

2014 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010012

參展科別 數學

作品名稱 少年 π 的奇幻旅程-從不對稱切割到加權校正法

得獎獎項 大會獎：一等獎

美國 ISEF 正選代表：美國第 65 屆國際科技展覽會

就讀學校 高雄市立三民國民中學

指導教師 黃昭勳、蔡震珊

作者姓名 王冠萬

關鍵字 Machin-like formula、不對稱切割法、
加權校正法

作者簡介



我是王冠萬，目前就讀高雄市立三民國中三年級。

平時的我喜歡與同學討論與研究各樣的數學難題，思考並嘗試以不同方式來解題，享受過程中的樂趣與成就感，這也是引發我從事獨立研究、國際&全國科展的動機；課餘之暇我喜歡閱讀、下圍棋、繪畫及欣賞音樂。

這次非常榮幸能參與此盛會，抱著朝聖雀躍的心情，期盼與世界各地的好手進行學術交流，結交到更多同好，來拓展視野增進自我的見聞與能量！

最後，感謝研究過程中一路支持、鼓勵我的師長、父母及同學朋友們…。

少年 π 的奇幻旅程——從不對稱切割到加權校正法

摘要

自古以來，多邊形演算的幾何法求圓周率，往往只由單側——內側或外側。既然我們可以算出兩側的多邊形數據，那為什麼不用夾擊法來得到更精確的 π 值呢？

我的研究過程如下：

1. 先改以不對稱切割避開無理數，發展出另類分割圓周的簡易方法，並計算初步的 π 值。
2. 藉由外切與內接多邊形對圓面積的逼近探討，來導出一個大幅提高 π 值精確度的加權校正公式。
3. 結合前面的理論，推演出計算簡易的 π 值逼近定理與更嚴謹的 π 值夾擊定理。
4. 以全新視野來統整梅欽公式與梅欽類公式自 1706 年以來之理論系統，並進一步改良加權校正公式，得到最有效率之 π 值計算公式。

最後對新發現之加權校正函數與餘角收斂定理做進一步的探索。

Fancy of π : from Asymmetrical Cut to Weighed Adjustment

Abstract

Estimating π is always interesting in mathematics; despite the many efforts devoted to the understanding of π lasting for thousands of years. Almost all of the geometric approximations are based on regular polygons involving computation of irrational numbers since Archimedes. However, the geometric rational approximation of π seems to be rare in literature. In this project, we use asymmetrical polygons with rational areas to converge to a disk, with their set-difference shrinking to zero in area. By taking appropriate weighted average of the areas of two polygons, the approximation has been improved. The algorithm involves only integer arithmetic operations, therefore can be implemented under a computational environment involving arbitrary-precision arithmetic.

一、 研究動機與文獻探討

求 π 值，在數學中一向是個古老但卻一直很迷人的題目。

攤開歷史，會發現這條路上歷來名家輩出，窮畢生之力於此道者亦不乏其人。小學時看過阿基米德的內接多邊形法，國中之後也學到了劉徽的割圓術，並聽說祖沖之更進一步運用了劉徽的「割圓術」及他無比的耐性與堅持，算到內接 24576 邊形，求得 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ 。這種對稱性的角度切割，確實提供古人一個計算 π 值的方法，然而效率似乎不佳。當時很佩服數學家對數學的熱情，但繼而一想，當我們做一件事會需要「無比的耐性與堅持」時，似乎應該考慮：有沒有別的方法？

由本文參考資料所列之「 π 的故事」、「圓周率的身世」，以及網路上「關於圓周率 π 」、「圓周率 π 的歷史」等等科普文章，我們得知在十七～十八世紀的分析法出現之前，幾何法正如本頁所述一般，被開根號困住了兩千年。有鑑於此，本研究另闢蹊徑，採用『角平分線斜率 r 』來替代原有的角度系統，並發展出『不對稱切割法』，以使分割後的多邊形邊長能維持方便計算的有理數型態，這就會讓切割過程的計算變得格外容易了。我希望讓一切過程都變成有理數，不但都可實際作圖，而且容易計算，全部的技巧也僅用國中程度的數學就能解決，相信這會是走出開根號迷宮的一把鑰匙。

另外，本文上述之參考資料以及網路維基百科「圓周率」也提及，十八世紀初之後， $\arctan$ 級數、微積分、與梅欽公式等等的發現，為 π 值的計算注入了新血，並開始了分析法的時代。可惜的是，也許是因為分析法的方便，使大家忘了 π 值的根本仍舊是個幾何問題，而忽略了幾何的道路上仍有不少始終未被發現的新大陸。

科學需要觀察與推理。擲錢幣次數一多，正反面出現比率會接近1:1；擲骰子

次數一多，統計每面出現的機率會接近6分之1。這都是觀察與推理的結果。若透過每次的切割，證出「內接多邊形」與「外切多邊形」和「所有扇形面積和」的差的比值，會趨於一定值，那是不是可以提前預測在無限多次分割後，最終兩邊相遇的那個面積落點？很幸運地，本研究證實了這個假設，並根據這個推論發展出『加權校正法』。

二、 研究目的

研究目的一. 角平分線斜率 r 與角度對應的探討：

藉由通式解來發展出角平分線斜率為有理數 r 的角度運算系統。

研究目的二. 不對稱切割法：

探討不對稱切割下，以有理數 r 的角度運算系統，來切割圓周的公式，
並初步計算圓周率。

研究目的三. 加權校正法：

研究圓的外切多邊形與內接多邊形，與圓面積差的比值，並導出圓面積
校正公式。

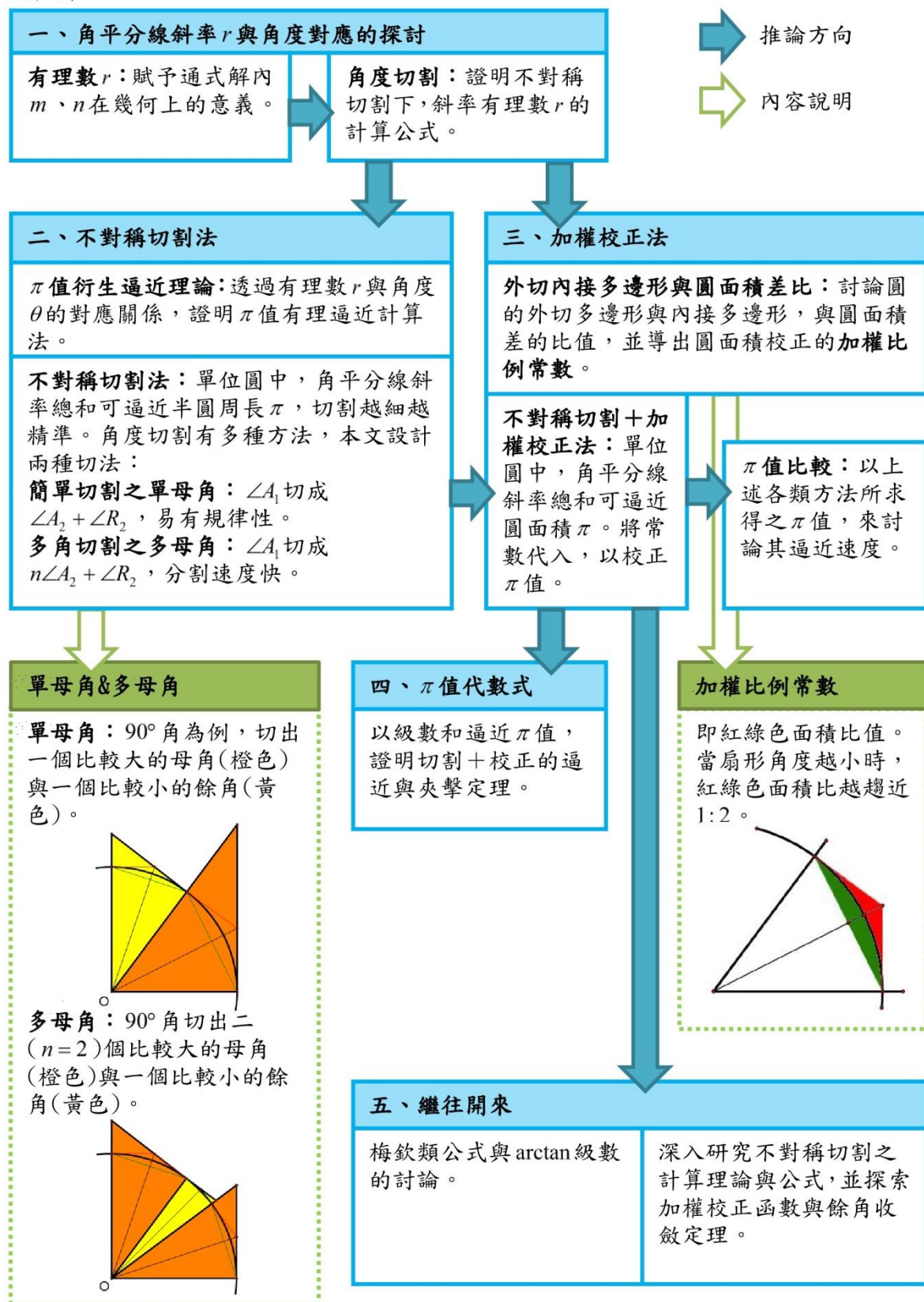
研究目的四. π 值代數式：

以級數和逼近 π 值，證明切割+校正的逼近與夾擊定理。

研究目的五. 繼往開來：

1. 發展不對稱切割數值分析法之計算公式。
2. 研究不對稱切割單一累積分量的精確度。
3. 使用不對稱切割來推演出全新的加權校正函數。
4. 研究加權校正法函數化的方向，並探索不對稱切割與加權校正法所引導出的餘角收斂定理。

流程圖：



三、 名詞與定義

(一).名詞解釋：

1. **通式解** m 、 n ，與角平分線斜率 r ： m 、 n 指的是
 $(a,b,c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ 這個直角三角形的通式解， $m, n \in \mathbb{N}$ 。
此直角三角形相對應的銳角內角斜率則為 r ，
$$r = \frac{n}{m}, r \in \mathbb{R}。$$
2. **不對稱切割法**：使切割前後的角的角平分線斜率都呈有理數，所設計出來的切割法。
3. **母角與餘角**：不對稱切割後，較大的角為母角，較小的角為餘角；在內容的最後一單元，設計出特定的切割法，將主要被切割細分的部分稱為母角，剩下的為餘角。
4. **單母角切割法**：改良了簡單樹狀圖切割法其每一代都要切割多次的缺點，所設計出的切割法。每代只切割最大角，切割前後母角數量比為1:1，故稱單母角。
5. **累計數**：單母角切割時，用以快速推算數代之後母角數量的一個新數列。詳見表(三)。
6. **多母角切割法**：切割前後母角數量比為1: n ， $n \in \mathbb{N}$ 。
7. **加權校正法**：利用外切多邊形與內接多邊形的面積，經過加權校正，去逼近圓面積的方法。
8. **加權比例常數**：當角度分割到極小時，圓的外切多邊形與內接多邊形，與圓面積差的比值，會趨近於一個定值—— $\frac{1}{2}$ 。詳見預備定理(五)。

9. **加權校正函數**：將用來加權校正的比值予以函數化，以適應各種不同角度的需求。

(二). 符號定義：

1. $\angle 1 \rightarrow \angle \frac{1}{2} + \angle \frac{1}{3}$ ：角平分線斜率為1的角，切割成為角平分線為 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{3}$ 的兩個角。

2.

$\angle \frac{1}{15} \times 10 + \angle \frac{3}{79} \times 2 + \angle \frac{7}{799} \times 5$
$\angle \frac{1}{31} \times 22 + \angle \frac{7}{1226} \times 2 + \angle \frac{7}{799} \times 5 + \angle \frac{15}{7231} \times 10$

角平分線斜率為 $\frac{3}{79}$ 的兩個角($\times 2$)，切割出兩個角平分線斜率為 $\frac{1}{31}$ 的母

角(紅實線)，與兩個角平分線斜率為 $\frac{7}{1226}$ 的角(紅虛線)。出現在表(二)、

表(四)、與表(五)。

四、研究過程及內容

(一). 角平分線斜率 r 與角度對應的探討

1. 有理數 r ：賦予通式解內 m 、 n 在幾何上的意義。

不對稱切割理論，是架構在直角△通式解中 (m, n) 比值的幾何意義與直角△互餘兩角之角平分線斜率的對應關係。

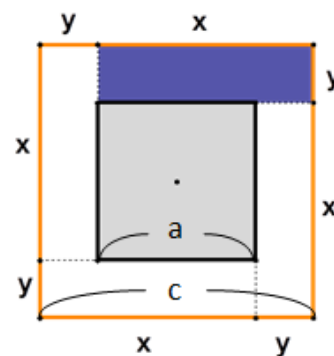
定理一

詳見 P.65 附件一

給定一組畢氏數 a 、 b 、 c ，滿足 $(a, b) = 1$ ， $a^2 + b^2 = c^2$ 。

設 b 為偶數，則必存在互質的兩正整數 m 、 n ，

使得 $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ 。



圖(一)

本文巧妙利用圖(一)邊長為 $a (= x - y)$ 之小正方形加上四塊長方形 = 邊長為 $c (= x + y)$ 之大正方形的圖示關係，結合 $(a, b) = 1$ 的條件，就會自然得到 x 、 y 都是完全平方數的解。

定理二

詳見 P.66 附件二

給定一組畢氏數，滿足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，其中 $(a, b) = 1$ ， b 為偶數，

若 $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ 則滿足通式解之正整數 m 、 n 分別為 $m =$

$$\sqrt{\frac{c+a}{2}}, n = \sqrt{\frac{c-a}{2}}。$$

定理三

詳見 P.66 附件三

已知△ABC 為互質之畢氏△， $(a, b) = 1$ ，且 a 為奇數， b 為偶數，若

$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ ，則

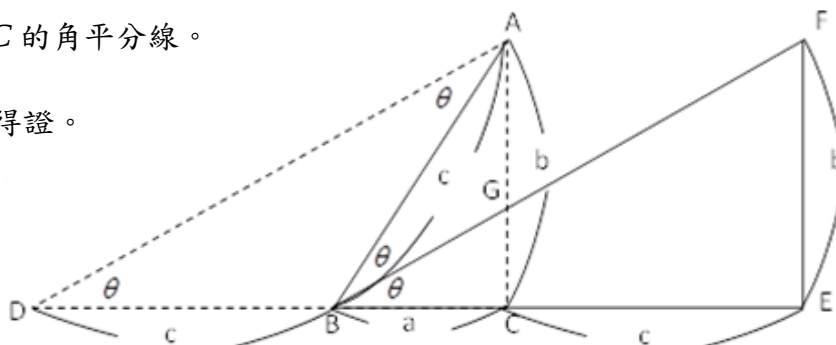
∠ABC 之角平分線的斜率， $\frac{n}{m}$ 之 m 、 n 分別為 $m = \sqrt{\frac{c+a}{2}}$ ， $n = \sqrt{\frac{c-a}{2}} \dots \textcircled{1}$

∠BAC 之角平分線的斜率， $\frac{n'}{m'}$ 之 m' 、 n' 分別為 $m' = \sqrt{c+b}$ ， $n' = \sqrt{c-b} \dots \textcircled{2}$

就看出 $\overline{BF}$ 是 $\angle ABC$ 的角平分線。

將各項數據帶入即得證。

圖(二)



由定理三可得知「給定一互質邊的畢氏 Δ ，其二銳角之角平分線之斜率必為有理數」。此結論相當有用，舉一些常見的畢氏 Δ 計算其銳角與所對應的有理數 r 整理如下(令 b 為偶數)：表(一)

邊長 (a,b,c)	銳角 有理數 $r = \frac{n}{m}$	θ_1 $m = \sqrt{\frac{c+a}{2}}$ $n = \sqrt{\frac{c-a}{2}}$	θ_2 $m = \sqrt{c+b}$ $n = \sqrt{c-b}$
(3,4,5)		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
(5,12,13)		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$
(15,8,17)		$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$
(7,24,25)		$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{7}$

觀察表(一)，我們發現：給定一組畢氏數(3,4,5)，有二個有理數 r ， $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ ，分別為互餘兩銳角 θ_1 、 θ_2 之角平分線斜率($\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$)，且 90° 之角平分線斜率 $= 1$ 。再觀察(5,12,13)，亦有二個有理數 r ， $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{5}$ ，與之對應。在(3,4,5)的例子中，不失一般性，令 θ_1 角平分線斜率 $r_{\theta_1} = \frac{1}{2}$ ， θ_2 角平分線斜率 $r_{\theta_2} = \frac{1}{3}$ ， $\theta = \theta_1 + \theta_2$ ，得所對應的角平分線斜率卻是 $1 > \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 。 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{5}$ 的情況亦同。至此，我們發現，當一個角度被分割後，其角平分線斜率的和會變小。這個觀察，引導本文發展出以外切多邊形來逼近 π 值的方法——不對稱切割法。

為簡化往後理論推導所使用的符號，當 $\angle C = \angle A + \angle B$ 所對應的有理數分別為 r_A 、 r_B 、 r_C 時，我們將 r_A 、 r_B 、 r_C 計算後的斜率變化紀錄為： $\angle r_C \rightarrow \angle r_A + \angle r_B$ 。

$$\text{例如：} \angle 1 \rightarrow \angle \frac{1}{2} + \angle \frac{1}{3}$$

2. 角度切割

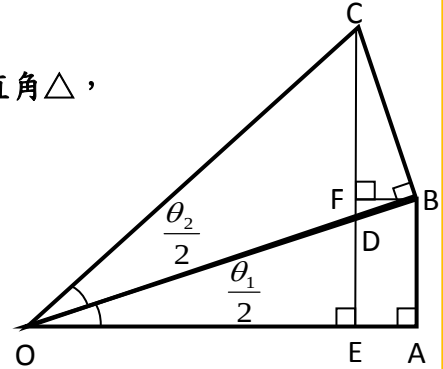
定理四：「和角」角平分線斜率計算定理

詳見 P.67 附件四

令 θ_1 、 θ_2 為畢氏 $\triangle$ 之內角度數，取 $\frac{\theta_1}{2}$ 、 $\frac{\theta_2}{2}$ 作直角 $\triangle$ ，

如圖(三)，分別為 $\triangle AOB$ 與 $\triangle BOC$ ，

$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ 所形成的直角三角形為 $\triangle EOC$ ，



令 r_{θ_1} 、 r_{θ_2} 、 $r_{\theta_1+\theta_2}$ 各為 θ_1 、 θ_2 、 $\theta_1 + \theta_2$ 之角平分線斜率，圖(三)

$$r_{\theta_1} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}, r_{\theta_2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}, r_{\theta_1+\theta_2} = \frac{\overline{EC}}{\overline{OE}}, \text{ 則 } r_{\theta_1+\theta_2} = \frac{r_{\theta_1} + r_{\theta_2}}{1 - r_{\theta_1} r_{\theta_2}}, \text{ 且 } r_{\theta_1+\theta_2} > r_{\theta_1} + r_{\theta_2}.$$

由定理四可知：當一個角度被分割後，其角平分線斜率的和會變小。

此外，我們還要發展角度相減的公式，可在往後的定理推演上扮演重要角色。

定理五：「差角」角平分線斜率計算定理

詳見 P.68 附件五

令 $\angle A$ 之角平分線斜率為 r_A ， $\angle B$ 之角平分線斜率為 r_B ， $\angle C$ 之角平分線斜率為 r_C ，

若 $\angle A = \angle B + \angle C$ ，則 $r_C = \frac{r_A - r_B}{1 + r_A r_B} \dots \textcircled{1}$ ；

當 $r_A = \frac{n}{m}$ ， $r_B = \frac{n'}{m'}$ 時， $r_C = \frac{m'n - mn'}{mm' + nn'} \dots \textcircled{2}$

而定理五也蘊含了重要的「有理」性質，陳述如下。

定理六：不對稱切割「有理」性質

詳見 P.69 附件六

令 $\angle A$ 之角平分線斜率為 r_A ， $\angle B$ 之角平分線斜率為 r_B ， $\angle C$ 之角平分線斜率為 r_C ，且 $\angle A = \angle B + \angle C$ ，若 r_A 、 r_B 為有理數，則 r_C 亦為有理數。

觀察 $r_{\theta_1+\theta_2} = \frac{r_{\theta_1} + r_{\theta_2}}{1 - r_{\theta_1} r_{\theta_2}}$ 與 $r_C = \frac{r_A - r_B}{1 + r_A r_B}$ 這兩個公式，可以發現，原始母角不一定

要擺在等式的左邊；只需要更動加減符號，就能讓原始母角落在等式的右邊。方法就是，當母角要擺在等式的右邊時，右邊其他較小的 r 值就要變成負號，而左邊的 r 值則維持正號。這個發現，對於之後發展出來的多角切割(P.17)有極大的用處。

(二). 不對稱切割法

1. π 值衍生逼近理論

由定理三可知：給定一互質畢氏 Δ 的內角 θ ，必存在一最簡分數 $\frac{n}{m}$ ($m, n \in N$)

與之對應。那反過來，給定一小於1的最簡分數 $\frac{n}{m}$ ($m, n \in N$)，也必找得到一畢氏 Δ 的內角與之對應嗎？

預備定理一

詳見 P.70 附件七

令 $W = \{ \frac{n}{m} \mid m \geq n, \text{ 且 } m, n \in N, (m, n) = 1 \}$ ，

$\Omega = \{ r \mid r \text{ 為互質邊之畢氏}\Delta\text{銳角角平分線斜率} \}$ ，則 $W = \Omega$

利用通式解與斜率、角度的關係，即可得證。

在此得到一個結論：「給定 $r \leq 1$ ，則必存在 $\theta \leq 90$ 與之對應。」將此對應關係表示為 $T: r \rightarrow \theta$ ，而此對應函數 T 為 1-1 的對應，因此其反函數必存在，並且以 $T^{-1}: \theta \rightarrow r$ 表示。

預備定理二

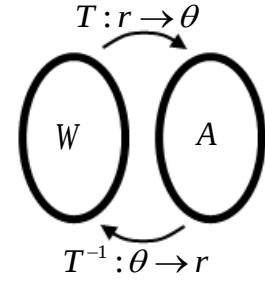
詳見 P.70 附件八

令 $W = \{ r \mid r = \frac{n}{m}, m \geq n, (m, n) = 1, \text{且 } m, n \in N \}$,

$A = \{ \theta \mid \theta \leq 90, \theta \text{ 為畢氏}\triangle\text{內角度數的數值} \}$,

則 $\forall \theta \in A$, 必存在 $\theta_i, \theta_j \in A$, 使得 $\theta = \theta_i + \theta_j$,

且 $\frac{\theta}{360} \times \pi < T^{-1}(\theta_i) + T^{-1}(\theta_j) < T^{-1}(\theta)$ 。



圖(四)

由定理四之 $r_{\theta_1+\theta_2} > r_{\theta_1} + r_{\theta_2}$, 可得 $T^{-1}(\theta) > T^{-1}(\theta_i) + T^{-1}(\theta_j)$ 。在單位圓上, 斜率有外切多邊形邊長之特性; 再利用與弧長之關係, 即可得證。

定理七：外切多邊形 π 值逼近理論

詳見 P.71 附件九

任取 $\theta \in A$, 滿足 $\theta = \frac{360}{d}$, $d \geq 4, d \in N$; 則存在一遞減數列 $\{S_k\}$, 使得

$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{\pi}{d}$ 。其中 $S_k = \sum_{t=1}^n T^{-1}(\theta_{k,t})$, $t = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

例：取 $\theta = 90^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{4} < T^{-1}(\theta_{1,1}) + T^{-1}(\theta_{1,2}) < 1$, 其中 $\theta_{1,1} + \theta_{1,2} = 90^\circ$, 令 $S_1 =$

$T^{-1}(\theta_{1,1}) + T^{-1}(\theta_{1,2})$ 。

取 $\theta_{1,1} = \theta_{2,2} + \theta_{2,3}$, $\theta_{1,2} = \theta_{2,1} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < T^{-1}(\theta_{2,1}) + T^{-1}(\theta_{2,2}) + T^{-1}(\theta_{2,3}) <$

$T^{-1}(\theta_{1,1}) + T^{-1}(\theta_{1,2}) < 1$ 。

依此類推, 即可得一遞減數列 $\{S_k\}$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{\pi}{4}$, 其中 $T^{-1}(\theta_{k,t}) \in W$, $\forall k$ 。

2. 不對稱切割

預備定理三

詳見 P.72 附件十

$\forall r \in W$, 則必存在 $r_i, r_j \in W$, 使得 $T(r) = T(r_i) + T(r_j)$ 。其中 $r_i, r_j < r$ 。

預備定理三, 給了我們一個計算 π 值實際可行的方法, 其巧妙之處在於我們完全由「有理數」著手, 而可以忽略其所對應的角度 θ , 即可快速簡便地發展 π 值的

計算理論。陳述如下：

定理八：外切多邊形 π 值逼近計算方法

詳見 P.72 附件十一

$\forall r \in W$ ， $T(r) \rightarrow \theta \in A$ ，滿足 $\theta = \frac{360}{d}$ ， $d \geq 4$ ；則存在一遞減數列 $\{S_k\}$ ，使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{\pi}{d}$ 。其中 $S_k = \sum_{t=1}^n T^{-1}(\theta_{(k,t)}) = \sum_{t=1}^n r_{(k,t)}$ ， $t = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

定理八是將定理七化為具體可行的一種計算理論，由定理八亦可知道可以找到無限多種逼近 π 值的數列。

舉例說明定理八的運算：

取 $r = 1$ ， $T(1) = 90^\circ$ ，故得 $d = 4$ ，令以 $r = 1$ 出發

step1：給定 $r = 1$ ，取 $r_1 = \frac{1}{2} \rightarrow$ 計算出 $r_2 = \frac{1}{3}$ ，

$$4S_2 = 4 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 3.3333333333\dots$$

step2：給定 $r_1 = \frac{1}{2}$ ，取 $r_3 = \frac{1}{3} \rightarrow$ 計算出 $r_4 = \frac{1}{7}$ ，

$$4S_3 = 4 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) = 3.2380952381\dots$$

step3：給定 $r_2 = \frac{1}{3}$ ，取 $r_5 = \frac{1}{4} \rightarrow$ 計算出 $r_6 = \frac{1}{13}$ ，

$$4S_4 = 4 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13} \right) = 3.2124542125\dots$$

若在上述的 step3 中做出更改，

step3：給定 $r_2 = \frac{1}{3}$ ，取 $r_5 = \frac{1}{5} \rightarrow$ 計算出 $r_6 = \frac{1}{8}$ ，

$$4S_4 = 4 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \right) = 3.2047619048\dots$$

當然也可做如此更動，

step3：給定 $r_2, r_3 = \frac{1}{3}$ ，取 $r_5, r_6 = \frac{1}{4} \rightarrow$ 計算出 $r_7, r_8 = \frac{1}{13}$ ，

$$4S_4 = 4 \times \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{13} \right) = 3.1868131868...$$

依此類推，可以得到各種不同的拆解法。雖然 k 與 n 的值都會越來越大，但在不同切割方法之下(一切為二、或三、或四...等等)，每種方法所得到的 n 都不會一樣，所以 k 與 n 之關聯性，隨切割方法不同而不同。

由於本文的最終目的是改良 π 值的計算效率，因此，接下來會嘗試設計各種不同的拆解法，並比較其效率。

(1). 簡單不對稱切割：每代只切出一個比較大的角與一個比較小的角。

I. 單位分數斜率單母角切割法：只取單位分數來當斜率，較大角稱為母角。

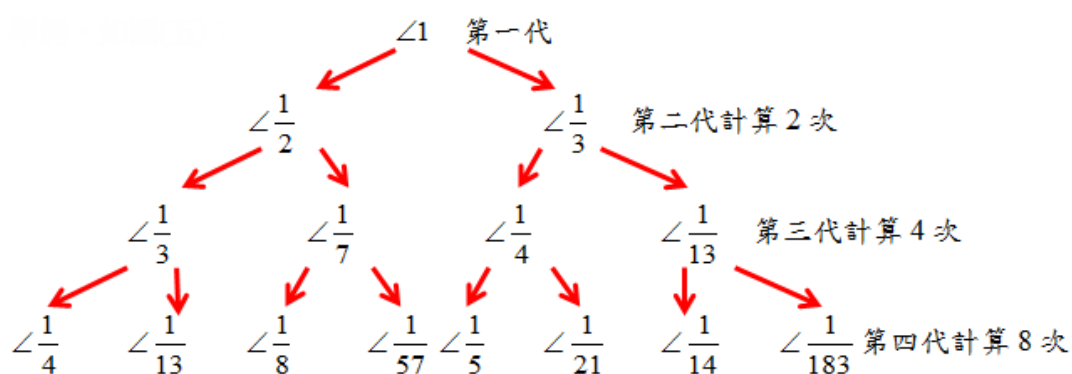
定理九：不對稱切割之單位分數斜率單母角切割法 詳見 P.73 附件十二

取 $I = \{a_n \mid a_n = \frac{1}{n}, n=1,2,3,\dots\}$ ，則集合 I 為單位分數調和數列所成的集合。

若依有序的方式依次給定 a_n 並取 a_{n+1} ，則 $\angle a_n \rightarrow \angle a_{n+1} + \angle a_{n(n+1)+1}$ 。

由定理五之②， m' 、 n 、 n' 都以1代入即得證。

依定理九舉例，如圖(五)：



仔細觀察， $\angle \frac{1}{3}$ 、 $\angle \frac{1}{4}$ 、 $\angle \frac{1}{13}$ 都重複出現，可集中計算。於是把過程整理如下，

表(二)：

第幾代	r 值(角平分線斜率, P.8 的定義)	π 近似值 (邊長)
1	$\angle 1$ $\angle 1$ 即 $\frac{1}{m_1}$, 分割出第二代 $\frac{1}{m_1+1}$ 的 $\angle \frac{1}{2}$, 以及餘角 $\frac{1}{3}$	4
2	$\angle \frac{1}{2} + \angle \frac{1}{3}$ $\angle \frac{1}{3}$ 即 $\frac{1}{m_1(m_1+1)+1} = \frac{1}{1(1+1)+1} = \frac{1}{3}$	3.333333333
3	$\angle \frac{1}{3} \times 2 + \angle \frac{1}{7}$	3.2380952381
4	$\angle \frac{1}{4} \times 2 + \angle \frac{1}{7} + \angle \frac{1}{13} \times 2$	3.1868131868
5	$\angle \frac{1}{5} \times 2 + \angle \frac{1}{7} + \angle \frac{1}{13} \times 2 + \angle \frac{1}{21} \times 2$	3.1677655678
6	$\angle \frac{1}{6} \times 2 + \angle \frac{1}{7} + \angle \frac{1}{13} \times 2 + \angle \frac{1}{21} \times 2 + \angle \frac{1}{31} \times 2$	3.1591634172
7	$\angle \frac{1}{7} \times 3 + \angle \frac{1}{13} \times 2 + \angle \frac{1}{21} \times 2 + \angle \frac{1}{31} \times 2 + \angle \frac{1}{43} \times 2$	3.1547337384
8	$\angle \frac{1}{8} \times 3 + \angle \frac{1}{13} \times 2 + \angle \frac{1}{21} \times 2 + \angle \frac{1}{31} \times 2 + \angle \frac{1}{43} \times 2 + \angle \frac{1}{57} \times 3$	3.1509743399

說明：

單母角：這是使用外切不對稱多邊形來逼近圓周率的其中一種方法。 r 值最左邊底色為淺黃色的角度，就是最大的角，將其命名為**母角**，為倒數呈等差為1的調和數列，剩下右邊所有的角度都是被切下來的各代**餘角**。圖(五)計算繁瑣，重新規畫後**餘角**遲早會併入**母角**，所以每代只要一次計算——分割最大的**母角**即可，計算上相當簡潔。由於分割之前後代**母角**數量為1:1，故稱**單母角**。本文設定為**單位分數**，是單母角的其中一種切割法。

餘角併入母角：第2代切出來的餘角 $\frac{1}{3}$ ，在第3代加入了母角的行列，所以母角數量成為2；第3代切出來的餘角 $\frac{1}{7}$ ，在第7代加入了母角的行列，所以到第7代時母角數量成為3。此外，由於第3代母角數量成為2，連帶著第3代被切下來的餘角 $\frac{1}{13}$ 數量也成為2；相同地，第7代母角數量增加為3，所以也使得第7

代被切下來的餘角 $\frac{1}{57}$ 數量也成為 3。

運算實例：舉第 7 代為例，本來由第 6 代由 2 個 $\frac{1}{6}$ 母角，切出了 2 個第 7 代的母角 $\frac{1}{7}$ 與 2 個第 7 代的餘角 $\frac{1}{43}$ ，但是母角又因為併入第 3 代餘角，也是 $\frac{1}{7}$ ，而變成了 3 個。所以第 7 代總共有 3 個母角 $\frac{1}{7}$ ，加上 2 個第 4 代餘角 $\frac{1}{13}$ 、2 個第 5 代餘角 $\frac{1}{21}$ 、2 個第 6 代餘角 $\frac{1}{31}$ 、以及 2 個第 7 代餘角 $\frac{1}{43}$ 。而這些分數的加總，即角平分線斜率的總和，再 $\times 4$ ，就是 3.1547337384。

II. 母角、餘角數量計算法

觀察前 8 代的餘角數量，與併入母角時，母角的數量，列表如表(三)：詳見 P.74 附件十三

第幾代	餘角分母	數量	餘角併入母角時，該母角的數量——條列	累計數
1				
2	3	1	1+1	2
3	7	1	1+(1*2)	3
4	13	2	1+(1*2)+(2*1)	5
5	21	2	1+(1*2)+(2*2)	7
6	31	2	1+(1*2)+(2*3)	9
7	43	2	1+(1*2)+(2*4)	11
8	57	3	1+(1*2)+(2*4)+(3*1)	14

說明：

第 2 代切下來的餘角 $\frac{1}{3}$ ，其分母為 3，數量為 1，當被再併入第 3 代母角 $\frac{1}{3}$ 時，第 3 代母角的數量就變成 $1+1=2$ 。

第 3 代切下來的餘角 $\frac{1}{7}$ ，其分母為 7，數量為 1，當被再併入第 7 代母角 $\frac{1}{7}$ 時，第 7 代母角的數量，加上之前 $\frac{1}{3}$ 的數量，就變成 $1+(1 \times 2)=3$ 。

也由於第 7 代母角的數量增為 3，所以第 8 代被切出來的餘角 $\frac{1}{57}$ 的數量就增

加為 3。而它在第 57 代併入母角 $\frac{1}{57}$ 時，該母角數量就增加為

$1 + (1 \times 2) + (2 \times 4) + (3 \times 1) = 14$ 。對於第 7 代而言，本文將這個 14 命名為**累計數**。

累計數是一個在單母角中為了求 π 值所得到的新數列。

III. 用累計數將「單母角外切多邊形邊長的 π 近似值」進行代數化

定理十：單母角切割法之 π 值展開式

詳見 P.76 附件十四

令離第 K 代最近的前面一個併入母角的餘角分母為 $t \times (t-1) + 1$ ，

離第 t 代最近的前面一個併入母角的餘角分母為 $s \times (s-1) + 1$ ，

第 s 代累計數為 N_s ，第 t 代累計數為 N_t 。

則第 K 代 π 近似值 =

$$\begin{aligned}
 & 4 \times \left(\left(\frac{1}{K} \times N_t \right) + \left(\frac{1}{t \times (t+1) + 1} \times N_s \right) + \left(\frac{1}{(t+1) \times (t+2) + 1} \times N_s \right) + \cdots \right. \\
 & + \left(\frac{1}{s \times (s+1) \times (s \times (s+1) + 1) + 1} \times N_s \right) \\
 & + \left(\frac{1}{(s \times (s+1) + 1) \times (s \times (s+1) + 2) + 1} \times N_{s+1} \right) + \cdots \\
 & + \left(\frac{1}{t \times (t-1) \times (t \times (t-1) + 1) + 1} \times N_{t-1} \right) + \left(\frac{1}{(t \times (t-1) + 1) \times (t \times (t-1) + 2) + 1} \times N_t \right) + \cdots \\
 & \left. + \left(\frac{1}{K \times (K-1) + 1} \times N_t \right) \right)
 \end{aligned}$$

證明： N_s 、 N_t 是累計數，累計數是一個在單母角中為了求 π 值所得到的新數列，

方便我們做高位的運算。

(2). 多角不對稱切割：一次切成多 (≥ 3) 角之不對稱切割法。

I. 多角切割理論

定理十一：不對稱切割之多角切割理論

詳見 P.79 附件十五

母角 r

$$= \frac{1\text{個}r_n\text{的總和}-\text{任取3個}r_n\text{相乘的總和}+\text{任取5個}r_n\text{相乘的總和}-\cdots}{1-\text{任取2個}r_n\text{相乘的總和}+\text{任取4個}r_n\text{相乘的總和}-\text{任取6個}r_n\text{相乘的總和}+\cdots}$$

證明：已知 r 的加法公式 $r_{1+2} = \frac{r_1 + r_2}{1 - r_1 r_2} \dots \textcircled{1}$ ，令 $r_1 = \frac{r_3 + r_4}{1 - r_3 r_4}$ 代入 $\textcircled{1}$ ：

$$\text{得 } r_{2+3+4} = \frac{r_2 + r_3 + r_4 - r_2 r_3 r_4}{1 - r_2 r_3 - r_2 r_4 - r_3 r_4} \dots \textcircled{2}； \quad \text{再令 } r_2 = \frac{r_5 + r_6}{1 - r_5 r_6} \text{ 代入 } \textcircled{2}：$$

$$\text{得 } r_{3+4+5+6} = \frac{r_3 + r_4 + r_5 + r_6 - r_3 r_4 r_5 - r_3 r_4 r_6 - r_3 r_5 r_6 - r_4 r_5 r_6}{1 - r_3 r_4 - r_3 r_5 - r_3 r_6 - r_4 r_5 - r_4 r_6 - r_5 r_6 + r_3 r_4 r_5 r_6} \dots \textcircled{3}；$$

∴歸納其規律性為，原母角 r 若要切成 n 個角，就可用如下具有規律性的等式來表示：

母角 r

$$= \frac{1\text{個}r_n\text{的總和}-\text{任取3個}r_n\text{相乘的總和}+\text{任取5個}r_n\text{相乘的總和}-\cdots}{1-\text{任取2個}r_n\text{相乘的總和}+\text{任取4個}r_n\text{相乘的總和}-\text{任取6個}r_n\text{相乘的總和}+\cdots}$$

若 $n=2$ ，則計算只到「任取2個 r_n 相乘的總和」，不必計算到3個 r_n 以後，其餘依此類推。

在本文中，僅就公式 $\textcircled{2}$ 與公式 $\textcircled{3}$ 來做示範與討論，其餘可自行代入定理十一依此類推。

II. 多角切割之多母角：二等分母角+一餘角&三等分母角+一餘角

定理十二：多母角切割法

詳見 P.79 附件十六

令原母角 $r_o = \frac{n_o}{m_o}$ ，第二代母角 $r = \frac{n}{m}$ ，餘角 $r_r = \frac{n_r}{m_r}$ ，所有的 m 、 n 都是自然

數，且 $n_o = 1$ 、 $n = 1$ 。

則 當 $r = \frac{n}{m}$ 為二等分母角，且餘角 r_r 值為最小時， $m = 2m_o + 1 \dots \textcircled{1}$

當 $r = \frac{n}{m}$ 為三等分母角，且餘角 r_r 值為最小時， $m = 3m_o + 1 \dots \textcircled{2}$

證明：若想切出兩個較大的相等的角，加上一個餘角：

以角平分線斜率=1(即90°角)為例，如圖(六)。

由②可推得，當 $m \leq 2m_o$ 時，分子將出現負數，矛盾；

∴二等分角的 m 值必須 $> 2m_o$ 。

∴若希望餘角 r_r 能越小，則二等分角 r 必須越大，則 m 必須越小。

∴當 $m = 2m_o + 1$ 時，餘角 r_r 值為最小。以 P.8 的方法，更動加減符號後，將

$$m = 2m_o + 1 \text{ 代入，得 } r_r = \frac{m_o}{2m_o^3 + 2m_o^2 + 2m_o + 1} > 0 \dots \textcircled{4}，\text{同理，由③可推得，當}$$

$m \leq 3m_o$ 時，分子將出現負數，矛盾；∴三等分角的 m 值必須 $> 3m_o$ 。

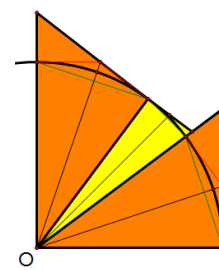
∴若希望餘角 r_r 能越小，則三等分角 r 必須越大，則 m 必須越小。

∴當 $m = 3m_o + 1$ 時，餘角 r_r 值為最小。

令 $m = 3m_o + 1$ ，代回更動加減號後的原式，得 r_r

$$= \frac{9m_o^2 - 2m_o - 2}{27m_o^4 + 27m_o^3 + 27m_o^2 + 16m_o + 2} > 0 \dots \textcircled{5}$$

以二等分母角+一餘角，利用本頁的公式④來演算後列表，如表(四)：



圖(六)

第幾代	r 值(角平分線斜率, P.8 的定義)	π 近似值
1	$\angle 1$	4
2	$\angle \frac{1}{3} \times 2 + \angle \frac{1}{7}$ 將 $m_0 = 1$ 代入 $\frac{m_0}{2m_0^3 + 2m_0^2 + 2m_0 + 1}$, 即可得 $\angle \frac{1}{7}$	3.2380952381
3	$\angle \frac{1}{7} \times 5 + \angle \frac{3}{79} \times 2$	3.1609403255
4	$\angle \frac{1}{15} \times 10 + \angle \frac{3}{79} \times 2 + \angle \frac{7}{799} \times 5$	3.1456831588
5	$\angle \frac{1}{31} \times 22 + \angle \frac{7}{1226} \times 2 + \angle \frac{7}{799} \times 5 + \angle \frac{15}{7231} \times 10$	3.1425817748
6	$\angle \frac{1}{63} \times 44 + \angle \frac{7}{1226} \times 2 + \angle \frac{7}{799} \times 5 + \angle \frac{15}{7231} \times 10 + \angle \frac{31}{61567} \times 22$	3.1418323425
7	$\angle \frac{1}{127} \times 93 + \angle \frac{7}{1226} \times 2 + \angle \frac{9}{10148} \times 5 + \angle \frac{15}{7231} \times 10$ $+ \angle \frac{31}{61567} \times 22 + \angle \frac{63}{508159} \times 44$	3.1416538108
8	$\angle \frac{1}{255} \times 188 + \angle \frac{559}{312637} \times 2 + \angle \frac{9}{10148} \times 5 + \angle \frac{15}{7231} \times 10$ $+ \angle \frac{31}{61567} \times 22 + \angle \frac{63}{508159} \times 44 + \angle \frac{127}{4129279} \times 93$	3.1416079136

說明：兩等分角使用的是分母約為等比的切割，逼近速度果然比使用分母呈等差的

表(二)快得多了。第 2 代的餘角 $\angle \frac{1}{7}$ 直接併入第 3 代的母角，但是第 4 代的餘角

$\angle \frac{3}{79}$ 就必須切割成 $\angle \frac{1}{31}$ 與 $\angle \frac{7}{1226}$ ，然後以 $\angle \frac{1}{31}$ 併入第 5 代的母角，留下 $\angle \frac{7}{1226}$ ；

然後 $\angle \frac{7}{1226}$ 在第 7 代時又要再切割一次，以 $\angle \frac{1}{255}$ 併入第 8 代的母角，留下餘角

$\angle \frac{559}{312637}$ 。第 6 代的 $\angle \frac{7}{799}$ 也是類推。

表(四)逼近速度明顯表(二)更快。

以三等分母角+一餘角，利用 P.18 的公式⑤來演算後列表，如表(五)：

第幾代	r 值(角平分線斜率, P.8 的定義)	π 近似值
1	$\angle 1$	4
2	$\angle \frac{1}{4} \times 3 + \angle \frac{5}{99}$ 將 $m_o = 1$ 代入 $\frac{9m_o^2 - 2m_o - 2}{27m_o^4 + 27m_o^3 + 27m_o^2 + 16m_o + 2}$, 即可得 $\angle \frac{5}{99}$	3.2020202020
3	$\angle \frac{1}{13} \times 9 + \angle \frac{5}{99} + \angle \frac{134}{9138} \times 3$	3.1472194545
4	$\angle \frac{1}{40} \times 29 + \angle \frac{75}{158701} + \angle \frac{134}{9138} \times 3 + \angle \frac{1493}{835239} \times 9$	3.1422092739
5	$\angle \frac{1}{121} \times 90 + \angle \frac{75}{158701} + \angle \frac{7076}{1105832} \times 3 + \angle \frac{1493}{835239} \times 9$ $+ \angle \frac{14318}{70891842} \times 29$	3.1416615046
6	$\angle \frac{1}{364} \times 276 + \angle \frac{75}{158701} + \angle \frac{132488924}{146522362168} \times 3$ $+ \angle \frac{1493}{835239} \times 9 + \angle \frac{14318}{70891842} \times 29 + \angle \frac{131525}{5835919179} \times 90$	3.1416003558

說明：值得注意的是， $\angle \frac{5}{99} = \angle \frac{1}{40} \times 2 + \angle \frac{75}{158701}$ ，一口氣切出了兩個母角。

$\angle \frac{7076}{1105832}$ 的情況也一樣。

第6代切割出來的多邊形邊數為 $(276+1+3+9+29+90) \times 4 = 1632$ 。

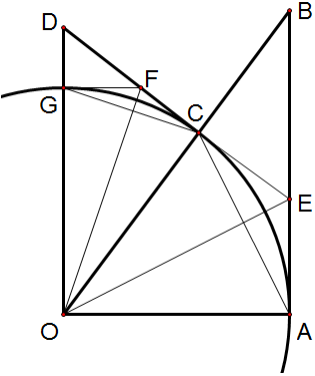
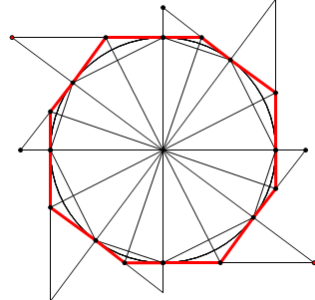
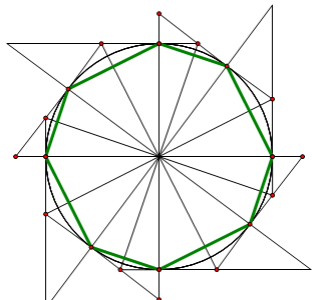
本文至此，已經發展出以有理數的角平分線斜率來分割角度的『不對稱切割法』，並做了把一個斜率一次切成兩個、三個、四個的好幾代示範。若想一次做更多的切割，則代入 P.17 的**定理十一**就可推演出來。

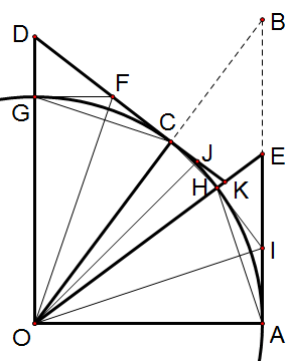
這是以不對稱外切多邊形邊長來逼近 π 值的作法，有理數計算效率明顯高於開根號。

下個單元——將研究以外切多邊形配合內接多邊形來運算，以發展出效率極高的『加權校正法』。

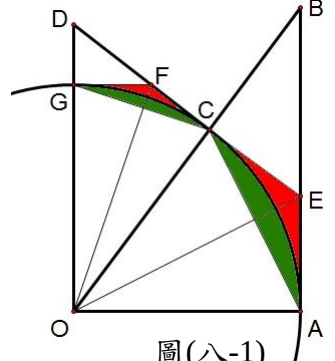
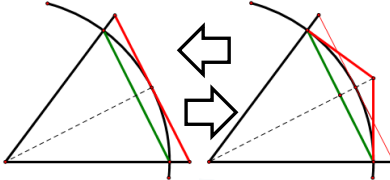
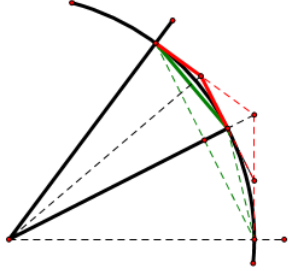
(三). 加權校正法——以外切內接多邊形面積，配合加權比例常數來求 π 值的方法

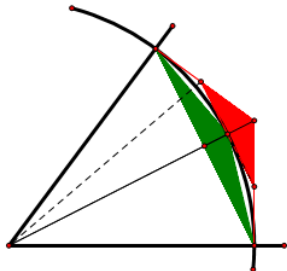
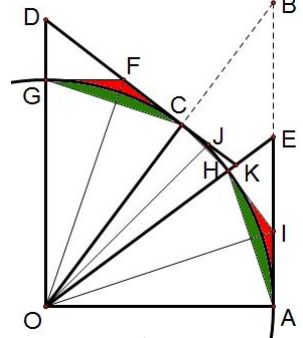
回顧上個單元，以多邊形邊長來求 π 值的操作邏輯，用表格來說明，如表(六)：

第一次切割	如圖(七-1)，以兩個比例為(3,4,5)的相似畢氏三角形的兩個銳角，即可將90°角分割為不等的兩部分，即$\angle AOB$與$\angle COD$，由表(一)可知，其r值各為$\frac{1}{2}$與$\frac{1}{3}$。作角平分線來等分這兩個角，就會發現： $\overline{AE} + \overline{CE} < \overline{AB}, \quad \overline{CF} + \overline{FG} < \overline{CD} \text{ (其中 } \overline{AE} = \overline{CE}, \quad \overline{CF} = \overline{GF})$ 故$2\overline{AE} + 2\overline{CF} < \overline{AB} + \overline{CD}$，所以透過數次不對稱切割後，斜率和(有理數$r$)會更逼近弧長。	 圖(七-1)
計算 π 值	將這90°角的圖形複製到其他象限，就可得到如圖(七-2)以$\triangle AOE$之類的外切$\triangle$外邊構成的外切多邊形(紅線)；與如圖(七-3)以$\triangle AOC$之類的內接$\triangle$外邊構成的內接多邊形(綠線)。可用這兩種多邊形來夾擊半圓周長π。當設定半徑$\overline{OA}=1$時，半圓周長$=\pi$，依斜率計算，$\overline{AE} = \frac{1}{2}$，$\overline{CF} = \frac{1}{3}$，紅線多邊形半周長$=4 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 3.333\dots$；綠線多邊形半周長依此類推。本文於目的二僅做外切紅線示範，但捨棄內接綠線，因為在單位圓中，當外切單一分量為r時，內接單一分量將成為$\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$，易出現無理數。若改用面積就不會。	 圖(七-2)  圖(七-3)

第二次切割——遞迴	由定理四、五、六，可得到以有理數來切割角度的方法。已知 $\angle 1 \rightarrow \angle \frac{1}{2} + \angle \frac{1}{3}$，以相同方法可得 $\angle \frac{1}{2} \rightarrow \angle \frac{1}{3} + \angle \frac{1}{7}$。即，$\angle AOB$ ($r = \frac{1}{2}$) 可分割成另外兩個 r 值各為 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{1}{7}$ 的 $\angle AOE$ 與 $\angle COK$ 角，如圖(七-4)。可得到更逼近 π 值的級數和。	 圖(七-4)
------------------	--	---

在單位圓上，半圓周長 = π ，面積 = π ，爰此，本章節要發展由面積出發之校正方法，表(七)：

構想	當可以計算出圖(八-1)的紅綠色面積比時，只要先得出外切箏形 $OAEC$, $OCFG$ 與內接 $\triangle OAC$, OCG 的面積，再加權計算，就可得到更精確的扇形面積。其中 $\overline{OE}$、$\overline{OF}$ 是角平分線。	 圖(八-1)
	圖(八-2)左圖外切 $\triangle$ 與內接 $\triangle$ 形狀相似；右圖外切部分是圖(八-1)的箏形。箏形與外切 $\triangle$ 都可分割成兩個小 $\triangle$，$\therefore$ 左右兩圖的四個小 $\triangle$ 是全等的，$\therefore$ 箏形與外切 $\triangle$ 面積相等。本文使用右邊箏形來做推算。	 圖(八-2)
公式推演	將圖(八-2)左圖做更進一步的角平分線分割，外切與內接多邊形就會變成如圖(八-3)的紅綠色實線部分。若與上一代外切與內接多邊形比較，就會發現經過再一次的角平分線分割，外切箏形減少如圖(八-4)的紅色面積，內接 $\triangle$ 則	 圖(八-3)

	增加綠色面積。若求得： 1. 圖(八-4)的紅、綠色面積。 2. 第二代角平分線的斜率 r 值。 則可輕易以遞迴來逼近圖(八-1)的紅、綠色面積。	 圖(八-4)
實際運用	事實上，為了方便計算，過程中對分母做了一些約簡，使得該紅綠面積的比值在 r 值越小時會越精確。配合第二單元的不對稱切割，來快速切割出更小的有限項 r 值，如圖(八-5)，再加上加權校正法的校正，就可以得到更精確的 π 值。	 圖(八-5)

1. 外切內接多邊形與圓面積之差比：討論圓的外切多邊形與內接多邊形，與圓面積差的比值，並導出圓面積校正公式。

預備定理四：面積差縮小定理

詳見 P.81 附件十七

如圖(九)，在圓心為 O 之單位圓上取箏形 $AODC$ ，令 $\overline{OC}$ 之斜率為 $r_1 = \frac{n}{m}$ ；

(1).若 $\overline{OC}$ 、 $\overline{ON}$ 分別為 $\angle AOD$ 、 $\angle AOE$ 的角平分線。則：

$$\triangle AOD \text{ 其面積為 } \frac{mn}{m^2 + n^2} \dots \textcircled{1}$$

$$\overline{ON} \text{ 之斜率 } r_2 = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2} + m} \dots \textcircled{2} ;$$

$$\text{當 } r_1 = \frac{n}{m} \text{ 夠小時，} \triangle EAN \text{ 面積約為 } \frac{1}{8} \triangle DAC \dots \textcircled{3} ;$$

(2).若 $\overline{ON'}$ 、 $\overline{OM'}$ 分別為 $\angle AOE'$ 、 $\angle E'OD$ 的角平分線， $\overline{AN'} = \frac{r_1}{2}$ ，

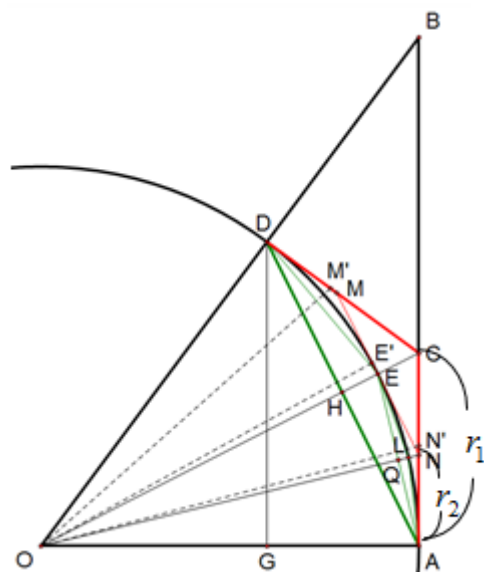
$$\text{則 } AODE' - \triangle AOD \text{ 之面積為 } \frac{2r_1^3}{4 + 5r_1^2 + r_1^4} \dots \textcircled{4} ,$$

$$\text{且箏形 } AODC - (AOE'N' + E'ODM') = \frac{r_1^3}{4 + 2r_1^2} \dots \textcircled{5}$$

利用 $\triangle AOB$ 與 $\triangle GOD$ 的相似，就可以得出
 $\overline{DG}$ 的高與內接 $\triangle AOD$ 的面積...①。角平分
 線特性，即可得出 r_2 ...②。再利用相似形的
 證明可得出差值的縮小...③。將

$\angle r \rightarrow \angle \frac{r}{2} + \angle \frac{r}{2+r^2}$ 簡單切割之算式代入

面積計算，即可得④，此為內接 $\triangle$ 之擴大，
 同理可證外切箏形之面積縮小值⑤。於 P.18
 所提若改用面積就不會出現無理數，在預備
 定理四之①獲得證實。



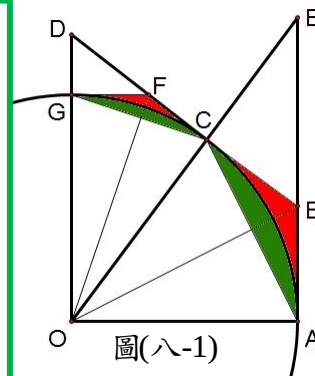
圖(九)

預備定理五：誤差趨近定理&誤差夾擊定理(一)

如圖(八-1)，令 S = 箏形面積和， T = 頂點在圓心之等腰 $\triangle$ 面

積和， R = 扇形面積和；則 $\frac{1}{2} < \frac{(S-R)}{(R-T)} < \frac{1+r^2}{2} \dots \textcircled{1}$

且當 r 值越小時； $\frac{(S-R)}{(R-T)} \rightarrow \frac{1}{2} \dots \textcircled{2}$ 詳見 P.84 附件十八



圖(八-1)

將預備定理四的②代回 r_1 與①遞迴，就可得到每分割一代， S 與 T 對 R 的面積逼近
 比率。當分割多次後 m 、 n 差距太大時， n 可忽略，即易求其累計的極限值，可
 求得當角度非常小時，圖(八-1)紅綠比約為1:2，其比值 $\frac{1}{2}$ 即為**加權比例常數**。

m 、 n 差距太大時，亦即當 r 值越小時，其差比 $\frac{S-R}{R-T}$ 會往**加權比例常數** $\frac{1}{2}$ 收斂，

而且再經過推演，還可以把誤差區間限制在僅僅 $\frac{r^2}{2}$ 的範圍內。若以預備定理四之

④⑤代入，也可輕易得 $\frac{(S-R)}{(R-T)} \approx \frac{(1+r^2)(4+r^2)}{2(4+2r^2)}$ ，一樣可以很容易導出①、②。預

備定理之④⑤，是最基本的簡單切割法，誤差範圍也約為 $\frac{r^2}{2}$ ，若代入

$\angle r \rightarrow \angle \frac{r}{3} \times 2 + \angle \frac{3r-r^3}{9+5r^2}$ 之類的多母角切割法，加權比例常數雖仍是收斂至 $\frac{1}{2}$ ，

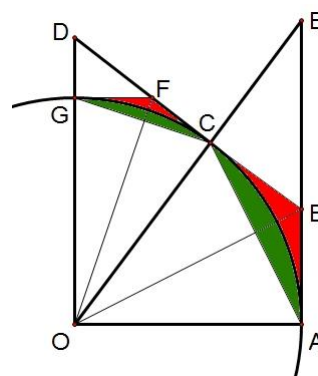
但誤差區間更窄。本文僅就簡單切割法來作示範，餘依此類推。

預備定理六：誤差夾擊定理(二)

如圖(八-1)，令 S = 箏形面積和， T = 內接△面積和，

R = 扇形面積和；則 $\frac{1+r^2}{2+r^2} < \frac{(S-R)}{(R-T)} < \frac{1+r^2}{2}$ 。

詳見 P.88 附件十九



圖(八-1)

$(S-R):(R-T)$ 可化簡為 $(1+r^2):(\sqrt{1+r^2}+1)$ ，利用

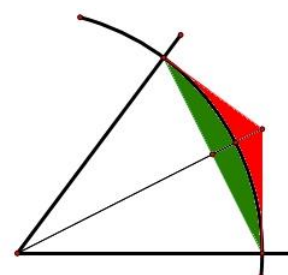
$\sqrt{1+r^2} > 1$ 的特性，就可巧妙再將下限又往上提高一點點。

定理十三：加權校正法之扇形面積夾擊定理

如圖(十)，在單位圓上，令外切箏形面積為 S ，內接△面積為 T ，扇形面積為 R ；則

$$\frac{2S+(1+r^2)T}{3+r^2} < R < \frac{(2+r^2) \times S + (1+r^2) \times T}{3+2r^2} \dots \textcircled{1}$$

若 $r \rightarrow 0$ 時， $R \rightarrow \frac{2S+T}{3} \dots \textcircled{2}$ 詳見 P.88 附件二十



圖(十)

由預備定理六，可得①；再以 $r \rightarrow 0$ 代入①，可得②。

由①，再配合箏形面積 $S = \frac{n}{m}$ ，以及預備定理四之①內接△面積 $T = \frac{mn}{m^2+n^2}$ ，可得

$$\text{加權校正上限法：} \pi = 4 \times \sum \left(\frac{n}{m} \times \frac{2+r^2}{3+2r^2} + \frac{mn}{m^2+n^2} \times \frac{1+r^2}{3+2r^2} \right) = 4 \times \sum \frac{r \times (3+r^2)}{3+2r^2}$$

$$\text{加權校正下限法：} \pi = 4 \times \sum \left(\frac{n}{m} \times \frac{2}{3+r^2} + \frac{mn}{m^2+n^2} \times \frac{1+r^2}{3+r^2} \right) = 4 \times \sum \frac{3r}{3+r^2}$$

由②可得加權校正逼近法： $\pi = 4 \times \sum \left(\frac{n}{m} \times \frac{2}{3} + \frac{mn}{m^2 + n^2} \times \frac{1}{3} \right) = 4 \times \sum \frac{r}{3} \left(2 + \frac{1}{1+r^2} \right)$

以這些算式，可得下一點的定理十四。

2. 不對稱切割+加權校正法

(1). π 值校正——將加權校正法實際代入各類不對稱切割法，以校正 π 值

定理十四

詳見 P.89 附件二十一

單位圓中，令 $r = \frac{n}{m}$ 為經不對稱切割後之扇形角平分線斜率，且第 k 代有 i_k 項

$r_{(k,t)}$ ，其係數各為 $c_{(k,t)}$ ，則：

①外切多邊形面積法： $\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} r_{(k,t)}$ ；

②內接多邊形面積法： $\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} \frac{r_{(k,t)}}{1+r_{(k,t)}^2}$ ；

③加權校正上限法： $\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} \frac{r_{(k,t)} \times (3+r_{(k,t)}^2)}{3+2r_{(k,t)}^2}$ ；

④加權校正下限法： $\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} \frac{3r_{(k,t)}}{3+r_{(k,t)}^2}$ ；

證明：由定理八、預備定理四、定理十三，即可得諸列算式。

(2). 單母角不對稱切割法：表(八)

	外切多邊形面積	內接多邊形面積	加權校正上限	加權校正下限
1	4	2	3.2	3
2	3.3333333333	2.8000000000	3.1444991790	3.1318681319
3	3.2380952381	2.9600000000	3.1423061240	3.1389961390
4	3.1868131868	3.0541176471	3.1417690886	3.1409244694
5	3.1677655678	3.0903167421	3.1416547376	3.1413528169
6	3.1591634172	3.1069487587	3.1416211453	3.1414814006
7	3.1547337384	3.1155974074	3.1416089684	3.1415285959

8	3.1509743399	3.1229820227	3.1416012898	3.1415585914
...	詳見 P.89 附件二十一			
48	3.1417717527	3.1412345360	3.1415926581	3.1415926357
49	3.1417638022	3.1412504302	3.1415926577	3.1415926372
50	3.1417564749	3.1412650788	3.1415926574	3.1415926385
誤差	0.0001638213	-0.0003275748	0.0000000038	-0.0000000151

說明：最後一列是每欄的第 50 代數字與 3.1415926536 的差值，可看成誤差值。

由表(八)可知，經過 50 代分割，未經過校正的外切或內接三角形求出的圓周率逼近值已能準確到小數點以下第 3 位。使用加權校正還可以達到小數點以下第 7 位。

內接的面積的差值 **-0.0003275748** 其絕對值約為外切 **0.0001638213** 的 2 倍，這與預備定理五的證明——**加權比例常數**會往 $\frac{1}{2}$ 收斂——的推算完全符合。

(3). 多母角不對稱切割法

同樣可以用表(四)的三等分母角+一餘角的資料，進行進一步運算出表(九)：

	外切多邊形面積	內接多邊形面積	加權校正上限	加權校正下限
1	4	2	3.2	3
2	3.2380952381	2.9600000000	3.1423061240	3.1389961390
3	3.1609403255	3.1033600000	3.1416189773	3.1414893433
4	3.1456831588	3.1334328326	3.1415938369	3.1415879399
5	3.1425817748	3.1396156393	3.1415927219	3.1415923806
6	3.1418323425	3.1411133471	3.1415926576	3.1415926377
7	3.1416538108	3.1414703438	3.1415926538	3.1415926526
8	3.1416079136	3.1415621339	3.1415926536	3.1415926535
誤差	0.0000152600	-0.0000305197	0.0000000000	-0.0000000001

說明：最後一列是每欄的第 8 代數字與 3.1415926536 的差值。

表(九)第 6 代的逼近值就已經介於表(九)的第 49、50 代之間，而第 8 代甚至精確度已經達小數點以下第 9 位，若計算總演算次數七次，幾乎是每演算一次就

往小數點後推 1 位多。可見一次切多角的等分法，比一次只切下一角的方法速度快很多。

再以表(五)的三等分母角+一餘角的資料，加以推算得表(十)：

	外切多邊形面積	內接多邊形面積	加權校正上限	加權校正下限
1	4	2	3.2	3
2	3.2020202020	3.0250356198	3.1418487253	3.1406240898
3	3.1472194545	3.1303780367	3.1415948345	3.1415839782
4	3.1422092739	3.1403598689	3.1415926789	3.1415925522
5	3.1416615046	3.1414549571	3.1415926539	3.1415926523
6	3.1416003558	3.1415772491	3.1415926536	3.1415926536
誤差	0.0000077022	-0.0000154045	0.0000000000	0.0000000000

說明：最後一列是每欄的第 6 代數字與 3.1415926536 的差值。若計算到小數點以下第 14 位，則上限與下限的誤差數字為 0.00000000000386 與 -0.00000000001541。

經過觀察，外切多邊形面積的精確度高於內接，加權校正上限的精確度也高於下限。

因為外切與內接對圓面積的差比值約是加權比例常數 $\frac{1}{2}$ ，所以當然外切多邊形面積較接近圓面積；而上限與下限的情況，則和加權校正法的推演有關。目前的加權校正法是先以內外兩個三角形面積來逼近弧形邊的面積，再以有理數來逼近開根號，面臨雙重誤差。後者可能只是單單誤差的結果，無法像前者一樣得到確切的證明。

(四). π 值代數式——以有限項有理數和來表示 π 近似值

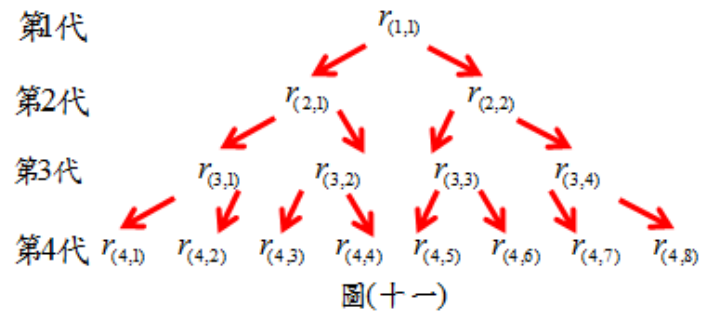
定理十五： π 值逼近定理(第一代)

詳見 P.92 附件二十二

如圖(十一)，若不對稱切割每代以一分為二的方式切割， k 為切割的世代數，

$$\text{若 } k \rightarrow \infty, \text{ 則 } \pi = 4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} \frac{r_{(k,t)}}{3} \left(2 + \frac{1}{1+r_{(k,t)}^2} \right)$$

證明：如圖(十一)，利用
定理十四即可得證。



定理十六：π值夾擊定理

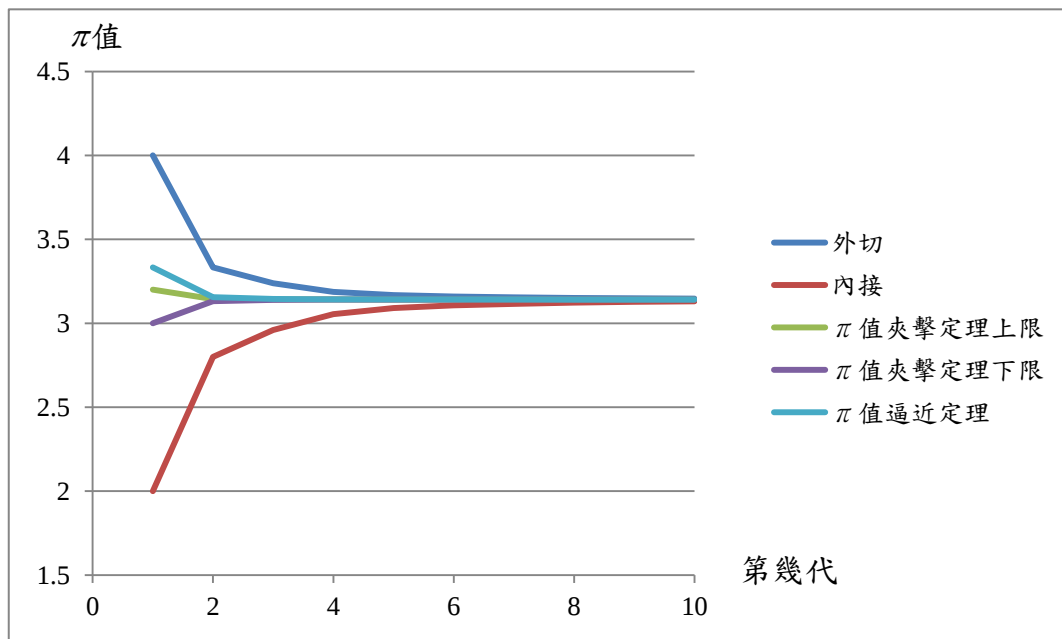
詳見 P.92 附件二十三

如圖(十一)，若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，

$$\text{第 } k \text{ 代 } \pi \text{ 值區間為 } 4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{3r_{(k,t)}}{3+r_{(k,t)}^2} \right) < \pi < 4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{r_{(k,t)} \times (3+r_{(k,t)}^2)}{3+2r_{(k,t)}^2} \right)$$

證明：如圖(十一)，利用定理十四即可得證。

π值收斂圖：茲將不對稱切割研究之各種逼近法收斂情況圖示如下，圖(十二)



以單母角不對稱切割為例，前十代數值用 Excel 製作出的 xy 散佈圖。

由夾擊定理與逼近定理，來對照外切與內接的曲線，就可以很明顯感覺到加權校正法的威力。

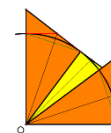
(五). 繼往開來

1. π 值的計算歷史：表(十一)

(1).實驗時期「周三徑一」	在阿基米德以前， π 值的測定依靠實物測量。
(2).幾何法時期「反覆割圓」	以正多邊形找尋 π 值。
(3).分析法時期「無窮級數」	以無限項級數之和或乘積的表達式來求 π 值。
(4).電腦時代「自動化計算」	以舊版或改良版的無窮級數，交給電腦自動計算。

本文的方法，根據這種分類應該屬於第(2)期的幾何法。不同的是，本文跳脫等分切割的想法，改採「不對稱有理切割」的方式來逼近 π 值，而且還加上了獨創的「加權校正法」。

2. 發展不對稱切割數值分析法之計算公式



(1). 反函數徑度量累積法：

英國的格里哥利(James Gregory)在 1671 年：

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

德國的萊布尼茲(Gottfried Leibniz)也在 1674 年提出 $x=1$ 的多項式：

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

文獻回顧到此，赫然發現這兩位數學家可能已幫本文之不對稱切割法，開啟一道踏入以無窮級數之分析法來結合電腦自動化計算 π 值之大門。

萊布尼茲的 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ 即為本文 P.14(表二)的第一代角平

分線斜率 1 之反函數 ($\arctan$) 所對應的徑度量 $\frac{\pi}{4}$ 的交錯級數和。在此觀點下，P.14

的每一代都可以對應一個分析法的 π 值計算式：表(十二)

第幾代	單母角不對稱切割之斜率和	$\frac{\pi}{4}$ 的反函數表示法
1	$\angle 1$	$\frac{\pi}{4} = \arctan 1$
2	$\angle \frac{1}{2} + \angle \frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$
3	$\angle \frac{1}{3} \times 2 + \angle \frac{1}{7}$	$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$
...	...	...

上表是採用單母角不對稱切割所得到之一系列的 π 值計算公式。

然而反函數展開式的表現法，在結合 P.17「定理十一：不對稱切割多角切割理論」所得到的成果可以得到效率更高的展開式。如：二母角不對稱切割法：表(十三)

第幾代	二母角不對稱切割之斜率和	$\frac{\pi}{4}$ 的反函數表示法	備註
1	$\angle 1$	$\frac{\pi}{4} = \arctan 1$	
2	$\angle \frac{1}{3} \times 2 + \angle \frac{1}{7}$	$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$	
3	$\angle \frac{1}{7} \times 5 + \angle \frac{3}{79} \times 2$	$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79}$	尤拉提出之展開式
...	...	...	

利用三母角不對稱切割法，同樣也可得出相對應 $\frac{\pi}{4}$ 反函數的展示法。

利用定理十一，計算到四母角切割 $r_r = \frac{r_o - 4r + 4r^3 - 6r^2r_o + r^4r_o}{1 + 4rr_o - 6r^2 + r^4 - 4r^3r_o}$ ，並取 $r_o = 1$ ，

$r = \frac{1}{5}$ 代入，可得 $r_r = -\frac{1}{239}$ ，即 $\frac{\pi}{4} \rightarrow \angle \frac{1}{5} \times 4 - \angle \frac{1}{239}$ 。該展開式，即為

$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$ ，此為英國梅欽(Machin, 1680 – 1751 年)在 1706 年所

提出的梅欽公式。

在文獻中，我們還找到下列**梅欽類公式(Machin-like formula)**：

高野喜久雄(Kikuo Takano) 1982 年提出的：

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{49} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} + 12 \arctan \frac{1}{110443}$$

黃見利(Hwang Chien-Lih) 2003 年提出的：

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = & 183 \arctan \frac{1}{239} + 32 \arctan \frac{1}{1023} - 68 \arctan \frac{1}{5832} + 12 \arctan \frac{1}{113021} \\ & - 100 \arctan \frac{1}{6826318} - 12 \arctan \frac{1}{33366019650} + 12 \arctan \frac{1}{43599522992503626068} \end{aligned}$$

茲將本章節的心得整理如下：

- i. $\arctan \frac{1}{239}$ 似乎不斷出現在這類公式中，可能梅欽類公式的尋找有困難，所以只能依賴既有的公式繼續推演。依本研究的心得，善用不對稱切割之多角切割理論來重複組合使用，除了上述的公式都可推算出來之外，還可自行設計完全不同的公式。

- ii. **梅欽類公式(Machin-like formula)的效率探討：**

歷史上梅欽類公式內的數字似乎不具備明顯的規律性，可能是因為該公式尋找不易，要花很多心血才能寫得出來。但以不對稱切割的方法，卻是輕而易舉。比如本文的單母角切割，就可以讓各代母角形成調和數列。

事實上，本研究的不對稱切割法，可以設計出任何一種效率更高、規律更明顯的梅欽類公式。

- iii. **不對稱切割之斜率展開式具有類似古埃及分數之特性：**

這些梅欽類公式的設計者，似乎喜歡把 $\arctan$ 設計成單位分數的展開式。那麼是否所有有理數的角平分線斜率，都可以設計成單位分數的斜率和

呢？

定理十七：不對稱切割之單位分數切割理論與展開式 詳見 P.94 附件二十四

令第 k 代 $\angle A_k = \angle B_k + \angle C_k$ ， $\angle A_k$ 之角平分線斜率為 $r_{A_k} = \frac{n_{A_k}}{m_{A_k}}$ ， $\angle B_k$ 之角平分

線斜率為 $r_{B_k} = \frac{1}{m_{B_k}}$ ， $\angle C_k$ 之角平分線斜率為 $r_{C_k} = \frac{n_{C_k}}{m_{C_k}}$ ， $\angle C_k = \angle A_{k+1}$ ；

$\{m_{A_k}, n_{A_k}, m_{B_k}, m_{C_k}, n_{C_k}, k\} \subset N$ ， $(m_{A_k}, n_{A_k}) = 1$ ， $(m_{C_k}, n_{C_k}) = 1$ ；

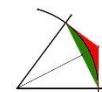
若 $m_{B_k} < 1 + \frac{m_{A_k}}{n_{A_k}}$ ， $\forall k > 1$ ，則 n_{C_k} 為一遞減且收斂至 1 之數列...①

若 $n_{C_t} = 1$ ，則 $\angle \frac{n_{A_1}}{m_{A_1}} \rightarrow \angle \frac{1}{m_{B_1}} + \angle \frac{1}{m_{B_2}} + \angle \frac{1}{m_{B_3}} \dots + \angle \frac{1}{m_{B_t}} + \angle \frac{1}{m_{C_t}} \dots$ ②

證明：利用 $\frac{n_{C_{k+1}}}{n_{C_k}} < 1$ 的方式即可證①，再證②； $\because \frac{m_{A_k}}{n_{A_k}} < m_{B_k} < 1 + \frac{m_{A_k}}{n_{A_k}}$ ，

$\therefore m_{B_k}$ 僅有一組解。

(2). 不對稱切割單一累積分量的精確度：



瑞士的尤拉(Euler, 1707 - 1783 年) 在 1755 年(參考資料六)：

$$\arctan x = \frac{x}{1+x^2} \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^2 + \dots \right)$$

尤拉這一個級數中的每一項都是正數，換句話說，取 S_n = 多項式前 n 項的和，則 S_n 為一遞增數列， n 取越大，所得到的多項式和就會越接近此斜率所對應到的徑度量。以下，取一個經過切割後很小很小的斜率 r 值，將它代入尤拉的多項式中，並用不對稱切割之上下限去估計尤拉多項式要取幾項，其所對應的徑度量才會落入不對稱切割之上下限中。

給定斜率 $r < 1$ ， S_n 為尤拉多項式前 n 項的和。

由 π 值夾擊定理： $\frac{3r}{3+r^2} < \arctan r < \frac{r \times (3+r^2)}{3+2r^2}$ ，令 $p_1 = \frac{3r}{3+r^2}$ ，

$q_1 = \frac{r \times (3+r^2)}{3+2r^2}$; p_2, q_2 為以 $\angle r \rightarrow \angle \frac{r}{2} + \angle \frac{r}{2+r^2}$ 代入原式之值, p_3, q_3 為以

$\angle r \rightarrow \angle \frac{r}{3} \times 2 + \angle \frac{3r-r^3}{9+5r^2}$ 代入原式之值; 將夾擊定理的上下限, 即定理十六的

$\frac{r \times (3+r^2)}{3+2r^2}$ 與 $\frac{3r}{3+r^2}$, 與尤拉的多項式比較得:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{1+r^2} \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)\right) < \frac{3r}{3+r^2} < \frac{r}{1+r^2} \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right) + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)^2\right) \\ & < \frac{r \times (3+r^2)}{3+2r^2} \end{aligned}$$

多項式前二項和 $S_2 < \pi$ 值夾擊定理下限 $<$ 多項式前三項和 $S_3 < \pi$ 值夾擊定理上限

同理, 可計算得: p_2 (簡單不對稱切割) $< S_3 < p_3$ (多母角切割) $< \arctan r$, 故得證。

S_3 與 p_2 非常接近, 相差約在 $\frac{47r^5}{360}$, 與 p_3 距離較遠, 相差約為 $\frac{19r^3}{243}$ 。

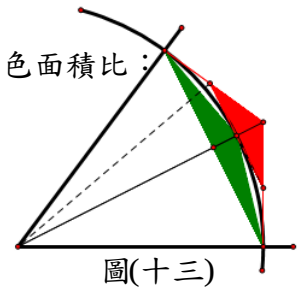
(3). 使用不對稱切割來推演出全新的加權校正函數

本文的加權校正法源自於對右圖紅綠色面積之探討, 使用角平

分線作圖後, 以圖(十四)的面積紅綠色面積比, 來類推圖(十五)的面

積比。承預備定理五、預備定理六之討論, 圖(十四)的紅綠色面積比:

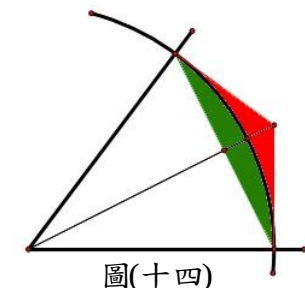
$$\frac{\text{紅色}}{\text{綠色}} = \frac{1+r^2}{\sqrt{1+r^2}+1} \dots \textcircled{1} \quad (P.24)$$



使用簡單不對稱切割 $\angle r \rightarrow \angle \frac{r}{2} + \angle \frac{r}{2+r^2}$, 當 r 極小時可得:

$$\frac{\text{紅色}}{\text{綠色}} = \frac{(1+r^2) \times (4+r^2)}{2 \times (4+2r^2)} \dots \textcircled{2} \quad (P.24)$$

將①、②化互減; 並令 $r^2 = 2k + k^2$ 代入, 可得:



$$\begin{aligned} & \frac{1+r^2}{\sqrt{1+r^2}+1} - \frac{(1+r^2)(4+r^2)}{2 \times (4+2r^2)} = \frac{1+r^2}{2+k} - \frac{(1+r^2)(4+2k+k^2)}{8+8k+4k^2} \\ & = \frac{(1+r^2)(8+8k+4k^2 - (2+k)(4+2k+k^2))}{(2+k)(8+8k+4k^2)} = \frac{-k^3(1+r^2)}{(2+k)(8+8k+4k^2)} \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

兩式之差相當接近，②可發展成為一個新的逼近方法。

由②推得新逼近方法： $\pi = 4 \times \sum \frac{12r+5r^3}{12+9r^2+r^4}$ ，令取代 p_1 成為 p_{1new} ；

透過下列定理十八，可得 $p_1 < p_2 < S_3 < p_{1new} < p_3 < p_{2new} < q_3$ ，證實精確度大幅提高。

定理十八： π 值新逼近定理(第二代)——簡單不對稱切割導出之新加權校正法
若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，第 k 代 π 值為

$$\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{12r_{(k,t)} + 5r_{(k,t)}^3}{12 + 9r_{(k,t)}^2 + r_{(k,t)}^4} \right) \quad \text{詳見 P.95 附件二十五}$$

將不對稱切割導入加權校正法，有進一步修正的效果，效率提高非常多。

∴不對稱切割可以發展出全新的加權校正函數 $\frac{(1+r^2)(4+r^2)}{2 \times (4+2r^2)}$ ，並得出更精確之 π

值計算式。加權校正函數 (function of weighted adjustment, $f_w(r)$) 是一個全新的領域，以下將展開對 $f_w(r)$ 的探索。

本文先以 $f_w(r)$ 來泛稱所有的加權校正函數，若要以區別，會在右下角加個下標。

(4). 新世界——加權校正函數 $f_w(r)$ 與餘角 $\frac{f_n(r)}{f_m(r)}$ 的探索

i. 不對稱切割與加權校正函數以及餘角的型態：

加權校正函數 (function of weighted adjustment, $f_w(r)$) 與餘角 $\angle \frac{f_n(r)}{f_m(r)}$ 的

型態，取決於切割的方式。舉多角切割法為例，不同的切割規則，會得到不同的餘角與加權校正函數：

取 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，則餘角 $\angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ 將趨近於定值，且其加權

$$\text{校正函數 } f_{wk}(r) = \frac{(f_{nk}(r))^2 + (f_{mk}(r))^2}{k^{k-(f_{nk}(r))^0} \times 2 \times f_{mk}(r)}$$

取 $\angle r \rightarrow t \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nt}(r)}{f_{mt}(r)}$ ，且 $\frac{r}{k} > \frac{f_{nt}(r)}{f_{mt}(r)} \rightarrow 0$ ，則其加權校正函數 $f_{wt}(r)$

$$= \frac{(1+r^2)(k-t)}{t(1+r^2)-k}$$

為了區分這些不同，本文在這些函數與餘角右下做了一個下標 k 與 t 。以下進行討論：

定理十九：加權校正函數定理——不對稱切割導出之加權校正函數

若 $\angle r \rightarrow (k - (f_{nk}(r))^0) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，則加權校正函數

$$= \frac{(f_{nk}(r))^2 + (f_{mk}(r))^2}{k^{k-(f_{nk}(r))^0} \times 2 \times f_{mk}(r)}；其中 f_{mk}(r)、f_{nk}(r) 的係數皆為整數，k=1,2,3,4...。$$

證明：已知定理十五， π 值逼近定理， $\angle r$ 所使用的加權比例常數為 $\frac{1}{2}$ 。

已知簡單不對稱切割 $\angle r \rightarrow \angle \frac{r}{2} + \angle \frac{r}{2+r^2}$ ，可得 $f_{w2}(r) = \frac{(1+r^2)(4+r^2)}{2 \times (4+2r^2)} =$

$$\frac{4+5r^2+r^4}{8+4r^2}。$$

若增加切割量，依定理十一可得下列算式：

$\angle r \rightarrow 2 \times \angle \frac{r}{3} + \angle \frac{3r-r^3}{9+5r^2}$ ，不失一般性，令 $\angle r \rightarrow \sum \angle r'$ ，則可依預備定理四之

④、⑤的方法，計算 $f_{w3}(r)$ ：

$$\begin{aligned}
f_{w3}(r) &= \frac{\text{外切縮小面積}}{\text{內接增加面積}} = \frac{r - \sum r'}{(\sum \frac{r'}{1+r'^2}) - \frac{r}{1+r^2}} \\
&= \frac{r - (2 \times \frac{r}{3} + \frac{3r-r^3}{9+5r^2})}{(2 \times \frac{\frac{r}{3}}{1+(\frac{r}{3})^2} + \frac{\frac{3r-r^3}{9+5r^2}}{1+(\frac{3r-r^3}{9+5r^2})^2}) - \frac{r}{1+r^2}} \\
&= \frac{\frac{r}{3} - \frac{3r-r^3}{9+5r^2}}{\frac{-3r+5r^3}{(1+r^2)(9+r^2)} + \frac{(9+5r^2)(3r-r^3)}{(9+5r^2)^2 + (3r-r^3)^2}} \\
&= \frac{8r^3 \times (1+r^2)(9+r^2)((9+5r^2)^2 + (3r-r^3)^2)}{3 \times (9+5r^2)((-3r+5r^3)((9+5r^2)^2 + (3r-r^3)^2) + (9+5r^2)(3r-r^3)(1+r^2)(9+r^2))} \\
&= \frac{8r^3 \times (1+r^2)(9+r^2)((9+5r^2)^2 + (3r-r^3)^2)}{3 \times (9+5r^2)(432r^3 + 480r^5 + 48r^7)} \\
&= \frac{8r^3 \times (1+r^2)(9+r^2)((9+5r^2)^2 + (3r-r^3)^2)}{3 \times 48r^3 \times (9+5r^2)(9+10r^2+r^4)} \\
&= \frac{((9+5r^2)^2 + (3r-r^3)^2)}{3^2 \times 2 \times (9+5r^2)}
\end{aligned}$$

$\angle r \rightarrow 3 \times \angle \frac{r}{4} + \angle \frac{16r-11r^3}{64+36r^2-r^4}$ ，不失一般性，令 $\angle r \rightarrow \sum \angle r'$ ，則可依預備定

理四之④、⑤的方法，計算 $f_{w4}(r)$ ：

$$\begin{aligned}
\frac{\text{外切縮小面積}}{\text{內接增加面積}} &= \frac{r - \sum r'}{(\sum \frac{r'}{1+r'^2}) - \frac{r}{1+r^2}} \\
&= \frac{r - (3 \times \frac{r}{4} + \frac{16r-11r^3}{64+36r^2-r^4})}{(3 \times \frac{\frac{r}{4}}{1+(\frac{r}{4})^2} + \frac{\frac{16r-11r^3}{64+36r^2-r^4}}{1+(\frac{16r-11r^3}{64+36r^2-r^4})^2}) - \frac{r}{1+r^2}} = \dots\dots \\
&= \frac{(16r-11r^3)^2 + (64+36r^2-r^4)^2}{4^3 \times 2 \times (64+36r^2-r^4)}。
\end{aligned}$$

由上列算式可知：

當 $k=1$ 時， $\angle r \rightarrow (1-0) \times \angle \frac{r}{1} + \angle \frac{0}{1}$ ，則加權校正數 $= \frac{0^2 + 1^2}{1^{1-0} \times 2 \times 1} = \frac{1}{2}$ ，剛好為加

權比例常數；

當 $k=2$ 時， $\angle r \rightarrow (2-1) \times \angle \frac{r}{2} + \angle \frac{r}{2+r^2}$ ， $f_{w2}(r) = \frac{(r)^2 + (2+r^2)^2}{2^{2-1} \times 2 \times (2+r^2)}$

$$= \frac{4+5r^2+r^4}{8+4r^2} ;$$

當 $k=3$ 時， $\angle r \rightarrow (3-1) \times \angle \frac{r}{3} + \angle \frac{3r-r^3}{9+5r^2}$ ， $f_{w3}(r) = \frac{(3r-r^3)^2 + (9+5r^2)^2}{3^{3-1} \times 2 \times (9+5r^2)}$ ；

當 $k=4$ 時， $\angle r \rightarrow (4-1) \times \angle \frac{r}{4} + \angle \frac{16r-11r^3}{64+36r^2-r^4}$ ，則 $f_{w4}(r)$

$$= \frac{(16r-11r^3)^2 + (64+36r^2-r^4)^2}{4^{4-1} \times 2 \times (64+36r^2-r^4)} ;$$

依此類推，可歸納得到 $\angle r \rightarrow (k - (f_{nk}(r))^0) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，於 $k=1,2,3,4,\dots$ 時，

$$f_{wk}(r) = \frac{(f_{nk}(r))^2 + (f_{mk}(r))^2}{k^{k-(f_{nk}(r))^0} \times 2 \times f_{mk}(r)} , \text{ 其中 } f_{mk}(r)、f_{nk}(r) \text{ 的係數皆為整數，故得證。}$$

為什麼會把餘角設為分式 $\angle \frac{f_n(r)}{f_m(r)}$ 而非 $\angle h(r)$ ，其實是為了 $\frac{(f_{nk}(r))^2 + (f_{mk}(r))^2}{k^{k-(f_{nk}(r))^0} \times 2 \times f_{mk}(r)}$

的需要。

ii. 加權校正函數的簡化：

定理二十：加權校正函數 $f_{wk}(r)$ 簡化定理

$\angle r \rightarrow (k - (f_{nk}(r))^0) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，當 k 值極大而 r 值極小時，

$$\text{加權校正函數 } f_{wk}(r) \approx \frac{2+r^2}{4} \text{。}$$

證明： $\angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ 來自於定理十一的計算，即

母角 r

$$= \frac{1\text{個}r_n\text{的總和}-\text{任取3個}r_n\text{相乘的總和}+\text{任取5個}r_n\text{相乘的總和}-\cdots}{1-\text{任取2個}r_n\text{相乘的總和}+\text{任取4個}r_n\text{相乘的總和}-\text{任取6個}r_n\text{相乘的總和}+\cdots}$$

$$\text{當 } k \neq 1 \text{ 時， } \angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}, \text{ 則 } \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} = \angle r - (k-1) \times \angle \frac{r}{k}$$

$$\text{令 } r_k \in R_k = \{r, -\frac{r}{k}, -\frac{r}{k} \dots (\text{共有 } k-1 \text{ 個 } -\frac{r}{k})\}$$

$$\text{則 } \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$$

$$= \frac{1\text{個}r_k\text{的總和}-\text{任取3個}r_k\text{相乘的總和}+\text{任取5個}r_k\text{相乘的總和}-\cdots}{1-\text{任取2個}r_k\text{相乘的總和}+\text{任取4個}r_k\text{相乘的總和}-\text{任取6個}r_k\text{相乘的總和}+\cdots}$$

$$\text{令 } f_{nk}(r) = a_{nk1}r + a_{nk3}r^3 + a_{nk5}r^5 + \dots, \quad f_{mk}(r) = a_{mk0} + a_{mk2}r^2 + a_{mk4}r^4 + \dots, \text{ 所有}$$

$$\text{係數都為整數，且就原式可知， } a_{mk0} \neq 0, \text{ 取 } a_{mk0} = k^{k-1}$$

$$\text{則 } \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} = \frac{a_{nk1}r + a_{nk3}r^3 + a_{nk5}r^5 + \dots}{a_{mk0} + a_{mk2}r^2 + a_{mk4}r^4 + \dots} = \frac{\frac{a_{nk1}}{a_{mk0}}r + \frac{a_{nk3}}{a_{mk0}}r^3 + \frac{a_{nk5}}{a_{mk0}}r^5 + \dots}{1 + \frac{a_{mk2}}{a_{mk0}}r^2 + \frac{a_{mk4}}{a_{mk0}}r^4 + \dots}$$

$$\therefore \text{分子分母兩式中，每項絕對值最小者為 } r \times \left(\frac{r}{k}\right)^{k-1} = \frac{r^k}{k^{k-1}} = \frac{r^k}{a_{mk0}}, \therefore a_{mk0} = k^{k-1}$$

$$\therefore \frac{a_{nk1}}{a_{mk0}} = (1\text{個}r_k\text{總和})\text{的係數} = 1 - (k-1) \times \frac{1}{k} = \frac{1}{k}, \therefore a_{nk1} = k^{k-2};$$

$$\text{同理可得 } a_{mk2} = (k(k-1) - C_2^{k-1}) \times k^{k-3}$$

以上這是已經進一步將 $f_{mk}(r)$ 、 $f_{nk}(r)$ 的係數整數化的結果。

$$\therefore \text{當 } r \text{ 值很小的情況下， } \frac{(f_{nk}(r))^2 + (f_{mk}(r))^2}{k^{k-1} \times 2 \times f_{mk}(r)} - \frac{1}{2} \approx \frac{a_{nk1}^2 + (a_{mk0} \times a_{mk2})}{k^{k-1} \times 2 \times a_{mk0}} r^2$$

$$= \frac{(k^{k-2})^2 + (k^{k-1} \times k^{k-3} \times (k(k-1) - C_2^{k-1}))}{k^{k-1} \times 2 \times k^{k-1}} r^2$$

$$= \frac{(k^{k-2})^2 + (k^{k-1} \times k^{k-3} \times \frac{k^2 + k - 2}{2})}{k^{k-1} \times 2 \times k^{k-1}} r^2$$

$$= \frac{k^2 + k}{4k^2} r^2 = \frac{k+1}{4k} r^2$$

分子式中的1在 k 值極大時，可被忽略，

$$\text{則 } \frac{(f_{nk}(r))^2 + (f_{mk}(r))^2}{k^{k-1} \times 2 \times f_{mk}(r)} - \frac{1}{2} \approx \frac{k+1}{4k} r^2 \approx \frac{1}{4} r^2$$

$$\therefore f_{wk}(r) = \frac{(f_{nk}(r))^2 + (f_{mk}(r))^2}{k^{k-1} \times 2 \times f_{mk}(r)} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4} r^2 = \frac{2+r^2}{4}, \text{ 故得證。}$$

將定理二十的簡化之加權校正數，代入計算，可得定理二十一：

定理二十一： π 值逼近定理(第三代)——使用簡化之加權校正函數

若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，第 k 代 π 值為

$$\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} \frac{r_{(k,t)} \times (6 + 5r_{(k,t)}^2)}{(1 + r_{(k,t)}^2)(6 + r_{(k,t)}^2)}$$

令 $r=1$ 帶入定理十五、定理十八、定理二十一這三代的 π 值逼近定理，僅計算一步，可得：

$$\text{定理十五，} \pi = 4 \times \frac{r}{3} \left(2 + \frac{1}{1+r^2}\right) = 4 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{2}\right) = \frac{10}{3} = 3.3333333...，\text{誤差 } 0.1917407...$$

$$\text{定理十八，} \pi = 4 \times \frac{12r + 5r^3}{12 + 9r^2 + r^4} = 4 \times \frac{12 + 5}{12 + 9 + 1} = \frac{34}{11} = 3.0909090...，\text{誤差 } -0.0506835...$$

$$\text{定理二十一，} \pi = 4 \times \frac{r \times (6 + 5r^2)}{(1 + r^2)(6 + r^2)} = 4 \times \frac{11}{14} = \frac{22}{7} = 3.1428571...，\text{誤差 } 0.0012645...$$

以第三代的定理二十一準確度最高，以 $r=1$ 代入，即可得到「疏率」 $\frac{22}{7}$ 。

以預備定理六的觀點來看定理二十一， $\frac{1+r^2}{2+r^2} < \frac{2+r^2}{4} < \frac{1+r^2}{2}$ ，可知定理二十一非常精確。

本文在 P.35 已經將定理十八與尤拉多項式做過比較，證實定理十八的優越性，而定理二十一的效率又更高於定理十八。當然，這是以 $r=1$ 帶入的結果。當角度分

割到極小時， r 值會變很小，這些 $f_{wk}(r)$ ，不管是定理十八使用的 $\frac{4+5r^2+r^4}{8+4r^2}$ ，

還是定理二十一使用的 $\frac{2+r^2}{4}$ ，全都會趨近於定理十五的 $\frac{1}{2}$ ，此時直接以 $\frac{1}{2}$ 來計

算，即可維持精確度並同時減少計算量。

本文所追求的計算 π 值最有效率的加權校正法，至定理二十一已經大功告成。

但秉持著實事求是與精益求精的科學精神，接下來本文仍將繼續探索餘角收斂定理。

iii. 餘角收斂定理(一)：

在 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ 式中，當 k 值極大時，餘角會趨近一個定值。

定理二十二：餘角收斂定理(一)

令 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，當 k 值極大時，餘角 $\frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ 會趨近一個定值。

證明：

當 $k \neq 1$ 時， $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，則 $\angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} = \angle r - (k-1) \times \angle \frac{r}{k}$

令 $r_k \in R_k = \{ r, -\frac{r}{k}, -\frac{r}{k} \dots (\text{共有 } k-1 \text{ 個 } -\frac{r}{k}) \}$

$$\begin{aligned} & \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} \\ &= \frac{1 \text{ 個 } r_k \text{ 的總和} - \text{任取 } 3 \text{ 個 } r_k \text{ 相乘的總和} + \text{任取 } 5 \text{ 個 } r_k \text{ 相乘的總和} - \dots}{1 - \text{任取 } 2 \text{ 個 } r_k \text{ 相乘的總和} + \text{任取 } 4 \text{ 個 } r_k \text{ 相乘的總和} - \text{任取 } 6 \text{ 個 } r_k \text{ 相乘的總和} + \dots} \\ &= \frac{(k^{k-2} \times r) - ((k \times C_2^{k-1} - C_3^{k-1}) \times k^{k-4} \times r^3) + ((k \times C_4^{k-1} - C_5^{k-1}) \times k^{k-6} \times r^5) - \dots}{k^{k-1} - ((C_2^{k-1} - k \times C_1^{k-1}) \times k^{k-3} \times r^2) + ((C_4^{k-1} - k \times C_3^{k-1}) \times k^{k-5} \times r^4) - \dots} \end{aligned}$$

假設 k 值極大，則同一項內只要保留最高次方之 k 即可；

$$\begin{aligned}
\text{則原式} &\approx \frac{(k^{k-2} \times r) - ((\frac{k^3}{2!} - \frac{k^3}{3!}) \times k^{k-4} \times r^3) + ((\frac{k^5}{4!} - \frac{k^5}{5!}) \times k^{k-6} \times r^5) - \dots}{k^{k-1} - ((\frac{k^2}{2!} - \frac{k^2}{1!}) \times k^{k-3} \times r^2) + ((\frac{k^4}{4!} - \frac{k^4}{3!}) \times k^{k-5} \times r^4) - \dots} \\
&= \frac{(k^{k-2} \times r) - ((\frac{2}{3!}) \times k^{k-1} \times r^3) + ((\frac{4}{5!}) \times k^{k-1} \times r^5) - \dots}{k^{k-1} - ((\frac{-1}{2!}) \times k^{k-1} \times r^2) + ((\frac{-3}{4!}) \times k^{k-1} \times r^4) - \dots} \\
&= \frac{(\frac{1}{k} \times r) - (\frac{2}{3!} \times r^3) + (\frac{4}{5!} \times r^5) - \dots}{1 - (\frac{-1}{2!} \times r^2) + (\frac{-3}{4!} \times r^4) - \dots}
\end{aligned}$$

$$\text{令 } f_{nk}'(r) = (\frac{1}{k} \times r) - (\frac{2}{3!} \times r^3) + (\frac{4}{5!} \times r^5) - \dots, \quad f_{mk}'(r) = 1 - (\frac{-1}{2!} \times r^2) + (\frac{-3}{4!} \times r^4) - \dots$$

$$\because k \text{ 值極大}, \therefore \frac{1}{k} \rightarrow 0, \therefore f_{nk}'(r) = (\frac{1}{k} \times r) - (\frac{2}{3!} \times r^3) + (\frac{4}{5!} \times r^5) - \dots$$

$$\approx -(\frac{2}{3!} \times r^3) + (\frac{4}{5!} \times r^5) - \dots$$

$$\therefore \text{當 } k \text{ 值極大時，餘角角平分線斜率 } \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} \approx \frac{f_{nk}'(r)}{f_{mk}'(r)} < 0$$

$$\text{令 } f_{mk}''(r) = 1 + \left| \frac{1}{2!} \times r^2 \right| + \left| \frac{3}{4!} \times r^4 \right| + \left| \frac{5}{6!} \times r^6 \right| + \dots$$

$$< 1 + \left| \frac{1}{2} \times r^2 \right| + \left| \frac{1}{2^2} \times r^4 \right| + \left| \frac{1}{2^3} \times r^6 \right| + \dots$$

$$= 1 + \left| \frac{1}{2} \times r^2 \right| + \left| \frac{1}{2^2} \times r^4 \right| + \left| \frac{1}{2^3} \times r^6 \right| + \dots \rightarrow \frac{1}{1 - \left| \frac{1}{2} \times r^2 \right|}$$

$\therefore f_{mk}''(r)$ 經證明為絕對收斂， $\therefore f_{mk}'(r)$ 亦為收斂函數；同理， $f_n(r)$ 也是個收斂函數。

$\therefore$ 當 k 值極大時，餘角角平分線斜率 $\frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} \approx \frac{f_{nk}'(r)}{f_{mk}'(r)}$ 為收斂函數。故得證。

以下就 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ 公式中，令 $r=1$ ，再將 k 值以 2 到 9 代入，以

加權校正函數 $= \frac{(f_{nk}(r))^2 + (f_{mk}(r))^2}{k^{k-(f_{nk}(r))^0} \times 2 \times f_{mk}(r)}$ 來求 π 值，得數值列表如下：表(十四)

k 值	母角 $\frac{1}{k}$	母角數量 $(k-1)$	餘角 $\angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$	π 值
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	3.090909
3	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{7}$	3.115044
4	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{5}{99}$	3.116697
5	$\frac{1}{5}$	4	$-\frac{1}{239}$	3.133264
6	$\frac{1}{6}$	5	$-\frac{95}{2353}$	3.137833
7	$\frac{1}{7}$	6	$-\frac{1457}{22049}$	3.140949
8	$\frac{1}{8}$	7	$-\frac{266103}{3119881}$	3.143348
9	$\frac{1}{9}$	8	$-\frac{398399}{3976321}$	3.145216

π 值最準確值在 $k=7$ ，針對這點，有以下幾點討論：

- (i). π 值會受母角大小影響，母角越小就越準確，這一點由 $k=2$ 到 7 可獲得印證。
- (ii). π 值也會受餘角大小影響，餘角絕對值越小就越準確，這一點由 $k=2$ 到 5 也可獲得印證。
- (iii). 在 $k=6$ 以後，餘角絕對值不但越來越大，而且還是負值。餘角的負值本來會由母角來修正，但這種修正無法反映在 $f_{wk}(r)$ 的公式內，以至於母角縮小的好處，被餘角給抵消掉。

(iv). 依 P.31 的推論，當 k 值極大時，餘角角平分線斜率 $\frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} \approx \frac{f'_{nk}(r)}{f'_{mk}(r)}$ 為收

斂函數，所以餘角角度會逐漸趨向一個定值，餘角絕對值大小遲早會超過母角。這在加權校正法上，會出現一個固定的誤差。

解決(iv).的誤差的方法有四：

負的餘角另外計算，之後再減回來；→另外計算，也會出現另外的誤差。

修改等式，讓餘角 $\rightarrow 0$ ；

讓餘角誤差能自我校正；

找出餘角的特殊規律性再予以解開。

以下討論這三種方法。

iv. 餘角收斂定理(二)——餘角 $\frac{f_{nt}(r)}{f_{mt}(r)} \rightarrow 0$ ：

若將切割改為 $\angle r \rightarrow t \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nt}(r)}{f_{mt}(r)}$ ，且 $\frac{r}{k} > \frac{f_{nt}(r)}{f_{mt}(r)} \rightarrow 0$ ，則此公式將完全符合

多母角切割的要求。

定理二十三：餘角收斂定理(二)

令 $\angle r \rightarrow t \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nt}(r)}{f_{mt}(r)}$ ，且 $\frac{r}{k} > \frac{f_{nt}(r)}{f_{mt}(r)} \rightarrow 0$ ，則當 k 值極大時，

$$\text{加權校正函數 } f_{wt}(r) = \frac{(1+r^2)(k-t)}{t(1+r^2)-k} \dots \textcircled{1}$$

若 r 值極小時，則 $t \approx k \dots \textcircled{2}$

若 $r=1$ 時，則 $\frac{t}{k} = \frac{\pi}{4} \dots \textcircled{3}$

證明：

令 $\angle r \rightarrow t \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nt}(r)}{f_{mt}(r)}$ ，且 $\frac{r}{k} > \frac{f_{nt}(r)}{f_{mt}(r)} \rightarrow 0$ ， k 值極大，則加權校正函數：

$$\begin{aligned}
f_{wt}(r) &= \frac{\text{外切縮小面積}}{\text{內接增加面積}} \approx \frac{r - \sum \frac{r}{k}}{\left(\sum \frac{r}{k}\right) - \frac{r}{1+r^2}} = \frac{r - \frac{tr}{k}}{\frac{tr}{k} - \frac{r}{1+r^2}} \\
&= \frac{\frac{k-t}{k}}{\frac{kt}{k^2+r^2} - \frac{1}{1+r^2}} \\
&= \frac{(k-t)(k^2+r^2)(1+r^2)}{tk^2(1+r^2) - k \times (k^2+r^2)} \approx \frac{k^2(k-t)(1+r^2)}{tk^2(1+r^2) - k^3} = \frac{(k-t)(1+r^2)}{t(1+r^2) - k} \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

∴ 依照預備定理(五)， r 值極小時 $f_{wt}(r) \rightarrow \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore \frac{(k-t)(1+r^2)}{t(1+r^2) - k} \approx \frac{1}{2}, \quad 2k - 2t \approx t - k, \quad t \approx k \dots \textcircled{2}$$

$$\text{若 } r=1 \text{ 時，則 } f_{wt}(1) = \frac{(k-t)(1+1)}{t(1+1) - k} = \frac{2(k-t)}{2t-k}$$

$$\therefore \text{依照定義，} r=1 \text{ 時 } f_{wt}(r) = \frac{4-\pi}{\pi-2}, \quad \therefore \frac{2(k-t)}{2t-k} = \frac{4-\pi}{\pi-2}, \quad \frac{t}{k} = \frac{\pi}{4} \dots \textcircled{3}$$

可得知，當切割方法不同，或角度大小不同，所得到的 $f_w(r)$ 就會不同。

v. 餘角收斂定理(三)——餘角自我校正：

定理二十四：餘角收斂定理(三)

令 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，且 $\left| \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} \right| = h(r)$ ，則當 k 值極大時，

$$\arctan r \approx r - h(r) + h(h(r)) - h(h(h(r))) + h(h(h(h(r)))) \dots$$

證明：

∴ 當 k 值極大時， $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ 其中的餘角角平分線斜率

$\frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ 會逼近一個定值 $\frac{f_{nk}'(1)}{f_{mk}'(1)}$ 。令 $r=1$ ，則此定值 $\arctan \frac{f_{nk}'(1)}{f_{mk}'(1)}$

$\approx \arctan 1 - (k-1) \times \arctan \frac{r}{k} \approx \frac{\pi}{4} - 1$ ，是負值。 $\therefore$ 可把餘角看成，單位圓中 $\angle 1$ 開

展成弧長 1 之後，需要再修正回來的誤差值。

令 $\left| \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} \right| = h(r)$ ， $\therefore$ 當 k 值極大時， $\arctan r \rightarrow (k-1) \times \arctan \frac{r}{k} + \arctan \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$

$\approx r - \arctan h(r)$ ，同理， $\arctan h(r) \rightarrow (k-1) \times \arctan \frac{h(r)}{k} - \arctan h(h(r))$

$\approx h(r) - \arctan h(h(r))$ ， $\therefore \arctan r \approx r - \arctan h(r) \approx r - h(r) + \arctan h(h(r))$

$\therefore$ 依此類推，可得 $\arctan r \approx r - h(r) + h(h(r)) - h(h(h(r))) + h(h(h(h(r)))) \dots$ ，故得證。

vi. 餘角收斂定理(四)——利用餘角的規律性：

$$\because \text{已知 } \frac{\pi}{4} = 1 + \angle \frac{f_{nk}'(1)}{f_{mk}'(1)}, \quad \frac{f_{nk}'(1)}{f_{mk}'(1)} = - \frac{\frac{2}{3!} - \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} - \frac{8}{9!} + \frac{10}{11!} - \dots}{1 + \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} + \frac{5}{6!} - \frac{7}{8!} + \dots}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} = 1 + \angle \frac{f_{nk}'(1)}{f_{mk}'(1)} \approx 1 + \frac{-\frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} - \frac{6}{7!} + \dots}{1 + \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} + \dots}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3} \times (\frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} + \dots) - (-\frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} - \dots)}{1 + \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} + \dots}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{3} \times (-\frac{3}{4!} + \dots) - (\frac{6}{7!} - \dots)}{1 + \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} + \dots}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times (-\frac{3}{4!} + \dots) - (\frac{6}{7!} - \dots)}{1 + \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} + \dots} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{-\frac{1}{5} \times (\frac{1}{2!} - \dots) + \frac{1}{3} \times (-\frac{3}{4!} + \dots) - (\frac{6}{7!} - \dots)}{1 + \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} + \dots} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{-\frac{1}{10} + \frac{1}{24} + \frac{1}{840} - \frac{1}{5} \times (-\frac{3}{4!} + \dots) + \frac{1}{3} \times (\frac{5}{6!} - \dots) - (-\frac{8}{9!} + \dots)}{1 + \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} + \frac{5}{6!} - \dots} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{-\frac{1}{7} - \frac{1}{5} \times (-\frac{3}{4!} + \dots) + \frac{1}{3} \times (\frac{5}{6!} - \dots) - (-\frac{8}{9!} + \dots)}{1 + \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} + \frac{5}{6!} - \dots} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{\frac{1}{7} \times (\frac{1}{2!} - \dots) - \frac{1}{5} \times (-\frac{3}{4!} + \dots) + \frac{1}{3} \times (\frac{5}{6!} - \dots) - (-\frac{8}{9!} + \dots)}{1 + \frac{1}{2!} - \frac{3}{4!} + \frac{5}{6!} - \dots}, \text{此即萊布}
\end{aligned}$$

尼茲公式。

以上是令 $r=1$ 的推論結果，假如直接以 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}'(r)}{f_{mk}'(r)}$ 來進行

計算：

$$\begin{aligned}
&\text{當 } k \text{ 值極大時， } \angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}'(r)}{f_{mk}'(r)} \\
&\approx r - \frac{\frac{2}{3!}r^3 - \frac{4}{5!}r^5 + \frac{6}{7!}r^7 - \frac{8}{9!}r^9 + \frac{10}{11!}r^{11} - \dots}{1 + \frac{1}{2!}r^2 - \frac{3}{4!}r^4 + \frac{5}{6!}r^6 - \frac{7}{8!}r^8 + \dots} \\
&= r - \frac{1}{3}r^3 + \frac{\frac{1}{3}r^3 \times (\frac{1}{2!}r^2 - \frac{3}{4!}r^4 + \dots) - (-\frac{4}{5!}r^5 + \frac{6}{7!}r^7 - \dots)}{1 + \frac{1}{2!}r^2 - \frac{3}{4!}r^4 + \dots} \\
&= r - \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{5}r^5 + \frac{-\frac{1}{5}r^5 \times (\frac{1}{2!}r^2 - \dots) + \frac{1}{3}r^3 \times (-\frac{3}{4!}r^4 + \dots) - (\frac{6}{7!}r^7 - \dots)}{1 + \frac{1}{2!}r^2 - \frac{3}{4!}r^4 + \dots}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r - \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{5}r^5 - \frac{1}{7}r^7 \\
&\quad + \frac{\frac{1}{7}r^7 \times (\frac{1}{2}r^2 - \dots) - \frac{1}{5}r^5 - (\frac{3}{4}r^4 + \dots)\frac{1}{3}r^3 - \frac{5}{6}r^6 - \dots}{1 + \frac{1}{2}r^2 - \frac{3}{4}r^4 + \frac{5}{6}r^6 - \dots} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times r^{2n+1}}{2n+1} = \arctan r, \text{ 這就是 1671 年格里哥利發現的展開式。}
\end{aligned}$$

如此，泰勒展開式交錯修正的概念，一樣可以出現在

$$\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} \text{ 之中。}$$

定理二十五：餘角收斂定理(四)

令 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，則當 k 值極大時，

$$\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times r^{2n+1}}{2n+1}$$

vii. 母角總和定理——利用母角的規律性：

在 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ 式中，當 k 值極大時，餘角可收斂，當然母角也可收斂。

在此探討母角的規律性。

$$\text{依定理十一，} (k-1) \times \angle \frac{r}{k} = \frac{C_1^{k-1} \frac{r}{k} - C_3^{k-1} (\frac{r}{k})^3 + C_5^{k-1} (\frac{r}{k})^5 - \dots}{1 - C_2^{k-1} (\frac{r}{k})^2 + C_4^{k-1} (\frac{r}{k})^4 - \dots}, \text{ 上下都很像}$$

$(1 - \frac{r}{k})^{k-1}$ 的展開。

但是上下都各缺了偶數項與奇數項，所以改設計為：

$$(1 - \frac{r}{k})^{k-1} + (1 + \frac{r}{k})^{k-1} = 2 + 2C_2^{k-1} (\frac{r}{k})^2 + 2C_4^{k-1} (\frac{r}{k})^4 + \dots$$

與分母比較起來，卻發現正負號不對，所以再改設計為：

$(1 - \frac{ir}{k})^{k-1} + (1 + \frac{ir}{k})^{k-1} = 2 - 2C_2^{k-1}(\frac{r}{k})^2 + 2C_4^{k-1}(\frac{r}{k})^4 - \dots$ ，再 $\times \frac{1}{2}$ 即為分母；

同理， $((1 - \frac{ir}{k})^{k-1} - (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}) \times i = 2C_1^{k-1}\frac{r}{k} - 2C_3^{k-1}(\frac{r}{k})^3 + 2C_5^{k-1}(\frac{r}{k})^5 - \dots$ ，再 $\times \frac{1}{2}$ 即為分子。

$$\therefore (k-1) \times \angle \frac{r}{k} = \angle \frac{C_1^{k-1}\frac{r}{k} - C_3^{k-1}(\frac{r}{k})^3 + C_5^{k-1}(\frac{r}{k})^5 - \dots}{1 - C_2^{k-1}(\frac{r}{k})^2 + C_4^{k-1}(\frac{r}{k})^4 - \dots}$$

$$= \angle \frac{((1 - \frac{ir}{k})^{k-1} - (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}) \times i}{(1 - \frac{ir}{k})^{k-1} + (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}}$$

$$\therefore \text{依定理五，} \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} = \angle r - (k-1) \times \angle \frac{r}{k} = \angle r - \angle \frac{((1 - \frac{ir}{k})^{k-1} - (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}) \times i}{(1 - \frac{ir}{k})^{k-1} + (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}}$$

$$= \angle \frac{((1 - \frac{ir}{k})^{k-1} + (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}) \times r - ((1 - \frac{ir}{k})^{k-1} - (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}) \times i}{(1 - \frac{ir}{k})^{k-1} + (1 + \frac{ir}{k})^{k-1} - ((1 - \frac{ir}{k})^{k-1} - (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}) \times ir}$$

定理二十六：母角總和定理

令 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，則當 k 值極大時，

$$(k-1) \times \angle \frac{r}{k} = \angle \frac{((1 - \frac{ir}{k})^{k-1} - (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}) \times i}{(1 - \frac{ir}{k})^{k-1} + (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}} \dots \textcircled{1}$$

$$\angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} = \angle \frac{((1 - \frac{ir}{k})^{k-1} + (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}) \times r - ((1 - \frac{ir}{k})^{k-1} - (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}) \times i}{(1 - \frac{ir}{k})^{k-1} + (1 + \frac{ir}{k})^{k-1} - ((1 - \frac{ir}{k})^{k-1} - (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}) \times ir} \dots \textcircled{2}$$

五、 研究成果

綜合整個研究，我們得到下述新的定理：
下標為研究目的

定理六： 令 $\angle A$ 之角平分線斜率為 r_A ， $\angle B$ 之角平分線斜率為 r_B ， $\angle C$ 之角平分線斜率為

r_C ，若 $\angle A = \angle B + \angle C$ ，且 r_A 、 r_B 為有理數，則 r_C 亦為有理數。

定理七： 任取 $\theta \in A$ ，滿足 $\theta = \frac{360}{d}$ ， $d \geq 4$ ；
目的二

則存在一遞減數列 $\{S_k\}$ ，使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{\pi}{d}$ 。其中 $S_k = \sum_{t=1}^n T^{-1}(\theta_{(k,t)})$ ，
 $t = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

定理八： $\forall r \in Q, T(r) \rightarrow \theta \in A$ ，滿足 $\theta = \frac{360}{d}$ ， $d \geq 4$ ；則存在一遞減數列 $\{S_k\}$ ，
目的二

使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{\pi}{d}$ 。其中 $S_k = \sum_{t=1}^n T^{-1}(\theta_{(k,t)}) = \sum_{t=1}^n r_{(k,t)}$ ， $t = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

定理九： 取 $I = \{a_n \mid a_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\}$ ，則集合 I 為單位分數調和數列所成的集合。
目的二

若依有序的方式依次給定 a_n ，並取 a_{n+1} ，則 $\angle a_n \rightarrow \angle a_{n+1} + \angle a_{n(n+1)+1}$ 。

定理十： 令離第 K 代最近的前面一個併入母角的餘角分母為 $t \times (t-1) + 1$ ，
目的二

離第 t 代最近的前面一個併入母角的餘角分母為 $s \times (s-1) + 1$ ，

第 s 代累計數為 N_s ，第 t 代累計數為 N_t ，則第 K 代 π 近似值 =

$$4 \times \left(\left(\frac{1}{K} \times N_t \right) + \left(\frac{1}{t \times (t+1) + 1} \times N_s \right) + \left(\frac{1}{(t+1) \times (t+2) + 1} \times N_s \right) + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{s \times (s+1) \times (s \times (s+1) + 1) + 1} \times N_s \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{(s \times (s+1) + 1) \times (s \times (s+1) + 2) + 1} \times N_{s+1} \right) + \dots \\
& + \left(\frac{1}{t \times (t-1) \times (t \times (t-1) + 1) + 1} \times N_{t-1} \right) \\
& + \left(\frac{1}{(t \times (t-1) + 1) \times (t \times (t-1) + 2) + 1} \times N_t \right) + \dots + \left(\frac{1}{K \times (K-1) + 1} \times N_t \right)
\end{aligned}$$

定理十一： 母角 r

目的三

$$= \frac{1 \text{ 個 } r_n \text{ 的總和} - \text{任取 3 個 } r_n \text{ 相乘的總和} + \text{任取 5 個 } r_n \text{ 相乘的總和} - \dots}{1 - \text{任取 2 個 } r_n \text{ 相乘的總和} + \text{任取 4 個 } r_n \text{ 相乘的總和} - \text{任取 6 個 } r_n \text{ 相乘的總和} + \dots}$$

定理十二： 令原母角 $r_o = \frac{n_o}{m_o}$ ，第二代母角 $r = \frac{n}{m}$ ，餘角 $r_r = \frac{n_r}{m_r}$ ，所有的 m 、 n 都

目的三

是自然數，且 $n_o = 1$ 、 $n = 1$ 。則 當 $r = \frac{n}{m}$ 為二等分母角，且餘角 r_r

值為最小時， $m = 2m_o + 1 \dots \textcircled{1}$

當 $r = \frac{n}{m}$ 為三等分母角，且餘角 r_r 值為最小時， $m = 3m_o + 1 \dots \textcircled{2}$

定理十三： 如圖(十)，在單位圓上，令外切箏形面積為 S ，內接△面積為 T ，扇

目的三

$$\text{形面積為 } R \text{；則 } \frac{2S + (1+r^2)T}{3+r^2} < R < \frac{(2+r^2) \times S + (1+r^2) \times T}{3+2r^2} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{若 } r \rightarrow 0 \text{ 時， } R \rightarrow \frac{2S+T}{3} \dots \textcircled{2}$$

定理十四： 單位圓中，令 $r = \frac{n}{m}$ 為經不對稱切割後之扇形角平分線斜率，且第 k 代

目的三

有 i_k 項 r ，其係數為 $c_{(k,t)}$ ，則：

$$\textcircled{1} \text{ 外切多邊形面積法： } \pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} r_{(k,t)} \text{；}$$

$$\textcircled{2} \text{ 內接多邊形面積法： } \pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} \frac{r_{(k,t)}}{1+r_{(k,t)}^2} \text{；}$$

$$\textcircled{3} \text{ 加權校正上限法： } \pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} \frac{r_{(k,t)} \times (3+r_{(k,t)}^2)}{3+2r_{(k,t)}^2} \text{；}$$

④加權校正下限法： $\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} \frac{3r_{(k,t)}}{3+r_{(k,t)}^2}$ ；

⑤內接多邊形面積法＜下限法＜ π 值＜上限法＜加權校正逼近法＜外切多邊形面積法

定理十五： 如圖(十一)，若不對稱切割每代以一分為二的方式切割， k 為切割的目的四

世代數，若 $k \rightarrow \infty$ ，則 $\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} \frac{r_{(k,t)}}{3} (2 + \frac{1}{1+r_{(k,t)}^2})$

定理十六： 如圖(十一)，若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，第 k 代 π 值區間為目的四

$$4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} (\frac{3r_{(k,t)}}{3+r_{(k,t)}^2}) < \pi < 4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} (\frac{r_{(k,t)} \times (3+r_{(k,t)}^2)}{3+2r_{(k,t)}^2})$$

定理十七： 令第 k 代 $\angle A_k = \angle B_k + \angle C_k$ ， $\angle A_k$ 、 $\angle B_k$ 、 $\angle C_k$ 之角平分線斜率各為目的五

$$r_{A_k} = \frac{n_{A_k}}{m_{A_k}}, r_{B_k} = \frac{1}{m_{B_k}}, r_{C_k} = \frac{n_{C_k}}{m_{C_k}}, \angle C_k = \angle A_{k+1}; \{m_{A_k}, n_{A_k}, m_{B_k}, m_{C_k}$$

$$, n_{C_k}, k\} \subset N, (m_{A_k}, n_{A_k}) = 1, (m_{C_k}, n_{C_k}) = 1;$$

$$\text{若 } \frac{m_{A_k}}{n_{A_k}} < m_{B_k} < 1 + \frac{m_{A_k}}{n_{A_k}}, \text{ 則 } n_{C_k} \text{ 為一遞減且收斂至1之數列...①}$$

$$\text{若 } n_{C_t} = 1, \text{ 則 } \angle \frac{n_{A_1}}{m_{A_1}} \rightarrow \angle \frac{1}{m_{B_1}} + \angle \frac{1}{m_{B_2}} + \angle \frac{1}{m_{B_3}} \dots + \angle \frac{1}{m_{B_t}} + \angle \frac{1}{m_{C_t}} \dots \text{②}$$

定理十八： 若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，第 k 目的五

$$\text{代 } \pi \text{ 值為 } \pi = 4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} (\frac{12r_{(k,t)} + 5r_{(k,t)}^3}{12 + 9r_{(k,t)}^2 + r_{(k,t)}^4})$$

定理十九： 若 $\angle r \rightarrow (k - (f_{nk}(r))^0) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，則加權校正數目的五

$$= \frac{(f_{nk}(r))^2 + (f_{mk}(r))^2}{k^{k-(f_{nk}(r))^0} \times 2 \times f_{mk}(r)}; \text{ 其中 } f_{mk}(r)、f_{nk}(r) \text{ 的係數皆為整數，}$$

$$k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

定理二十： 若 $\angle r \rightarrow (k - (f_{nk}(r))^0) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，當 k 值極大而 r 值極小時，
目的五

$$\text{加權校正數} \approx \frac{2+r^2}{4}。$$

定理二十一： 若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，第
目的五

$$k \text{ 代 } \pi \text{ 值為 } \pi = 4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} \frac{r_{(k,t)} \times (6 + 5r_{(k,t)}^2)}{(1 + r_{(k,t)}^2)(6 + r_{(k,t)}^2)}$$

定理二十二： 令 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，當 k 值極大時，餘角 $\frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ 會趨
目的五

近一定值。

定理二十三： 令 $\angle r \rightarrow t \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nt}(r)}{f_{mt}(r)}$ ，且 $\frac{r}{k} > \frac{f_{nt}(r)}{f_{mt}(r)} \rightarrow 0$ ，則當 k 值極大時，
目的五

$$\text{加權校正函數 } f_{wt}(r) = \frac{(1+r^2)(k-t)}{t(1+r^2)-k} \dots \textcircled{1}$$

若 r 值極小時，則 $t \approx k \dots \textcircled{2}$ ，若 $r=1$ 時，則 $\frac{t}{k} = \frac{\pi}{4} \dots \textcircled{3}$

定理二十四： 令 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，且 $\left| \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} \right| = h(r)$ ，則當 k 值極大
目的五

時， $\arctan r \approx r - h(r) + h(h(r)) - h(h(h(r))) + h(h(h(h(r)))) \dots$

定理二十五： 令 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，則當 k 值極大時，
目的五

$$\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times r^{2n+1}}{2n+1}$$

定理二十六： 令 $\angle r \rightarrow (k-1) \times \angle \frac{r}{k} + \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)}$ ，則當 k 值極大時，
目的五

$$(k-1) \times \angle \frac{r}{k} = \angle \frac{((1 - \frac{ir}{k})^{k-1} - (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}) \times i}{(1 - \frac{ir}{k})^{k-1} + (1 + \frac{ir}{k})^{k-1}} \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} & \angle \frac{f_{nk}(r)}{f_{mk}(r)} \\ &= \angle \frac{((1-\frac{ir}{k})^{k-1} + (1+\frac{ir}{k})^{k-1}) \times r - ((1-\frac{ir}{k})^{k-1} - (1+\frac{ir}{k})^{k-1}) \times i}{(1-\frac{ir}{k})^{k-1} + (1+\frac{ir}{k})^{k-1} - ((1-\frac{ir}{k})^{k-1} - (1+\frac{ir}{k})^{k-1}) \times ir} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

六、 討論

(一). 不對稱切割法比較——比較本文各類切割所求得的 π 值，來討論其逼近

速度。

比較表(二)、表(四)、表(五)、表(八)、表(九)、表(十)：

1. 餘角控制在最小時，單次分割數越大，逼近就越快，精確度就越高：

表(九)分割到第 8 代，準確度達小數點以下第 9 位；表(十)分割到第 6 代，準確度已經達到小數點以下第 10 位。表(九)七次運算達第 9 位，平均每次運算逼近 $\frac{9}{7}$ 位 ≈ 1.285714 位；表(十)五次運算達第 10 位，平均每次運算逼近 $\frac{10}{5}$ 位 = 2 位。

2. 當母角角度相同時，角的分割數量越大，精確度越高：

表(二)第 7 代 $\angle \frac{1}{7} \times 3 + \angle \frac{1}{13} \times 2 + \angle \frac{1}{21} \times 2 + \angle \frac{1}{31} \times 2 + \angle \frac{1}{43} \times 2$
 $\rightarrow 3.1416882947$

把 90° 角分割成 5 種角度 11 個部分；

表(四)第 3 代 $\angle \frac{1}{7} \times 5 + \angle \frac{3}{79} \times 2 \rightarrow 3.1417468837$

把 90° 角分割成 2 種角度 7 個部分。

前者精確度較高。

3. 當角的分割數量相同時，母角越小者，精確度越高：

$$\text{表(二)第 5 代 } \angle \frac{1}{5} \times 2 + \angle \frac{1}{7} + \angle \frac{1}{13} \times 2 + \angle \frac{1}{21} \times 2 \rightarrow 3.1419492925$$

把 90° 角分割成 4 種角度 7 個部分，最大角 $\angle \frac{1}{5}$ 。

$$\text{表(四)第 3 代 } \angle \frac{1}{7} \times 5 + \angle \frac{3}{79} \times 2 \rightarrow 3.1417468837$$

把 90° 角分割成 2 種角度 7 個部分，最大角 $\angle \frac{1}{7}$ 。後者精確度較高。

4. 加上加權校正法可提高的精確度，約比只用外切法增加一倍的位數：

若與 3.1415926536 相減，再觀察小數點以下 0 的位數來做比較，

表(八)第 8 代外切法有 2 個 0，加權校正法有 4 個 0；

表(八)第 50 代外切法有 3 個 0，加權校正法有 7 個 0；

表(九)第 8 代外切法有 4 個 0，加權校正法有 9 個 0；

表(十)第 6 代外切法有 5 個 0，加權校正法有 10 個 0。

可知，加上加權校正法，確實可大幅提高精確度。

本文所舉的簡單切割、多角切割、單母角與多母角切割，都是為了研究效率而嘗試的設計。以不同的切割法來切割，將出現不同的逼近速度。

(二). 不對稱切割與幾何法效率比較：

1. 等分切割法之無理數 V.S. 不對稱切割法之有理數：

阿基米德(Archimedes, 287BC – 212BC)用內接外切正 96 邊形得 π 介於

$$3\frac{1}{7} \sim 3\frac{10}{71} \text{ 之間。}$$

劉徽(263 年)只用內接多邊形的「割圓術」計算到正 3072 邊形面積得

$$\pi = \frac{3927}{1250} = 3.1416。$$

祖沖之(466 年)以劉徽的方法，計算到內接正 24576 邊形，得出

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927 \quad \text{以及密率} \frac{355}{113}。$$

荷蘭魯道爾夫萬科倫(Ludolph Van Ceulen, 1540 - 1610 年) 算了 40 年計算到正 2^{62} 邊形，得出了 35 個小數位的 π 值。

以上為較知名的幾何法時期的成就，共同的特點就是都採用等分切割，就會遇到開根號。

用韋達(Francois Viète)公式來表現半徑為 1 之圓內接正 2^n ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$) 邊形的面積 S_{2^n} ：

$$S_4 = 2, \quad S_8 = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}}, \quad S_{16} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}},$$

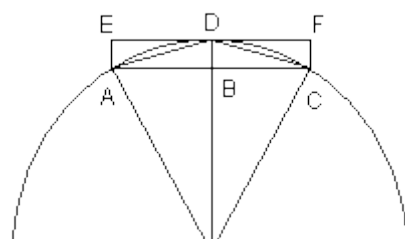
$$S_{32} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}}}$$

S_8 開了一次根號， S_{16} 開了兩次根號， S_{32} 開了三次根號。依此類推， S_{2^n} 將會開 $n-2$ 個根號。若要把精確度往下再推進一位，所有前面曾開過的根號，都還要同步再繼續算下去...這是很龐大的計算量。祖沖之已經算到

$24576 = 3 \times 2^{13}$ 邊形，只能準確到小數點以下第七位，**等分切割的效率會被開根號完全侵蝕掉**。以本文的三等分母角來算，五次推算就能準確到第五位，加上加權校正法還能準確到第十位，而且總共也只分割成 1632 邊形而已，效率明顯高多了。實際計算上也不用真正去分割，只要在有理數之下做運算即可。

2. 劉徽「割圓術」V.S.加權比例常數：

割圓術的誤差：劉徽注意到可以用『出入相補』的面積逼近法，以圖(十三)來做計算，



原始外切內接的面積差： $\frac{n}{m} - \frac{mn}{m^2 + n^2} \approx \frac{n^3}{m^3} \dots \textcircled{1}$ ；

再一次分割內接所增加的面積 $\approx \frac{n^3}{2m^3}$ (即 $\triangle ACD$)... $\textcircled{2}$

以 $\textcircled{2}$ 為基礎，割圓術再往外增加的面積 $\approx \frac{n^3}{2m^3}$ ，

$\therefore \triangle AOC$ 之外總共增加了 $\approx \frac{n^3}{m^3}$ (即長方形 $ACFE$)... $\textcircled{3}$

由 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ 可知，割圓術估計圓面積應介於內接多邊形加上 $\frac{n^3}{m^3}$ 與加上 $\frac{n^3}{2m^3}$ 之間，

若取中間值則為 $(\frac{n^3}{2m^3} + \frac{n^3}{m^3}) \times \frac{1}{2} = \frac{3n^3}{4m^3} = \frac{3}{4} \times$ 原始外切內接的面積差；事實上劉徽只留下模糊的 π 值區間，他一直沒真正算出該值的落點，以至於無法有效縮小誤差範圍。

而本文加權比例常數，以內接為基準，與圓面積之差 $\approx (\frac{\frac{n^3}{2m^3}}{\frac{n^3}{2m^3} + \frac{n^3}{4m^3}}) \times \frac{n^3}{m^3}$

$$= \frac{2n^3}{3m^3} = \frac{2}{3} \times \text{原始外切內接的面積差。}$$

觀察所有外切、內接的數據，再與已知

圓周率做比較，可以知道 $\frac{2}{3}$ 才是正解。

(三). 梅欽類公式與不對稱切割法比較：

1. 梅欽類公式可能不易讓人理解其幾何意義：

就本文所舉的三個公式中，由兩處可以推論，梅欽類公式不易讓人理解其幾何意義。

梅欽(Machin) 1706 年所提出的： $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$

高野喜久雄(Kikuo Takano) 1982 年提出的：

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{49} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} + 12 \arctan \frac{1}{110443}$$

黃見利(Hwang Chien-Lih) 2003 年提出的：

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = & 183 \arctan \frac{1}{239} + 32 \arctan \frac{1}{1023} - 68 \arctan \frac{1}{5832} + 12 \arctan \frac{1}{113021} \\ & - 100 \arctan \frac{1}{6826318} - 12 \arctan \frac{1}{33366019650} + 12 \arctan \frac{1}{43599522992503626068} \end{aligned}$$

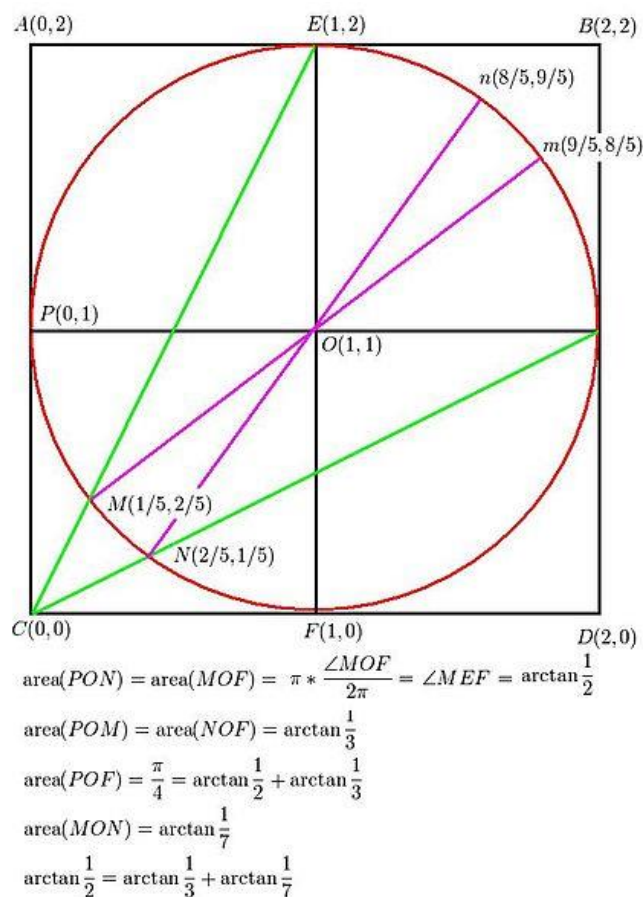
(1). $\arctan \frac{1}{239}$ ：這個角度最早見於 1706 年的梅欽公式，此後經常出現，並

沿用至今。究其原因，有兩個可能性，一者可能為梅欽類公式的幾何意義不易讓人一目了然，所以大家都不敢另起爐灶，只會蕭規曹隨地沿用；另一個原因可能是，這個角度已經被用了幾百年，級數計算後的數值都很清楚了，省得重新計算。

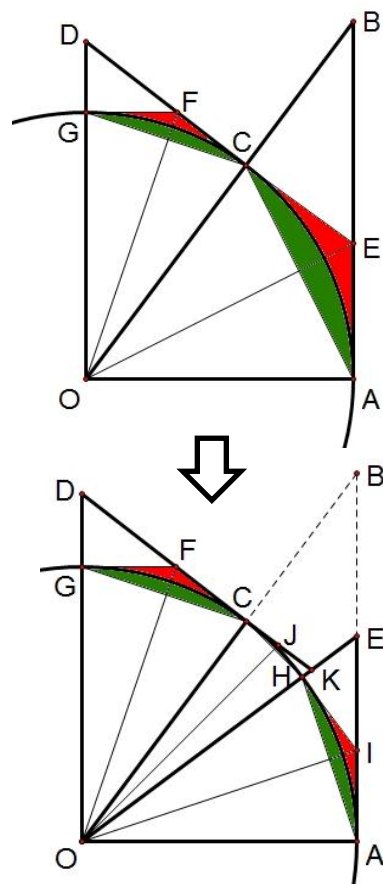
(2). **數字與數列**：人類文明的發展過程中，經常可以看到對某些數字或數列的執著。前者如十進位或十二進位，後者如等差、等比、或調和數列。就好比說本文的單母角切割，每一代母角就會形成很漂亮、很有規律的調和數列。但是為什麼歷史上的梅欽類公式中，絲毫沒有這一類影子？英國大數學家戈弗雷·哈羅德·哈代(Godfrey Harold Hardy)曾說過：「美，是首要的標準；醜陋的數學在世界上是找不到永久的容身之地的！」曾有人認為，假如這世界是上帝創造的，那麼祂一定會用美麗的數學公式來創造。梅欽類公式之所以會失去數學的美感，我的猜測是，大家都只以三角函數的觀點來看它，卻忽略了它在幾何上的意義。

以上兩點，雖純屬推測，但梅欽公式發展至今已經四百年，確實還一直存在上述兩個疑點。本文的推論是：梅欽類公式的幾何意義不易讓人理解。

2. 梅欽類公式與不對稱切割的幾何圖示：



圖(十六-1)



圖(十六-2)

圖(十六-1)取自英文維基百科之 Machin-like formula，看得出該圖是經過特別設計的，只能解此一題，而且設計上很不容易。

圖(十六-2)則為本文的切割方法。可以很明顯地看出，切割運算只是自然的結果。

3. 最具美感與效率的切割法——定理十：單母角切割法

雖然多母角切割看似逼近速度極快，但我還是認為最優秀的切割法是單母角切割法。

(1). 每一代母角倒數都呈等差為1的調和數列：數字的規律性，除了會呈現一種特定的簡潔美感之外，還有方便推算的好處。因為等差為1，所以所有的餘角，都可在數代之後再併入母角，不必另外進行切割計算。

而且藉由累計數的運用，還可快速推算數代之後的母角數量，可跳著算而不必每代都算。

- (2). 每一代母角與餘角的分母位數差不會差太多：單母角切割法中，若某代母角分母為 k 位數，則該代餘角分母最大也不會超過 $2k$ 位數。大小不至於差太多，這在之後換算弧長或面積時，有極大的優勢。舉 $P.40$ 黃見利的梅欽類公式為例，最大角 $\arctan \frac{1}{239}$ 分母為三位數，最小角

$$\arctan \frac{1}{43599522992503626068} \text{ 分母為二十位數，當代入各類展開式，}$$

需進行二次方、三次方等等以上的運算時，二十位數的難度絕對遠大於單母角的六位數。當母角切割縮小時，不會隨隨便便就出現天文數字分母的餘角，這才是好的切割方法。

(四). $\arctan X$ 級數與加權校正法比較：

1. $\arctan X$ 級數與加權校正法用途相近：

雖然 $\arctan$ 級數計算所得為弧長，加權校正法計算所得為扇形面積，但是在單位圓且使用角平分線斜率 r 的情況下，這二者的數值是相等的。

舉尤拉的 $\arctan$ 級數與定理二十一為例：

$$\arctan r = \frac{r}{1+r^2} \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{r^2}{1+r^2} \right) + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \left(\frac{r^2}{1+r^2} \right)^2 + \dots \right) \approx \frac{r \times (6+5r^2)}{(1+r^2)(6+r^2)}, \text{ 二者}$$

用途相近。

2. 最簡潔、最有效率的加權校正法——定理二十一： π 值逼近定理（第三代）

尤拉的 $\arctan$ 級數即使累加前三項，精確度還不及定理二十一。後者使用的

加權校正數 $\frac{2+r^2}{4}$ ，不但有幾何理論依據，而且是經過簡化的，所以雖然

計算式很精簡，但精確度卻很高，可大幅節省計算量。單單使用不對稱切割所得到的初步 π 值若有 k 位數的準確度，那麼加上定理二十一，只需經過再一次運算就能越過 $2k$ 位數。

3. 加權校正函數之延伸研究：

(1). 加權校正法函數化的必要性：

大小不同的角度，外切與內接對圓面積的差比值一定不同，所以需要函數化。

$$\text{即，加權校正函數 } f_w(r) = \frac{\text{外切之面積差 } f_N(r)}{\text{內接之面積差 } f_M(r)} = \frac{r - \sum_{t=1}^s r_t}{\left(\sum_{t=1}^s \frac{r_t}{1+r_t^2}\right) - \frac{r}{1+r^2}}$$

(2). 加權校正函數的型態，隨切割規則不同而變化：

$$P.27 \text{ 加權校正函數 } f_{wk}(r) = \frac{(f_{nk}(r))^2 + (f_{mk}(r))^2}{k^{k-1} \times 2 \times f_{mk}(r)}, \text{ 與 } P.33 \text{ } f_{wt}(r)$$

$$= \frac{(1+r^2)(k-t)}{t(1+r^2)-k} \text{ 的型態截然不同。不同的切割方式，造就不同的加權}$$

校正函數，這與 P.40 對逼近速度的討論一樣。

(3). 當餘角角度為負值，會影響 $f_w(r)$ 的準確度：

P.32 的觀察結果顯示，負角太大會干擾 $f_w(r)$ 的準確度。定理二十三到二十五曾就負角來研究可能的解決方案，卻發展往不同的方向去。其實 P.31 定理二十二推論過程，已可為這個問題提供不錯的解答方法：

$$\text{餘角} = \angle \frac{f_{nk}'(r)}{f_{mk}'(r)}, \text{ 當 } r \leq 1 \text{ 時，餘角分母}$$

$$f_{mk}'(r) = 1 - \left(\frac{-1}{2!} \times r^2\right) + \left(\frac{-3}{4!} \times r^4\right) - \dots > 0$$

所以若想控制讓餘角 ≥ 0 ，關鍵就在分子

$$f_{nk}'(r) = \left(\frac{1}{k} \times r\right) - \left(\frac{2}{3!} \times r^3\right) + \left(\frac{4}{5!} \times r^5\right) - \dots$$

$$\text{取一項來看，} \frac{1}{k} \times r \geq 0, k \geq 0;$$

取二項來看， $(\frac{1}{k} \times r) - (\frac{2}{3!} \times r^3) \geq 0$ ， $kr^2 \leq 3$ ；

取三項來看， $(\frac{1}{k} \times r) - (\frac{2}{3!} \times r^3) + (\frac{4}{5!} \times r^5) \geq 0$ ， $kr^2(10 - r^2) \leq 30$ ；...

逐漸地，可以看到 k 、 r 之間的比例關係。

理論上， k 值越大，代表分割數越多，會越準確。

但在 $1 \geq r > 0$ 的範圍中，其實 k 值的大小，會受限於 r 值的大小，大約與 r^2 成反比，不可能像定理二十般設定在無限大，要不然餘角就會出現負值了。這可以解釋表(十四)的現象。

只要能巧妙地利用 k 、 r 之間的比例關係，透過加權校正函數的運用，就能快速地推演出適合該角度的加權校正數。

(4). 加權校正函數進一步發展，將可以出現冪級數型態，以計算 π 值或 $\arctan$ 值：

令加權校正函數 $f_w(r) = \frac{f_N(r)}{f_M(r)}$ ，則

$$\arctan r = \frac{r \times f_M(r) + \frac{r}{1+r^2} \times f_N(r)}{f_M(r) + f_N(r)}$$

當切割數極大時， $f_N(r)$ 與 $f_M(r)$ 將成為冪級數的累加，猶如泰勒展開式一般，得以計算出 $\arctan$ 值。

再代入 $\pi = 4 \times \frac{1 \times f_M(1) + \frac{1}{2} \times f_N(1)}{f_M(1) + f_N(1)}$ 即可，計算項數越多越精確，可能

可以不須再切割角度。

七、 結論

本研究以不對稱切割來證明了角度不但可以在純粹有理數的系統中運算，還能不脫離幾何法的直觀效果。在此簡便的運算系統中，讓研究目的最重要的加權校正概念——加權比例常數得到證明，並落實在 π 值的運算上。最後，還證明了可透過不對稱切割的多角切割法，來發展出函數化的加權校正法，得以改進原本的計算效率。就計算效率上的結論是，單母角切割法可藉規律性來進行隔代計算，而且切割後不易出現與母角分母相差太大的天文數字分母，是最理想的切割方法；而多角切割所發展出來的加權校正函數，可適應不同角度來做更精確的校正，非常具有發展潛力。當單母角切割到極小時，只需使用加權比例常數，就可增加一倍位數的準確度；而加權校正函數，則是為了適應比較大的角而發展的，這是兩個不同的方向，各為計算 π 值開啟了另一扇全新的門。

八、 參考資料

- 一、艾力克斯·貝洛斯Alex Bellos著，胡守仁譯，數字奇航，初版，台北市，時報文化，頁117~145：第四章「 π 的故事」，2012年。
- 二、袁小明，數學誕生的故事，三版，台北市，九章出版社，頁95~103：「圓周率的身世」，2002年。
- 三、徐祥，2007年，中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國中組數學科第三名『海倫家族三代同堂大蒐秘』，頁3。
- 四、張幼賢，國中二上數學課本，初版，翰林，頁94，畢氏定理，2012年。
- 五、楊媛甯，2006年，95年度國中學生獨立研究數學類成果發表第一名『直角三角形上子母關係研究與推展』，頁17~19。

六、余文卿，『關於圓周率 π 』。

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_13_3_05/index.html

七、維基百科，『圓周率』。

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9C%93%E5%91%A8%E7%8E%87>

八、數學資料庫，『圓周率 π 的歷史』。

http://db.math.ust.hk/articles/history_pi/c_history_pi.htm

九、Alan 的部落格，『圓周率 π 的計算歷程』。

<http://tw.myblog.yahoo.com/jw!ILShB2OQFQUwo8mH9P6MjsZNB2U-/article?mid=345>

十、Wikipedia•Machin-like formula•http://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula

感言

不對稱切割加上加權校正法，事實上就是先以幾何方法求得初步的數據，再以代數方法校正。發展這套方法，就國中數學所學，已經足夠，剩下的就是需要巧思。本文一開始只是由一個對畢氏數與有理數的偶然想法開始推演，沒想到到後來竟然快走進高等數學的領域，這真的是一趟奇妙的旅程！2011 年的新聞，日本圓周率達人近藤茂把 π 值推進到小數點以下第十兆位，在這種世界紀錄之前，本文的成就顯得相當地渺小。當然，追求那麼高位數的 π 值似乎已經不具實用價值，但我覺得那不一定是為了實用，因為科學的精神除了實事求是與精益求精之外，還會再加上一點科學人的浪漫——也就是這種浪漫情懷帶領我走上這趟追求 π 的奇妙旅程。感謝師長的指導，父母的支持，以及這一路上幫助過我的人。

附件

附件一

定理一：

給定一組畢式數 a 、 b 、 c ，滿足 $(a,b)=1$ ， $a^2+b^2=c^2$ 。設 b 為偶數，則必存在互質的兩正整數 m 、 n ，使得 $(a,b,c)=(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$ 。

證明：如圖(一)，令 $x, y \in N$ 。

令 $c = x + y$ ， $a = x - y$ ，且
 $c^2 = a^2 + b^2$ ，
則得

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + b^2 \dots\dots (*)$$

$$\text{故 } b^2 = 4xy。$$

$$\because (a,b)=1，$$

$\therefore (a,b)$ 存在(i) 二奇；

和(ii) 一奇一偶，兩種情形。

當 (a,b) 為二奇時，與 $b^2 = 4xy$ 矛盾；

當 (a,b) 為一奇一偶時，則 a 為奇數， b 為偶數。

$$\because c = x + y，a = x - y，\therefore x = \frac{c+a}{2}，y = \frac{c-a}{2}，\text{則 } c \text{ 必為奇數。}$$

設 $(a,c)=k$ ，且 $k \neq 1$ ，則 $k \mid (c^2 - a^2)$ ，則 $k \mid b^2$ ，則 $(a,b)=k$ ，矛盾，

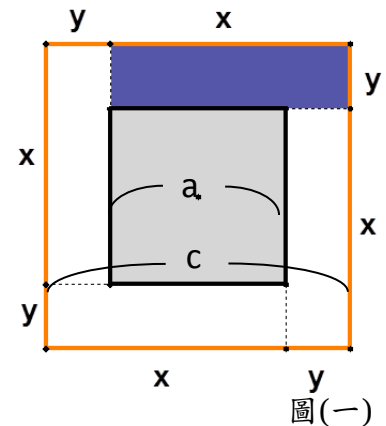
故 $(a,c)=1$ 。

設 $(x,y)=k$ ，則 $k \mid (x-y)$ ，且 $k \mid (x+y)$ ，則 $k \mid (a,c)$ ，矛盾，故 $(x,y)=1$ 。

$\because b^2 = 4xy$ ， $(x,y)=1$ ，則 x 、 y 必為完全平方數，

令 $x = m^2$ ， $y = n^2$ ，代入(*)

即可得出 $(a,b,c)=(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$ ，故得證。



附件二

定理二：

給定一組畢氏數，滿足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，其中 $(a, b) = 1$ ，

若 $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ 則滿足通式解之正整數 m 、 n 分別為

$$m = \sqrt{\frac{c+a}{2}}, \quad n = \sqrt{\frac{c-a}{2}}。$$

證明：很明顯的 $m^2 + n^2 = c$ ， $m^2 - n^2 = a$ ， $2mn = b$

$$\text{得 } \sqrt{\frac{c+a}{2}} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 + m^2 - n^2}{2}} = \sqrt{\frac{2m^2}{2}} = m，$$

$$\sqrt{\frac{c-a}{2}} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - m^2 + n^2}{2}} = \sqrt{\frac{2n^2}{2}} = n，\text{故得證。}$$

附件三

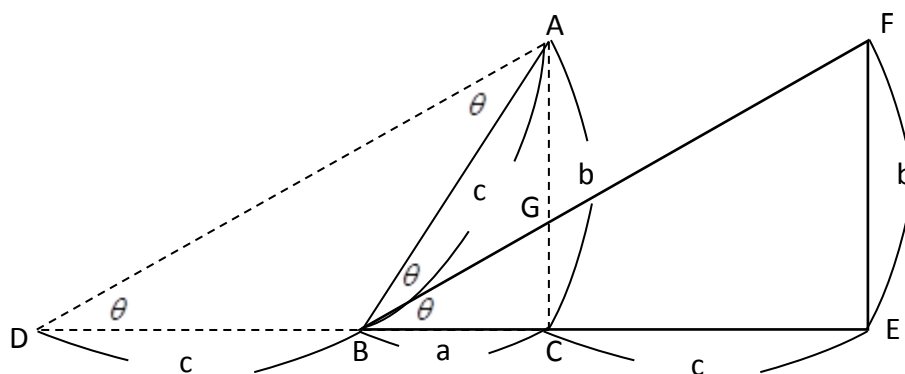
定理三

已知 $\triangle ABC$ 為互質之畢氏 $\triangle$ ， $(a, b) = 1$ ，且 a 為奇數， b 為偶數，

若 $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ ，

則 $\angle ABC$ 之角平分線的斜率， $\frac{n}{m}$ 之 m 、 n 分別為 $m = \sqrt{\frac{c+a}{2}}$ ， $n = \sqrt{\frac{c-a}{2}} \dots \textcircled{1}$

$\angle BAC$ 之角平分線的斜率， $\frac{n'}{m'}$ 之 m' 、 n' 分別為 $m' = \sqrt{c+b}$ ， $n' = \sqrt{c-b} \dots \textcircled{2}$



圖(二)

以 B 為圓心， $\overline{AB}$ 為半徑，向左畫弧交直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D ，得 $\triangle ADC$

並將 $\triangle ADC$ 沿直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 向右平移，

使得 D 、 B 重合，得 $\triangle FBE$ ，令 BF 和 AC 交點為 G ，

$$\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a+c} = \frac{n}{m}$$

$\therefore \overline{AC} \parallel \overline{FE}$ ， $\therefore \angle BGC = \angle BFE$ ，又 $\angle DAC = \angle BFE$ ，

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BF}$ ，得 $\angle FBE = \angle D$

令 $\angle FBE = \theta$ ，又 $\therefore \triangle ABD$ 為等腰三角形

$\therefore \angle DAB = \theta \Rightarrow \angle ABG = \theta$

故 $\overline{BF}$ 為 $\angle ABC$ 之角平分線，且 $\overline{BF}$ 之斜率 $= \frac{\overline{GC}}{\overline{BC}} = \frac{n}{m}$ ，

由定理二，可得 m 、 n 分別為 $m = \sqrt{\frac{c+a}{2}}$ ， $n = \sqrt{\frac{c-a}{2}}$...①

同理，可證得 $\angle BAC$ 之角平分線的斜率，

$$\frac{n'}{m'} = \frac{a}{b+c} = \frac{m^2 - n^2}{2mn + m^2 + n^2} = \frac{(m+n)(m-n)}{(m+n)^2} = \frac{m-n}{m+n} = \frac{\sqrt{(m-n)^2}}{\sqrt{(m+n)^2}} = \frac{\sqrt{c-b}}{\sqrt{c+b}}，$$

$\therefore \frac{n'}{m'}$ 之 m' 、 n' 分別為 $m' = \sqrt{c+b}$ ， $n' = \sqrt{c-b}$...②

故得證。

附件四

定理四：「和角」角平分線斜率計算定理

令 θ_1 、 θ_2 為畢氏 $\triangle$ 之內角度數，取 $\frac{\theta_1}{2}$ 、 $\frac{\theta_2}{2}$ 作直角 $\triangle$ ，

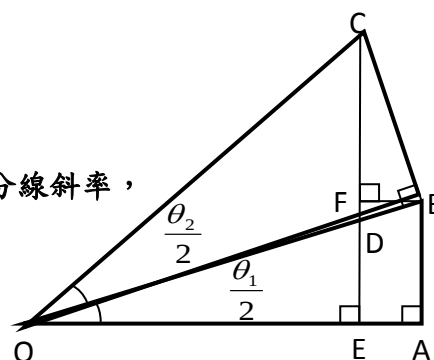
如圖(三)，分別為 $\triangle AOB$ 與 $\triangle BOC$ ，

$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ 所形成的直角三角形為 $\triangle EOC$ ，

令 r_{θ_1} 、 r_{θ_2} 、 $r_{\theta_1 + \theta_2}$ 各為 θ_1 、 θ_2 、 $\theta_1 + \theta_2$ 之角平分線斜率，

$$r_{\theta_1} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}，r_{\theta_2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}，r_{\theta_1 + \theta_2} = \frac{\overline{EC}}{\overline{OE}}，$$

則 $r_{\theta_1 + \theta_2} = \frac{r_{\theta_1} + r_{\theta_2}}{1 - r_{\theta_1} r_{\theta_2}}$ ，且 $r_{\theta_1 + \theta_2} > r_{\theta_1} + r_{\theta_2}$ 。



圖(三)

證明：

如圖(三)，由 C 向 $\overline{OA}$ 作垂直線交 $\overline{OA}$ 於 E ，交 $\overline{OB}$ 於 D 。
再由 B 向 $\overline{CE}$ 作垂直線交 $\overline{CE}$ 於 F 。

$$\begin{aligned} \text{所以 } r_{\theta_1+\theta_2} &= \frac{\overline{EC}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{EF} + \overline{FC}}{\overline{OA} - \overline{AE}} = \frac{\overline{EF} + \overline{FC}}{\overline{OA} - \overline{BF}} = \frac{\overline{AB} + \frac{\overline{FC}}{\overline{BC}} \times \overline{BC}}{\overline{OA} - \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \times \overline{BC}} \\ &= \frac{\overline{AB} + \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \times \overline{BC}}{\overline{OA} - \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \times \overline{BC}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}}{\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{r_{\theta_1} + r_{\theta_2}}{\frac{1}{r_{\theta_1}} - r_{\theta_2}} \times \frac{1}{r_{\theta_1}} = \frac{r_{\theta_1} + r_{\theta_2}}{1 - r_{\theta_1} r_{\theta_2}} \end{aligned}$$

$$\text{得 } r_{\theta_1+\theta_2} = \frac{r_{\theta_1} + r_{\theta_2}}{1 - r_{\theta_1} r_{\theta_2}}$$

$$\because 1 - r_{\theta_1} r_{\theta_2} < 1, \therefore r_{\theta_1+\theta_2} = \frac{r_{\theta_1} + r_{\theta_2}}{1 - r_{\theta_1} r_{\theta_2}} > r_{\theta_1} + r_{\theta_2}, \text{ 故得證。}$$

附件五

定理五：「差角」角平分線斜率計算定理

令 $\angle A$ 之角平分線斜率為 r_A ， $\angle B$ 之角平分線斜率為 r_B ，
 $\angle C$ 之角平分線斜率為 r_C ，

若 $\angle A = \angle B + \angle C$ ，則 $r_C = \frac{r_A - r_B}{1 + r_A r_B} \dots \textcircled{1}$ ；

當 $r_A = \frac{n}{m}$ ， $r_B = \frac{n'}{m'}$ 時， $r_C = \frac{m'n - mn'}{mm' + nn'} \dots \textcircled{2}$

證明：

$$\text{令 } r_A = \frac{n_A}{m_A}, r_B = \frac{n_B}{m_B}, r_C = \frac{n_C}{m_C}。$$

根據定理四，若 $\angle A = \angle B + \angle C$ ，則 $r_A = \frac{r_B + r_C}{1 - r_B r_C}$ ，

$$\frac{n_A}{m_A} = \frac{\frac{n_B}{m_B} + \frac{n_C}{m_C}}{1 - \frac{n_B}{m_B} \times \frac{n_C}{m_C}} = \frac{n_B m_C + n_C m_B}{m_B m_C - n_B n_C},$$

$$n_A m_B m_C - n_A n_B n_C = m_A n_B m_C + m_A m_B n_C,$$

$$m_A m_B n_C + n_A n_B n_C = n_A m_B m_C - m_A n_B m_C,$$

$$n_C(m_A m_B + n_A n_B) = m_C(n_A m_B - m_A n_B) ,$$

$$\frac{n_C}{m_C} = \frac{n_A m_B - n_B m_A}{m_A m_B + n_A n_B} = \frac{\frac{n_A}{m_A} - \frac{n_B}{m_B}}{1 + \frac{n_A n_B}{m_A m_B}} = \frac{r_A - r_B}{1 + r_A r_B} ,$$

$$\therefore r_C = \frac{r_A - r_B}{1 + r_A r_B} ;$$

$$\text{當 } r_A = \frac{n}{m}, r_B = \frac{n'}{m'} \text{ 時, 代入 } r_C = \frac{r_A - r_B}{1 + r_A r_B} = \frac{\frac{n}{m} - \frac{n'}{m'}}{1 + \frac{n}{m} \times \frac{n'}{m'}} = \frac{m'n - mn'}{mm' + nn'} , \text{ 故得證。}$$

附件六

定理六：

令 $\angle A$ 之角平分線斜率為 r_A ， $\angle B$ 之角平分線斜率為 r_B ， $\angle C$ 之角平分線斜率為 r_C ，且 $\angle A = \angle B + \angle C$ ，若 r_A 、 r_B 為有理數，則 r_C 亦為有理數。

證明：

$$\text{令 } r_A = \frac{n_A}{m_A}, r_B = \frac{n_B}{m_B}, r_C = \frac{n_C}{m_C} .$$

$\therefore r_A$ 、 r_B 為有理數，且 r_A 、 r_B 為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 之角平分線斜率，

$\therefore m_A$ 、 n_A 、 m_B 、 n_B 都是正整數。

根據定理五，若 $\angle A = \angle B + \angle C$ ，則， $r_C = \frac{r_A - r_B}{1 + r_A r_B}$ ，

$\therefore$ 有理數經過加法、乘法運算，結果還是有理數，

$\therefore r_A - r_B$ 、 $1 + r_A r_B$ 都是有理數，且 $1 + r_A r_B > 0$ 。

$\therefore \frac{r_A - r_B}{1 + r_A r_B}$ 為有理數， r_C 為有理數。故得證。

附件七

預備定理一

令 $W = \{ \frac{n}{m} \mid m \geq n, \text{ 且 } m, n \in N, (m, n) = 1 \}$,

$\Omega = \{ r \mid r \text{ 為互質邊之畢氏}\triangle\text{銳角角平分線斜率} \}$, 則 $W = \Omega$

證明：

令 $\Omega = \{ r \mid r \text{ 為互質邊之畢氏}\triangle\text{銳角角平分線斜率} \}$,

$W = \{ \frac{n}{m} \mid m \geq n, \text{ 且 } m, n \in N, (m, n) = 1 \}$

(i). 由定理三得知, 給定一畢氏 $\triangle$ 之銳角 θ , 必存在一 $r \in \Omega$ 與之對應, 且 r 為最簡分數;

$\therefore r \in W$, 故 $\Omega \subset W$ 。

(ii). 給定 $\frac{n}{m} \in W$, 則取 $(a', b', c') = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, 則 (a', b', c') 為一畢氏 $\triangle$ 。

若 $(a', b', c') = 1$, 取 $r = \frac{c' - a'}{b'} = \frac{m^2 + n^2 + m^2 - n^2}{2mn} = \frac{n}{m}$, 則 $\frac{n}{m}$ 為其一銳角角平分線斜率。

若 $(a', b', c') = d(a, b, c)$, 則亦可得到 $r = \frac{n}{m}$, $\therefore r \in \Omega$, 故 $W \subset \Omega$ 。

由(i)、(ii)得知 $W = \Omega$, 故得證。

附件八

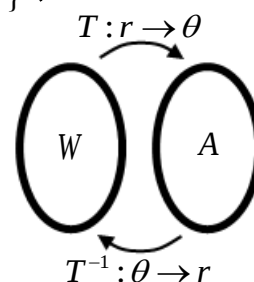
預備定理二：

令 $W = \{ r \mid r = \frac{n}{m}, m \geq n, (m, n) = 1, \text{ 且 } m, n \in N \}$,

$A = \{ \theta \mid \theta \leq 90, \theta \text{ 為畢氏}\triangle\text{內角度數的數值} \}$,

則 $\forall \theta \in A$, 必存在 $\theta_i, \theta_j \in A$, 使得 $\theta = \theta_i + \theta_j$,

且 $\frac{\theta}{360} \times \pi < T^{-1}(\theta_i) + T^{-1}(\theta_j) < T^{-1}(\theta)$ 。



圖(四)

證明：

(一). 令 $T^{-1}(\theta) = r$, 取 $r_i < r$, 則必存在 $\theta_i \in A$, 使得 $T(r_i) = \theta_i$ 。

取 $\theta_j = \theta - \theta_i$ ，則 θ_i 、 θ_j 即為所求， $\theta = \theta_i + \theta_j$ 。

結合定理三即可得 $T^{-1}(\theta_i) + T^{-1}(\theta_j) < T^{-1}(\theta)$

$$(二). \because 2T^{-1}(\theta_i) > \frac{\theta_1}{180} \times \pi,$$

$$2T^{-1}(\theta_j) > \frac{\theta_2}{180} \times \pi,$$

$$\therefore T^{-1}(\theta_i) + T^{-1}(\theta_j) > \frac{\theta_1 + \theta_2}{360} \times \pi = \frac{\theta}{360} \times \pi, \text{ 故得證。}$$

附件九

定理七：外切多邊形 π 值逼近理論

任取 $\theta \in A$ ，滿足 $\theta = \frac{360}{d}$ ， $d \geq 4$ ， $d \in N$ ；則存在一遞減數列 $\{S_k\}$ ，

使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{\pi}{d}$ 。其中 $S_k = \sum_{t=1}^n T^{-1}(\theta_{(k,t)})$ ， $t = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

證明：

令 $\theta = \sum_{t=1}^n \theta_{(k,t)}$ ， k 為第幾代， t 為該代之中的序數， n 為該代角度總共的項數；

$$\text{令 } S_k = \sum_{t=1}^n T^{-1}(\theta_{(k,t)});$$

以 $\theta = \frac{360}{d}$ 代入預備定理一

$$\Rightarrow \frac{\pi}{d} < T^{-1}(\theta_{(1,1)}), \text{ 令 } S_1 = T^{-1}(\theta_{(1,1)}), \text{ 可得 } \frac{\pi}{d} < S_1. \text{ 第一代，角度只有一項。}$$

令 $\theta_{(1,1)} = \theta_{(2,1)} + \theta_{(2,2)}$ ， $\theta_{(2,1)}$ 、 $\theta_{(2,2)}$ 為第二代， $\theta_{(2,1)}$ 、 $\theta_{(2,2)} \in A$ ，

$$S_2 = T^{-1}(\theta_{(2,1)}) + T^{-1}(\theta_{(2,2)}).$$

$k = 2$ ，這是第二代。總共有 $\theta_{(2,1)}$ 、 $\theta_{(2,2)}$ 兩項，所以 $n = 2$ 。 $\theta_{(2,1)}$ 、 $\theta_{(2,2)}$ 的序數分別為 1 與 2。

$$\text{則 } \frac{\pi}{d} < T^{-1}(\theta_{(2,1)}) + T^{-1}(\theta_{(2,2)}) < T^{-1}(\theta_{(1,1)}), \text{ 可得 } \frac{\pi}{d} < S_2 < S_1;$$

同理可得 $\frac{\pi}{d} < S_k < \dots < S_2 < S_1$, $\therefore \{S_k\}$ 為一以 $\frac{\pi}{d}$ 為下限的遞減數列 ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{\pi}{d} .$$

故得證。

附件十

預備定理三：

$\forall r \in Q$, 則必存在 $r_i, r_j \notin Q$, 使得 $T(r) = T(r_i) + T(r_j)$ 。其中 $r_i, r_j < r$ 。

證明：

取 $r_i < r$, 則必存在 $\theta_{r_i}, \theta_r \in A$, 使得 $\theta_{r_i} < \theta_r$ 。(其中 $T(r_i) = \theta_{r_i}$, $T(r) = \theta_r$)

令 $\theta_{r_j} = \theta_r - \theta_{r_i}$, 同樣亦存在 $r_j \in Q$, 使得 $T(r_j) = \theta_{r_j}$, $\therefore T(r) = T(r_i) + T(r_j)$,

故得證。

附件十一

定理八：外切多邊形 π 值逼近計算方法

$\forall r \in W$, $T(r) \rightarrow \theta \in A$, 滿足 $\theta = \frac{360}{d}$, $d \geq 4$; 則存在一遞減數列 $\{S_k\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{\pi}{d}$ 。其中 $S_k = \sum_{t=1}^n T^{-1}(\theta_{(k,t)}) = \sum_{t=1}^n r_{(k,t)}$, $t = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

證明：

令 $\theta = \sum_{t=1}^n \theta_{(k,t)}$, k 為第幾代 , t 為該代之中的序數 ;

則由預備定理一、二可知 , 必存在 $T^{-1}(\theta) \rightarrow r$ 、 $T^{-1}(\theta_{(k,t)}) \rightarrow r_{(k,t)}$ 與之對應。

令 $S_k = \sum_{t=1}^n T^{-1}(\theta_{(k,t)})$, 則 $S_k = \sum_{t=1}^n T^{-1}(\theta_{(k,t)}) = \sum_{t=1}^n r_{(k,t)}$;

由定理六可知

$\frac{\pi}{d} < S_k < \dots < S_2 < S_1$, $\therefore r \in Q$ 為一以 $\frac{\pi}{d}$ 為下限的遞減數列 ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{\pi}{d}。$$

故得證。

附件十二

定理九：不對稱切割之單位分數斜率單母角切割法

取 $I = \{a_n \mid a_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\}$ ，則集合 I 為單位分數調和數列所成的集合。

若依有序的方式依次給定 a_n 並取 a_{n+1} ，則 $\angle a_n \rightarrow \angle a_{n+1} + \angle a_{n(n+1)+1}$ 。

證明：

令 $r_k = \frac{n_k}{m_k}$ ，且 m 、 n 、 k 為自然數。

則定理五，角度減法公式， $r_{1-2} = \frac{r_1 - r_2}{1 + r_1 r_2}$ 可表示為

$$\frac{n_{1-2}}{m_{1-2}} = \frac{\frac{n_1}{m_1} - \frac{n_2}{m_2}}{1 + \frac{n_1 n_2}{m_1 m_2}} = \frac{m_2 n_1 - m_1 n_2}{m_1 m_2 + n_1 n_2}。$$

在這裡，原始的母角是 $\frac{n_1}{m_1}$ ，減去一個 $\frac{n_2}{m_2}$ 的角，餘數是 $\frac{n_{1-2}}{m_{1-2}}$ 。

令取一次只接下一個比較小的餘角，並留下比較大的母角。

在單分子的運算系統中，令 $n_1 = n_2 = 1$ ，則 $\frac{n_{1-2}}{m_{1-2}} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2 + 1}$ ，可得出

$$n_{1-2} = m_2 - m_1；$$

令 $n_{1-2} = m_2 - m_1 = 1$ ，即 $m_2 = m_1 + 1$ 時，

$$\text{餘數 } \frac{n_{1-2}}{m_{1-2}} = \frac{(m_1 + 1) - m_1}{m_1(m_1 + 1) + 1} = \frac{1}{m_1(m_1 + 1) + 1} \text{ 亦為單分子。}$$

∴ 當 $n_1 = n_2 = n_{1-2} = 1$ 時，可得 $m_2 = m_1 + 1$ ， $m_{1-2} = m_1(m_1 + 1) + 1$ 。

∴ 給定 a_n ，取 a_{n+1} ，則 $\angle a_n \rightarrow \angle a_{n+1} + \angle a_{n(n+1)+1}$ ，故得證。

附件十三

單母角前 50 代列表如下：

第幾代	餘角分母	數量	餘角併入母角時，該母角的數量——條列	累計
1				
2	3	1	$1+1$	2
3	7	1	$1+(1*2)$	3
4	13	2	$1+(1*2)+(2*1)$	5
5	21	2	$1+(1*2)+(2*2)$	7
6	31	2	$1+(1*2)+(2*3)$	9
7	43	2	$1+(1*2)+(2*4)$	11
8	57	3	$1+(1*2)+(2*4)+(3*1)$	14
9	73	3	$1+(1*2)+(2*4)+(3*2)$	17
10	91	3	$1+(1*2)+(2*4)+(3*3)$	20
11	111	3	$1+(1*2)+(2*4)+(3*4)$	23
12	133	3	$1+(1*2)+(2*4)+(3*5)$	26
13	157	3	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)$	29
14	183	5	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*1)$	34
15	211	5	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*2)$	39
16	241	5	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*3)$	44
17	273	5	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*4)$	49
18	307	5	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*5)$	54
19	343	5	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*6)$	59
20	381	5	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*7)$	64
21	421	5	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)$	69
22	463	7	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*1)$	76
23	507	7	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*2)$	83
24	553	7	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*3)$	90
25	601	7	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*4)$	97
26	651	7	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*5)$	104
27	703	7	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*6)$	111
28	757	7	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*7)$	118
29	813	7	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*8)$	125
30	871	7	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*9)$	132
31	931	7	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)$	139
32	993	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*1)$	148
33	1057	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*2)$	157

第幾代	餘角分母	數量	餘角併入母角時，該母角的數量——條列	累計
34	1123	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*3)$	166
35	1191	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*4)$	175
36	1261	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*5)$	184
37	1333	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*6)$	193
38	1407	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*7)$	202
39	1483	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*8)$	211
40	1561	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*9)$	220
41	1641	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*10)$	229
42	1723	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*11)$	238
43	1807	9	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*12)$	247
44	1893	11	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*12)+(11*1)$	258
45	1981	11	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*12)+(11*2)$	269
46	2071	11	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*12)+(11*3)$	280
47	2163	11	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*12)+(11*4)$	291
48	2257	11	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*12)+(11*5)$	302
49	2353	11	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*12)+(11*6)$	313
50	2451	11	$1+(1*2)+(2*4)+(3*6)+(5*8)+(7*10)+(9*12)+(11*7)$	324

以最後一列——第 50 代，來做分析。第 50 代被切出來的餘角是 $\frac{1}{(49 \times 50) + 1}$
 $= \frac{1}{2451}$ ，其數量為 11。數量為 11 的原因是，在 $\frac{1}{50}$ 之前，已經有 $\frac{1}{3} \times 1$ 、 $\frac{1}{7} \times 1$ 、 $\frac{1}{13} \times 2$ 、 $\frac{1}{21} \times 2$ 、 $\frac{1}{31} \times 2$ 、 $\frac{1}{43} \times 2$ 等，共 $1+1+2+2+2+2=10$ 個餘角加入母角，再加上原本母角的數量 1，就增加為 11。離 $\frac{1}{50}$ 最近的前一個併入母角的餘角是 $\frac{1}{43}$ ，往回尋找餘角分母 43，就會看到後面的累計數是 11。亦即從餘角分母 43 之後，到下一個餘角分母 57 之前的 56——43 到 56 代之間，其母角數量都為 11。第 50 代後面的累計數達到 324，所以當 $\frac{1}{2451}$ 在 2451 代併入母角時，該母角的總數量會增為 324。母角數量變化的關鍵，就在餘角併入母角的時候。

由以上得知，假如要算第 100 代的 π 近似值，關鍵在於找出：

1. 第 10 代餘角 $\frac{1}{91}$ ：最後一個併入母角的餘角，自 91 代到 100 代的母角數量都是 20。
2. 第 3 代餘角 $\frac{1}{7}$ ：決定了第 7～12 代母角與第 8～13 代餘角數量都是 3， $\frac{1}{91}$ 也是 3。

3. $\therefore$ 第100代累加的餘角，數量就看右邊累計數第3～10代的部分，第11～13代產生的餘角數量都是3，第14～21代產生的餘角數量都是5，第22～31代餘角數量都是7，第32～43代餘角數量都是9，第44～57代餘角數量都是11……依此類推。

附件十四

定理十：

令離第 K 代最近的前面一個併入母角的餘角分母為 $t \times (t-1) + 1$ ，

離第 t 代最近的前面一個併入母角的餘角分母為 $s \times (s-1) + 1$ ，

第 s 代累計數為 N_s ，第 t 代累計數為 N_t ，

則第 K 代 π 近似值 =

$$\begin{aligned}
 & 4 \times \left(\left(\frac{1}{K} \times N_t \right) + \left(\frac{1}{t \times (t+1) + 1} \times N_s \right) + \left(\frac{1}{(t+1) \times (t+2) + 1} \times N_s \right) + \cdots \right. \\
 & + \left(\frac{1}{s \times (s+1) \times (s \times (s+1) + 1) + 1} \times N_s \right) \\
 & + \left(\frac{1}{(s \times (s+1) + 1) \times (s \times (s+1) + 2) + 1} \times N_{s+1} \right) + \cdots \\
 & + \left(\frac{1}{t \times (t-1) \times (t \times (t-1) + 1) + 1} \times N_{t-1} \right) \\
 & \left. + \left(\frac{1}{(t \times (t-1) + 1) \times (t \times (t-1) + 2) + 1} \times N_t \right) + \cdots + \left(\frac{1}{K \times (K-1) + 1} \times N_t \right) \right)
 \end{aligned}$$

證明：

母角數量計算法：

若離第 t 代最近的前面一個併入母角的餘角分母為 $s \times (s-1) + 1$ ，

則 $s \times (s-1) + 1 < t \leq s \times (s+1) + 1 \dots \textcircled{1}$

令第 s 代累計數為 N_s ，則第 t 代累計數 N_t 由表(八)可歸納為

$$\begin{aligned}
 & 1 + (1 \times 2) + (2 \times 4) + (3 \times 6) \dots + (N_{s-2} \times ((s-1) \times (s-2) - (s-2) \times (s-3))) \\
 & + (N_{s-1} \times (s \times (s-1) - (s-1) \times (s-2))) + (N_s \times (t - (s \times (s-1)))) \\
 & = 1 + (1 \times 2) + (2 \times 4) + (3 \times 6) \dots + (N_{s-2} \times (2 \times (s-2))) + (N_{s-1} \times (2 \times (s-1)))
 \end{aligned}$$

$$+(N_s \times (t - (s \times (s-1)))) \dots \textcircled{2}$$

$\therefore N_t$ 的數列會以累計數，即表(八)右列的數列

$(1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 17, 20, 23, \dots, N_{s-2}, N_{s-1}, N_s)$ 呈現，

而累計數所乘的倍數會以 $2s$ ， $s \in N$ 的型態呈現。最後一個累計數 N_s 則乘上

$$t - (s \times (s-1))。$$

$\therefore$ 第 t 代最近的前一個併入母角的餘角分母為 $s \times (s-1) + 1$ ，母角數量的增加會反

映在下一代餘角， $\therefore$ 第 $s \times (s-1) + 1$ 代餘角 $\frac{1}{s \times (s-1) \times (s \times (s-1) + 1) + 1}$ 數量仍為

N_{s-1} ，直到第 $s \times (s-1) + 2$ 代餘角數量才增為 N_s 。

$\therefore$ 第 t 代母角數量 = 第 $s \times (s-1) + 2$ 代餘角數量 = N_s ，第 $s \times (s-1) + 1$ 代到第 t 代母角數量都為

$$N_s \dots \textcircled{3}$$

母角數量之所以重要的原因，就在於可以推算出自第 s 代餘角併入第 $s \times (s-1) + 1$ 代母角之後，尚未併入母角的所有各代餘角的個別數量。如此，則可以不必由第 1 代推起，可以直接從任何一代開始推算。

各代餘角計算法：

$\therefore$ 離第 K 代最近的前一個併入母角的餘角分母為 $t \times (t-1) + 1$ ，是第 t 代的餘角；

$\therefore$ 若 $K = t \times (t-1) + 1$ ，則第 K 代餘角 $\frac{1}{K \times (K-1) + 1}$ 其數量為 N_{t-1} ；

若 $K > t \times (t-1) + 1$ ，則第 K 代餘角 $\frac{1}{K \times (K-1) + 1}$ 其數量為 N_t ，本證明之命題為

後者。

$\therefore$ 還沒併入母角的餘角為：自第 $t+1$ 代至第 K 代所有的餘角，共 $K-t$ 個。

令第 t 代母角數量為 M_t ，則第 K 代所有餘角的總和，可以表示為

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{t \times (t+1) + 1} \times M_{t+1} \right) + \left(\frac{1}{(t+1) \times (t+2) + 1} \times M_{t+2} \right) + \left(\frac{1}{(t+2) \times (t+3) + 1} \times M_{t+3} \right) + \dots \\ & + \left(\frac{1}{K \times (K-1) + 1} \times M_K \right) \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

∴由③可知，自第 $t \times (t-1) + 1$ 代到第 K 代的母角數量都是第 t 代的累計數 N_t ，

∴自第 $t \times (t-1) + 2$ 代到第 K 代的母角數量都是 N_t ，即 $M_{t \times (t-1) + 2}$ 、 $M_{t \times (t-1) + 3}$ 、 $\dots M_K$

都是 N_t 。

若離第 t 代最近的前一個併入母角的餘角分母為 $s \times (s-1) + 1$ ，

則 $s \times (s-1) + 1 \leq t < s \times (s+1) + 1$ ，且 $M_t = N_s \dots$ ⑤

∴自第 t 代到第 $s \times (s+1) + 1$ 代的母角數量都是 N_s ，即 M_t 、 M_{t+1} 、 $\dots M_{s \times (s+1) + 1}$ 都

是 N_s ，直到第 $s \times (s+1) + 2$ 代的母角數量才會變成 $N_{s+1} \dots$ ⑥

∴第 $s \times (s+1) + 2$ 代的母角數量變成 N_{s+1} ，∴由③可知，第 $s \times (s+1) + 3$ 代的餘角

數量才會變成 N_{s+1} ，而在第 $s \times (s+1) + 2$ 代的餘角數量仍是 N_s 。

由②、⑤知， $N_t = 1 + (1 \times 2) + (2 \times 4) + (3 \times 6) \dots + (N_{s-1} \times (2 \times (s-1)))$

$+ (N_s \times (t - (s \times (s-1))))$ 。

N_s 算法依此類推。

∴第 K 代 π 近似值 $= 4 \times ((\frac{1}{K} \times M_K)$

$+ (\frac{1}{t \times (t+1) + 1} \times M_{t+1}) + (\frac{1}{(t+1) \times (t+2) + 1} \times M_{t+2}) + \dots + (\frac{1}{K \times (K-1) + 1} \times M_K))$

$= 4 \times ((\frac{1}{K} \times N_t) + (\frac{1}{t \times (t+1) + 1} \times N_s) + (\frac{1}{(t+1) \times (t+2) + 1} \times N_s) + \dots$

$+ (\frac{1}{s \times (s+1) \times (s \times (s+1) + 1) + 1} \times N_s)$

$+ (\frac{1}{(s \times (s+1) + 1) \times (s \times (s+1) + 2) + 1} \times N_{s+1}) + \dots$

$+ (\frac{1}{t \times (t-1) \times (t \times (t-1) + 1) + 1} \times N_{t-1}) + (\frac{1}{(t \times (t-1) + 1) \times (t \times (t-1) + 2) + 1} \times N_t) + \dots$

$+ (\frac{1}{K \times (K-1) + 1} \times N_t))$

故得證。

附件十五

定理十一：不對稱切割之多角切割理論

母角 r

$$= \frac{1\text{個}r_n\text{的總和}-\text{任取3個}r_n\text{相乘的總和}+\text{任取5個}r_n\text{相乘的總和}-\cdots}{1-\text{任取2個}r_n\text{相乘的總和}+\text{任取4個}r_n\text{相乘的總和}-\text{任取6個}r_n\text{相乘的總和}+\cdots}$$

證明：已知 r 的加法公式 $r_{1+2} = \frac{r_1+r_2}{1-r_1r_2} \dots \textcircled{1}$ ，令 $r_1 = \frac{r_3+r_4}{1-r_3r_4}$ 代入 $\textcircled{1}$ ：

$$\text{得 } r_{2+3+4} = \frac{r_2+r_3+r_4-r_2r_3r_4}{1-r_2r_3-r_2r_4-r_3r_4} \dots \textcircled{2}； \quad \text{再令 } r_2 = \frac{r_5+r_6}{1-r_5r_6} \text{ 代入 } \textcircled{2}：$$

$$\text{得 } r_{3+4+5+6} = \frac{r_3+r_4+r_5+r_6-r_3r_4r_5-r_3r_4r_6-r_3r_5r_6-r_4r_5r_6}{1-r_3r_4-r_3r_5-r_3r_6-r_4r_5-r_4r_6-r_5r_6+r_3r_4r_5r_6} \dots \textcircled{3}；$$

∴歸納其規律性為，原母角 r 若要切成 n 個角，就可用如下具有規律性的等式來表示：

母角 r

$$= \frac{1\text{個}r_n\text{的總和}-\text{任取3個}r_n\text{相乘的總和}+\text{任取5個}r_n\text{相乘的總和}-\cdots}{1-\text{任取2個}r_n\text{相乘的總和}+\text{任取4個}r_n\text{相乘的總和}-\text{任取6個}r_n\text{相乘的總和}+\cdots}$$

故得證。

附件十六

二等分母角+一餘角 & 三等分母角+一餘角

定理十二：

令原母角 $r_o = \frac{n_o}{m_o}$ ，第二代母角 $r = \frac{n}{m}$ ，餘角 $r_r = \frac{n_r}{m_r}$ ，所有的 m 、 n 都是自然數，且

$$n_o = 1、n = 1。$$

則 當 $r = \frac{n}{m}$ 為二等分母角，且餘角 r_r 值為最小時， $m = 2m_o + 1 \dots \textcircled{1}$

當 $r = \frac{n}{m}$ 為三等分母角，且餘角 r_r 值為最小時， $m = 3m_o + 1 \dots \textcircled{2}$

證明：

二等分母角+一餘角

若想切出兩個較大的相等的角，加上一個餘角：以角平分線斜率=1(即 90° 角)為例，如圖(六)。

已知原母角 $r_o = \frac{n_o}{m_o}$ ，令二等分角 $r = \frac{n}{m}$ (橘)，餘角 $r_r = \frac{n_r}{m_r}$ (黃)，所有的

m 、 n 都是自然數；為了計算方便，令 $n_o = 1$ 、 $n_r = 1$ ，代入②：

$$r_r = \frac{n_r}{m_r} = \frac{r_o - 2r - r^2 r_o}{1 + 2rr_o - r^2} = \frac{m^2 - 2mm_o - 1}{m^2 m_o + 2m - m_o} = \frac{m \times (m - 2m_o) - 1}{m^2 m_o + 2m - m_o} \dots ⑤$$

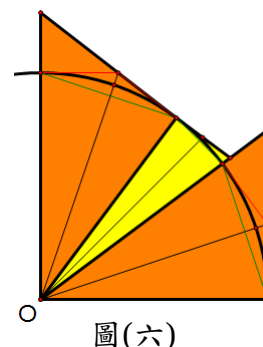
當 $m \leq 2m_o$ 時，分子將出現負數，矛盾。 $\therefore$ 二等分角的 m 值必須 $> 2m_o$ 。

$\therefore$ 若希望餘角 r_r 能越小，則二等分角 r 必須越大，則 m 必須越小。

$\therefore$ 當 $m = 2m_o + 1$ 時，餘角 r_r 值為最小...①

令 $m = 2m_o + 1$ ，代入⑤：

$$\begin{aligned} r_r &= \frac{m \times (m - 2m_o) - 1}{m^2 m_o + 2m - m_o} = \frac{(2m_o + 1) \times (2m_o + 1 - 2m_o) - 1}{(2m_o + 1)^2 \times m_o + 2(2m_o + 1) - m_o} \\ &= \frac{2m_o + 1 - 1}{(4m_o^3 + 4m_o^2 + m_o) + (4m_o + 2) - m_o} = \frac{2m_o}{4m_o^3 + 4m_o^2 + 4m_o + 2} \\ &= \frac{m_o}{2m_o^3 + 2m_o^2 + 2m_o + 1} > 0 \dots ⑥ \end{aligned}$$



圖(六)

三等分母角+一餘角

若想切出三個較大的相等的角，加上一個餘角：

已知母角 $r_o = \frac{n_o}{m_o}$ ，令三等分角 $r = \frac{n}{m}$ ，餘角 $r_r = \frac{n_r}{m_r}$ ，所有的 m 、 n 都是自然數；

為了計算方便，令 $n_o = 1$ 、 $n_r = 1$ ，代入③：

$$\begin{aligned} r_r &= \frac{n_r}{m_r} = \frac{r_o - 3r - 3r^2 r_o + r^3}{1 + 3rr_o - 3r^2 - r^3 r_o} = \frac{m^3 - 3m^2 m_o - 3m + m_o}{m^3 m_o + 3m^2 - 3mm_o - 1} \\ &= \frac{(m^2 - 3)(m - 3m_o) - 8m_o}{(mm_o + 3)(m^2 - 3) + 8} \dots ⑦ \end{aligned}$$

當 $m \leq 3m_o$ 時，分子將出現負數，矛盾。 $\therefore$ 三等分角的 m 值必須 $> 3m_o$ 。

∴若希望餘角 r_r 能越小，則三等分角 r 必須越大，則 m 必須越小。

∴當 $m = 3m_0 + 1$ 時，餘角 r_r 值為最小...②

附件十七

預備定理四：面積差縮小定理

如圖(九)，在圓心為 O 之單位圓上取等形 $AODC$ ，令 $\overline{OC}$ 之斜率為 $r_1 = \frac{n}{m}$ ；

(1).若 $\overline{OC}$ 、 $\overline{ON}$ 分別為 $\angle AOD$ 、 $\angle AOE$ 的角平分線。則：

$\triangle AOD$ 其面積為 $\frac{mn}{m^2 + n^2} \dots \textcircled{1}$

$\overline{ON}$ 之斜率 $r_2 = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2} + m} \dots \textcircled{2}$ ；

當 $r_1 = \frac{n}{m}$ 夠小時， $\triangle EAN$ 面積約為 $\frac{1}{8} \triangle DAC \dots \textcircled{3}$ ；

(2).若 $\overline{ON'}$ 、 $\overline{OM'}$ 分別為 $\angle AOE'$ 、 $\angle E'OD$ 的角平分線， $\overline{AN'} = \frac{r_1}{2}$ ，

則 $AODE' - \triangle AOD$ 之面積為 $\frac{2r_1^3}{4 + 5r_1^2 + r_1^4} \dots \textcircled{4}$ ，

證明：
$$AODC - (AOE'N' + E'ODM') = \frac{r_1^3}{4 + 2r_1^2}$$

(1) O 為 AD 弧線的圓心， $\overline{AB}$ 切 AD 弧線於 A ， $\triangle AOB$ 為直角三角形，

與 AD 弧線交於 A 、 D 。 $\overline{DG}$ 為 $\triangle AOD$ 的高。

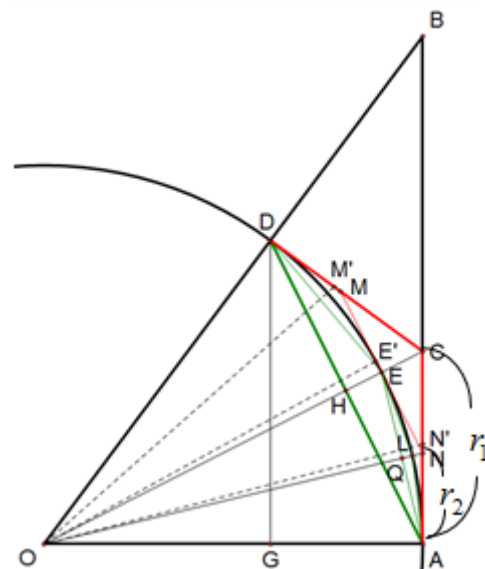
$\overline{OC}$ 為 $\angle AOB$ 的角平分線，交

AD 弧線於 E ，其 r 值為 r_1 ； $\overline{ON}$

為 $\angle AOC$ 的角平分線，交 AE 弧

線於 L ，交 AB 於 N ，其 r 值為

r_2 。



圖(九)

∴ $\triangle AOC$ 全等於 $\triangle DOC$ 。

令半徑 $\overline{OA} = \overline{OD} = 1$ ，若 $r_1 = \frac{n}{m}$ ，

則 $\overline{AC} = \frac{n}{m}$ ，

$$\overline{OG} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \times \overline{OD} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \times 1 = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad \overline{DG} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}。$$

$$\therefore \triangle AOD = \frac{1}{2} \times \overline{DG} \times \overline{OA} = \frac{1}{2} \times \frac{2mn}{m^2 + n^2} \times 1 = \frac{mn}{m^2 + n^2} \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{n}{m}, \therefore \overline{OA} : \overline{AC} : \overline{OC} = m : n : \sqrt{m^2 + n^2}, \therefore \overline{AN} : \overline{CN} = m : \sqrt{m^2 + n^2},$$

$$\therefore r_2 = \frac{\overline{AN}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC} \times \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2} + m}}{\overline{OA}} = \frac{n \times \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2} + m}}{m} = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2} + m} \dots \textcircled{2}$$

每經過一代角平分線，以外切與內接面積來逼近圓面積的誤差會縮小多少？

$$\therefore \triangle AOC = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{AC} = \frac{n}{2m}, \text{ 四邊形 } AODC \text{ 面積} = \frac{n}{m};$$

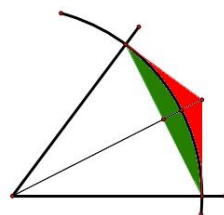
$$\therefore \frac{mn}{m^2 + n^2} < \text{扇形 } AOD \text{ 面積} < \frac{n}{m},$$

∴ $\triangle ACD$ 面積

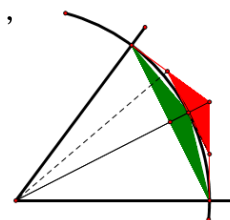
$$= \frac{n}{m} - \frac{mn}{m^2 + n^2} = \frac{m^2n + n^3 - m^2n}{m \times (m^2 + n^2)} = \frac{n}{m} \times \frac{m^2 + n^2 - m^2}{m^2 + n^2} = \frac{n^3}{m \times (m^2 + n^2)},$$

這可看作扇形 AOD 面積的誤差值，即圖(十)紅色+綠色面積。

經過再一次的角平分線分割，外切箏形減少如圖(八-4)的紅色面積，內接 $\triangle$ 則增加綠色面積。二圖色塊面積相減即為所求。



圖(十)



圖(八-4)

比較 r_1 、 r_2 可知，經過再一次角平分線後，分子仍然是 n ，而分母

由 m 變成 $\sqrt{m^2 + n^2} + m$ 。∴ 多次分割後 m 、 n 差距太大時， n 可忽略，分母約為 $2m \dots *$

∵ $\overline{AH}$ 垂直 $\overline{OC}$ 於 H ，∴ $\triangle COA$ 、 $\triangle AOH$ 與 $\triangle CAH$ 為相似 $\triangle$ ，

∴ $\angle OAH = \angle ACH$ ， $\angle AOH = \angle CAH$ ；

同理， $\angle AON = \angle NAQ$ ；∴ $\overline{AQ}$ 為 $\angle CAH$ 的角平分線。

$$\begin{aligned}
\therefore \triangle EAN \text{ 面積} &= \triangle EAC \text{ 面積} \times \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \triangle EAC \text{ 面積} \times \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2} + m} \\
&= \triangle CAH \text{ 面積} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{CH}} \times \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2} + m} \\
&= \triangle CAH \text{ 面積} \times \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{\sqrt{m^2 + n^2} + m} \times \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2} + m} \\
&= \triangle CAH \text{ 面積} \times \frac{m \times \sqrt{m^2 + n^2}}{(\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2} = \frac{1}{2} \times \triangle ACD \text{ 面積} \times \frac{m \times \sqrt{m^2 + n^2}}{(\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2}。
\end{aligned}$$

當角平分線經多次分割而使斜率 r_k 值變得極小時， $\therefore$ 由①知角平分線斜率分子 n 是不變的，

$\therefore$ 分母 m_k 會變得極大，此時 $\frac{m \times \sqrt{m^2 + n^2}}{(\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2}$ 算式中的 n 幾乎可以忽略掉，

$$\frac{m \times \sqrt{m^2 + n^2}}{(\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2} \approx \frac{m \times \sqrt{m^2}}{(\sqrt{m^2} + m)^2} = \frac{m^2}{4m^2} = \frac{1}{4}。$$

$$\therefore \triangle EAN \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times \triangle ACD \text{ 面積} \times \frac{m \times \sqrt{m^2 + n^2}}{(\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2}$$

$$\cong \frac{1}{2} \times \triangle ACD \text{ 面積} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \times \triangle ACD \text{ 面積}$$

$\therefore \triangle EAN$ 只涵蓋 $\frac{1}{2}$ 個 AD 弧線， $\therefore$ 全部涵蓋需要 $2 \times \triangle EAN \cong \frac{1}{4} \times \triangle ACD \dots **$

由*、**可知，當 $r_1 = \frac{n}{m}$ 夠小時， $\triangle EAN$ 面積約為 $\frac{1}{8} \triangle DAC \dots \textcircled{3}$

(2) 若 $\overline{ON'}$ 、 $\overline{OM'}$ 分別為 $\angle AOE'$ 、 $\angle E'OD$ 的角平分線， $\overline{AN'} = \frac{r_1}{2}$ ，

假設 $\overline{DM'} = r_r$ ， $\therefore \angle AOD = \angle AOE' + \angle E'OD$ ， $\therefore \angle r_1 \rightarrow \angle \frac{r_1}{2} + \angle r_r$ ，

$$\therefore r_r = \frac{r_1 - \frac{r_1}{2}}{1 + (r_1 \times \frac{r_1}{2})} = \frac{\frac{r_1}{2}}{1 + \frac{r_1^2}{2}} = \frac{r_1}{2 + r_1^2}，$$

則 $AODE' - \triangle AOD$ 之面積 $= \triangle AOE' + \triangle E'OD - \triangle AOD$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{r_1}{2}}{1 + (\frac{r_1}{2})^2} + \frac{\frac{r_1}{2 + r_1^2}}{1 + (\frac{r_1}{2 + r_1^2})^2} - \frac{r_1}{1 + r_1^2} \\
 &= \frac{2r_1 \times (4 + 5r_1^2 + r_1^4) \times (1 + r_1^2) + r_1 \times (2 + r_1^2) \times (4 + r_1^2) \times (1 + r_1^2) - r_1 \times (4 + r_1^2) \times (4 + 5r_1^2 + r_1^4)}{(4 + r_1^2) \times (4 + 5r_1^2 + r_1^4) \times (1 + r_1^2)} \\
 &= \frac{2r_1 \times (4 + 5r_1^2 + r_1^4) \times (1 + r_1^2) + r_1 \times (2 + r_1^2) \times (4 + 5r_1^2 + r_1^4) - r_1 \times (4 + r_1^2) \times (4 + 5r_1^2 + r_1^4)}{(4 + 5r_1^2 + r_1^4)^2} \\
 &= \frac{2r_1 + 2r_1^3 + 2r_1 + r_1^3 - 4r_1 - r_1^3}{4 + 5r_1^2 + r_1^4} = \frac{2r_1^3}{4 + 5r_1^2 + r_1^4} \dots \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{箏形 } AODC - (\triangle AOE'N' + \triangle E'ODM') = r_1 - \left(\frac{r_1}{2} + \frac{r_1}{2 + r_1^2} \right) = \frac{4r_1 + 2r_1^3 - 2r_1 - r_1^3 - 2r_1}{4 + 2r_1^2}$$

$$= \frac{r_1^3}{4 + 2r_1^2} \dots \textcircled{5}$$

故得證。

附件十八

預備定理五：誤差趨近定理&誤差夾擊定理(一)

如圖(八-1)，令 S = 箏形面積和，

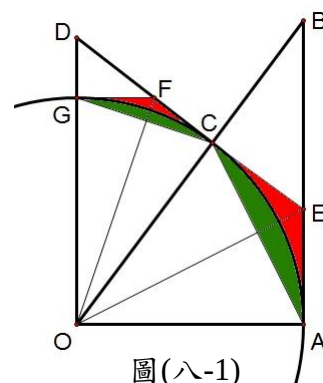
T = 頂點在圓心之等腰內接 $\triangle$ 面積和，

R = 扇形面積和；

$$\text{則 } \frac{1}{2} < \frac{(S - R)}{(R - T)} < \frac{1 + r^2}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{且當 } r \text{ 值越小時：} \frac{(S - R)}{(R - T)} \rightarrow \frac{1}{2} \dots \textcircled{2}$$

證明：如附件十五之圖(八)



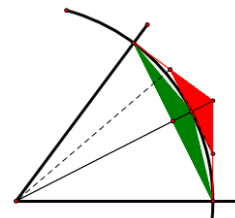
圖(八-1)

$$\because \text{外切箏形 } AODC \text{ 面積} = 2 \times \triangle AOC = 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{AC} = 1 \times \frac{n}{m} = r_1 ;$$

$$\therefore \text{由定理十可知，外切箏形 } OANE \text{ 面積} = r_2 = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2} + m} .$$

∴經過一次角平分線分割之面積逼近後，外切箏形 AODC 面積縮小值

$$\begin{aligned}
 &= r_1 - 2 \times r_2 = \frac{n}{m} - \frac{2n}{\sqrt{m^2 + n^2} + m} = \frac{n \times (\sqrt{m^2 + n^2} - m)}{m \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)} \\
 &= \frac{n \times (\sqrt{m^2 + n^2} - m) \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)}{m \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2} = \frac{n \times (m^2 + n^2 - m^2)}{m \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2} \\
 &= \frac{n^3}{m \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2} \dots \textcircled{3}, \text{ 如圖(八-4)紅色面積;}
 \end{aligned}$$



圖(八-4)

∴當多次分割後 m 、 n 差距太大時， n 可忽略，

$$\therefore \text{外切箏形 AODC 面積縮小值} = \frac{n^3}{m \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2} \approx \frac{n^3}{m \times (m + m)^2} = \frac{n^3}{4m^3}$$

$$\text{內接} \triangle AOD = \frac{1}{2} \times \overline{DG} \times \overline{OA} = \frac{1}{2} \times \frac{2mn}{m^2 + n^2} \times 1 = \frac{mn}{m^2 + n^2};$$

$$\begin{aligned}
 \text{同理，內接} \triangle AOE &= \frac{n \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)}{(\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2 + n^2} = \frac{n \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)}{2m^2 + 2n^2 + 2m \times \sqrt{m^2 + n^2}} \\
 &= \frac{n \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)}{2 \times (m^2 + n^2 + m \times \sqrt{m^2 + n^2})} = \frac{n \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)}{2 \times \sqrt{m^2 + n^2} \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)} = \frac{n}{2 \times \sqrt{m^2 + n^2}}
 \end{aligned}$$

∴經過一次角平分線分割之面積逼近後，內接 $\triangle AOD$ 面積增加值

$$\begin{aligned}
 &= (2 \times \triangle AOE) - \triangle AOD = 2 \times \frac{n}{2 \times \sqrt{m^2 + n^2}} - \frac{mn}{m^2 + n^2} = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} - \frac{mn}{m^2 + n^2} \\
 &= \frac{n \times (\sqrt{m^2 + n^2} - m)}{m^2 + n^2} = \frac{n \times (\sqrt{m^2 + n^2} - m) \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)}{(m^2 + n^2) \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)} \\
 &= \frac{n \times (m^2 + n^2 - m^2)}{(m^2 + n^2) \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)} = \frac{n^3}{(m^2 + n^2) \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)} \dots \textcircled{4},
 \end{aligned}$$

如圖(七-4)綠色面積；

∴當多次分割後 m 、 n 差距太大時， n 可忽略，

$$\therefore \text{內接} \triangle AOD \text{ 面積增加值} = \frac{n^3}{(m^2 + n^2) \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)} \approx \frac{n^3}{(m^2) \times (m + m)} = \frac{n^3}{2m^3}$$

歷經第一次角平分線，外切箏形會減少約 $\frac{n^3}{4m^3}$ ，內接△會增加約 $\frac{n^3}{2m^3}$ 。

以上這可看成第一次校正值

若再進行第二次角平分線切割，

$\therefore r_2 = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2} + m}$ ， $\therefore$ 令 $r_2 = \frac{n}{m_2}$ ，以 $m_2 = \sqrt{m^2 + n^2} + m$ 代入遞迴可得：

$$\begin{aligned} \text{外切箏形會減少約 } \frac{n^3}{4m_2^3} &= \frac{n^3}{4 \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)^3} \approx \frac{n^3}{4 \times (m + m)^3} = \frac{n^3}{4 \times (2m)^3} \\ &= \frac{n^3}{32m^3} ; \end{aligned}$$

但因為角平分線後外切箏形會變成兩塊小外切箏形，所以實際上原始該部分弧線

的外切三角形會減少 $\frac{n^3}{32m^3} \times 2 = \frac{n^3}{16m^3}$ 。

$$\text{內接△會增加約 } \frac{n^3}{2m_2^3} = \frac{n^3}{2 \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)^3} \approx \frac{n^3}{2 \times (m + m)^3} = \frac{n^3}{2 \times (2m)^3} = \frac{n^3}{16m^3} ;$$

同理，所以實際上原始該部分弧線的內接△會增加 $\frac{n^3}{16m^3} \times 2 = \frac{n^3}{8m^3}$ 。

$\therefore$ 歷經 t 次角平分線分割後，

$$\begin{aligned} \text{外切箏形會減少約 } &\frac{n^3}{4m^3} + \frac{2n^3}{4 \times (2m)^3} + \frac{2^2 n^3}{4 \times (2^2 m)^3} \cdots + \frac{2^{t-1} n^3}{4 \times (2^{t-1} m)^3} \\ &= \frac{n^3}{4m^3} \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \cdots + \frac{1}{4^{t-1}}\right) \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{內接△會增加約 } &\frac{n^3}{2m^3} + \frac{2n^3}{2 \times (2m)^3} + \frac{2^2 n^3}{2 \times (2^2 m)^3} \cdots + \frac{2^{t-1} n^3}{2 \times (2^{t-1} m)^3} \\ &= \frac{n^3}{2m^3} \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \cdots + \frac{1}{4^{t-1}}\right) \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

由此可發現， $\therefore$ 外切內接多邊形的面積差部分，多次分割後的外、內面積比約 $= 1:2$ 。

$\therefore$ 多次分割後， r 值越小時， n 值在分母造成的誤差會更小， $\frac{(S-R)}{(R-T)} \rightarrow \frac{1}{2} \cdots \textcircled{2}$

經過一次角平分線分割之面積逼近後，

$$\text{外切箏形 } AODC \text{ 面積縮小值} = \frac{n^3}{m \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2} \dots \textcircled{3}$$

$$\text{內接 } \triangle AOD \text{ 面積增加值} = \frac{n^3}{(m^2 + n^2) \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)} \dots \textcircled{4}$$

歷經第一次角平分線，外切箏形會減少約 $\frac{n^3}{4m^3}$ ，

內接 $\triangle$ 會增加約 $\frac{n^3}{2m^3} \Rightarrow \textcircled{3} \times 2 \approx \textcircled{4}$ ；

$$(\textcircled{3} \times 2) : \textcircled{4} = \left(\frac{n^3}{m \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2} \times 2 \right) : \frac{n^3}{(m^2 + n^2) \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)}$$

$$= \frac{2}{m \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)^2} : \frac{1}{(m^2 + n^2) \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)}$$

$$= \frac{2}{m \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)} : \frac{1}{m^2 + n^2}$$

$\because r = \frac{n}{m}$ ， $\therefore$ 以 $n = rm$ 代入得

$$\frac{2}{m \times (\sqrt{m^2 + n^2} + m)} : \frac{1}{m^2 + n^2} = \frac{2}{m \times (\sqrt{m^2 + r^2 m^2} + m)} : \frac{1}{m^2 + r^2 m^2}$$

$$= \frac{2}{1 \times (\sqrt{1 + r^2} + 1)} : \frac{1}{1 + r^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 + r^2} + 1} : \frac{1}{1 + r^2}$$

$$\text{令 } \sqrt{1 + r^2} = k, \text{ 代入得 } \frac{2}{\sqrt{1 + r^2} + 1} : \frac{1}{1 + r^2} = \frac{2}{k + 1} : \frac{1}{k^2}$$

$$\because \sqrt{1 + r^2} = k > 1, \therefore (k + 1) < 2k < 2k^2,$$

$$\therefore \frac{1}{k + 1} > \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k^2}, \therefore \frac{2}{k + 1} > \frac{1}{k^2} \Rightarrow \textcircled{3} \times 2 > \textcircled{4}$$

$\therefore$ 當化簡為 $\textcircled{3} \times 2 \approx \textcircled{4}$ 時，外切箏形 $AODC$ 面積縮小值是被低估的，當代入⑤、⑥

的演算後，將使得紅色面積 $(S - R)$ 的計算值變得比實際值小 $\Rightarrow \frac{(S - R)}{(R - T)} > \frac{1}{2} \dots \textcircled{7}$

$$\because k > 1, \therefore k^3 > k^2, \therefore k^3 + k^2 > k^2 + k^2, \therefore k^2(1 + k) > 2k^2, \therefore \frac{1}{k^2(k + 1)} < \frac{1}{2k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k^2(k + 1)} < \frac{1}{k^2}$$

只要把①再 $\times \frac{1}{k^2}$ ，即 $(S-R) \times \frac{1}{1+r^2}$ 作為校正，就可反過來讓計算值變得比校正
值大

$$\frac{((S-R) \times \frac{1}{1+r^2})}{R-T} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(S-R)}{(R-T)} < \frac{(1+r^2)}{2} ; \frac{(S-R)}{(R-T)} < \frac{1+r^2}{2} \dots \textcircled{8}$$

由⑦、⑧得知， $\frac{1}{2} < \frac{(S-R)}{(R-T)} < \frac{1+r^2}{2} \dots \textcircled{1}$ ，故得證。

附件十九

預備定理六：誤差夾擊定理(二)

如圖(八-1)，令 S = 箏形面積和， T = 內接 $\triangle$ 面積和，

$$R = \text{扇形面積和} ; \text{則 } \frac{1+r^2}{2+r^2} < \frac{(S-R)}{(R-T)} < \frac{1+r^2}{2} \text{。}$$

證明：

由預備定理四可知， $\frac{(S-R)}{(R-T)} < \frac{1+r^2}{2} \dots \textcircled{8}$ ；

$$\text{且 } (③ \times 2) : ④ = \frac{2}{\sqrt{1+r^2}+1} : \frac{1}{1+r^2} = 2(1+r^2) : (\sqrt{1+r^2}+1) ;$$

$$\because r > 0 \text{ , } \therefore 1+r^2 > \sqrt{1+r^2} > 1 \text{ , } \therefore 2+r^2 > \sqrt{1+r^2} + 1$$

$$\Rightarrow 2(1+r^2) > 2+r^2 > \sqrt{1+r^2} + 1 ;$$

$$\therefore \textcircled{3} : \textcircled{4} = (1+r^2) : (\sqrt{1+r^2} + 1) > \frac{2+r^2}{2} : (\sqrt{1+r^2} + 1)$$

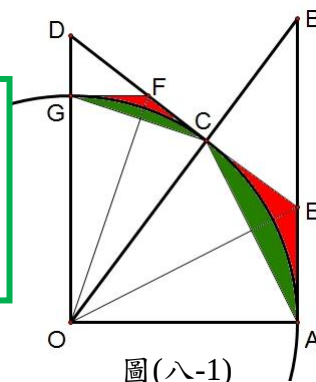
$$> \frac{\sqrt{1+r^2}+1}{2} : (\sqrt{1+r^2}+1) = 1:2 ;$$

只要把③再 $\times \frac{2+r^2}{2(1+r^2)}$ ，即 $(S-R) \times \frac{2+r^2}{2(1+r^2)}$ 作為校正，就可讓校正值介於實際

值與 $\frac{1}{2}$ 之間；

$$\frac{(S-R)}{(R-T)} \times \frac{2+r^2}{2(1+r^2)} > \frac{1}{2} ; \frac{(S-R)}{(R-T)} > \frac{1}{2} \times \frac{2(1+r^2)}{2+r^2} ; \frac{(S-R)}{(R-T)} > \frac{1+r^2}{2+r^2} \dots \textcircled{9}$$

由⑧、⑨得 $\frac{1+r^2}{2+r^2} < \frac{(S-R)}{(R-T)} < \frac{1+r^2}{2}$ ，故得證。



圖(八-1)

附件二十

定理十三：加權校正法之扇形面積夾擊定理

如圖(十)，在單位圓上，令外切等邊形面積為 S ，內接 $\triangle$ 面積為 T ，扇形面積為 R ；則

$$\frac{2S + (1+r^2)T}{3+r^2} < R < \frac{(2+r^2) \times S + (1+r^2) \times T}{3+2r^2} \dots \textcircled{1}$$

若 $r \rightarrow 0$ 時, $R \rightarrow \frac{2S+T}{3} \dots \textcircled{2}$

證明：

由預備定理五，已知 $\frac{1+r^2}{2+r^2} < \frac{(S-R)}{(R-T)} < \frac{1+r^2}{2}$ ，

$\therefore \frac{1+r^2}{2+r^2} < \frac{(S-R)}{(R-T)}$ ， $(1+r^2)(R-T) < (2+r^2)(S-R)$ ，

$(3+2r^2) \times R < ((2+r^2) \times S + (1+r^2) \times T)$

$\Rightarrow R < \frac{(2+r^2) \times S + (1+r^2) \times T}{3+2r^2} \dots \textcircled{3}$

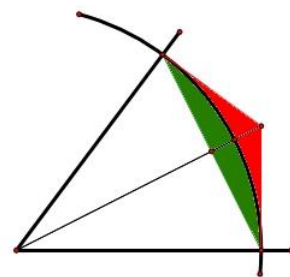
$\therefore \frac{(S-R)}{(R-T)} < \frac{1+r^2}{2}$ ， $2(S-R) < (R-T)(1+r^2)$ ，

$2S + (1+r^2)T < (3+r^2) \times R \Rightarrow \frac{2S + (1+r^2)T}{3+r^2} < R \dots \textcircled{4}$

由③、④得知， $\frac{2S + (1+r^2)T}{3+r^2} < R < \frac{(2+r^2) \times S + (1+r^2) \times T}{3+2r^2} \dots \textcircled{1}$ ，故得證。

當 $r \rightarrow 0$ 時， $\frac{2S + (1+r^2)T}{3+r^2} \rightarrow \frac{2S+T}{3}$ ， $\frac{(2+r^2) \times S + (1+r^2) \times T}{3+2r^2} \rightarrow \frac{2S+T}{3}$ ，

$\therefore R \rightarrow \frac{2S+T}{3} \dots \textcircled{2}$ ，故得證。



圖(十)

附件二十一

定理十四

單位圓中，令 $r = \frac{n}{m}$ 為經不對稱切割後之扇形角平分線斜率，

且第 k 代有 i_k 項 $r_{(k,t)}$ ，其係數各為 $c_{(k,t)}$ ，則：

①外切多邊形面積法： $\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} r_{(k,t)}$ ；

②內接多邊形面積法： $\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} \frac{r_{(k,t)}}{1+r_{(k,t)}^2}$ ；

③加權校正上限法： $\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} \frac{r_{(k,t)} \times (3+r_{(k,t)}^2)}{9+2r_{(k,t)}^2}$ ；

④加權校正下限法： $\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{i_k} c_{(k,t)} \frac{3r_{(k,t)}}{3+r_{(k,t)}^2}$ ；

因為不同型態的切割法，所切割出來的第 k 代 $r_{(k,t)}$ ，其項數 i_k 與係數 $c_{(k,t)}$ 都會不同，有些甚至沒有規律性，必須如此設計。舉 $P.10$ 表(二)的第四代

$$\angle \frac{1}{4} \times 2 + \angle \frac{1}{7} + \angle \frac{1}{13} \times 2, \text{ 與 } P.15 \text{ 表(五)的第四代 } \angle \frac{1}{40} \times 29 + \angle \frac{1493}{835239} \times 9 \\ + \angle \frac{134}{9138} \times 3 + \angle \frac{75}{158701} \text{ 來比較, 可知前者 } i_4 = 3, \text{ 係數 } c_{(4,1)} = 2, c_{(4,2)} = 1, c_{(4,3)} = 2;$$

後者 $i_4 = 4$ ，係數 $c_{(4,1)} = 29$ 、 $c_{(4,2)} = 9$ 、 $c_{(4,3)} = 3$ 、 $c_{(4,4)} = 1$ 。

由定理十四列出表(八)單母角前 50 代

	外切	內接	加權校正上限	加權校正下限
1	4	2	3.2	3
2	3.3333333333	2.8000000000	3.1444991790	3.1318681319
3	3.2380952381	2.9600000000	3.1423061240	3.1389961390
4	3.1868131868	3.0541176471	3.1417690886	3.1409244694
5	3.1677655678	3.0903167421	3.1416547376	3.1413528169
6	3.1591634172	3.1069487587	3.1416211453	3.1414814006
7	3.1547337384	3.1155974074	3.1416089684	3.1415285959
8	3.1509743399	3.1229820227	3.1416012898	3.1415585914
9	3.1486912349	3.1274848370	3.1415976856	3.1415727446
10	3.1472260334	3.1303826878	3.1415958434	3.1415800052
11	3.1462432324	3.1323304235	3.1415948357	3.1415839875
12	3.1455597054	3.1336871222	3.1415942531	3.1415862945
13	3.1450697495	3.1346607531	3.1415939005	3.1415876932
14	3.1444692571	3.1358551394	3.1415935305	3.1415891622
15	3.1440178917	3.1367535717	3.1415932898	3.1415901190
16	3.1436721103	3.1374422532	3.1415931286	3.1415907602
17	3.1434027718	3.1379789498	3.1415930179	3.1415912008
18	3.1431898744	3.1384033530	3.1415929402	3.1415915103
19	3.1430193802	3.1387433445	3.1415928845	3.1415917321
20	3.1428812395	3.1390188987	3.1415928440	3.1415918938
21	3.1427681302	3.1392445789	3.1415928139	3.1415920136
22	3.1426372315	3.1395058094	3.1415927823	3.1415921396

23	3.1425280876	3.1397236659	3.1415927583	3.1415922355
24	3.1424363613	3.1399067861	3.1415927398	3.1415923094
25	3.1423587130	3.1400618240	3.1415927253	3.1415923670
26	3.1422925426	3.1401939612	3.1415927140	3.1415924123
27	3.1422358057	3.1403072734	3.1415927050	3.1415924482
28	3.1421868796	3.1404049961	3.1415926978	3.1415924770
29	3.1421444654	3.1404897200	3.1415926920	3.1415925002
30	3.1421075149	3.1405635361	3.1415926873	3.1415925191
31	3.1420751760	3.1406281444	3.1415926834	3.1415925345
32	3.1420386298	3.1407011630	3.1415926793	3.1415925509
33	3.1420063773	3.1407656070	3.1415926759	3.1415925645
34	3.1419778060	3.1408226986	3.1415926730	3.1415925758
35	3.1419524054	3.1408734571	3.1415926707	3.1415925853
36	3.1419297477	3.1409187367	3.1415926687	3.1415925933
37	3.1419094723	3.1409592569	3.1415926670	3.1415926001
38	3.1418912743	3.1409956270	3.1415926655	3.1415926058
39	3.1418748944	3.1410283648	3.1415926643	3.1415926107
40	3.1418601110	3.1410579127	3.1415926633	3.1415926150
41	3.1418467342	3.1410846499	3.1415926623	3.1415926186
42	3.1418346008	3.1411089027	3.1415926616	3.1415926217
43	3.1418235695	3.1411309530	3.1415926609	3.1415926244
44	3.1418112843	3.1411555104	3.1415926602	3.1415926273
45	3.1418000666	3.1411779344	3.1415926595	3.1415926298
46	3.1417898030	3.1411984518	3.1415926590	3.1415926320
47	3.1417803940	3.1412172610	3.1415926585	3.1415926340
48	3.1417717527	3.1412345360	3.1415926581	3.1415926357
49	3.1417638022	3.1412504302	3.1415926577	3.1415926372
50	3.1417564749	3.1412650788	3.1415926574	3.1415926385
誤差	0.0001638213	-0.0003275748	0.0000000038	-0.0000000151

最後一列是每欄的第 50 代數字與 3.1415926536 的差值，可看成誤差值。由表(十一)可知，經過 50 代分割，未經過校正的外切或內接三角形求出的圓周率逼近值已能準確到小數點以下第 3 位。用加權校正可以達到小數點以下第 7 位。內接的面積誤差值約為外切的兩倍。

附件二十二

定理十五： π 值逼近定理(第一代)

如圖(十一)，若不對稱切割每代以一分為二的方式切割， k 為切割的世代數，

若 $k \rightarrow \infty$ ，則 $\pi = 4 \times \sum_{t=1}^{2^{k-1}} \frac{r_{(k,t)}}{3} (2 + \frac{1}{1+r_{(k,t)}^2})$

證明：

由圖(十一)可知，

第 k 代 r 值總合為： $\sum_{n=1}^{2^{k-1}} r_{(k,n)}$ ，

則由預備定理三可知，

外切不對稱多邊形面積為：

$$4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} r_{(k,n)} \dots \textcircled{1}$$

令 $r = \frac{n}{m}$ ，設半徑 $m=1$ ，則 $r=n$ 代入預備定理三之①，

即可得知，內接不對稱多邊形面積為 $4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} (\frac{r_{(k,n)}}{1+r_{(k,n)}^2}) \dots \textcircled{2}$

由定理十一可知，第 k 代 π 近似值 = $(\textcircled{1} \times \frac{2}{3}) + (\textcircled{2} \times \frac{1}{3})$ ：

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3} \times (4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} r_{(k,n)}) + \frac{1}{3} \times (4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} (\frac{r_{(k,n)}}{1+r_{(k,n)}^2})) \\ &= 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} (\frac{2r_{(k,n)}}{3} + \frac{r_{(k,n)}}{3 \times (1+r_{(k,n)}^2)}) = 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \frac{r_{(k,n)}}{3} (2 + \frac{1}{1+r_{(k,n)}^2})，故得證。 \end{aligned}$$

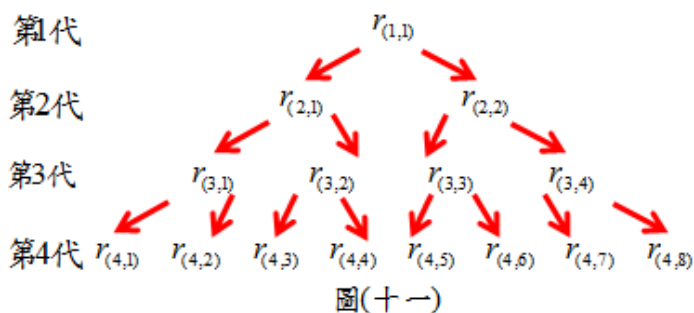
附件二十三

定理十六： π 值夾擊定理

如圖(十一)，若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，

第 k 代 π 值區間為 $4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} (\frac{3r_{(k,n)}}{3+r_{(k,n)}^2}) < \pi < 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} (\frac{r_{(k,n)} \times (3+r_{(k,n)}^2)}{3+2r_{(k,n)}^2})$

π 值由圖(十一)知，

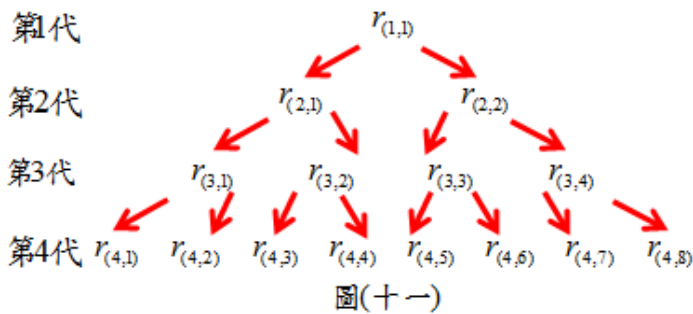


第 k 代 r 值總合為： $\sum_{n=1}^{2^{k-1}} r_{(k,n)}$ ，

則由預備定理四知，

外切不對稱多邊形面積為：

$$4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} r_{(k,n)} \dots \textcircled{1}$$



令 $r = \frac{n}{m}$ ，設半徑 $m=1$ ，則 $r=n$ 代入

預備定理四之 $\textcircled{1}$ ，即可得知，內接不對稱多邊形面積為 $4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{r_{(k,n)}}{1+r_{(k,n)}^2} \right) \dots \textcircled{2}$ ；

由定理十三可知，第 k 代 π 值 $< (\textcircled{1} \times \frac{2+r^2}{3+2r^2}) + (\textcircled{2} \times \frac{1+r^2}{3+2r^2})$

$$= (4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} (r_{(k,n)} \times \frac{2+r_{(k,n)}^2}{3+2r_{(k,n)}^2})) + (4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} (\frac{r_{(k,n)}}{1+r_{(k,n)}^2} \times \frac{1+r_{(k,n)}^2}{3+2r_{(k,n)}^2}))$$

$$= 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{r_{(k,n)} \times (3+r_{(k,n)}^2)}{3+2r_{(k,n)}^2} \right) \dots \textcircled{3}$$

$$\text{第 } k \text{ 代 } \pi \text{ 值} > 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{2r_{(k,n)} + (1+r_{(k,n)}^2) \times \frac{r_{(k,n)}}{1+r_{(k,n)}^2}}{3+r_{(k,n)}^2} \right) = 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{2r_{(k,n)} + r_{(k,n)}}{3+r_{(k,n)}^2} \right)$$

$$= 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{3r_{(k,n)}}{3+r_{(k,n)}^2} \right) \dots \textcircled{4}$$

由 $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ 即可得知， $4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{3r_{(k,n)}}{3+r_{(k,n)}^2} \right) < \pi < 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{r_{(k,n)} \times (3+r_{(k,n)}^2)}{3+2r_{(k,n)}^2} \right)$ ，故得證。

定理十七：不對稱切割之單位分數切割理論與展開式

令第 k 代 $\angle A_k = \angle B_k + \angle C_k$ ， $\angle A_k$ 之角平分線斜率為 $r_{A_k} = \frac{n_{A_k}}{m_{A_k}}$ ，

$\angle B_k$ 之角平分線斜率為 $r_{B_k} = \frac{1}{m_{B_k}}$ ， $\angle C_k$ 之角平分線斜率為 $r_{C_k} = \frac{n_{C_k}}{m_{C_k}}$ ，

$\angle C_k = \angle A_{k+1}$ ； $\{m_{A_k}, n_{A_k}, m_{B_k}, m_{C_k}, n_{C_k}, k\} \subset N$ ， $(m_{A_k}, n_{A_k}) = 1$ ， $(m_{C_k}, n_{C_k}) = 1$ ；

若 $m_{B_k} < 1 + \frac{m_{A_k}}{n_{A_k}}$ ， $\forall k > 1$ ，則 n_{C_k} 為一遞減且收斂至 1 之數列...①

若 $n_{C_t} = 1$ ，則 $\angle \frac{n_{A_t}}{m_{A_t}} \rightarrow \angle \frac{1}{m_{B_1}} + \angle \frac{1}{m_{B_2}} + \angle \frac{1}{m_{B_3}} \dots + \angle \frac{1}{m_{B_t}} + \angle \frac{1}{m_{C_t}} \dots$ ②

證明：若 n_{C_k} 為一收斂之數列，則 $\frac{n_{C_{k+1}}}{n_{C_k}} < 1$

$\because \{m_{A_k} = \angle A_{k+1}$ ， $r_{C_k} = r_{A_{k+1}} = r_{B_{k+1}} + r_{C_{k+1}}$ ， $\therefore r_{C_{k+1}} = r_{C_k} - r_{B_{k+1}}$ ，

$\therefore \angle \frac{n_{C_{k+1}}}{m_{C_{k+1}}} = \angle \frac{n_{C_k}}{m_{C_k}} - \angle \frac{1}{m_{B_{k+1}}} = \angle \frac{m_{B_{k+1}} n_{C_k} - m_{C_k}}{m_{C_k} m_{B_{k+1}} + n_{C_k}}$ ， $\frac{n_{C_{k+1}}}{n_{C_k}} = \frac{m_{B_{k+1}} n_{C_k} - m_{C_k}}{n_{C_k}} < 1$ ，

$m_{B_{k+1}} n_{C_k} - m_{C_k} < n_{C_k}$ ， $m_{B_{k+1}} n_{C_k} - n_{C_k} < m_{C_k}$ ， $\therefore m_{B_{k+1}} - 1 < \frac{m_{C_k}}{n_{C_k}}$ ，

$\therefore m_{B_{k+1}} < \frac{m_{C_k}}{n_{C_k}} + 1$ ，即 n_{C_k} ， $\forall k > 1$ ，故得證。

$\because \angle A_{k+1} = \angle B_{k+1} + \angle C_{k+1}$ 且 $\{m_{A_k} = \angle A_{k+1}$ ， $\therefore \angle B_{k+1} < \angle A_{k+1} = \angle C_k$ ，

$\therefore r_{B_{k+1}} < r_{C_k}$ ， $m_{B_{k+1}} > \frac{m_{C_k}}{n_{C_k}}$ ；

$\therefore$ 當 $\frac{m_{C_k}}{n_{C_k}} < m_{B_{k+1}} < \frac{m_{C_k}}{n_{C_k}} + 1$ 時， n_{C_k} 為一收斂數列；又 $\because n_{C_k} \subset N$ ， n_{C_k} 為一收斂至 1 之數列。

定理十八： π 值新逼近定理——簡單不對稱切割導出之新加權校正法

若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，第 k 代 π 值為

$$\pi = 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{12r_{(k,n)} + 5r_{(k,n)}^3}{12 + 9r_{(k,n)}^2 + r_{(k,n)}^4} \right)$$

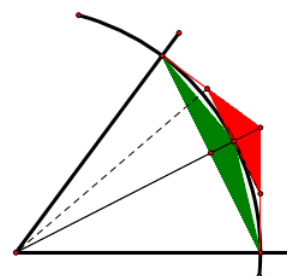
證明：

若圖(十四)為使用簡單不對稱切割 $\angle r \rightarrow \angle \frac{r}{2} + \angle \frac{r}{2+r^2}$ 後之圖形，

外切縮小之面積如圖(十四)紅色區域，內接增加之面積如綠色區域，

則依預備定理四：紅色面積 $= \frac{r_1^3}{4+2r_1^2}$ ，

$$\text{綠色面積} = \frac{2r_1^3}{4+5r_1^2+r_1^4}；$$



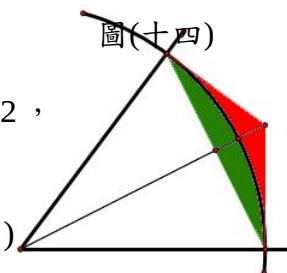
$\therefore$ 紅：綠 $= (1+r^2) \times (4+r^2) : 2 \times (4+2r^2)$ ；

在 r 值極小之情況下，紅：綠 $\rightarrow 1:2$ 。

由預備定理五可知， r 值極小時圖(十五)之紅綠色面積比 $\rightarrow 1:2$ ，

$\therefore$ 當 r 值極小時，

圖(十五)之紅綠色面積比 $\rightarrow 1:2 \approx (1+r^2) \times (4+r^2) : 2 \times (4+2r^2)$



令 S = 箏形面積和， T = 內接 $\triangle$ 面積和， R = 扇形面積和

$$\frac{(S-R)}{(R-T)} \approx \frac{(1+r^2)(4+r^2)}{2(4+2r^2)}，R \approx \frac{S \times 2(4+2r^2) + T \times (1+r^2)(4+r^2)}{2(4+2r^2) + (1+r^2)(4+r^2)} \quad \text{圖(十五)}$$

$\therefore$ 原角平分線斜率為 r ，令 $S=r$ 、 $T = \frac{r}{1+r^2}$ 代入，得 $R \approx \frac{12r+5r^3}{12+9r^2+r^4}$ ；

$$\therefore \pi = 4 \times \sum \frac{12r+5r^3}{12+9r^2+r^4}$$

$\therefore$ 若不對稱切割每代以一分為二的方式切割，則經加權校正法後，第 k 代 π 值為

$$\pi = 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{12r_{(k,n)} + 5r_{(k,n)}^3}{12 + 9r_{(k,n)}^2 + r_{(k,n)}^4} \right)，故得證。$$

Content, Research Process, and Algorithm

1. Number Pattern on a Binary Tree

Consider a full binary tree labeled recursively as follows:

- 1) The root has label 1.
- 2) If the parent is labeled $\frac{1}{m}$, then the left child has label $\frac{1}{m+1}$, and the right child has label $\frac{1}{m(m+1)+1}$. (Fig.1)

The sum $P(n)$ of each numbers in the row will approximate $\pi/4$.

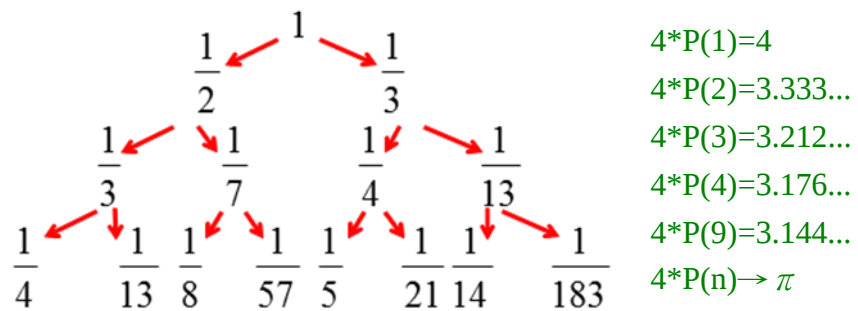


Fig.1 Full Binary Tree

We are to show how such a tree can be applied to form an approximation scheme for π through rational numbers.

2. Geometric Justification

2.1 Fundamental Lemma (Asymmetric Cut)

$OABC$ is a kite with and $\angle OCB = 90^\circ$. (Fig.2) D is a point on $\overline{AB}$. Let A' be the reflection of A across $\overline{AB}$, and extend $\overline{DA'}$ to meet $\overline{BC}$ at E .

Then:

1) $OABC$ is a kite. (since $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ are tangent to the unit circle.)

2) If $\overline{AB} = a$ and $\overline{AD} = b$, then $\overline{A'E} = \frac{a-b}{1+ab}$. (Tangent Sum Formula)

3) If $\overline{AB} = \frac{1}{m}$ and $\overline{AD} = \frac{1}{m+1}$, then $\overline{A'E} = \frac{1}{m(m+1)+1}$. (put $a = \frac{1}{m}$, $b = \frac{1}{m+1}$ in 2)

Throughout this work, the process of replacing kite $OABC$ with the two smaller kites $OADA'$ and $OA'EC$ is called **Asymmetric Cut**.

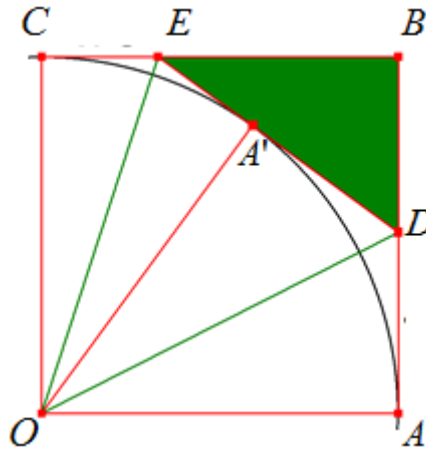


Fig.2 Construction of Asymmetric Cut

2.2 Assembly of Kites

Step 1. Construct an unit square. (*Fig.3a*)

Step 2. Apply the Fundamental Lemma to obtain the total area $1/2+1/3$. (*Fig.3b*)

Step 3. Apply the Fundamental Lemma to obtain a polygon of total area $1/3+1/7+1/4+1/13$. (*Fig.3c*)

In general, suppose Step $n-1$ has been completed. Then

Step n . Apply the Asymmetric Cut to each of the kites forming the polygon remained from Step $n-1$ with total area the sum of the reciprocal of the numbers in the n th row of the number pattern in *Fig.1*.

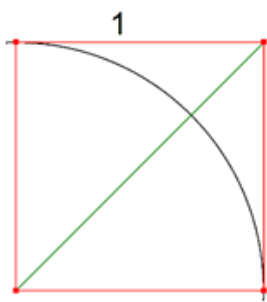


Fig.3a

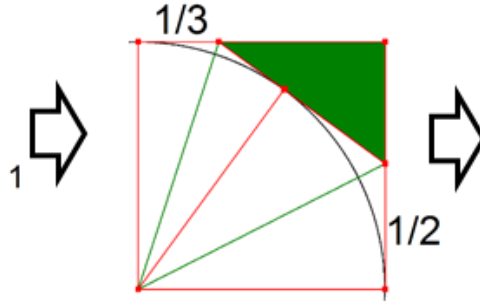


Fig.3b

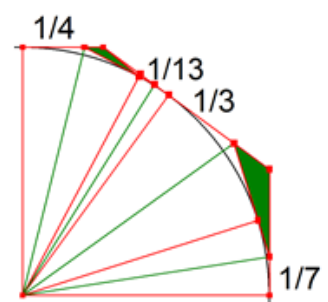


Fig.3c

2.3 Convergence

Since kites forming the n th generation are non-overlapping, covers the unit circle and all lie within a circle of radius $1 + 1/n$, the sum area of all such kites converges to $\pi/4$.

(Fig.4)

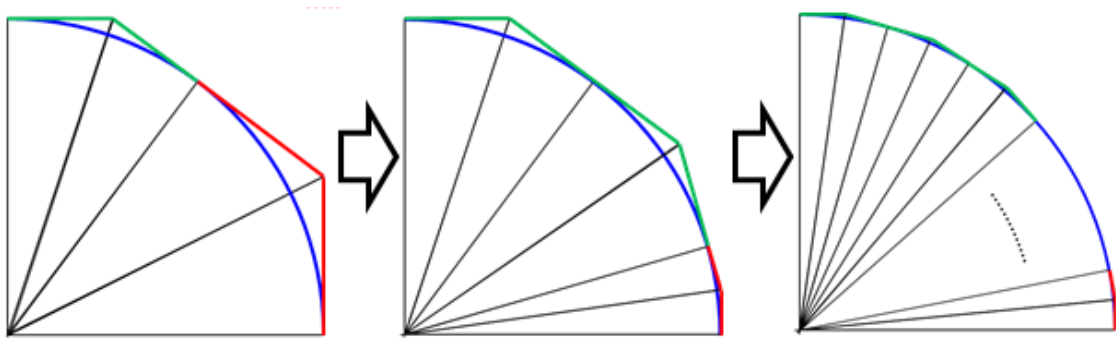


Fig.4

2.4 Discussions

- 1) Taking the arc-length is a discontinuous process (cannot justify easily), so we calculate the total area of kites without using side lengths.
- 2) The binary tree is generated directly by the Fundamental Lemma.
- 3) All of the kites have rational areas, therefore we can calculate the total area with rational numbers computed from the sum of the reciprocals of the numbers in the same row to approximate $\pi/4$.

3. Flexibility of Multiple Dissections

3.1 Theorems:

Theorem 1: (Multicut Formula)

If a kite formed in an unit circle with its central angle 2θ is divided into n parts, each with central angle $2\theta_k$ ($k=1,2,\dots,n$), then the total area of the n kites is

$$\tan \theta_1 + \tan \theta_2 + \dots + \tan \theta_n. \text{ If } \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{n-1} > \theta_n, \text{ then the total area is } (n-1) \tan \theta_1 + \tan(\theta - (n-1)\theta_1).$$

Theorem 2 : Regarding to **Theorem 1**,

If a kite with the area $1/m$ is cut into 3 parts with 2 bigger kites and 1 smaller kites, to

$$\text{make the smaller kite} \rightarrow 0, \text{ then the total area is } 2 \times \frac{1}{2m+1} + \frac{m}{2m^3 + 2m^2 + 2m + 1}.$$

Theorem 3 : Regarding to **Theorem 1**,

$$\text{If cutting it into four parts, then the total area will be } 3 \times \frac{1}{3m+1} +$$

$$\frac{9m^2 - 2m - 2}{27(m^4 + m^3 + m^2) + 16m + 2}.$$

Theorem 4 : Regarding to **Theorem 1**, if main angle r is cut into n parts, and the offsprings are named as r_s , $s = 1..n$, then

$$r = \frac{\text{Sum of each } r_s - \text{Sum of products of each three } r_s + \dots}{1 - \text{Sum of products of each two } r_s + \text{Sum of products of each four } r_s - \dots}$$

3.2 Cutting Procedure:

Step 1: Construct an unit square. (*Fig. 3a*)

Step 2: Apply the Multi-cut Formula to obtain the total area $2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$, which is the two bigger kites with the area $1/3$ and one smaller kite with the area $1/7$ (*Fig. 5a*)

Step 3: Apply the Multi-cut Formula to obtain the total area $5 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{3}{79}$. The two kites with the area $1/3$ are replaced by four bigger kites with the area $\frac{1}{2 \times 3 + 1} = \frac{1}{7}$ and

two smaller kite with area $\frac{3}{2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1} = \frac{3}{79}$ so the total area is

$$2(2 \times \frac{1}{7} + \frac{3}{79}) + \frac{1}{7} = 5 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{3}{79}. \text{ (Fig. 5b)}$$

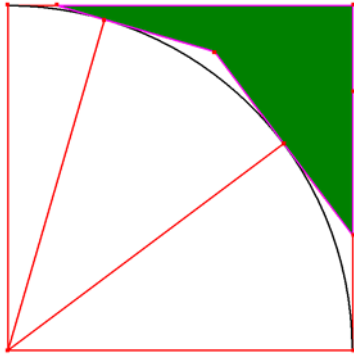


Fig. 5a $2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$

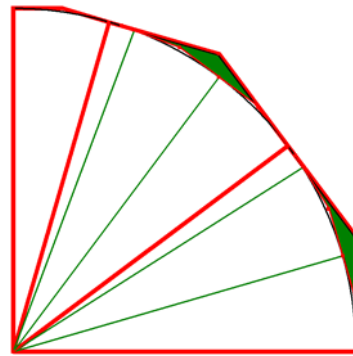


Fig. 5b $5 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{3}{79}$

3.3 Calculations:

In order to reduce the number of cuttings, we

- (1) only replace the biggest kites with smaller kites in each generation
- (2) the other smaller kites, will remain after several generations without being cut.

The calculation can be transformed into lines:

a) Replace one kite with three:

$$1 \rightarrow 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \rightarrow 5 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{3}{79} \rightarrow 10 \times \frac{1}{15} + 5 \times \frac{7}{799} + 2 \times \frac{3}{79} \rightarrow$$

$$20 \times \frac{1}{31} + 10 \times \frac{15}{7231} + 5 \times \frac{7}{799} + 2 \times \frac{3}{79} \dots$$

b) Replace one kite with four:

$$1 \rightarrow 3 \times \frac{1}{4} + \frac{5}{99} \rightarrow 9 \times \frac{1}{13} + 3 \times \frac{134}{9138} + \frac{5}{99} \rightarrow 27 \times \frac{1}{40} + 9 \times \frac{1493}{835239} + 3 \times \frac{134}{9138} + \frac{5}{99} \rightarrow \dots$$

We can compare the efficiency of these algorithms (*Table 1*) with this formula:

$$\pi \rightarrow 4 \times \text{sum of the rational numbers in the same step}$$

The red numbers are the accurate digits of approximation.

The smaller the kites are, the quicker the approximation is. (*Fig. 4*)

Table. 1 (The left is without replacement, the right is after replacement.)

n	1→2	1→3	1→4
1	4	4	4
2	3.333333	3.238095	3.202020
3	3.212454	3.157888	3.147066
4	3.175916	3.144961	3.142158
5	3.161107	3.142360	3.141653
6	3.153898	3.141776	3.141599
7	3.149941	3.141637	3.141593

n	1→2	1→3	1→4
1	4	4	4
2	3.333333	3.238095	3.202020
3	3.238095	3.160940	3.147219
4	3.186813	3.145683	3.142209
5	3.167765	3.142582	3.141661
6	3.159163	3.141832	3.141600
7	3.154734	3.141653	3.141593

3.4 Discussions

1) From *Fig. 4*, we can see that if we quickly dissect the kites, the calculation will be more efficient. (*Table 1*)

2) **Theorem 4** allows the flexibility to design the number of kites in each step of the dissection, therefore lots of algorithms of Pi can be developed

Ex: Replace each kite with 5, 6, or more...

3) If we still dissect each kite with 4 smaller ones, there will be $4^6 = 4096$ kites in the sixth step. In order to reduce the number of kites, we only cut the kite with the maximum area (cause the most error) at that moment.

4) **Theorem 4** is a general formula for multicut, and can generalize all kinds of Machin-like formulas.

4. Relation to Machin-like Formulas

All of the Machin-like Formulas are historically developed by calculus.

However, by taking advantage of Multi-cuts formula, we can reduplicate other different combinations of the Machin-like Formula and proof them geometrically.

This is the geometric proof of the Machin's Formula:

From the **Theorem 4**, we can develop $r_r = \frac{r_o - 4r - 6r^2r_o + 4r^3 + r^4r_o}{1 + 4rr_o - 6r^2 - 4r^3r_o + r^4}$, which replacing one kite with the area r_o with 5 smaller ones consist of four bigger kites with the area r and one smaller with the area r_r . Given $r_o = 1$, $r = 1/5$, and then we can get $r_r = -\frac{1}{239}$, which can be written by $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$ (**Machin's formula**).

(Table 2)

Because of the flexibility of the Multicut formula, we can design many formulas which replace each kite with more smaller ones. Therefore all of Machin-like formulas can be derived by our Multicut formula. (Table 2)

Table 2

EX	Arctan expantions	The formulas based on Multicut Formula	Derived from
1	$\frac{\pi}{4} = \arctan 1$	1	The first step
2	$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$	$4 \times \frac{1}{5} - \frac{1}{239}$	1→5, the second step
3	$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79}$	$5 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{3}{79}$	1→3, the third step

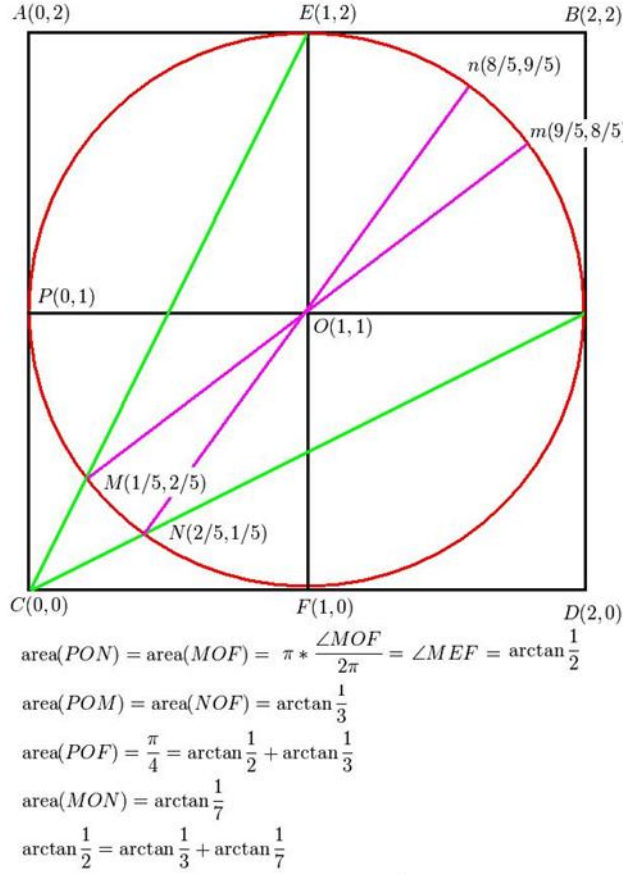


Fig.6 One of Machin-like Formula in Wiki

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

$$4 \times \frac{1}{5} - \frac{1}{239}$$

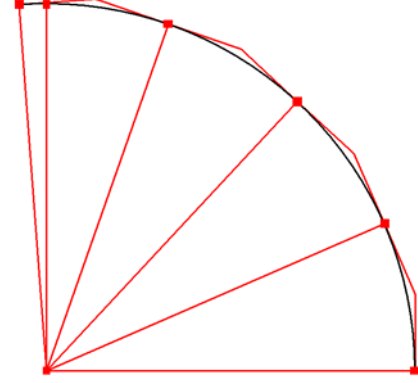


Fig.7 Machin's Formula

The geometric meaning (Fig.6) of Machin-like formula is not general. The Asymmetrical Cut can show much more correlation to geometry. (Fig.7)

We can design a totally different formula similar to the Egyptian Fraction.

Theorem 5: Given a rational number $0 < \frac{q}{p} < 1$. Find a integer n which satisfies

$$\frac{p}{q} < n_1 < \frac{p}{q} + 1. \text{ Then the value of } \frac{q_1}{p_1} \text{ in the formula } \arctan \frac{q}{p} = \arctan \frac{1}{n_1} + \arctan \frac{q_1}{p_1}$$

can be found. Throughout this kind of procedure, we can further get

$$\arctan \frac{q}{p} = \arctan \frac{1}{n_1} + \arctan \frac{1}{n_2} + \dots + \arctan \frac{1}{n_k}, \text{ where } n_1, n_2, \dots, n_k \text{ are all positive}$$

integers.

Multicut Formula can also lead to **Leibniz formula** and one of **Taylor's series expansions**.

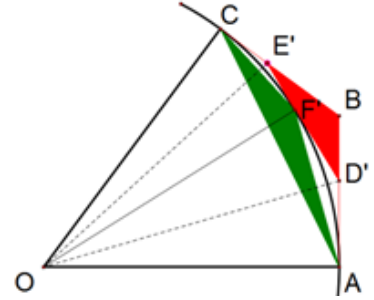
5. Weighted Average

5.1 Weighted Average

Theorem 6: $OABC$ is a kite with its side length $\overline{OA}=1$, $\overline{AB}=r$, $\angle OAB = \angle OCB = 90^\circ$. $OAD'F'$ and $OF'E'C$ are the kites formed in $OABC$ with $\overline{AD'} = r/2$. (Fig. 8) Then

1) the area of $\triangle OAC = \frac{r}{1+r^2}$

2) the red area is $\frac{r^3}{4+2r^2}$, the green area is $\frac{2r^3}{4+5r^2+r^4}$.



3) if $r \rightarrow 0$, then the ratio of the two areas will be $\rightarrow 1/2$. Fig.8 Weighted average

From the Fundamental Lemma, we'll get $r \rightarrow \frac{r}{2} + \frac{r}{2+r^2}$, and the ratio of the red and the green area in Fig.8 is $(1+r^2)(4+r^2):2(4+2r^2)$. Assume that the side length of a smaller kite in the second step is $r_2 = f(r)$, then the ratio of the red and the green area after the second cut is $(1+r_2^2)(4+r_2^2):2(4+2r_2^2)$.

It can be seen that if the area of the kite r is close to 0, then the ratio between the red and green area is close to 1:2, as same as those in the second and more steps.

Therefore:

1) The ratio of the two areas (outside-sector):(sector-inside) $\rightarrow 1:2$.

2) No matter we apply each Asymmetric Cut to this method, when the area of kites shrink to 0, the error ratio will be close to 1:2.

Theorem 7: Apply Asymmetric Cut to Weighted Average, when replacing each kite with 2 smaller ones in each step, the value of π in volume k is

$$\pi = 4 \times \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\frac{12r_{(k,n)} + 5r_{(k,n)}^3}{12 + 9r_{(k,n)}^2 + r_{(k,n)}^4} \right)$$

5.2 Asymmetrical Cut plus Weighted Average

We summarize all of the algorithm of π in this research applying to the weighted average and make the comparison of these formulas (replacing each kite with 4 smaller ones): (Table 3)

① $4 \times \sum_i^{4^{k-1}} r$ (total area of kites)

② $4 \times \sum_i^{4^{k-1}} \frac{r}{1+r^2}$ (total area of inscribed polygon)

③ $\frac{1}{3} (2①+②) = 4 \times \sum_i^{4^{k-1}} \frac{r}{3} (2 + \frac{1}{1+r^2})$ (constant ratio $\frac{1}{2}$)

④ $4 \times \sum_i^{4^{k-1}} \left(\frac{12r + 5r^3}{12 + 9r^2 + r^4} \right)$ (accurate ratio)

The computation shows that our method is indeed correct and efficient.

Table 3

n	①	②	③	④
1	4.0	2	3.334552845537	3.0909090909091
2	3.2020202	3.025035	3.143025341274	3.1412331721449
3	3.1470660	3.130684	3.141605475929	3.1415894468782
4	3.1421583	3.140461	3.141592794126	3.1415926184543
5	3.1416539	3.141469	3.141592655256	3.1415926531733
6	3.1415994	3.141579	3.141592653610	3.1415926535847
7	3.1415934	3.141591	3.141592653590	3.1415926535897

5.3 Discussions

1) At the last part, we only discuss the area of the circumscribed polygon. In this part, we construct similar inscribed polygon which has the rational number as their area and develop the best weighted average to converge the area of the unit circle π .

2) “The simple average” is came from the constant ratio $1/2$, which is

“The average of the sum”. The best average is the sum of each average.

3) From Table 3, we can indeed see that $7.7022 \times 10^{-6} : 1.5045 \times 10^{-5}$ is close to $1:2$.

4) In **Theorem 6**, we develop the Weighted Average with $r \rightarrow \frac{r}{2} + \frac{r}{2+r^2}$.

Indeed each kind of cutting method can lead to one Weighted Average method, therefore we can further design many kinds of Weighted Average methods.

6. Characteristics

- 1) The algorithms are based on both **rational numbers** and **geometric meaning** which are seemed to be rare in literature, therefore it can be implemented without truncation error and can be understood visually.
- 2) The idea in this research allows the **flexibility** to design the number of kites in each step of the dissection, so lots of algorithms of Pi (including many kinds of **Asymmetric Cut** and **Weighted Average**) can be developed.
- 3) We found the **general solution** and the **geometrical proof** of the Machin-like formula which were historically based on calculus.

Acknowledgements

**Institute of Biochemistry and Molecular Chemistry, National Taiwan University,
Taipei, Taiwan**

Emeritus Professor: Jung-Yaw Lin

Department of Mathematics, National Tsing-Hua University, Hsinchu, Taiwan

Professor: Jen-chung Chuan

Department of Mathematics, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan

Professor: Ruey-Lin Sheu

Department of Mathematics, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan

Assistant Professor: Yu-Chen Shu

Kaohsiung Municipal San Ming Junior High School, Kaohsiung, Taiwan

Mathematics teacher: Chao- Hsun Huang

Kaohsiung Municipal San Ming Junior High School, Kaohsiung, Taiwan

Mathematics teacher: Chen-Shan Tsai

I am sincerely appreciated to my math professor, Mr. Chuan, Mr. Sheu, and Mr. Shu, and my math teacher, Mr. Huang, Mr. Tsai. Thank you for instructing me to conduct this project. Your devotion to the research is always my paragon. Besides, because of Mr. Chuan's passion, software and instruction of oral skill, I am able to deal with all of the challenges to continue my research. His passion for math affects me deeply.

Furthermore, thank for my family and classmates supporting me to keep on the research. When I was frustrated, their humorous consolation and positive attitude really cheered me up. Last, I appreciate the staff in National Taiwan Educational Center.

Due to the people above, I can join such a grand scientific feast!

References

1. Bellos A., The Story of Pi. In: Alex's Adventures in Numberland, Chapter 4, Chinese translation by So-Jen Hu, first edition, Taipei, China Times Publishing Company, 2012; 117~145.
2. Arndt, J.; Haenel, C. (2006), Pi Unleashed. Springer-Verlag. ISBN 978-3-540-66572-4, English translation by Catriona and David Lischka.
3. Calcut, J. S., (2009), "Gaussian Integers and Arctangent Identities for π ". The Mathematical Association of America. Monthly 116 June–July, 515~530.
4. Schepler, H. C, (1950), "The Chronology of Pi". Mathematics Magazine (Mathematical Association of America) 23 (3): 165–170 (Jan/Feb), 216–228 (Mar/Apr), and 279–283 (May/Jun)
5. Jon M., (2011), "All Rational Approximations of Pi Are Useless".
<http://blog.wolfram.com/2011/06/30/all-rational-approximations-of-pi-are-useless/>
6. John H., (2009), "Rational Approximations to Pi"
http://www.isi.edu/~johnh/BLOG/1999/0728_RATIONAL_PI/
7. Chien-Li H., (2005), "How to derive Machin-like formulas".
w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d291/29103.pdf
8. Machin-like formula, http://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula
9. Ramanujan–Sato series
http://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan%E2%80%93Sato_series#cite_ref-Chan_1_1-0

評語

本作品重新探討著名圓周率 π 的近似估計。古典的作法係以外切或內接正 n 邊形去逼近，但是計算上會不斷地遭遇開根號所產生的無理數。本文以畢氏數發展出一套非對稱 n 邊形近似 π 的方法。其特點是多邊形之邊長均為有理數，方便計算。再佐以加權校正的方法，加速逼近的速度。本件作品具有不錯的巧思，但是對於實質計算效率和相關數學工作之比較仍嫌不足。宜在計算複雜度上之分析與電腦實證，再多做加強。