(d_kt+b_k)倍得W_k點。再將R_{ij}與W_k分別以h_{ij}與l_k為加權倍

率加權至 M 點，即$M=\frac{(\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m_i}h_{ij}R_{ij}))+\sum_{k=1}^{m}l_kW_k}{(\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m_i}h_{ij}))+\sum_{k=1}^{m}l_k}$ 時，M隨t變化時的移動軌跡為我們於 P.140 定義的 n 階齒輪直線圖形(也是 n 階行星彗星圖形)

八、空間中的橢圓

設L_k為空間中的有向直線，P_k為空間中的點，P_k在L_k上的投影點分別為$H_k(k=1,2,\cdots,n)$。以直線L_k為旋轉軸將P_k旋轉θ得到R_k。設 M 為將R_k分別以h_k為加權倍率得到的加權點，M'為將H_k分別以h_k為加權倍率得到的加權點，即$M=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kR_k}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$，$M'=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kH_k}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$。則當θ在$0^\circ$到$360^\circ$之間變動時，M點的軌跡為一橢圓，且中心為$M'$。

九、阿基米德螺線

以T_k為旋轉中心將P_k旋轉 t 角再伸縮 t 倍得到R_k(其中 k=1，2，⋯，n)，設 M 為將R_k分別以h_k為加權倍率得到的加權點，即$M=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kR_k}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$，則當 t 變動時，M 點的軌跡為阿基米德螺線。

壹拾、　參考文獻

左銓如：《初等解析幾何研究》（台北：九章出版社，2003）

趙文敏：《幾何學概論》（台北：九章出版社，2003）

趙文敏：〈曲線的世界－ 幾何學中的海倫：擺線及其他〉（上）（下），《科學月刊》第 20 卷第 11、12 期，1989。

附錄一：【引理三】的證明

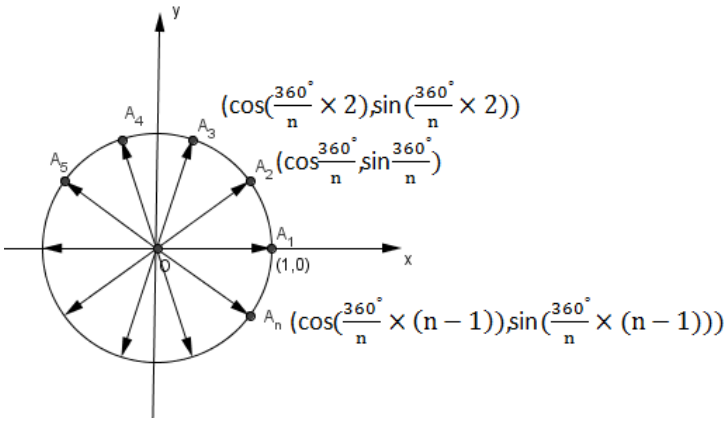
【引理三】

以 O 為圓心，作一半徑為 1 的圓，在圓上取 n 個點A_1，A_2，A_3，…，A_n將此圓 n 等分$(n \geq 2)$，

則 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{O}$

【證明】

以 O 為原點$(0，0)$，$A_1(1，0)$，作互相垂直的兩坐標軸，將圖形坐標化。因為A_1，A_2，A_3，…，A_n將此圓 n 等分，



所以$\angle A_1OA_2=$

$\angle A_2OA_3=\ldots\ldots=\angle A_{n-1}OA_n=\angle A_nOA_1=\frac{360^\circ}{n}$，

所以A_2坐標為$(\cos\frac{360^\circ}{n},\sin\frac{360^\circ}{n})$，

A_3坐標為$(\cos\frac{360^\circ}{n}\times 2,\sin\frac{360^\circ}{n}\times 2)$，……，

A_n坐標為$(\cos\frac{360^\circ}{n}\times(n-1),\sin\frac{360^\circ}{n}\times(n-1))$

設$z=\cos\frac{360^\circ}{n}+i\sin\frac{360^\circ}{n}$，則$z^n=\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ=1$

所以$z^n-1=0$，即$(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)=0$

所以$z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1=0$或$z-1=0$(不合，因為$z=\cos\frac{360^\circ}{n}+i\sin\frac{360^\circ}{n}\neq 1$)

$\therefore z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1=0$，即$1+z+\cdots+z^{n-1}+z^{n-2}=0$

$\therefore 1+\left(\cos\frac{360^\circ}{n}+i\sin\frac{360^\circ}{n}\right)+\left(\cos(\frac{360^\circ}{n}\times 2)+i\sin(\frac{360^\circ}{n}\times 2)\right)+\cdots+(\cos(\frac{360^\circ}{n}\times$

$(n-1))+i\sin(\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)))=0$

所以實部$1+\cos\frac{360^\circ}{n}+\cos(\frac{360^\circ}{n}\times 2)+\cdots+\cos(\frac{360^\circ}{n}\times(n-1))=0$----------(1)

且虛部$\sin\frac{360^\circ}{n}+\sin(\frac{360^\circ}{n}\times 2)+\cdots+\sin(\frac{360^\circ}{n}\times(n-1))=0$----------(2)

又$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}$

$=(1+\cos\frac{360^\circ}{n}+\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\times 2\right)+\cdots+\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)\right),\sin\frac{360^\circ}{n}+\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\times\right.$

$\left.2\right)+\cdots+\sin(\frac{360^\circ}{n}\times(n-1)))$，

$\therefore$由(1)(2)可得知$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=(0，0)=\vec{0}$　　得證■

附錄二：【定理十三】相似軌跡問題中的引理及證明

以下為引理六、七、八、九及定理十、十一的詳細證明

【引理六】

設有$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{A'B'}$兩直線，其坐標為 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$A'(x_1'，y_1')$，$B'(x_2'，y_2')$，

A_0在$\overleftrightarrow{AA'}$上，滿足$\overline{AA_0}：\overline{A_0A'}=k：m$，$B_0$在$\overleftrightarrow{BB'}$上，滿足$\overline{BB_0}：\overline{B_0B'}=k：m$

$\overleftrightarrow{AB}$的參數式為$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$，

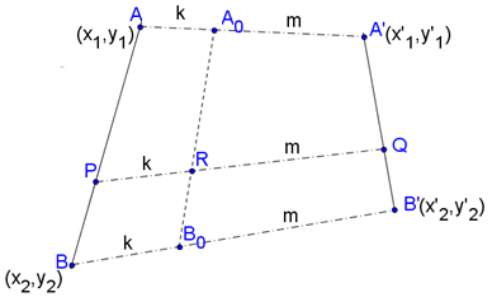
$\overleftrightarrow{A'B'}$的參數式為$\begin{cases} x = x_1' + (x_2' - x_1')s \\ y = y_1' + (y_2' - y_1')s \end{cases}$，

設 P 為$\overleftrightarrow{AB}$上的動點，Q 在$\overleftrightarrow{A'B'}$上，且為 P 的對應點

R 在$\overleftrightarrow{PQ}$上，滿足$\overline{PR}：\overline{RQ}=k：m$ ，

則：(1)隨著 P 在$\overleftrightarrow{AB}$上變動，所有 R 點所成圖形為$\overleftrightarrow{A_0B_0}$

(2)隨著 P 在$\overline{AB}$上變動，所有 R 點所成圖形為$\overline{A_0B_0}$



【證明】

(1) $\because A_0$在$\overleftrightarrow{AA'}$上，滿足$\overline{AA_0}：\overline{A_0A'} = k：m$ ，$\therefore m\overrightarrow{AA_0} = k\overrightarrow{A_0A'}$

$\therefore m\left(\overrightarrow{OA_0} - \overrightarrow{OA}\right) = k\left(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA_0}\right)$ $\therefore \overrightarrow{OA_0} = \frac{m\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OA'}}{k+m}$

又 $A(x_1，y_1)$，$A'(x_1'，y_1')$ $\therefore A_0$坐標為$\left(\frac{mx_1+kx_1'}{k+m}，\frac{my_1+ky_1'}{k+m}\right)$

$\because$ B_0在$\overleftrightarrow{BB'}$上，滿足$\overline{BB_0}：\overline{B_0B'} = k：m$，又 $B(x_2，y_2)$，$B'(x_2'，y_2')$

同理B_0坐標為$(\frac{mx_2+kx_2'}{k+m}，\frac{my_2+ky_2'}{k+m})$

設 $P(x_1+(x_2-x_1)t，y_1+(y_2-y_1)t)$為$\overleftrightarrow{AB}$上的動點，

$Q(x_1'+(x_2'-x_1')s，y_1'+(y_2'-y_1')s)$為$\overleftrightarrow{A'B'}$上的點，因為 P，Q 互為對應點

依定義知 t=s，$\therefore Q(x_1'+(x_2'-x_1')t，y_1'+(y_2'-y_1')t)$，

R 在$\overleftrightarrow{PQ}$上，滿足$\overrightarrow{PR}:\overrightarrow{RQ}=k:m$ ，與A_0坐標同理，可得知

$\therefore$R 坐標為$(\frac{mx_1+m(x_2-x_1)t+kx_1'+k(x_2'-x_1')t}{k+m}，\frac{my_1+m(y_2-y_1)t+ky_1'+k(y_2'-y_1')t}{k+m})$

$=(\frac{mx_1+kx_1'}{k+m}+\frac{m(x_2-x_1)+k(x_2'-x_1')}{k+m}t，\frac{my_1+ky_1'}{k+m}+\frac{m(y_2-y_1)+k(y_2'-y_1')}{k+m}t)$，

所有 R 點所成圖形方程式為

$$\begin{cases} x=\frac{mx_1+kx_1'}{k+m}+\frac{m(x_2-x_1)+k(x_2'-x_1')}{k+m}t \\ y=\frac{my_1+ky_1'}{k+m}+\frac{m(y_2-y_1)+k(y_2'-y_1')}{k+m}t \end{cases}$$，為一條直線

$t=0$時，$R_0(\frac{mx_1+kx_1'}{k+m}，\frac{my_1+ky_1'}{k+m})=A_0$，$t=1$時，$R_1(\frac{mx_2+kx_2'}{k+m}，\frac{my_2+ky_2'}{k+m})=B_0$

$\therefore$所有 R 點所成圖形為$\overleftrightarrow{A_0B_0}$

(2) 同上，但我們限定$0\le t\le 1$，同理即可得證：

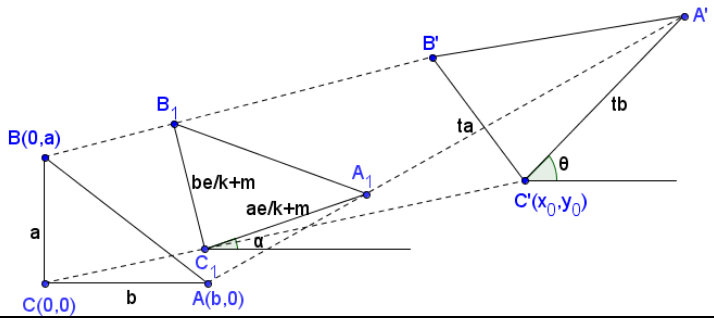
隨著 P 在$\overline{AB}$上變動，所有 R 點所成圖形為$\overline{A_0B_0}$ ，得證■

【引理七】

設直角ΔABC與直角$\Delta A'B'C'$

為同向的相似三角形，$\angle C=\angle C'=90^\circ$，$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$

A_1在$\overleftrightarrow{AA'}$上，滿足



$\overrightarrow{AA_1}$：$\overrightarrow{A_1A'}$ = k：m，B_1在$\overleftrightarrow{BB'}$上，滿足$\overrightarrow{BB_1}$：$\overrightarrow{B_1B'}$ = k：m，

C_1在$\overleftrightarrow{CC'}$上，滿足$\overrightarrow{CC_1}$：$\overrightarrow{C_1C'}$ = k：m，

則$\Delta A_1B_1C_1$與ΔABC亦為同向的相似三角形

【證明】

如圖，設$\overline{AC}$ =b，$\overline{BC}$ =a，$\overline{A'C'}$ =tb，$\overline{B'C'}$ =ta，令 C(0，0)，A(b，0)，B(0，a)將圖形坐標化，設$C'(x_0，y_0)$，$\overrightarrow{C'A'}$與x軸正向夾角為θ

$\because \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'A'} = (x_0，y_0) + (tb\cos\theta，tb\sin\theta)$

$= (x_0 + tb\cos\theta，y_0 + tb\sin\theta)$

又 C 為(0,0)$\therefore A'(x_0 + tb\cos\theta，y_0 + tb\sin\theta)$，同理

$B'\left(x_0 + ta\cos(90^\circ + \theta)，y_0 + ta\sin(90^\circ + \theta)\right) = B'\ (x_0 - ta\sin\theta，y_0 + ta\cos\theta)$

A_1在$\overleftrightarrow{AA'}$上，滿足$\overrightarrow{AA_1}$：$\overrightarrow{A_1A'}$ = k：m　$\therefore A_1(\frac{kx_0+ktb\cos\theta+mb}{k+m}，\frac{ky_0+ktb\sin\theta}{k+m})$

同理$B_1(\frac{kx_0-kta\sin\theta}{k+m}，\frac{ky_0+kta\cos\theta+ma}{k+m})$，$C_1(\frac{kx_0}{k+m}，\frac{ky_0}{k+m})$

$\overrightarrow{C_1A_1} = (\frac{ktb\cos\theta+mb}{k+m}，\frac{ktb\sin\theta}{k+m}) = \frac{b}{k+m}(kt\cos\theta + m，kt\sin\theta)$

$\overrightarrow{C_1B_1} = (\frac{-kta\sin\theta}{k+m}，\frac{kta\cos\theta+ma}{k+m}) = \frac{a}{k+m}(-kt\sin\theta，kt\cos\theta + m)$

令$kt\cos\theta + m = c$，$kt\sin\theta = d$

則$\overrightarrow{C_1A_1} = \frac{b}{k+m}(c，d)$，$\overrightarrow{C_1B_1} = \frac{a}{k+m}(-d，c)$

所以$\overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1B_1} = \frac{b}{k+m} \times \frac{a}{k+m}(-cd + dc)$=0 $\therefore \overrightarrow{C_1A_1} \perp \overrightarrow{C_1B_1}$ $\therefore \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$

將$c + di$改成極式，設$c + di = e(\cos\alpha + i\sin\alpha)$，則 c= $e\cos\alpha$ ，$d = e\sin\alpha$

$\overrightarrow{C_1A_1} = \frac{b}{k+m}(c，d) = \frac{b}{k+m}(e\cos\alpha，e\sin\alpha) = \frac{be}{k+m}(\cos\alpha，\sin\alpha)$

$\overrightarrow{C_1B_1} = \frac{a}{k+m}(-d，c) = \frac{a}{k+m}(-e\sin\alpha，e\cos\alpha) = \frac{ae}{k+m}(-\sin\alpha，\cos\alpha)$

$= \frac{ae}{k+m}(\cos(90^\circ + \alpha)，\sin(90^\circ + \alpha))$

$\overline{C_1A_1} : \overline{C_1B_1} = |\overrightarrow{C_1A_1}| : |\overrightarrow{C_1B_1}| = \frac{be}{k+m} : \frac{ae}{k+m} = b : a = \overline{CA} : \overline{CB}$

又$\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB = 90^\circ$ 所以$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$(SAS 相似)，

又$\overrightarrow{CA} = (b，0) = b(\cos 0^\circ，\sin 0^\circ)$，$\overrightarrow{CB} = (0，a) = a(\cos 90^\circ，\sin 90^\circ)$

$\overrightarrow{C_1A_1} = \frac{be}{k+m}(\cos\alpha，\sin\alpha)$，$\overrightarrow{C_1B_1} = \frac{ae}{k+m}(\cos(90^\circ + \alpha)，\sin(90^\circ + \alpha))$

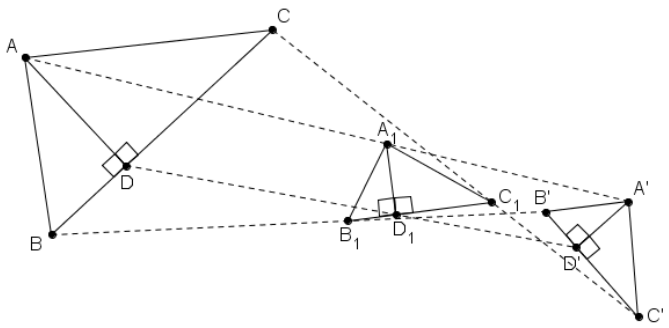
所以將ΔABC以 C 為旋轉中心旋轉α，再平移及伸縮可得$\Delta A_1B_1C_1$

可得知$\Delta A_1B_1C_1$與ΔABC為同向的相似三角形，得證■

註：當直角$\Delta A'B'C'$改為一點時，代表$\Delta A'B'C'$中$t = 0$，$t = 0$代入上面的證明，仍然可以得證$\Delta A_1B_1C_1$與ΔABC為同向的相似三角形。

由於任意三角形均可分成兩個直角三角形，所以由【引理七】可推得【引理八】

【引理八】



設ΔABC 與$\Delta A'B'C'$為同向的相似三角形，

A_1在$\overleftrightarrow{AA'}$上，滿足$\overrightarrow{AA_1} : \overrightarrow{A_1A'} = k : m$，

B_1在$\overleftrightarrow{BB'}$上，滿足$\overrightarrow{BB_1} : \overrightarrow{B_1B'} = k : m$，

C_1在$\overleftrightarrow{CC'}$上，滿足$\overrightarrow{CC_1}:\overrightarrow{C_1C'}=k:m$，則$\Delta A_1B_1C_1$與$\Delta ABC$亦為同向的相似三角形

【證明】

作$\overline{AD}\perp\overleftrightarrow{BC}$且相交於 D 點，作$\overline{A'D'}\perp\overleftrightarrow{B'C'}$且相交於$D'$點

$\because\Delta ABC$ 與$\Delta A'B'C'$為同向的相似三角形

$\therefore\Delta ABD$與$\Delta A'B'D'$為同向的相似直角三角形，ΔACD與$\Delta A'C'D'$也為同向的相似直角三角形

設D_1在$\overleftrightarrow{DD'}$上，滿足$\overrightarrow{DD_1}:\overrightarrow{D_1D'}=k:m$，

又A_1在$\overleftrightarrow{AA'}$上，滿足$\overrightarrow{AA_1}:\overrightarrow{A_1A'}=k:m$，$B_1$在$\overleftrightarrow{BB'}$上，滿足$\overrightarrow{BB_1}:\overrightarrow{B_1B'}=k:m$，

由引理七知$\Delta A_1B_1D_1$與ΔABD為同向的相似直角三角形

$\therefore\angle B=\angle B_1$，$\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$且$\frac{\overline{AD}}{\overline{A_1D_1}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{B_1D_1}}$

同理$\Delta A_1C_1D_1$與ΔACD亦為同向的相似直角三角形

$\therefore\angle C=\angle C_1$，$\angle CAD=\angle C_1A_1D_1$且$\frac{\overline{AD}}{\overline{A_1D_1}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}}$

$\therefore\angle BAC=\angle BAD+\angle CAD=\angle B_1A_1D_1+\angle C_1A_1D_1=\angle B_1A_1C_1$

又$\angle B=\angle B_1$，$\angle C=\angle C_1$且$\frac{\overline{AD}}{\overline{A_1D_1}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}}=\frac{\overline{BD}+\overline{CD}}{\overline{B_1D_1}+\overline{C_1D_1}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}$

$\therefore\Delta A_1B_1C_1$與$\Delta ABC$亦為同向的相似三角形，得證■

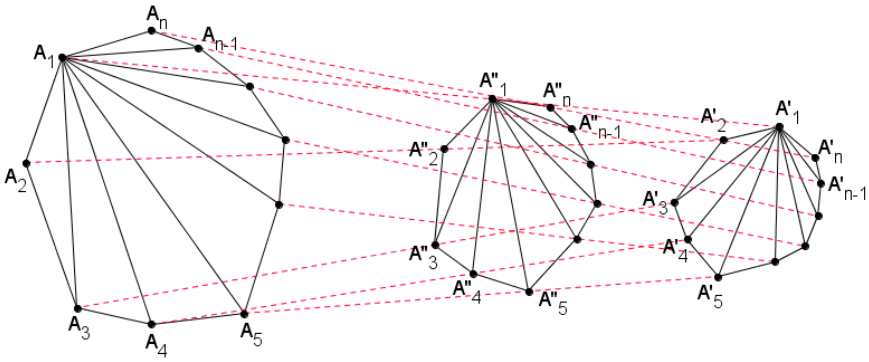
由於 n 邊形可以分成(n-2)個三角形，所以由【引理八】可推得【引理九】

【引理九】

設兩多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n(n\geq 3)$ 為同向的相似多邊形，A'_1，A'_2，…，A'_n分別為A_1，A_2，…，A_n的對應點，

A''_1在$\overleftrightarrow{A_1A'_1}$上，滿足$\overrightarrow{A_1A''_1}:\overrightarrow{A''_1A'_1}=k:m$，$A''_2$在$\overleftrightarrow{A_2A'_2}$上，滿足$\overrightarrow{A_2A''_2}:\overrightarrow{A''_2A'_2}=k:m$，……，$A''_n$在$\overleftrightarrow{A_nA'_n}$上，滿足$\overrightarrow{A_nA''_n}:\overrightarrow{A''_nA'_n}=k:m$，則多邊形$A''_1A''_2\cdots A''_n$與$A_1A_2\cdots A_n$為同向的相似多邊形

【證明】



將多邊形$A_1A_2\cdots A_n$分成(n-2)個三角形：$\Delta A_1A_2A_3$，$\Delta A_1A_3A_4$，…，$\Delta A_1A_{n-1}A_n$，

將多邊形$A'_1A'_2\cdots A'_n$分成(n-2)個三角形：$\Delta A'_1A'_2A'_3$，$\Delta A'_1A'_3A'_4$，…，$\Delta A'_1A'_{n-1}A'_n$

∵多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A'_1A'_2\cdots A'_n(n\geq 3)$ 為同向的相似多邊形，

且A'_1，A'_2，…，A'_n分別為A_1，A_2，…，A_n的對應點，

∴$\Delta A_1A_2A_3$與$\Delta A'_1A'_2A'_3$為同向的相似三角形，

$\Delta A_1A_3A_4$與$\Delta A'_1A'_3A'_4$為同向的相似三角形

……

$\Delta A_1A_{n-1}A_n$與$\Delta A'_1A'_{n-1}A'_n$為同向的相似三角形

又因為A_1''在$\overleftrightarrow{A_1A_1'}$上，滿足$\overrightarrow{A_1A_1''}:\overrightarrow{A_1''A_1'}=k:m$，$A_2''$在$\overleftrightarrow{A_2A_2'}$上，滿足$\overrightarrow{A_2A_2''}:\overrightarrow{A_2''A_2'}=k:m$，……，$A_n''$在$\overleftrightarrow{A_nA_n'}$上，滿足$\overrightarrow{A_nA_n''}:\overrightarrow{A_n''A_n'}=k:m$

由引理八知：$\Delta A_1A_2A_3$與$\Delta A_1''A_2''A_3''$為同向的相似三角形，

$\therefore \angle A_2A_1A_3=\angle A_2''A_1''A_3''$，$\angle A_1A_2A_3=\angle A_1''A_2''A_3''$，$\angle A_2A_3A_1=\angle A_2''A_3''A_1''$，

且$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1''A_2''}}=\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2''A_3''}}=\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3''A_1''}}$

同理$\Delta A_1A_3A_4$與$\Delta A_1''A_3''A_4''$為同向的相似三角形

$\therefore \angle A_4A_1A_3=\angle A_4''A_1''A_3''$，$\angle A_1A_4A_3=\angle A_1''A_4''A_3''$，$\angle A_4A_3A_1=\angle A_4''A_3''A_1''$，

且$\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1''A_4''}}=\frac{\overline{A_4A_3}}{\overline{A_4''A_3''}}=\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3''A_1''}}$，……，

同理$\Delta A_1A_{n-1}A_n$與$\Delta A_1''A_{n-1}''A_n''$為同向的相似三角形

$\therefore \angle A_{n-1}A_1A_n=\angle A_{n-1}''A_1''A_n''$，$\angle A_1A_{n-1}A_n=\angle A_1''A_{n-1}''A_n''$，$\angle A_{n-1}A_nA_1=\angle A_{n-1}''A_n''A_1''$，

且$\frac{\overline{A_1A_{n-1}}}{\overline{A_1''A_{n-1}''}}=\frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{A_{n-1}''A_n''}}=\frac{\overline{A_nA_1}}{\overline{A_n''A_1''}}$

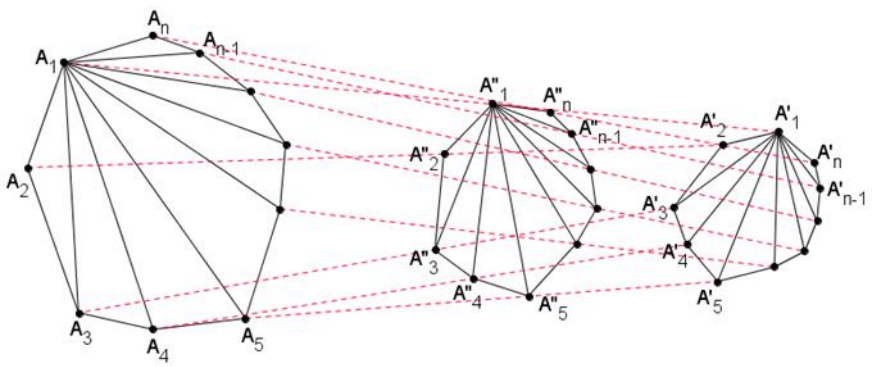
仿照引理八的證明可得證：多邊形$A_1''A_2''\cdots A_n''$及$A_1A_2\cdots A_n$為同向的相似多邊形，得證■

由【引理九】及【引理六】我們可以得到【定理十】

【定理十】

兩多邊形$A_1A_2\cdots A_n$及$A_1'A_2'\cdots A_n'(n\geq 3)$為同向的相似多邊形，$A_1'$，$A_2'$，…，$A_n'$分別為$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的對應點，設 P 為多邊形$A_1A_2\cdots A_n$上的動點，Q 在多邊形$A_1'A_2'\cdots A_n'$上，且為 P 的對應點，R 在$\overleftrightarrow{PQ}$上，滿足$\overrightarrow{PR}:\overrightarrow{RQ}=k:m$，則隨著 P 在多

邊形$A_1A_2\cdots A_n$上變動，所有 R 點所成圖形為多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$的同向相似圖形。



【證明】

(1) $\because A'_1$，A'_2，⋯，A'_n分別為A_1，A_2，⋯，A_n的對應點

$\therefore$當 P 在A_1，A_2，⋯，A_n ，n 個點中變動時，Q 跟著在A'_1，A'_2，⋯，A'_n ，n 個點中變動，設所形成的 R 點分別為A''_1，A''_2，⋯，A''_n

由引理九知多邊形$A''_1A''_2\cdots A''_n$與$A_1A_2\cdots A_n$為同向的相似多邊形

(2) 當 P 在$\overline{A_1A_2}$中變動時，Q 跟著在$\overline{A'_1A'_2}$中變動，且為 P 的對應點。由引理六知所有形成的 R 點所成圖形為$\overline{A''_1A''_2}$

同理：當 P 分別在$\overline{A_2A_3}$,$\overline{A_3A_4}$，⋯，$\overline{A_{n-1}A_n}$，$\overline{A_nA_1}$中變動時,Q 跟著在$\overline{A'_2A'_3}$，$\overline{A'_3A'_4}$，⋯，$\overline{A'_{n-1}A'_n}$ ，$\overline{A'_nA'_1}$中變動，且為 P 的對應點，

則所有形成的 R 點所成圖形分別為$\overline{A''_2A''_3}$，$\overline{A''_3A''_4}$，⋯，$\overline{A''_{n-1}A''_n}$，$\overline{A''_nA''_1}$

由(1)(2)得證：

隨著 P 在多邊形$A_1A_2\cdots A_n$上變動，所有 R 點所成圖形為多邊形$A''_1A''_2\cdots A''_n$，為$A_1A_2\cdots A_n$的同向相似多邊形，得證■

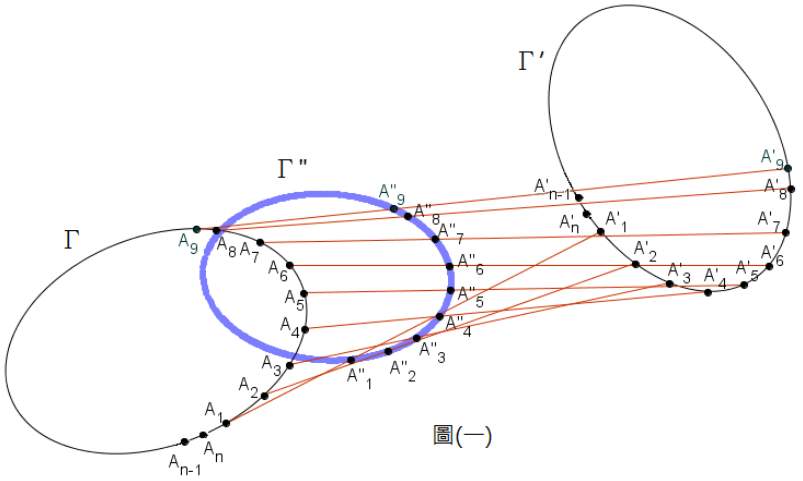
由【定理十】我們可以得到【定理十一】

【定理十一】

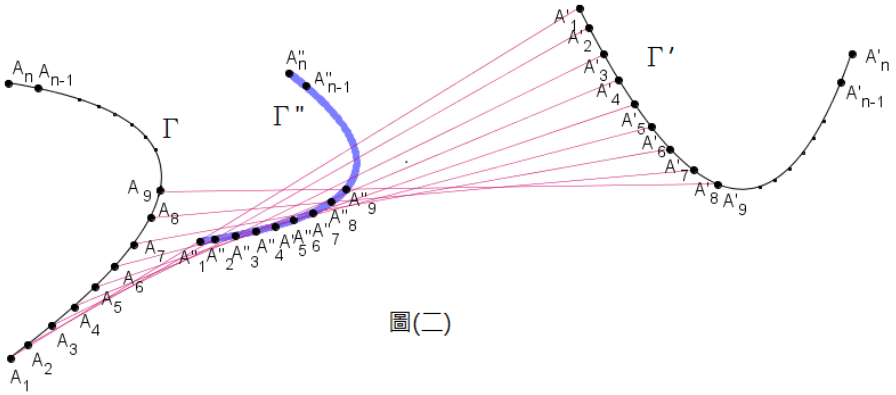
設Γ，Γ′為同向的相似圖形(可以有弧線)，設 P 為Γ上的動點，Q 在Γ′上，且為 P 的對應點，R 在$\overleftrightarrow{PQ}$上，滿足$\overrightarrow{PR}:\overrightarrow{RQ}=k:m$

設隨著 P 在Γ上變動，所有 R 點所成圖形為Γ"，則Γ"為Γ的同向相似圖形

【證明】



圖(一)



圖(二)

設 r 為定長(r 盡量小)，(1)若Γ為封閉圖形，如圖(一)，則在Γ圖形上取 n 個點A_1，A_2，⋯，A_n，滿足$\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_3A_4}$，⋯，$\overline{A_{n-1}A_n}$，$\overline{A_nA_1}$均小於 r

(2)若Γ為非封閉圖形，如圖(二)，則在Γ圖形上取 n 個點A_1，A_2，⋯，A_n，其中A_1為起點，A_n為終點，滿足$\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_3A_4}$，⋯，$\overline{A_{n-1}A_n}$均小於 r。

∵Γ，Γ′為同向的相似圖形∴可在Γ′上找到 n 個點A'_1，A'_2，⋯，A'_n分別為A_1，A_2，⋯，A_n的對應點，

連接$\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_3A_4}$，⋯，$\overline{A_{n-1}A_n}$，$\overline{A_nA_1}$成多邊形$A_1A_2\cdots A_n$

連接$\overline{A'_1A'_2}$，$\overline{A'_2A'_3}$，$\overline{A'_3A'_4}$，⋯，$\overline{A'_{n-1}A'_n}$，$\overline{A'_nA'_1}$成多邊形$A'_1A'_2\cdots A'_n$

$\because \Gamma$，Γ'為同向的相似圖形，又 A'_1，A'_2，⋯，A'_n分別為A_1，A_2，⋯，A_n的對應點

$\therefore$多邊形$A_1A_2\cdots A_n$與多邊形$A'_1A'_2\cdots A'_n$為同向的相似圖形

設 P 為多邊形$A_1A_2\cdots A_n$上的動點，Q 在多邊形$A'_1A'_2\cdots A'_n$上，且為 P 的對應點，R 在$\overleftrightarrow{PQ}$上，滿足$\overrightarrow{PR}:\overrightarrow{RQ}=k:m$

由定理十知：隨著 P 在多邊形$A_1A_2\cdots A_n$上變動，所有 R 點所成圖形為$A_1A_2\cdots A_n$的同向相似多邊形----------(1)

當$r\to 0$時，$n\to\infty$，此時多邊形$A_1A_2\cdots A_n$趨近於圖形Γ，代入上式性質(1)

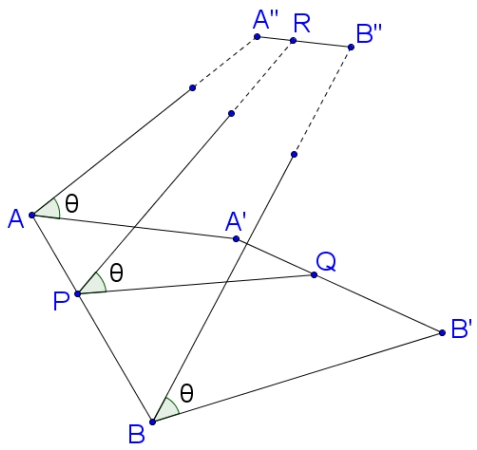
可得證：隨著 P 在Γ上變動，所有 R 點所成圖形為Γ的同向相似圖形

$\therefore \Gamma''$為Γ的同向相似圖形，得證■

附錄三：【定理十七】相似軌跡問題(二)中的引理及證明

以下為引理十四、十五、十六的證明

【引理十四】



設有$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{A'B'}$兩直線，其坐標為 $A(x_1，y_1)$，

$B(x_2，y_2)$，$A'(x_1'，y_1')$，$B'(x_2'，y_2')$，

$\overleftrightarrow{AB}$的參數式為$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$

$\overleftrightarrow{A'B'}$的參數式為$\begin{cases} x = x_1' + (x_2' - x_1')t \\ y = y_1' + (y_2' - y_1')t \end{cases}$

設 P 為$\overleftrightarrow{AB}$上的動點，Q 在$\overleftrightarrow{A'B'}$上，且為 P 的對應點，若θ為某固定角度

今以A為旋轉中心將A'旋轉θ再伸縮s倍得A''點，以B為旋轉中心將B'旋轉θ再伸縮s倍得B''點，以P為旋轉中心將Q旋轉θ再伸縮s倍得R點

證明：隨著 P 在$\overleftrightarrow{AB}$上變動，所有 R 點所成圖形為$\overleftrightarrow{A''B''}$

【證明】

已知 $A(x_1，y_1)$，$A'(x_1'，y_1')$ ∵以A為旋轉中心將A'旋轉θ再伸縮s倍得A''點，令$A''(x,y)$

則$x + iy = [(x_1' - x_1) + i(y_1' - y_1)]s(\cos\theta + i\sin\theta)$

得$x = s(x_1' - x_1)\cos\theta - s(y_1' - y_1)\sin\theta + x_1$

$y = s(x_1' - x_1)\sin\theta + s(y_1' - y_1)\cos\theta + y_1$

∴A''的坐標為$(s(x_1' - x_1)\cos\theta - s(y_1' - y_1)\sin\theta + x_1，s(x_1' - x_1)\sin\theta + s(y_1' - y_1)\cos\theta + y_1)$

已知 $B(x_2，y_2)$，$B'(x_2'，y_2')$ ∵以B為旋轉中心將B′旋轉θ再伸縮s倍得B"點，同理

B"的坐標為$(s(x_2'-x_2)\cos\theta-s(y_2'-y_2)\sin\theta+x_2，s(x_2'-x_2)\sin\theta+s(y_2'-y_2)\cos\theta+y_2)$

∵P在$\overleftrightarrow{AB}$上，設 P 點坐標為$(x_1+(x_2-x_1)t，y_1+(y_2-y_1)t)$

∵Q在$\overleftrightarrow{A'B'}$上，且為 P 的對應點 ∴Q點坐標為$(x_1'+(x_2'-x_1')t，y_1'+(y_2'-y_1')t)$

令P點坐標$\left(x_1+(x_2-x_1)t，y_1+(y_2-y_1)t\right)=(p_1，p_2)$，

Q點坐標$\left(x_1'+(x_2'-x_1')t，y_1'+(y_2'-y_1')t\right)=(q_1，q_2)$

已知以P為旋轉中心將Q旋轉θ再伸縮s倍得R點

與A"的坐標求法同理，可得R點坐標為

$R\left(s(q_1-p_1)\cos\theta-s(q_2-p_2)\sin\theta+p_1，s(q_1-p_1)\sin\theta+s(q_2-p_2)\cos\theta+p_2\right)$

令R坐標為(x,y)

則$x=s(q_1-p_1)\cos\theta-s(q_2-p_2)\sin\theta+p_1$

$$=s(x_1'+(x_2'-x_1')t-x_1-(x_2-x_1)t)\cos\theta$$
$$-s(y_1'+(y_2'-y_1')t-y_1-(y_2-y_1)t)\sin\theta+x_1+(x_2-x_1)t$$

$$=s(x_1'-x_1)\cos\theta-s(y_1'-y_1)\sin\theta+x_1$$
$$+[s(x_2'-x_1'-x_2+x_1)\cos\theta-s(y_2'-y_1'-y_2+y_1)\sin\theta+(x_2-x_1)]t$$

$y=s(q_1-p_1)\sin\theta+s(q_2-p_2)\cos\theta+p_2$

$$=s(x_1'+(x_2'-x_1')t-x_1-(x_2-x_1)t)\sin\theta$$
$$+s(y_1'+(y_2'-y_1')t-y_1-(y_2-y_1)t)\cos\theta+y_1+(y_2-y_1)t$$

$$=s(x_1'-x_1)\sin\theta+s(y_1'-y_1)\cos\theta+y_1$$
$$+[s(x_2'-x_1'-x_2+x_1)\sin\theta+s(y_2'-y_1'-y_2+y_1)\cos\theta+(y_2-y_1)]t$$

∴R(x，y)的參數式為

$$x = s(x_1' - x_1)\cos\theta - s(y_1' - y_1)\sin\theta + x_1 + [s(x_2' - x_1' - x_2 + x_1)\cos\theta - s(y_2' - y_1' - y_2 + y_1)\sin\theta + (x_2 - x_1)]t$$

$$y = s(x_1' - x_1)\sin\theta + s(y_1' - y_1)\cos\theta + y_1 + [s(x_2' - x_1' - x_2 + x_1)\sin\theta + s(y_2' - y_1' - y_2 + y_1)\cos\theta + (y_2 - y_1)]t$$

所有 R 點所成圖形為一直線

當 t=0 時，

$$(x，y) = (s(x_1' - x_1)\cos\theta - s(y_1' - y_1)\sin\theta + x_1，s(x_1' - x_1)\sin\theta + s(y_1' - y_1)\cos\theta + y_1)\text{為}A''$$

當 t=1 時，

$$(x，y) = (s(x_2' - x_2)\cos\theta - s(y_2' - y_2)\sin\theta + x_2，s(x_2' - x_2)\sin\theta + s(y_2' - y_2)\cos\theta + y_2)\text{為}B''$$

所以 R 點所成圖形為$\overleftrightarrow{A''B''}$，得證■

【引理十五】

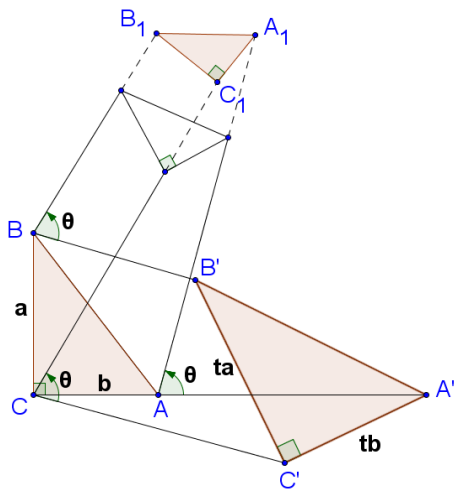
設直角ΔABC與直角$\Delta A'B'C'$為同向的相似三角形，

$\angle C = \angle C' = 90^\circ$，$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$

若θ為某固定角度，今以A為旋轉中心將A'旋轉θ再伸縮s倍得A_1點，以B為旋轉中心將B'旋轉θ再伸縮s倍得B_1點，以C為旋轉中心將C'旋轉θ再伸縮s倍得C_1點

證明：$\Delta A_1B_1C_1$與ΔABC亦為同向的相似三角形

【證明】



如圖，設$\overline{AC}=b$，$\overline{BC}=a$，$\overline{A'C'}=tb$，$\overline{B'C'}=ta$，

令 C(0，0)，A(b，0)，B(0，a)將圖形坐標化，

設$C'(x_0，y_0)$，$\overrightarrow{C'A'}$與x軸正向夾角為α

$\because \overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'A'}$

$=(x_0，y_0)+(tb\cos\alpha，tb\sin\alpha)$

$=(x_0+tb\cos\alpha，y_0+tb\sin\alpha)$

又 C 為(0,0)$\therefore A'(x_0+tb\cos\alpha，y_0+tb\sin\alpha)$，同理

$B'\left(x_0+ta\cos(90^\circ+\alpha)，y_0+ta\sin(90^\circ+\alpha)\right)$

$=B'\ (x_0-ta\sin\alpha，y_0+ta\cos\alpha)$

已知以A為旋轉中心將A′旋轉θ再伸縮s倍得A_1點，

$A(b，0)$，$A'(x_0+tb\cos\alpha，y_0+tb\sin\alpha)$，設$A_1(x_1，y_1)$

則 $x_1+iy_1=[(x_0+tb\cos\alpha-b)+i(y_0+tb\sin\alpha)]s(\cos\theta+i\sin\theta)+b$

得$x_1=s(x_0+tb\cos\alpha-b)\cos\theta-s(y_0+tb\sin\alpha)\sin\theta+b$

$y_1=s(x_0+tb\cos\alpha-b)\sin\theta+s(y_0+tb\sin\alpha)\cos\theta$

$\therefore$ A_1坐標為

$(s(x_0+tb\cos\alpha-b)\cos\theta-s(y_0+tb\sin\alpha)\sin\theta+b，s(x_0+tb\cos\alpha-b)\sin\theta+s(y_0+tb\sin\alpha)\cos\theta)$

已知以B為旋轉中心將B′旋轉θ再伸縮s倍得B_1點，同理可得知

B_1坐標為

$(s(x_0 - t\sin\alpha)\cos\theta - s(y_0 + t\cos\alpha - a)\sin\theta，s(x_0 - t\sin\alpha)\sin\theta$

$+ s(y_0 + t\cos\alpha - a)\cos\theta + a)$

已知以C為旋轉中心將C'旋轉θ再伸縮s倍得C_1點，同理可得知

C_1坐標為$(sx_0\cos\theta - sy_0\sin\theta，sx_0\sin\theta + sy_0\cos\theta)$

$\overrightarrow{C_1A_1}$

$= (-sb\cos\theta + stb\cos\alpha\cos\theta - stb\sin\alpha\sin\theta + b，-sb\sin\theta + stb\cos\alpha\sin\theta$

$+ stb\sin\alpha\cos\theta)$

$= (-sb\cos\theta + stb(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) + b，-sb\sin\theta + stb(\sin\theta\cos\alpha +$

$\cos\theta\sin\alpha))$

$= (-sb\cos\theta + stb\cos(\theta + \alpha) + b，-sb\sin\theta + stb\sin(\theta + \alpha))$

$= b(-s\cos\theta + st\cos(\theta + \alpha) + 1，-s\sin\theta + st\sin(\theta + \alpha))$

$\overrightarrow{C_1B_1} = (-sta\sin\alpha\cos\theta + sa\sin\theta - sta\cos\alpha\sin\theta，-sta\sin\alpha\sin\theta - sa\cos\theta +$

$sta\cos\alpha\cos\theta + a)$

$= (sa\sin\theta - sta(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)，-sa\cos\theta$

$+ sta(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) + a)$

$= (sa\sin\theta - sta\sin(\theta + \alpha)，-sa\cos\theta + sta\cos(\theta + \alpha) + a)$

$= a(s\sin\theta - st\sin(\theta + \alpha)，-s\cos\theta + st\cos(\theta + \alpha) + 1)$

令$-s\cos\theta + st\cos(\theta + \alpha) + 1 = c$，$-s\sin\theta + st\sin(\theta + \alpha) = d$，

則$\overrightarrow{C_1A_1} = b(c，d)$，$\overrightarrow{C_1B_1} = a(-d，c)$

所以$\overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1B_1} = ba(-cd + dc) = 0$ $\therefore \overrightarrow{C_1A_1} \perp \overrightarrow{C_1B_1}$ $\therefore \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$

將$c+di$改成極式，設$c+di=e(\cos\beta+i\sin\beta)$，則 $c=e\cos\beta$ ，$d=e\sin\beta$

$\overrightarrow{C_1A_1}=b(c，d)=b(e\cos\beta，e\sin\beta)=be(\cos\beta，\sin\beta)$

$\overrightarrow{C_1B_1}=a(-d，c)=a(-e\sin\beta，e\cos\beta)=ae(-\sin\beta，\cos\beta)=ae(\cos(90^\circ+\beta)，\sin(90^\circ+\beta))$

$\overline{C_1A_1}：\overline{C_1B_1}=|\overrightarrow{C_1A_1}|：|\overrightarrow{C_1B_1}|=be：ae=b：a=\overline{CA}：\overline{CB}$

又$\angle A_1C_1B_1=\angle ACB=90^\circ$ 所以$\Delta A_1B_1C_1\sim\Delta ABC$(SAS 相似)，

又$\overrightarrow{CA}=(b，0)=b(\cos0^\circ，\sin0^\circ)$，$\overrightarrow{CB}=(0，a)=a(\cos90^\circ，\sin90^\circ)$

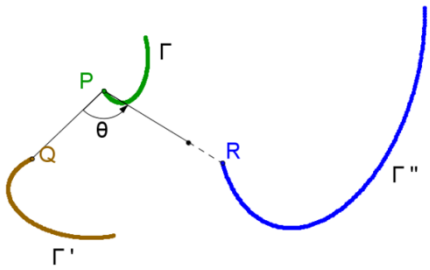
$\overrightarrow{C_1A_1}=be(\cos\beta，\sin\beta)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=ae(\cos(90^\circ+\beta)，\sin(90^\circ+\beta))$

所以將ΔABC以 C 為旋轉中心旋轉β，再平移及伸縮可得$\Delta A_1B_1C_1$

可得知$\Delta A_1B_1C_1$與ΔABC為同向的相似三角形，得證■

【引理十六】

設Γ，Γ'為同向的相似圖形(可以有弧線)，設 P 為Γ上的動點，Q 在Γ'上，且為 P 的對應點，若θ為某固定角度，且以 P 為旋轉中心將 Q 旋轉θ，再伸縮 s 倍得 R 點，設隨著 P 在Γ上變動，所有 R 點所成圖形為Γ''



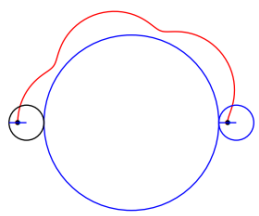
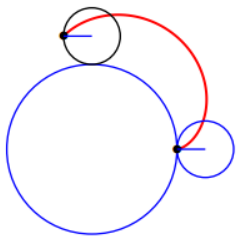
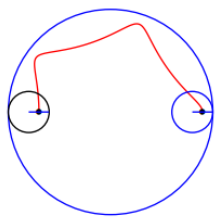
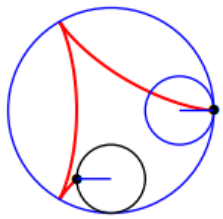
則Γ''為 Γ的同向相似圖形

【證明】

由於任意三角形均可分成兩個直角三角形，n 邊形可以分成(n-2)個三角形，有弧線的圖形可視為 n 邊形($n\to\infty$)，接著與正文【引理八】、【引理九】、【定理十】、【定理十一】同樣的證法，即可得證【引理十六】 ■

附錄四：內、外次擺線的文獻整理

	外次擺線	內次擺線
定義	設有一定圓半徑為 R，有一動圓半徑為 r，動圓緊貼著定圓的**外部**滾動，動圓上的定點 P 之移動軌跡。	設有一定圓半徑為 R，有一動圓半徑為 r，動圓緊 貼著定圓的**內部**滾動，動圓上的定點 P 之移動軌 跡。
分類及參數式	(1) 若 P 為動**圓內(或外)**上的定點，設 P 與動圓圓心距離為 λr，P 的軌跡稱為外次擺線。 參數式為： $\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta - \lambda r\cos(\frac{R+r}{r}\theta) \\ y = (R+r)\sin\theta - \lambda r\sin(\frac{R+r}{r}\theta) \end{cases}$ -- ---(*) (2) 若 P 為動圓**圓周上**的定點，則 P 的軌跡稱為外擺線。 外擺線的參數式為： $\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta - r\cos(\frac{R+r}{r}\theta) \\ y = (R+r)\sin\theta - r\sin(\frac{R+r}{r}\theta) \end{cases}$	(1) 若 P 為動**圓內(或外)**上的定點，設 P 與動圓圓心距離為 λr，P 的軌跡稱為內次擺線。 參數式為： $\begin{cases} x = (R-r)\cos\theta + \lambda r\cos(\frac{R-r}{r}\theta) \\ y = (R-r)\sin\theta - \lambda r\sin(\frac{R-r}{r}\theta) \end{cases}$ --- ------(#) (2) 若 P 為動圓**圓周上**的定點，則 P 的軌跡稱為內擺線。 內擺線的參數式為： $\begin{cases} x = (R-r)\cos\theta + r\cos(\frac{R-r}{r}\theta) \\ y = (R-r)\sin\theta - r\sin(\frac{R-r}{r}\theta) \end{cases}$

外次擺線	外擺線	內次擺線	內擺線
			

備註說明	1. 外次擺線的參數式中$\lambda = 1$時即為外擺線，所以外擺線可視為外次擺線的一種特殊情形。 2. 定圓的圓心稱為外次擺線的中心，參數式(*)中所表示的外次擺線圖形中心為(0，0)。 3. 對於不同的 R，r，λ值，會產生不同的外次擺線圖形(圖形的差異很大，請參閱附錄六)	1. 內次擺線的參數式中$\lambda = 1$時即為內擺線，所以內擺線可視為內次擺線的一種特殊情形。 2. 內次擺線的參數式中$R = 2r$時即為橢圓，所以橢圓亦為內次擺線的一種。 3. 定圓的圓心稱為內次擺線的中心，參數式(#)中所表示的內次擺線圖形，中心為(0，0)。 4. 對於不同的 R，r，λ值，會產生不同的內次擺線圖形(圖形的差異很大，請參閱附錄六)

附錄五：【定理二十六】的詳細證明

設$T_1(a_1，b_1)$，$T_2(a_2，b_2)$，⋯，$T_n(a_n，b_n)$為坐標平面上的 n 個定點$(n \geq 2)$，另有一點 P，令$\theta_1 = a\theta$，$\theta_2 = a\theta + \alpha_1$，⋯，$\theta_m = a\theta + \alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1} = b\theta + \alpha_m$，⋯，$\theta_n = b\theta + \alpha_{n-1}$，(其中$1 \leq m < n$且$\alpha_1$，$\alpha_2$，⋯，$\alpha_{m-1}$，$\alpha_m$，⋯，$\alpha_{n-1}$為固定角度，$\alpha_0 = 0$，$a$，$b \neq 0$，$a \neq b$)，

今以T_1為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_1，得到R_1；以T_2為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_2，得到R_2；……；以T_n為旋轉中心，將 P 點旋轉θ_n，得到R_n。設 M 為R_1，R_2，⋯，R_n的平均點，即$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \cdots + \overrightarrow{OR_n})$，其中 O 為原點，

證明：若 P 點固定，則當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，M 點會跟著改變，而且

1. $ab < 0$時，所有 M 點所成圖形為內次擺線，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$
2. $ab > 0$時，所有 M 點所成圖形為外次擺線，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$

【證明】

回到 P.10【定理四】的證明過程，式子(1)(2)，令$M(x'，y')$則

$$nx' = x(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n) - y(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n) - a_1\cos\theta_1$$

$$+b_1\sin\theta_1 + a_1 - a_2\cos\theta_2 + b_2\sin\theta_2 + a_2 - \cdots - a_n\cos\theta_n + b_n\sin\theta_n + a_n$$

$$= x(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_m + \cos\theta_{m+1} + \cdots + \cos\theta_n) - y(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_m + \sin\theta_{m+1} + \cdots + \sin\theta_n) - a_1\cos\theta_1 + b_1\sin\theta_1 + a_1 - a_2\cos\theta_2 + b_2\sin\theta_2 + a_2 - \cdots - a_m\cos\theta_m + b_m\sin\theta_m + a_m - a_{m+1}\cos\theta_{m+1} + b_{m+1}\sin\theta_{m+1} + a_{m+1} - \cdots - a_n\cos\theta_n + b_n\sin\theta_n + a_n \text{----------}(3)$$

因為$\theta_1 = a\theta$，$\theta_2 = a\theta + \alpha_1$，⋯，$\theta_m = a\theta + \alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1} = b\theta + \alpha_m$，⋯，$\theta_n =$

$b\theta + \alpha_{n-1}$

代入(3)式，所以

$nx' = x(\cos a\theta + \cos(a\theta + \alpha_1) + \cdots + \cos(a\theta + \alpha_{m-1}) + \cos(b\theta + \alpha_m) + \cdots + \cos(b\theta + \alpha_{n-1})) - y(\sin a\theta + \sin(a\theta + \alpha_1) + \cdots + \sin(a\theta + \alpha_{m-1}) + \sin(b\theta + \alpha_m) + \cdots + \sin(b\theta + \alpha_{n-1})) - a_1\cos a\theta + b_1\sin a\theta + a_1 - a_2\cos(a\theta + \alpha_1) + b_2\sin(a\theta + \alpha_1) + a_2 - \cdots - a_m\cos(a\theta + \alpha_{m-1}) + b_m\sin(a\theta + \alpha_{m-1}) + a_m - a_{m+1}\cos(b\theta + \alpha_m) + b_{m+1}\sin(b\theta + \alpha_m) + a_{m+1} - \cdots - a_n\cos(b\theta + \alpha_{n-1}) + b_n\sin(b\theta + \alpha_{n-1}) + a_n$

$= x(\cos a\theta + \cos a\theta\cos\alpha_1 - \sin a\theta\sin\alpha_1 + \cdots + \cos a\theta\cos\alpha_{m-1} - \sin a\theta\sin\alpha_{m-1} + \cos b\theta\cos\alpha_m - \sin b\theta\sin\alpha_m + \cdots + \cos b\theta\cos\alpha_{n-1} - \sin b\theta\sin\alpha_{n-1}) - y(\sin a\theta + \sin a\theta\cos\alpha_1 + \cos a\theta\sin\alpha_1 + \cdots + \sin a\theta\cos\alpha_{m-1} + \cos a\theta\sin\alpha_{m-1} + \sin b\theta\cos\alpha_m + \cos b\theta\sin\alpha_m + \cdots + \sin b\theta\cos\alpha_{n-1} + \cos b\theta\sin\alpha_{n-1}) - a_1\cos a\theta + b_1\sin a\theta + a_1 - a_2(\cos a\theta\cos\alpha_1 - \sin a\theta\sin\alpha_1) + b_2(\sin a\theta\cos\alpha_1 + \cos a\theta\sin\alpha_1) + a_2 - \cdots - a_m(\cos a\theta\cos\alpha_{m-1} - \sin a\theta\sin\alpha_{m-1}) + b_m(\sin a\theta\cos\alpha_{m-1} + \cos a\theta\sin\alpha_{m-1}) + a_m - a_{m+1}(\cos b\theta\cos\alpha_m - \sin b\theta\sin\alpha_m) + b_{m+1}(\sin b\theta\cos\alpha_m + \cos b\theta\sin\alpha_m) + a_{m+1} - \cdots - a_n(\cos b\theta\cos\alpha_{n-1} - \sin b\theta\sin\alpha_{n-1}) + b_n(\sin b\theta\cos\alpha_{n-1} + \cos b\theta\sin\alpha_{n-1}) + a_n$

$= \cos a\theta(x + x\cos\alpha_1 + \cdots + x\cos\alpha_{m-1} - y\sin\alpha_1 - \cdots - y\sin\alpha_{m-1} - a_1 - a_2\cos\alpha_1 + b_2\sin\alpha_1 - \cdots - a_m\cos\alpha_{m-1} + b_m\sin\alpha_{m-1}) + \sin a\theta(-x\sin\alpha_1 - \cdots - x\sin\alpha_{m-1} - y - y\cos\alpha_1 - \cdots - y\cos\alpha_{m-1} + b_1 + a_2\sin\alpha_1 + b_2\cos\alpha_1 + \cdots + a_m\sin\alpha_{m-1} + b_m\cos\alpha_{m-1}) + \cos b\theta(x\cos\alpha_m + \cdots + x\cos\alpha_{n-1} - y\sin\alpha_m - \cdots - y\sin\alpha_{n-1} - a_{m+1}\cos\alpha_m + b_{m+1}\sin\alpha_m - \cdots - a_n\cos\alpha_{n-1} +$

$b_n\sin\alpha_{n-1}) + \sin b\theta(-x\sin\alpha_m - \cdots - x\sin\alpha_{n-1} - y\cos\alpha_m - \cdots - y\cos\alpha_{n-1} + a_{m+1}\sin\alpha_m + b_{m+1}\cos\alpha_m + \cdots + a_n\sin\alpha_{n-1} + b_n\cos\alpha_{n-1}) + a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$----------(4)

回到 P.10【定理四】的證明過程，式子(2)，令M(x′，y′)則

$$ny' = x(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n) + y(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n) - a_1\sin\theta_1 - b_1\cos\theta_1 + b_1 - a_2\sin\theta_2 - b_2\cos\theta_2 + b_2 - \cdots - a_n\sin\theta_n - b_n\cos\theta_n + b_n$$

$$= x(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_m + \sin\theta_{m+1} + \cdots + \sin\theta_n) + y(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_m + \cos\theta_{m+1} + \cdots + \cos\theta_n) - a_1\sin\theta_1 - b_1\cos\theta_1 + b_1 - a_2\sin\theta_2 - b_2\cos\theta_2 + b_2 - \cdots - a_m\sin\theta_m - b_m\cos\theta_m + b_m - a_{m+1}\sin\theta_{m+1} - b_{m+1}\cos\theta_{m+1} + b_{m+1} - \cdots - a_n\sin\theta_n - b_n\cos\theta_n + b_n$$----------(5)

因為$\theta_1 = a\theta$，$\theta_2 = a\theta + \alpha_1$，$\cdots$，$\theta_m = a\theta + \alpha_{m-1}$，$\theta_{m+1} = b\theta + \alpha_m$，$\cdots$，$\theta_n = b\theta + \alpha_{n-1}$

代入(5)式，所以

$$ny' = x(\sin a\theta + \sin(a\theta + \alpha_1) + \cdots + \sin(a\theta + \alpha_{m-1}) + \sin(b\theta + \alpha_m) + \cdots + \sin(b\theta + \alpha_{n-1})) + y(\cos a\theta + \cos(a\theta + \alpha_1) + \cdots + \cos(a\theta + \alpha_{m-1}) + \cos(b\theta + \alpha_m) + \cdots + \cos(b\theta + \alpha_{n-1})) - a_1\sin a\theta - b_1\cos a\theta + b_1 - a_2\sin(a\theta + \alpha_1) - b_2\cos(a\theta + \alpha_1) + b_2 - \cdots - a_m\sin(a\theta + \alpha_{m-1}) - b_m\cos(a\theta + \alpha_{m-1}) + b_m - a_{m+1}\sin(b\theta + \alpha_m) - b_{m+1}\cos(b\theta + \alpha_m) + b_{m+1} - \cdots - a_n\sin(b\theta + \alpha_{n-1}) - b_n\cos(b\theta + \alpha_{n-1}) + b_n$$

$$= x(\sin a\theta + \sin a\theta\cos\alpha_1 + \cos a\theta\sin\alpha_1 + \cdots + \sin a\theta\cos\alpha_{m-1} + \cos a\theta\sin\alpha_{m-1} + \sin b\theta\cos\alpha_m + \cos b\theta\sin\alpha_m + \cdots + \sin b\theta\cos\alpha_{n-1} + \cos b\theta\sin\alpha_{n-1}) + y(\cos a\theta + \cos a\theta\cos\alpha_1 - \sin a\theta\sin\alpha_1 + \cdots + \cos a\theta\cos\alpha_{m-1} - \sin a\theta\sin\alpha_{m-1} + \cos b\theta\cos\alpha_m - \sin b\theta\sin\alpha_m + \cdots + \cos b\theta\cos\alpha_{n-1} - \sin b\theta\sin\alpha_{n-1}) - a_1\sin a\theta -$$

$b_1\cos a\theta + b_1 - a_2(\sin a\theta\cos\alpha_1 + \cos a\theta\sin\alpha_1) -$

$b_2(\cos a\theta\cos\alpha_1 - \sin a\theta\sin\alpha_1) + b_2 - \cdots -$

$a_m(\sin a\theta\cos\alpha_{m-1} + \cos a\theta\sin\alpha_{m-1}) - b_m(\cos a\theta\cos\alpha_{m-1} - \sin a\theta\sin\alpha_{m-1}) +$

$b_m - a_{m+1}(\sin b\theta\cos\alpha_m + \cos b\theta\sin\alpha_m) - b_{m+1}(\cos b\theta\cos\alpha_m - \sin b\theta\sin\alpha_m) +$

$b_{m+1} - \cdots - a_n(\sin b\theta\cos\alpha_{n-1} + \cos b\theta\sin\alpha_{n-1}) - b_n(\cos b\theta\cos\alpha_{n-1} -$

$\sin b\theta\sin\alpha_{n-1}) + b_n$

$= \cos a\theta(x\sin\alpha_1 + \cdots + x\sin\alpha_{m-1} + y + y\cos\alpha_1 + \cdots + y\cos\alpha_{m-1} - b_1 -$

$a_2\sin\alpha_1 - b_2\cos\alpha_1 - \cdots - a_m\sin\alpha_{m-1} - b_m\cos\alpha_{m-1})+\sin a\theta(x + x\cos\alpha_1 + \cdots +$

$x\cos\alpha_{m-1} - y\sin\alpha_1 - \cdots - y\sin\alpha_{m-1} - a_1 - a_2\cos\alpha_1 + b_2\sin\alpha_1 - \cdots -$

$a_m\cos\alpha_{m-1} + b_m\sin\alpha_{m-1}) + \cos b\theta(x\sin\alpha_m + \cdots + x\sin\alpha_{n-1} + y\cos\alpha_m + \cdots +$

$y\cos\alpha_{n-1} - a_{m+1}\sin\alpha_m - b_{m+1}\cos\alpha_m - \cdots - a_n\sin\alpha_{n-1} -$

$b_n\cos\alpha_{n-1})+\sin b\theta(x\cos\alpha_m + \cdots + x\cos\alpha_{n-1} - y\sin\alpha_m - \cdots - y\sin\alpha_{n-1} -$

$a_{m+1}\cos\alpha_m + b_{m+1}\sin\alpha_m - \cdots - a_n\cos\alpha_{n-1} + b_n\sin\alpha_{n-1})+b_1 + b_2 + \cdots +$

$b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n$----------(6)

設$x\sin\alpha_1 + \cdots + x\sin\alpha_{m-1} + y + y\cos\alpha_1 + \cdots + y\cos\alpha_{m-1} - b_1 - a_2\sin\alpha_1 -$

$b_2\cos\alpha_1 - \cdots - a_m\sin\alpha_{m-1} - b_m\cos\alpha_{m-1} = c$

$x + x\cos\alpha_1 + \cdots + x\cos\alpha_{m-1} - y\sin\alpha_1 - \cdots - y\sin\alpha_{m-1} - a_1 - a_2\cos\alpha_1 + b_2\sin\alpha_1$

$- \cdots - a_m\cos\alpha_{m-1} + b_m\sin\alpha_{m-1} = d$

$x\sin\alpha_m + \cdots + x\sin\alpha_{n-1} + y\cos\alpha_m + \cdots + y\cos\alpha_{n-1} - a_{m+1}\sin\alpha_m - b_{m+1}\cos\alpha_m$

$- \cdots - a_n\sin\alpha_{n-1} - b_n\cos\alpha_{n-1} = e$

$x\cos\alpha_m + \cdots + x\cos\alpha_{n-1} - y\sin\alpha_m - \cdots - y\sin\alpha_{n-1} - a_{m+1}\cos\alpha_m + b_{m+1}\sin\alpha_m - \cdots$

$- a_n\cos\alpha_{n-1} + b_n\sin\alpha_{n-1} = f$

代入式子(4)(6)得

$nx' = d \times \cos a\theta - c \times \sin a\theta + f \times \cos b\theta - e \times \sin b\theta + a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1}$

$+ \cdots + a_n$

$ny' = c \times \cos a\theta + d \times \sin a\theta + e \times \cos b\theta + f \times \sin b\theta + b_1 + b_2 + \cdots + b_m + b_{m+1}$

$+ \cdots + b_n$

所以$\begin{cases} x' = \frac{d}{n} \times \cos a\theta - \frac{c}{n} \times \sin a\theta + \frac{f}{n} \times \cos b\theta - \frac{e}{n} \times \sin b\theta + \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \\ y' = \frac{c}{n} \times \cos a\theta + \frac{d}{n} \times \sin a\theta + \frac{e}{n} \times \cos b\theta + \frac{f}{n} \times \sin b\theta + \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \end{cases}$

將$M(x'，y')$平移至$M_1(x_1，y_1)$，

使得$\begin{cases} x_1 = \frac{d}{n} \times \cos a\theta - \frac{c}{n} \times \sin a\theta + \frac{f}{n} \times \cos b\theta - \frac{e}{n} \times \sin b\theta \\ y_1 = \frac{c}{n} \times \cos a\theta + \frac{d}{n} \times \sin a\theta + \frac{e}{n} \times \cos b\theta + \frac{f}{n} \times \sin b\theta \end{cases}$

設隨著θ改變，所有點$M_1(x_1，y_1)$所成圖形為Γ_1，所有點$M(x'，y')$所成圖形為Γ

則將Γ_1平移向量$\vec{v} = (\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$可得$\Gamma \because \Gamma_1$與$\Gamma$兩圖形全等

----------(*)

我們先探討所有點$M_1(x_1，y_1)$所成的圖形Γ_1：

令$p = \frac{c}{n}$，$q = \frac{d}{n}$，$s = \frac{e}{n}$，$t = \frac{f}{n}$，則

$\begin{cases} x_1 = q \times \cos a\theta - p \times \sin a\theta + t \times \cos b\theta - s \times \sin b\theta \\ y_1 = p \times \cos a\theta + q \times \sin a\theta + s \times \cos b\theta + t \times \sin b\theta \end{cases}$ ----------(7)

將$q + pi$與$s + ti$以極式表示，

設$q + pi = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$，$t + si = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

其中$r_1 = \sqrt{q^2 + p^2}$，$r_2 = \sqrt{t^2 + s^2}$

則$q = r_1\cos\varphi_1$，$p = r_1\sin\varphi_1$，$t = r_2\cos\varphi_2$，$s = r_2\sin\varphi_2$，代入(7)式

得到

$x_1 = q \times \cos a\theta - p \times \sin a\theta + t \times \cos b\theta - s \times \sin b\theta$

$= r_1\cos\varphi_1\cos a\theta - r_1\sin\varphi_1\sin a\theta + r_2\cos\varphi_2\cos b\theta - r_2\sin\varphi_2\sin b\theta$

$= r_1\cos(a\theta + \varphi_1) + r_2\cos(b\theta + \varphi_2)$----------(8)

$y_1 = p \times \cos a\theta + q \times \sin a\theta + s \times \cos b\theta + t \times \sin b\theta$

$= r_1\sin\varphi_1\cos a\theta + r_1\cos\varphi_1\sin a\theta + r_2\sin\varphi_2\cos b\theta + r_2\cos\varphi_2\sin b\theta$

$= r_1\sin(a\theta + \varphi_1) + r_2\sin(b\theta + \varphi_2)$----------(9)

1. $ab < 0$時

   $b(b-a) = b^2 - ba > -ba > 0 \therefore b(b-a) > 0$

   令$R = \frac{b-a}{b} \times r_1$，則$R > 0$

   令$r = -\frac{a}{b} \times r_1 \because ab < 0 \therefore r = -\frac{a}{b} \times r_1 > 0$，

   令 $\lambda = -\frac{br_2}{ar_1} \because ab < 0 \therefore \lambda = -\frac{br_2}{ar_1} > 0$

   令 $s = -\frac{b}{r_1}$，$\beta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{a-b}$，$\alpha = \frac{a\varphi_2 - b\varphi_1}{a-b}$

   (R，r，$\lambda > 0$已證)

則

$$\begin{cases} R-r=\frac{b-a}{b}\times r_1-(-\frac{a}{b}\times r_1)=r_1 \\ \lambda r=-\frac{br_2}{ar_1}\times(-\frac{a}{b}\times r_1)=r_2 \\ rs=-\frac{a}{b}\times r_1\times(-\frac{b}{r_1})=a \\ -(R-r)s=-r_1s=b \\ rs\beta+\alpha=a\beta+\alpha=a\times\frac{\varphi_1-\varphi_2}{a-b}+\frac{a\varphi_2-b\varphi_1}{a-b}=\frac{a\varphi_1-b\varphi_1}{a-b}=\varphi_1 \\ -(R-r)s\beta+\alpha=-r_1s\beta+\alpha=b\beta+\alpha=b\times\frac{\varphi_1-\varphi_2}{a-b}+\frac{a\varphi_2-b\varphi_1}{a-b}=\frac{a\varphi_2-b\varphi_2}{a-b}=\varphi_2 \end{cases}$$

所以$r_1=R-r$，$r_2=\lambda r$，$a=rs$，$b=-(R-r)s$，$\varphi_1=rs\beta+\alpha$，

$\varphi_2=-(R-r)s\beta+\alpha$

$a\theta+\varphi_1=rs\theta+rs\beta+\alpha=rs(\theta+\beta)+\alpha$

$b\theta+\varphi_2=-(R-r)s\theta-(R-r)s\beta+\alpha=-(R-r)s(\theta+\beta)+\alpha$

代入(8)(9)

$x_1=r_1\cos(a\theta+\varphi_1)+r_2\cos(b\theta+\varphi_2)$

$=(R-r)\cos(rs(\theta+\beta)+\alpha)+\lambda r\cos(-(R-r)s(\theta+\beta)+\alpha)$

$y_1=r_1\sin(a\theta+\varphi_1)+r_2\sin(b\theta+\varphi_2)$

$=(R-r)\sin(rs(\theta+\beta)+\alpha)+\lambda r\sin(-(R-r)s(\theta+\beta)+\alpha)$

令$\theta+\beta=\theta_1$，則

$$\begin{cases} x_1=(R-r)\cos(rs\theta_1+\alpha)+\lambda r\cos(-(R-r)s\theta_1+\alpha) \\ y_1=(R-r)\sin(rs\theta_1+\alpha)+\lambda r\sin(-(R-r)s\theta_1+\alpha) \end{cases}\text{----------(10)}$$

令$rs\theta_1=\theta_2$，則$s\theta_1=\frac{\theta_2}{r}$

$rs\theta_1+\alpha=\theta_2+\alpha$，

$-(R-r)s\theta_1+\alpha=-(R-r)\times\frac{\theta_2}{r}+\alpha=-\frac{R-r}{r}\theta_2+\alpha$

代入(10)式，得到

$$\begin{cases} x_1 = (R-r)\cos(\theta_2+\alpha) + \lambda r\cos\left(-\dfrac{R-r}{r}\theta_2+\alpha\right) \\ \quad = (R-r)\cos(\theta_2+\alpha) + \lambda r\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\theta_2-\alpha\right) \\ y_1 = (R-r)\sin(\theta_2+\alpha) + \lambda r\sin\left(-\dfrac{R-r}{r}\theta_2+\alpha\right) \\ \quad = (R-r)\sin(\theta_2+\alpha) - \lambda r\sin\left(\dfrac{R-r}{r}\theta_2-\alpha\right) \end{cases}$$

所以$M_1(x_1$，$y_1)$的坐標為

$M_1((R-r)\cos(\theta_2+\alpha) + \lambda r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_2-\alpha\right)$，$(R-r)\sin(\theta_2+\alpha) -$

$\lambda r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta_2-\alpha\right))$

令點M_2坐標為$((R-r)\cos\theta_2 + \lambda r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right)$，$(R-r)\sin\theta_2 - \lambda r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right))$

設隨著θ_2在0°到360°之間逐漸變動，所有M_2所成的圖形為Γ_2

則Γ_2的參數式為$\begin{cases} x = (R-r)\cos\theta_2 + \lambda r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right) \\ y = (R-r)\sin\theta_2 - \lambda r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right) \end{cases}$----------(11)

由內次擺線的參數式知，所有M_2所成的圖形Γ_2為內次擺線，且中心為(0，0)

(內次擺線的定義及參數式請參閱 P.218 附錄四)

$\because\left[(R-r)\cos\theta_2 + \lambda r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right) + i\left((R-r)\sin\theta_2 - \lambda r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right)\right)\right] \times$

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$= \left((R-r)\cos\theta_2 + \lambda r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right)\right)\cos\alpha$$
$$-\left((R-r)\sin\theta_2 - \lambda r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right)\right)\sin\alpha$$
$$+ i\left[\left((R-r)\cos\theta_2 + \lambda r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right)\right)\sin\alpha\right.$$
$$\left.+\left((R-r)\sin\theta_2 - \lambda r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right)\right)\cos\alpha\right]$$

$$= (R-r)(\cos\theta_2\cos\alpha$$
$$-\sin\theta_2\sin\alpha) + \lambda r\left[\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right)\cos\alpha + \sin\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right)\sin\alpha\right]$$
$$+ i\left[(R-r)(\cos\theta_2\sin\alpha\right.$$
$$\left.+\sin\theta_2\cos\alpha) - \lambda r(\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right)\cos\alpha - \cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right)\sin\alpha\right]$$

$$= (R-r)\cos(\theta_2+\alpha) + \lambda r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_2 - \alpha\right)$$
$$+ i\left[(R-r)\sin(\theta_2+\alpha) - \lambda r\sin(\frac{R-r}{r}\theta_2 - \alpha)\right]$$

所以將$M_2((R-r)\cos\theta_2 + \lambda r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right)$，$(R-r)\sin\theta_2 - \lambda r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta_2\right))$以原點為旋轉中心，旋轉$\alpha$可得

$M_1((R-r)\cos(\theta_2+\alpha) + \lambda r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta_2 - \alpha\right)$，$(R-r)\sin(\theta_2+\alpha) -$

$\lambda r\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta_2 - \alpha\right))$

∵所有M_2點所成的圖形為Γ_2，所有M_1點所成的圖形為Γ_1

∴將Γ_2以原點為旋轉中心，旋轉α可得Γ_1

又∵隨著θ_2改變，M_2的軌跡Γ_2為內次擺線，且中心為(0，0)

∴Γ_1圖形與Γ_2全等，均為內次擺線，且中心均為原點(0，0)

又由 P.224(*)知：Γ_1圖形平移向量$\vec{v}=(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$可得$M(x'，y')$的軌跡$\Gamma$

$\therefore$當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，所有 M 點所成圖形為一內次擺線，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$

2. $ab>0$時

因為$a\neq b$，不失一般性，不妨假設$|b|>|a|$

令$r=\frac{a}{b}\times r_1$，$R=\frac{b-a}{b}\times r_1$

$\because ab>0$且$r_1>0\therefore r=\frac{a}{b}\times r_1>0$

$\because ab>0$且$|b|>|a|\therefore$“$a，b>0$ 且 $b>a$”或“$a，b<0$ 且 $b<a$”

$\therefore\frac{b-a}{b}>0\therefore R=\frac{b-a}{b}\times r_1>0$令 $s=\frac{b}{r_1}$，$\lambda=-\frac{br_2}{ar_1}$，$\beta=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{a-b}$，$\alpha=\frac{a\varphi_2-b\varphi_1}{a-b}$，

$r=\frac{a}{b}\times r_1$，$R=\frac{b-a}{b}\times r_1$($R，r>0$已證，

但$\because ab>0\therefore\lambda=-\frac{br_2}{ar_1}<0$這點後面再做處理)

則

$$\begin{cases} R+r=\frac{b-a}{b}\times r_1+\frac{a}{b}\times r_1=r_1 \\ -\lambda r=\frac{br_2}{ar_1}\times\frac{a}{b}\times r_1=r_2 \\ rs=\frac{a}{b}\times r_1\times\frac{b}{r_1}=a \\ (R+r)s=r_1s=b \\ rs\beta+\alpha=a\beta+\alpha=a\times\frac{\varphi_1-\varphi_2}{a-b}+\frac{a\varphi_2-b\varphi_1}{a-b}=\frac{a\varphi_1-b\varphi_1}{a-b}=\varphi_1 \\ (R+r)s\beta+\alpha=r_1s\beta+\alpha=b\beta+\alpha=b\times\frac{\varphi_1-\varphi_2}{a-b}+\frac{a\varphi_2-b\varphi_1}{a-b}=\frac{a\varphi_2-b\varphi_2}{a-b}=\varphi_2 \end{cases}$$

所以$r_1=R+r$，$r_2=-\lambda r$，$a=rs$，$b=(R+r)s$，$\varphi_1=rs\beta+\alpha$，$\varphi_2=(R+r)s\beta+\alpha$

$a\theta + \varphi_1 = rs\theta + rs\beta + \alpha = rs(\theta + \beta) + \alpha$

$b\theta + \varphi_2 = (R + r)s\theta + (R + r)s\beta + \alpha = (R + r)s(\theta + \beta) + \alpha$

代入 P.225(8)(9)

$x_1 = r_1 \cos(a\theta + \varphi_1) + r_2 \cos(b\theta + \varphi_2)$

$= (R + r)\cos(rs(\theta + \beta) + \alpha) - \lambda r\cos\big((R + r)s(\theta + \beta) + \alpha\big)$

$y_1 = r_1 \sin(a\theta + \varphi_1) + r_2 \sin(b\theta + \varphi_2)$

$= (R + r)\sin(rs(\theta + \beta) + \alpha) - \lambda r\sin\big((R + r)s(\theta + \beta) + \alpha\big)$

令$\theta + \beta = \theta_1$，則

$$\begin{cases} x_1 = (R + r)\cos(rs\theta_1 + \alpha) - \lambda r\cos\big((R + r)s\theta_1 + \alpha\big) \\ y_1 = (R + r)\sin(rs\theta_1 + \alpha) - \lambda r\sin\big((R + r)s\theta_1 + \alpha\big) \end{cases} \text{----------(12)}$$

令$rs\theta_1 = \theta_2$，則$s\theta_1 = \frac{\theta_2}{r}$

$rs\theta_1 + \alpha = \theta_2 + \alpha$，

$(R + r)s\theta_1 + \alpha = (R + r) \times \frac{\theta_2}{r} + \alpha = \frac{R+r}{r}\theta_2 + \alpha$

代入(10)式，得到

$$\begin{cases} x_1 = (R + r)\cos(\theta_2 + \alpha) - \lambda r\cos\left(\frac{R + r}{r}\theta_2 + \alpha\right) \\ y_1 = (R + r)\sin(\theta_2 + \alpha) - \lambda r\sin\left(\frac{R + r}{r}\theta_2 + \alpha\right) \end{cases}$$

所以$M_1(x_1$，$y_1)$的坐標為

$M_1((R + r)\cos(\theta_2 + \alpha) - \lambda r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_2 + \alpha\right)$，$(R + r)\sin(\theta_2 + \alpha) -$

$\lambda r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta_2 + \alpha\right))$

設$\theta_3 = \theta_2 - \frac{r}{R} \times 180^\circ$

令點M_2坐標為$((R+r)\cos\theta_3 + \lambda r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)$，$(R+r)\sin\theta_3 + \lambda r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right))$

令$\alpha_1 = \alpha + \frac{r}{R} \times 180^\circ$，

則$\theta_3 + \alpha_1 = \theta_2 + \alpha$----------(13)

$$\frac{R+r}{r}\theta_3 + \alpha_1 = \frac{R+r}{r}\left(\theta_2 - \frac{r}{R} \times 180^\circ\right) + \alpha + \frac{r}{R} \times 180^\circ$$

$$= \frac{R+r}{r}\theta_2 - \frac{R+r}{R} \times 180^\circ + \alpha + \frac{r}{R} \times 180^\circ$$

$$= \frac{R+r}{r}\theta_2 + \alpha - 180^\circ \text{---------(14)}$$

因為

$$\left[(R+r)\cos\theta_3 + \lambda r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right) + i\left((R+r)\sin\theta_3 + \lambda r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)\right)\right]$$
$$\times (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$$

$$= \left((R+r)\cos\theta_3 + \lambda r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)\right)\cos\alpha_1$$
$$- \left((R+r)\sin\theta_3 + \lambda r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)\right)\sin\alpha_1$$
$$+ i\left[\left((R+r)\cos\theta_3 + \lambda r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)\right)\sin\alpha_1\right.$$
$$\left. + \left((R+r)\sin\theta_3 + \lambda r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)\right)\cos\alpha_1\right]$$

$$= (R+r)(\cos\theta_3\cos\alpha_1$$
$$- \sin\theta_3\sin\alpha_1) + \lambda r\left[\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)\cos\alpha_1 - \sin\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)\sin\alpha_1\right]$$
$$+ i\left[(R+r)(\cos\theta_3\sin\alpha_1\right.$$
$$\left. + \sin\theta_3\cos\alpha_1) + \lambda r(\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)\sin\alpha_1 + \sin\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)\cos\alpha_1)\right]$$

$$= (R+r)\cos(\theta_3+\alpha_1) + \lambda r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_3+\alpha_1\right)$$

$$+ i\left[(R+r)\sin(\theta_3+\alpha_1) + \lambda r\sin(\frac{R+r}{r}\theta_3+\alpha_1)\right]$$

(以式子(13)(14)所得到的 $\theta_3+\alpha_1=\theta_2+\alpha$及$\frac{R+r}{r}\theta_3+\alpha_1=\frac{R+r}{r}\theta_2+\alpha-180^\circ$ 代入)

$$= (R+r)\cos(\theta_2+\alpha) + \lambda r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_2+\alpha-180^\circ\right)$$

$$+ i\left[(R+r)\sin(\theta_2+\alpha) + \lambda r\sin(\frac{R+r}{r}\theta_2+\alpha-180^\circ)\right]$$

$$= (R+r)\cos(\theta_2+\alpha) + \lambda r\cos\left(180^\circ-(\frac{R+r}{r}\theta_2+\alpha)\right)$$

$$+ i\left[(R+r)\sin(\theta_2+\alpha) - \lambda r\sin(180^\circ-(\frac{R+r}{r}\theta_2+\alpha))\right]$$

$$= (R+r)\cos(\theta_2+\alpha) - \lambda r\cos(\frac{R+r}{r}\theta_2+\alpha) \ +i\left[(R+r)\sin(\theta_2+\alpha) - \lambda r\sin(\frac{R+r}{r}\theta_2+\alpha)\right]$$

所以將$M_2\left((R+r)\cos\theta_3+\lambda r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)，(R+r)\sin\theta_3+\lambda r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right)\right)$ 以原點為旋轉中心旋轉α_1可得

$$M_1\left((R+r)\cos(\theta_2+\alpha) - \lambda r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_2+\alpha\right)，(R+r)\sin(\theta_2+\alpha) - \lambda r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta_2+\alpha\right)\right)$$

設隨著θ_2在0°到360°之間逐漸變動，所有M_2所成的圖形為Γ_2

$\because$所有M_2點所成的圖形為Γ_2，所有M_1點所成的圖形為Γ_1

$\therefore$將Γ_2以原點為旋轉中心，旋轉α_1可得Γ_1

又Γ_2：$\begin{cases} x=(R+r)\cos\theta_3+\lambda r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right) \\ y=(R+r)\sin\theta_3+\lambda r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right) \end{cases}$，其中 $\lambda=-\frac{br_2}{ar_1}$

令$\lambda'=-\lambda=\frac{br_2}{ar_1}$ $\because ab>0 \therefore \lambda'>0$

$$\Gamma_2：\begin{cases} x=(R+r)\cos\theta_3-\lambda' r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right) \\ y=(R+r)\sin\theta_3-\lambda' r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta_3\right) \end{cases}$$

由外次擺線的參數式知：Γ_2圖形為外次擺線，且中心為(0，0)

$\because$將Γ_2以原點為旋轉中心，旋轉α_1可得Γ_1

$\therefore \Gamma_1$圖形與Γ_2全等均為外次擺線，且中心均為原點(0，0)

又由 P.224(*)知：將Γ_1圖形平移向量$\vec{v}=(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$可得

$M(x'，y')$的軌跡 Γ

$\therefore$則當θ角在0°到360°之間逐漸變動時，M 點會跟著改變，所有 M 點所成圖形為一外次擺線，中心為$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}，\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n})$，得證■

附錄六：證明二階齒輪圖形即是內、外次擺線

由 P.84 n 階齒輪圖形的定義知，$n=2$時二階齒輪圖形的定義為：設平面上有三個圓O_1，O_2，O_3，其中O_3為O_2的同心圓，且O_2與O_1相切。O_1為定圓，現讓O_2帶動O_3以相同轉速在O_1上滾動，令 P 為O_3上一點，則 P 點軌跡稱為二階齒輪圖形。我們可得知二階齒輪圖形即是內外次擺線，寫成下面定理。

承上面二階齒輪圖形的定義，設圓O_1，O_2，O_3的半徑分別為為$|r_1|$，$|r_2|$，$|r_3|$，其中r_1，r_2，r_3，r_1+r_2均不為 0，則

$r_1r_2>0$時或(二)$r_1r_2<0$且$|r_1|<|r_2|$時，二階齒輪圖形為外次擺線

(三)$r_1r_2<0$且$|r_1|>|r_2|$時，二階齒輪圖形為內次擺線。

且中心與 n 階齒輪圖形 n=2 時我們所定義的中心相同。

【證明】

由 P.101【定理三十六】知：定坐標，n 階齒輪圖形參數式可表示為

$$x=(r_1+r_2)\cos\theta_1+(r_3+r_4)\cos(\theta_1+2\theta_2+\alpha_1)+\cdots$$

$$+(r_{2n-3}+r_{2n-2})\ \cos(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-2})$$

$$+r_{2n-1}\cos(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha_{n-1})$$

$$y=(r_1+r_2)\sin\theta_1+(r_3+r_4)\sin(\theta_1+2\theta_2+\alpha_1)+\cdots$$

$$+(r_{2n-3}+r_{2n-2})\sin(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-2})$$

$$+r_{2n-1}\sin(\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha_{n-1})$$

其中$\theta_1=\theta$，$\theta_k=\frac{r_1r_3\ldots r_{2k-3}}{r_2r_4\ldots r_{2k-2}}\theta\ (2\le k\le n, k\in N)$，

當 n=2 時，二階齒輪圖形參數式為

$$\begin{cases} x = (r_1 + r_2)\cos\theta_1 + r_3\cos(\theta_1 + \theta_2 + \alpha_1) \\ y = (r_1 + r_2)\sin\theta_1 + r_3\sin(\theta_1 + \theta_2 + \alpha_1) \end{cases}$$

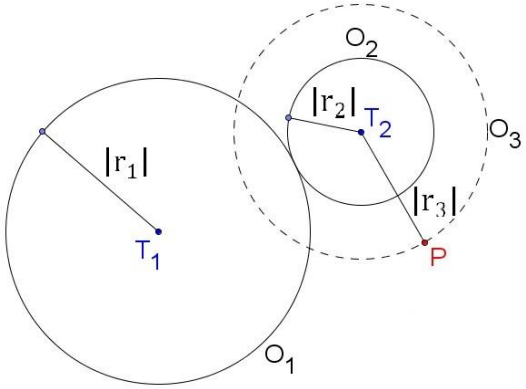
其中$\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \frac{r_1}{r_2}\theta$，$r_1$，$r_2$，$r_3$，$r_1 + r_2 \neq 0$，圖形中心為(0,0)

$\therefore \theta_1 + \theta_2 = \theta + \frac{r_1}{r_2}\theta = \frac{r_1+r_2}{r_2}\theta$ 因此可推得下式

$$\begin{cases} x = (r_1 + r_2)\cos\theta + r_3\cos\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1\right) \\ y = (r_1 + r_2)\sin\theta + r_3\sin\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1\right) \end{cases} \quad \text{----------(\#)}$$

(一) $r_1 r_2 > 0$時

由 P.95 的定義知$r_1 r_2 > 0$表O_1，O_2外切，故情形如右圖。由圖就可看出 P 點軌跡與外次擺線的定義相同，所以 P 點軌跡是外次擺線。我們再由二階齒輪圖形參數式來加以驗證。



由(#)式知：二階齒輪圖形(設為 Γ)參數式為

$$\Gamma: \begin{cases} x = (r_1 + r_2)\cos\theta + r_3\cos\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1\right) \\ y = (r_1 + r_2)\sin\theta + r_3\sin\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1\right) \end{cases}$$

令$-\frac{r_3}{r_2} = \lambda$則$r_3 = -\lambda r_2$

$\because r_3 \neq 0 \ \therefore \lambda \neq 0$，則

$$\Gamma: \begin{cases} x = (r_1 + r_2)\cos\theta - \lambda r_2\cos\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1\right) \\ \quad = (r_1 + r_2)\cos\theta + \lambda r_2\cos\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1 + \pi\right) \\ y = (r_1 + r_2)\sin\theta - \lambda r_2\sin\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1\right) \\ \quad = (r_1 + r_2)\sin\theta + \lambda r_2\sin\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1 + \pi\right) \end{cases}$$

若$\lambda > 0$，則令$\lambda' = \lambda$，$\alpha_1' = \alpha_1$

若$\lambda < 0$，則令$\lambda' = -\lambda$，$\alpha_1' = \alpha_1 + \pi$

則Γ：$\begin{cases} x = (r_1 + r_2)\cos\theta - \lambda' r_2 \cos\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1'\right) \\ y = (r_1 + r_2)\sin\theta - \lambda' r_2 \sin\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1'\right) \end{cases}$ 其中$\lambda' > 0$

令$\theta' = \theta + \frac{r_2}{r_1}\alpha_1'$，則$\theta = \theta' - \frac{r_2}{r_1}\alpha_1'$，

$\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1' = \frac{r_1+r_2}{r_2}\left(\theta' - \frac{r_2}{r_1}\alpha_1'\right) + \alpha_1' = \frac{r_1+r_2}{r_2}\theta' - \frac{r_1+r_2}{r_1}\alpha_1' + \alpha_1' = \frac{r_1+r_2}{r_2}\theta' - \frac{r_2}{r_1}\alpha_1'$

Γ：$\begin{cases} x = (r_1 + r_2)\cos\left(\theta' - \frac{r_2}{r_1}\alpha_1'\right) - \lambda' r_2 \cos\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta' - \frac{r_2}{r_1}\alpha_1'\right) \\ y = (r_1 + r_2)\sin\left(\theta' - \frac{r_2}{r_1}\alpha_1'\right) - \lambda' r_2 \sin\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta' - \frac{r_2}{r_1}\alpha_1'\right) \end{cases}$

將Γ圖形以原點為旋轉中心旋轉$\frac{r_2}{r_1}\alpha_1'$，設得到圖形Γ'

則Γ'：$\begin{cases} x = (r_1 + r_2)\cos\theta' - \lambda' r_2 \cos\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta'\right) \\ y = (r_1 + r_2)\sin\theta' - \lambda' r_2 \sin\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta'\right) \end{cases}$ 其中$\lambda' > 0$

----------(*)

(1) 若r_1，$r_2 > 0$，則令$R = r_1$，$r = r_2$

則Γ'：$\begin{cases} x = (R + r)\cos\theta' - \lambda' r \cos\left(\frac{R+r}{r}\theta'\right) \\ y = (R + r)\sin\theta' - \lambda' r \sin\left(\frac{R+r}{r}\theta'\right) \end{cases}$ 其中$R, r, \lambda' > 0$

$\therefore \Gamma'$為外次擺線，且中心為$(0，0)$

$\because$將Γ圖形以原點為旋轉中心旋轉$\frac{r_2}{r_1}\alpha_1'$，得到圖形Γ'

$\therefore$將Γ'圖形以原點為旋轉中心旋轉$(-\frac{r_2}{r_1}\alpha_1')$，可得到圖形$\Gamma$

$\therefore \Gamma$為外次擺線，且中心為$(0，0)$

(2) 若r_1，$r_2<0$，令$R=-r_1$，$r=-r_2$，

則Γ'：$\begin{cases} x=(-R-r)\cos\theta'+\lambda' r\cos\left(\frac{-R-r}{-r}\theta'\right) \\ y=(-R-r)\sin\theta'+\lambda' r\sin\left(\frac{-R-r}{-r}\theta'\right) \end{cases}$ 其中$R,r,\lambda'>0$

即Γ'：$\begin{cases} x=-(R+r)\cos\theta'+\lambda' r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta'\right) \\ y=-(R+r)\sin\theta'+\lambda' r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta'\right) \end{cases}$

將Γ'圖形以原點為對稱點，作對稱圖形設為Γ''(即Γ'與Γ''兩圖形對稱於原點)

則Γ''：$\begin{cases} x=(R+r)\cos\theta'-\lambda' r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta'\right) \\ y=(R+r)\sin\theta'-\lambda' r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta'\right) \end{cases}$ 其中$R,r,\lambda'>0$

$\therefore\Gamma''$為外次擺線，且中心為$(0，0)$

$\because\Gamma'$與Γ''兩圖形對稱於原點

$\therefore\Gamma'$為外次擺線，且中心為$(0，0)$

$\because$將 Γ 圖形以原點為旋轉中心旋轉$\frac{r_2}{r_1}\alpha_1'$，得到圖形Γ'

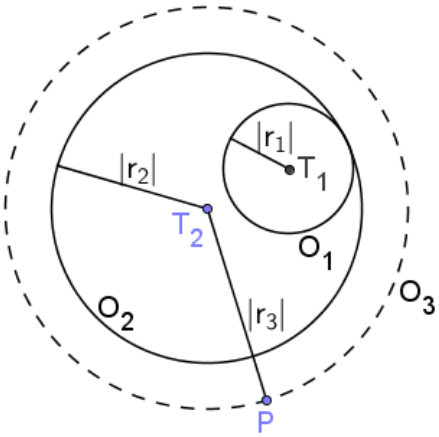
$\therefore$將Γ'圖形以原點為旋轉中心旋轉$(-\frac{r_2}{r_1}\alpha_1')$，可得到圖形 Γ

$\therefore\Gamma$ 為外次擺線，且中心為$(0，0)$

(二) $r_1r_2<0$且$|r_1|<|r_2|$時

由 P.95 的定義知：$r_1r_2<0$表示O_1和O_2內切，

$\because|r_1|<|r_2|\therefore O_2$比$O_1$大，故情形如右圖。



乍看之下，會以為 P 點軌跡是內次擺線，但定圓是小圓O_1，而內次擺線的定義中定圓半徑比動圓半徑大，所以兩者並不相同。我們

用 Geogebra 測試，發現反而是外次擺線，後面參數式的推導可證明此發現。

由 P.235 (#)知：二階齒輪圖形(設為 Γ)參數式為

$$\Gamma：\begin{cases} x = (r_1 + r_2)\cos\theta + r_3\cos\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1\right) \\ y = (r_1 + r_2)\sin\theta + r_3\sin\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1\right) \end{cases}$$

令$r_1 + r_2 = a$，$\frac{r_1+r_2}{r_2} = b$，則

$$\Gamma：\begin{cases} x = a\cos\theta + r_3\cos(b\theta + \alpha_1) \\ y = a\sin\theta + r_3\sin(b\theta + \alpha_1) \end{cases}$$

$\because r_1 r_2 < 0$

$\therefore b = \frac{r_1+r_2}{r_2} = 1 + \frac{r_1}{r_2} = 1 - \left|\frac{r_1}{r_2}\right| = 1 - \frac{|r_1|}{|r_2|}$

$\because |r_1| < |r_2| \quad \therefore \frac{|r_1|}{|r_2|} < 1 \quad \therefore 0 < b < 1$----------(**)

令$\theta' = b\theta + \alpha_1$則$\theta = \frac{\theta'}{b} - \frac{\alpha_1}{b}$

$$則\ \Gamma：\begin{cases} x = a\cos(\frac{\theta'}{b} - \frac{\alpha_1}{b}) + r_3\cos\theta' \\ y = a\sin(\frac{\theta'}{b} - \frac{\alpha_1}{b}) + r_3\sin\theta' \end{cases}$$

令$-\frac{\alpha_1}{b} = \alpha_1'$，則

$$\Gamma：\begin{cases} x = a\cos(\frac{\theta'}{b} + \alpha_1') + r_3\cos\theta' \\ y = a\sin(\frac{\theta'}{b} + \alpha_1') + r_3\sin\theta' \end{cases}$$

令$r_1' = (1-b)r_3$，$r_2' = br_3$ $\therefore r_1' r_2' = b(1-b){r_3}^2$

由(**)知 $b(1-b) > 0$，又$r_3 \neq 0$ $\therefore r_1' r_2' > 0$

$r_1' + r_2' = (1-b)r_3 + br_3 = r_3$ ，$\frac{r_1'+r_2'}{r_2'} = \frac{r_3}{br_3} = \frac{1}{b}$ ，$\frac{\theta'}{b} = \frac{1}{b}\theta' = \frac{r_1'+r_2'}{r_2'}\theta'$

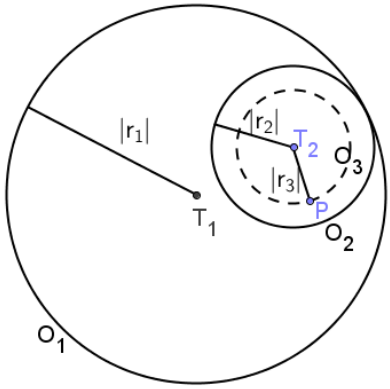
令$r_3' = a$，則$a = r_3'$，$r_3 = r_1' + r_2'$， $\frac{\theta'}{b} + \alpha_1' = \frac{r_1'+r_2'}{r_2'}\theta' + \alpha_1'$

$$\therefore \Gamma：\begin{cases} x = r_3'\cos(\frac{r_1'+r_2'}{r_2'}\theta' + \alpha_1') + (r_1' + r_2')\cos\theta' \\ y = r_3'\sin(\frac{r_1'+r_2'}{r_2'}\theta' + \alpha_1') + (r_1' + r_2')\sin\theta' \end{cases}$$

即 $\Gamma：\begin{cases} x = (r_1' + r_2')\cos\theta' + r_3'\cos(\frac{r_1'+r_2'}{r_2'}\theta' + \alpha_1') \\ y = (r_1' + r_2')\sin\theta' + r_3'\sin(\frac{r_1'+r_2'}{r_2'}\theta' + \alpha_1') \end{cases}$ ，其中$r_1'r_2' > 0$

此情形與 P.235 (#)及(一)$r_1r_2 > 0$時的情形完全相同，所以得知 Γ 圖形為外次擺線

(三) $r_1r_2 < 0$且$|r_2| < |r_1|$時



從 P.95 定義知 $r_1r_2 < 0$表示O_1，O_2內切 ∵ $|r_2| < |r_1|$

∴O_1比O_2大，故情形如右圖。

其實由圖就可看出 P 點軌跡與內次擺線的定義相同，所以 P 點軌跡是內次擺線。我們再由二階齒輪圖形參數式來加以驗證。

由 P.235 (#)式知：二階齒輪圖形(設為 Γ)參數式為

$$\Gamma：\begin{cases} x = (r_1 + r_2)\cos\theta + r_3\cos\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1\right) \\ y = (r_1 + r_2)\sin\theta + r_3\sin\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta + \alpha_1\right) \end{cases}$$

由(一)的證明過程中 P.236 (*)式知

將 Γ 圖形以原點為旋轉中心旋轉某個角度，可得到圖形Γ'，其中 Γ'參數式為

$$\Gamma'：\begin{cases} x = (r_1 + r_2)\cos\theta' - \lambda' r_2\cos\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta'\right) \\ y = (r_1 + r_2)\sin\theta' - \lambda' r_2\sin\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\theta'\right) \end{cases} \qquad (\lambda' > 0)$$

(1) 若$r_1 > 0$，$r_2 < 0$則令$R = r_1$，$r = -r_2$，$\because R = |r_1|$，$r = |r_2|$ 又$|r_2| < |r_1| \therefore$ $R > r$

$$\Gamma' : \begin{cases} x = (R - r)\cos\theta' + \lambda' r \cos\left(\dfrac{R - r}{-r}\theta'\right) \\ y = (R - r)\sin\theta' + \lambda' r \sin\left(\dfrac{R - r}{-r}\theta'\right) \end{cases}$$

即$\Gamma' : \begin{cases} x = (R - r)\cos\theta' + \lambda' r \cos\left(\frac{R-r}{r}\theta'\right) \\ y = (R - r)\sin\theta' - \lambda' r \sin\left(\frac{R-r}{r}\theta'\right) \end{cases}$ 其中$R, r, \lambda' > 0$且$R > r$

$\therefore \Gamma'$圖形為內次擺線，中心為$(0,0)$

$\because$將 Γ 圖形以原點為旋轉中心旋轉某個角度，可得到圖形Γ'

$\therefore \Gamma$ 圖形為內次擺線，中心為$(0,0)$

(2) 若$r_1 < 0$，$r_2 > 0$則令$R = -r_1$，$r = r_2$，$\because R = |r_1|$，$r = |r_2|$又$|r_2| < |r_1| \therefore R > r$

$$\Gamma' : \begin{cases} x = (-R + r)\cos\theta' - \lambda' r \cos\left(\dfrac{-R + r}{r}\theta'\right) \\ y = (-R + r)\sin\theta' - \lambda' r \sin\left(\dfrac{-R + r}{r}\theta'\right) \end{cases}$$

即$\Gamma' : \begin{cases} x = -(R - r)\cos\theta' - \lambda' r \cos\left(\frac{R-r}{r}\theta'\right) \\ y = -(R - r)\sin\theta' + \lambda' r \sin\left(\frac{R-r}{r}\theta'\right) \end{cases}$

將Γ'圖形以原點為對稱點作對稱圖形，設得到的圖形為Γ''(即Γ'與Γ''兩圖形對稱於原點)

則$\Gamma'' : \begin{cases} x = (R - r)\cos\theta' + \lambda' r \cos\left(\frac{R-r}{r}\theta'\right) \\ y = (R - r)\sin\theta' - \lambda' r \sin\left(\frac{R-r}{r}\theta'\right) \end{cases}$ 其中$R, r, \lambda' > 0$且$R > r$

$\therefore \Gamma''$為內次擺線，且中心為$(0，0)$

$\because \Gamma'$與Γ''兩圖形對稱於原點

$\therefore \Gamma'$為內次擺線，且中心為$(0，0)$

$\because$將 Γ 圖形以原點為旋轉中心旋轉某個角度，可得到圖形Γ'

$\therefore \Gamma$ 為內次擺線，且中心為$(0，0)$ ，得證■

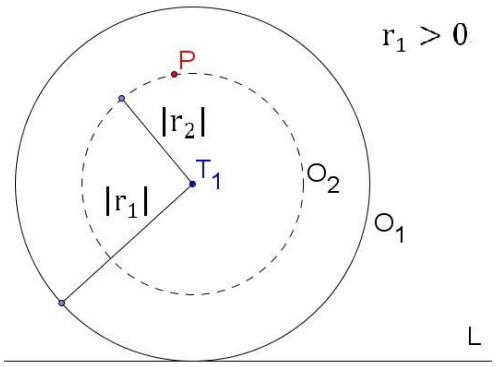
附錄七：證明一階齒輪直線圖形是次擺線

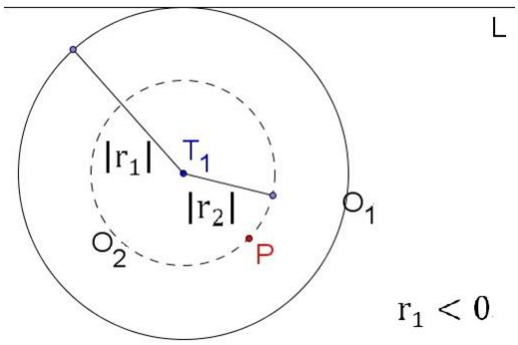
由 P.140 n 階齒輪直線圖形的定義知，一階齒輪直線圖形的定義為：設平面上有兩個圓O_1，O_2及一直線 L，其中O_1，O_2為同心圓，圓O_1與 L 相切。現讓O_1帶動O_2以相同轉速在直線 L 上滾動，令 P 為圓O_2上一點，則 P 點軌跡稱為一階齒輪直線圖形。可得知一階齒輪直線圖形即是次擺線，寫成下面定理。

在 n 階齒輪直線圖形中，當 n=1 時，一階齒輪直線圖形即是次擺線

【證明】

從 P.150 定義知：當$r_1 > 0$時表示圓在直線上方滾動，當$r_1 < 0$時表示圓在直線下方滾動





由圖就可以看出 P 點軌跡與次擺線定義相同，所以 P 點軌跡是次擺線。我們再由一階齒輪直線圖形參數式加以驗證。

從 P.152【定理五十】知：定坐標軸，n 階齒輪直線圖形參數式可表示為

$$x = -r_1\theta_1 + (r_2 + r_3)\cos(2\theta_1 + \alpha_1) + (r_4 + r_5)\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2) + \cdots$$

$$+(r_{2n-2} + r_{2n-1})\ \cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \alpha_{n-1})$$

$$+r_{2n}\cos(2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + \cdots + 2\theta_{n-1} + \theta_n + \alpha_n)$$

$$y = r_1 + (r_2 + r_3)\sin(2\theta_1 + \alpha_1) + (r_4 + r_5)\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + \alpha_2) + \cdots$$

$$+(r_{2n-2}+r_{2n-1})\sin(2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-1})$$

$$+r_{2n}\sin(2\theta_1+2\theta_2+2\theta_3+\cdots+2\theta_{n-1}+\theta_n+\alpha_n)$$

當 n=1 時，一階齒輪直線圖形(設為 Γ)參數式為

$$\Gamma:\begin{cases}x=-r_1\theta_1+r_2\cos(\theta_1+\alpha_1)\\ y=r_1+r_2\sin(\theta_1+\alpha_1)\end{cases}$$

此時固定直線 L 為 x 軸

令$\frac{r_2}{r_1}=\lambda$ $\therefore r_2=\lambda r_1$

$$\Gamma:\begin{cases}x=-r_1\theta_1+\lambda r_1\cos(\theta_1+\alpha_1)\\ y=r_1+\lambda r_1\sin(\theta_1+\alpha_1)\end{cases}$$ ----------(#)

若$\lambda>0$則令$\lambda'=\lambda$，$\alpha_1'=\alpha_1+90^\circ$ $\therefore\alpha_1=\alpha_1'-90^\circ$，則

$$\Gamma:\begin{cases}x=-r_1\theta_1+\lambda' r_1\cos(\theta_1+\alpha_1'-90^\circ)\\ y=r_1+\lambda' r_1\sin(\theta_1+\alpha_1'-90^\circ)\end{cases}$$ ----------(*)

若$\lambda<0$則令$\lambda'=-\lambda$，$\alpha_1'=\alpha_1-90^\circ$ $\therefore\alpha_1=\alpha_1'+90^\circ$代入(#)，則

$$\Gamma:\begin{cases}x=-r_1\theta_1-\lambda' r_1\cos(\theta_1+\alpha_1'+90^\circ)\\ y=r_1-\lambda' r_1\sin(\theta_1+\alpha_1'+90^\circ)\end{cases}$$

即$\Gamma:\begin{cases}x=-r_1\theta_1+\lambda' r_1\cos(\theta_1+\alpha_1'-90^\circ)\\ y=r_1+\lambda' r_1\sin(\theta_1+\alpha_1'-90^\circ)\end{cases}$ ----------(**)

由(*) (**)知：Γ 參數式可表示成

$$\Gamma:\begin{cases}x=-r_1\theta_1+\lambda' r_1\cos(\theta_1+\alpha_1'-90^\circ)\\ y=r_1+\lambda' r_1\sin(\theta_1+\alpha_1'-90^\circ)\end{cases}$$ 其中$\lambda'>0$

令$\theta_1'=-\theta_1-\alpha_1'$則$\theta_1+\alpha_1'=-\theta_1'$，$\theta_1=-\theta_1'-\alpha_1'$，則

$$\Gamma:\begin{cases}x=-r_1(-\theta_1'-\alpha_1')+\lambda' r_1\cos(-\theta_1'-90^\circ)=r_1\theta_1'+r_1\alpha_1'-\lambda' r_1\cos(90^\circ-\theta_1')\\ y=r_1+\lambda' r_1\sin(-\theta_1'-90^\circ)=r_1-\lambda' r_1\sin(90^\circ-\theta_1')\end{cases}$$

即 $\Gamma:\begin{cases}x=r_1\theta_1'+r_1\alpha_1'-\lambda' r_1\sin\theta_1'\\ y=r_1-\lambda' r_1\cos\theta_1'\end{cases}$

(1) 若$r_1 > 0$則令$r_1' = r_1$，$\Gamma : \begin{cases} x = r_1'\theta_1' + r_1'\alpha_1' - \lambda' r_1' \sin\theta_1' \\ y = r_1' - \lambda' r_1' \cos\theta_1' \end{cases}$ ，且$\lambda', r_1' > 0$

將 Γ 平移向量$(-r_1'\alpha_1'$，$0)$，設得到圖形為Γ'

則$\Gamma' : \begin{cases} x = r_1'\theta_1' - \lambda' r_1' \sin\theta_1' = r_1'(\theta_1' - \lambda' \sin\theta_1') \\ y = r_1' - \lambda' r_1' \cos\theta_1' = r_1'(1 - \lambda' \cos\theta_1') \end{cases}$

由次擺線定義知Γ'為次擺線，且定直線 L 為 x 軸

$\because$Γ 平移向量$(-r_1'\alpha_1'$，$0)$可得Γ'

$\therefore$$\Gamma'$平移向量$(r_1'\alpha_1'$，$0)$可得 Γ

$\therefore$Γ 圖形為次擺線，且定直線 L 為 x 軸

(2) 若$r_1 < 0$則令$r_1' = -r_1$，$\Gamma : \begin{cases} x = -r_1'\theta_1' - r_1'\alpha_1' + \lambda' r_1' \sin\theta_1' \\ y = -r_1' + \lambda' r_1' \cos\theta_1' \end{cases}$

將 Γ 以原點為對稱點作對稱圖形，設得到的圖形為Γ' (即 Γ 與Γ'兩圖形對稱於原點)

則$\Gamma' : \begin{cases} x = r_1'\theta_1' + r_1'\alpha_1' - \lambda' r_1' \sin\theta_1' \\ y = r_1' - \lambda' r_1' \cos\theta_1' \end{cases}$ ，且$\lambda', r_1' > 0$

將Γ'平移向量$(-r_1'\alpha_1'$，$0)$，設得到圖形為Γ''

則$\Gamma'' : \begin{cases} x = r_1'\theta_1' - \lambda' r_1' \sin\theta_1' = r_1'(\theta_1' - \lambda' \sin\theta_1') \\ y = r_1' - \lambda' r_1' \cos\theta_1' = r_1'(1 - \lambda' \cos\theta_1') \end{cases}$

由次擺線定義知Γ''為次擺線，且定直線 L 為 x 軸

$\because$將Γ'平移向量$(-r_1'\alpha_1'$，$0)$，可得到圖形Γ''

$\therefore$將Γ''平移向量$(r_1'\alpha_1'$，$0)$，可得到圖形Γ'

$\therefore$$\Gamma'$圖形為次擺線，且定直線 L 為 x 軸

$\because$Γ 與Γ'兩圖形對稱於原點

$\therefore \Gamma$ 圖形為次擺線，且定直線 L 為 x 軸

由(1)(2)的討論得知：

一階齒輪直線圖形為次擺線，且定直線與次擺線的定直線相同(同為 x 軸) ，得證■

評語

研究報告厚達 152 頁，整份作品沒有挑選到精簡的複變數函數的表達方式。所以的曲線都能夠表示為形如 Exp(i n t), n 為正或負整數，(基本圓之內外擺線)的線性結合的形式，在 Robert C. Yates 之 A Handbook of Curves and their Properties 一書有作詳細的解說：https://archive.org/details/YatesHandbookCurves1947