

2013 臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

作品編號 140033

參展科別 物理與太空科學科

作品名稱 強磁場下電漿孤立子的演化

得獎獎項 二等獎

阿布達比正選代表:2013 年國際科學博覽會

就讀學校 臺北市立建國高級中學

指導教師 闕志鴻、黃靜瑩

作者姓名 陳毅

關 鍵 字 Plasma、Soliton、Numerical simulations

作者簡介



我是陳毅。

上高中以來，做研究已經成為了我生活的一部分，我很感謝教授、校內老師以及研究夥伴的協助，能使我做研究的路上少了許多障礙。

我從小就喜歡數理科，不單單只因為我在同儕中能擁有相對良好的學業成績，也因為我喜歡它帶給我的思考方式，靈活、易懂、單純且直覺，這也是我想投入且我會投入研究的一大原因。

這個研究經過了一年半的波折，才擁有現在的成果，中間有過一段難熬的時光，曾經發生組員退組，也有研究夥伴後來加入，而模型設計的部分也是經過好久的驗證才得以完成，但一切辛苦都很值得。

這項研究計畫還沒結束，未來仍舊會繼續深入我們的研究主題，找出電漿中，更多有趣好玩且未知的現象。

摘要

本計畫採用數值模擬進行研究，並建立一維電漿模型來模擬電漿孤立子在不均勻背景中的演化。

藉由模擬及觀察一維電漿系統中的各種振盪，驗證模型之正確性。在模型建構的過程中，曾針對數值精度問題、能量、動量不守恆提出各種解決辦法，最終完成的模型可以完全詮釋馬克士威方程組中所有電場與磁場的行為。

此模型已檢驗過幾種在電漿中的波，包括：Plasma oscillation、Ion acoustic wave、Hybrid oscillation、Extraordinary wave(X wave)以及Magnetosonic wave。其模擬結果與理論值相當接近，代表此模型可以正確演示真實電漿之行為。

接著模擬在強磁場以及不均勻磁場中，孤立子的各種行為表現以及演化方式，我們可以尋找某些物理量，其足以代表孤立子在系統中的行為，這個結果或許可以提供線索幫助我們了解星雲的能量來源。且這個模型未來將用於預測電漿物理學的未知現象及分析電漿態星體。

Abstract

This project is done by numerical simulation, constructing the one dimensional plasma model to demonstrate the evolution of plasma solitons in non-uniform background.

We verified the correctness of model by observing various plasma oscillations. In the progress, we've met problems including data accuracy, the non-conserving system momentum and energy and all solved by adjusting the calculate methods of the program. The final one can fully annotate the Maxwell Equations.

This program has behaved plasma oscillation, ion acoustic wave, hybrid oscillation, extraordinary wave and magneto sonic wave. The behaviors of the model almost fit the theoretic prediction, showing that the model can properly demonstrate the behavior of real plasma.

Since we found some feature of electrostatic and electromagnetic solitons, we've been observing solitons in non-uniform background. By finding out the key quantities to the solitons, we get the characteristic of them. It may be the clue to find the energy source of nebula. The model can demonstrate some unknown phenomenon of plasma physic and analyze plasma star.

壹、前言

此計畫的目標在研究一個有磁場的電漿體(等離子體)中，孤立子的行為特性。

孤立子是像粒子的波，理想的孤立子是佔有空間地且被侷限的非線性波，它攜帶特定的能量、動量和質量。在理想狀態下，這些都屬於守恆量。然而在脫離理想環境的情況下，例如存在於一個不均勻的磁場中，孤立子就會開始和環境產生交互作用，進而改變它的能量、動量，甚至是質量。

微觀的物理定律都是守恆律，但若系統複雜時，我們必須要找出巨觀的等效定律。當我們掌握不理想狀態的守恆量後，並確認基本物理量的守恆，就可以找出巨觀的運動方程式。

這個計畫採用數值模擬，在研究進行前，必須得先建構一個模型，其可以在任何環境下吻合大家所熟知的物理定律。在這個計畫中，相對於真實電漿的實驗，已建構出一個良好的一維空間模型，能在使用較少資源的情況下，幫助我們觀察電漿的行為，其經過不少驗證，符合實驗以及理論上已知的結果。我們利用這個模型進行不同初始條件(initial condition)的電漿模擬，觀察其所產生的孤立子在環境中的變化，並從中找尋它的演化方式以及不同參數下的關聯性。

貳、研究方法及過程

一、系統型態：

在我們的系統中，假想所有粒子是一個面積無限大的薄板子，因此可用一維模型來進行模擬以及分析，因 Y 方向的速度平行於板子，故不影響它們彼此在一維空間的相對位置。(圖 2-1)

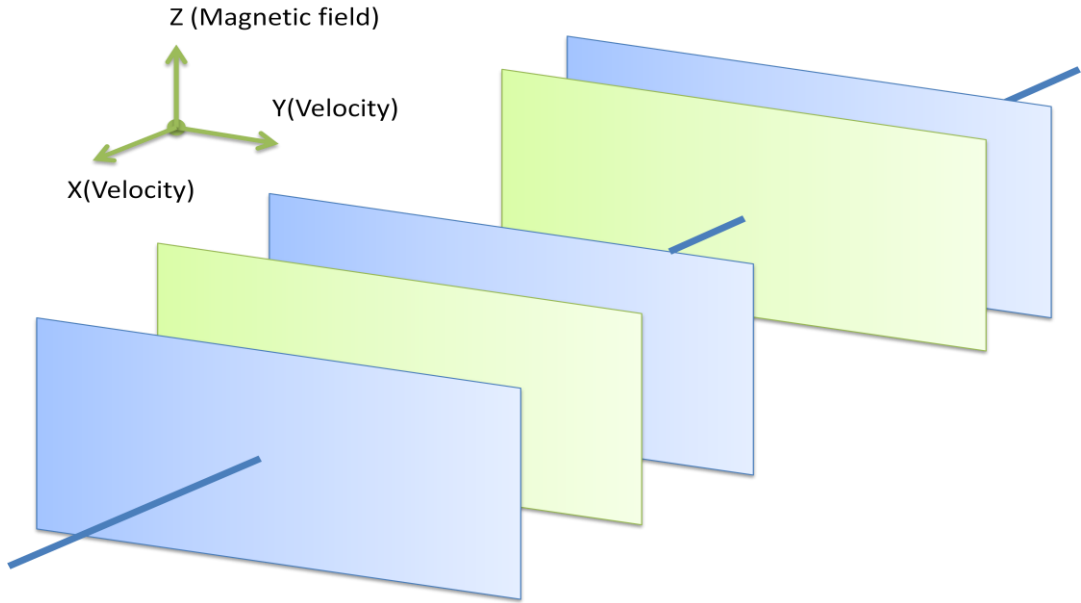


圖 2-1

我們藉由調動系統中的部份參數的模擬，驗證物理模型的正確性。如：
粒子數、系統長度、單一粒子帶電量、正負粒子質量比等。

二、方程式概述：

因採用數值模擬，必須將程式中所需使用到的方程式一一列出，並改為
差分形式，而模擬結果也需與理論方程進行比較及驗證。

(一)運動方程式：

$$1. \text{ 位置： } \overrightarrow{x^{l+1}} = \overrightarrow{x^l} + \Delta t \times \overrightarrow{v_x^{l+0.5}} \quad [2-1]$$

$$2. \text{ 速度： } \overrightarrow{v_x^{l+0.5}} = \overrightarrow{v_x^{l-0.5}} + \frac{\Delta t \cdot q}{m} (\overrightarrow{E_x^l} + \overrightarrow{v_y^l} \times \overrightarrow{B_z^l}) \quad [2-2]$$

$$\overrightarrow{v_y^{l+0.5}} = \overrightarrow{v_y^{l-0.5}} + \frac{\Delta t \cdot q}{m} (\overrightarrow{E_y^l} - \overrightarrow{v_x^l} \times \overrightarrow{B_z^l})$$

$$3. \text{ 場：包含 } \overrightarrow{E_x}, \overrightarrow{E_y} \text{ 以及 } \overrightarrow{B_z}。$$

(1) $\overrightarrow{E_x}$ ：

根據一維的 Maxwell's equation，我們可以得到密度與電場的
間接關係：

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E_x^l} = 4\pi\rho^l$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \overrightarrow{E_x^l}(x) = 4\pi\rho^l(x) \quad [2-3]$$

再將 Eq. [2-3]經由快速傅立葉轉換(參見「附錄一」)，得到在

Fourier space 下 $\overrightarrow{E_x^l}(k)$ 與 $\rho^l(k)$ 的關係

$$ik\overrightarrow{E_x^l}(k) = 4\pi\rho^l(k) \quad [2-4]$$

$$\overrightarrow{E_x^l}(k) = \frac{4\pi\rho^l(k)}{ik}$$

最後由快速傅立葉反轉換回 Real space，我們可以得到 $\overrightarrow{E_x^l}$ 。

$$\overrightarrow{E_x^l}(x) = \int \frac{4\pi\rho^l(k)}{ik} dk \quad [2-5]$$

(2) $\overrightarrow{E_y}$:

由馬克士威方程可以得到電場與磁場的相互作用關係

$$-c \nabla \times \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad [2-6]$$

$$c \nabla \times \vec{B} - J = \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad [2-7]$$

因此我們可以將 $\overrightarrow{E_y^l}$ 、 $\overrightarrow{B_z^l}$ 以及 $\overrightarrow{J_y^{l+0.5}}$ 代入 Eq. [2-8] 中(詳細推導過程請

參見「附錄二」)得到 $\overrightarrow{\delta E_y^{l+0.5}}$

$$\overrightarrow{\delta E_y^{l+0.5}} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \nabla^2 \overrightarrow{\delta E_y^{l+0.5}} = -c \Delta t \nabla \times \overrightarrow{B_z^l} + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \nabla^2 \overrightarrow{E_y^l} - \Delta t \overrightarrow{J_y^{l+0.5}} \quad [2-8]$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta E_y^{l+0.5}}(x) - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overrightarrow{\delta E_y^{l+0.5}}(x) \\ = -c \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \overrightarrow{B_z^l}(x) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overrightarrow{E_y^l}(x) - \Delta t \overrightarrow{J_y^{l+0.5}}(x) \end{aligned} \quad [2-9]$$

通過快速傅立葉的轉換並整理，可以得到 Eq. [2-10]

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{c^2 \Delta t^2 k^2}{4}\right) \overrightarrow{\delta E_y^{l+0.5}}(k) &= -ikc \Delta t \overrightarrow{B_z^l}(k) - \frac{c^2 \Delta t^2 k^2}{2} \overrightarrow{E_y^l}(k) - \Delta t \overrightarrow{J_y^{l+0.5}}(k) \\ \overrightarrow{\delta E_y^{l+0.5}}(k) &= \frac{-ikc \Delta t \overrightarrow{B_z^l}(k) - \frac{c^2 \Delta t^2 k^2}{2} \overrightarrow{E_y^l}(k) - \Delta t \overrightarrow{J_y^{l+0.5}}(k)}{1 + \frac{c^2 \Delta t^2 k^2}{4}} \end{aligned} \quad [2-10]$$

最後再由快速傅立葉反轉換，得到 $\overrightarrow{\delta E_y^{l+0.5}}$

$$\delta \overrightarrow{E_y^{l+0.5}}(x) = \int \frac{-ikc\Delta t \overrightarrow{B_z^l(k)} - \frac{c^2\Delta t^2 k^2}{2} \overrightarrow{E_y^l(k)} - \Delta t \overrightarrow{J_y^{l+0.5}}(k)}{1 + \frac{c^2\Delta t^2 k^2}{4}} dk \quad [2-11]$$

$\overrightarrow{E_y^l}$ 加上 $\delta \overrightarrow{E_y^{l+0.5}}$ 便是下一個時間點的 $\overrightarrow{E_y^{l+1}}$ 。

(3) $\overrightarrow{B_z}$:

由 $\overrightarrow{E_y^l}$ 和 $\overrightarrow{E_y^{l+1}}$ 代入馬克士威方程便可以求得 $\delta \overrightarrow{B_z^{l+0.5}}$

$$\begin{aligned} \delta \overrightarrow{B_z^{l+0.5}} &= -c\Delta t \nabla \times \left(\frac{\overrightarrow{E_y^l} + \overrightarrow{E_y^{l+1}}}{2} \right) \\ \delta \overrightarrow{B_z^{l+0.5}}(x) &= \int -ikc\Delta t \left(\frac{\overrightarrow{E_y^l(k)} + \overrightarrow{E_y^{l+1}}(k)}{2} \right) dk \end{aligned} \quad [2-12]$$

將 $\overrightarrow{B_z^l}$ 加上 $\delta \overrightarrow{B_z^{l+0.5}}$ 便可以得到下一個時間點的 $\overrightarrow{B_z^{l+1}}$ 。

(二) 理量方程式與分析方法：

1. Gaussian distribution :

在進行場的計算時，往往都是以「grid」進行 Fourier transform，可是我們在每個時間點開始都只擁有「particle」本身的數據，因此要進行 $x_{\text{particle}} \rightarrow \rho_{\text{grid}}$ 的程序(圖 2-2)，而在這個計劃中的轉換方式，皆採用 Gaussian distribution 進行轉換(Eq.[2-13])。

$$\rho(x) = \sum_i e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma^2}} \quad [2-13]$$

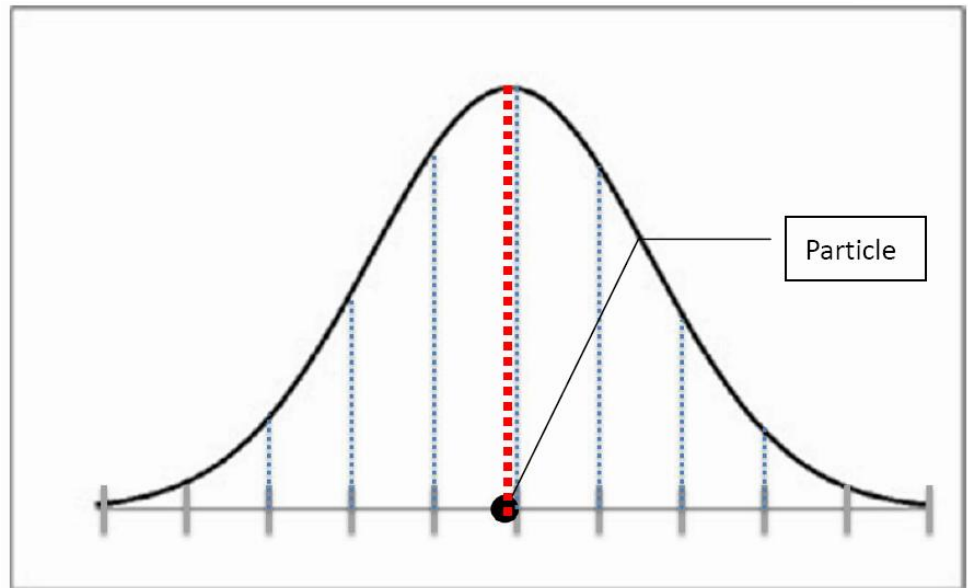


圖 2-2

在得到每個 grid 的場以後，也以相同的方式進行轉換，確保動量以及能量不會在這個過程中有誤差而散失。

2. Energy & Momentum :

能量和動量是我們觀察一個系統正確與否的重要指標，而能量由「動能」以及「位能(場)」所構成，動量則由「力學動量」與「電磁場動量」所組成。

$$(1) \quad \text{動能} : K = \frac{1}{2} \sum_j m_j v_j^2 \quad [2-14]$$

$$(2) \quad \text{位能} : U = \frac{E_x^2 + E_y^2 + B_z^2}{8\pi} \quad [2-15]$$

$$(3) \quad \text{力學動量} : P_m = \sum_j m_j v_j \quad [2-16]$$

$$(4) \quad \text{電磁動量} : P_f = \frac{4\pi}{c^2} \int \vec{E} \times \vec{B} \quad [2-17]$$

3. Fourier analysis (Harmonic Analysis) :

為了觀察電漿中的振盪，我們將空間中的各種物理量對 X 軸進行 Fourier analysis，以得到其成分波。

$$f(x, t) = \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + (a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) + \dots$$

$$a_n(t) = \int_0^L f(x, t) \cos\left(n \frac{2\pi x}{L}\right) dx \quad [2-18]$$

$$b_n(t) = \int_0^L f(x, t) \sin\left(n \frac{2\pi x}{L}\right) dx$$

(三)理論方程式：

1. Plasma Oscillation :

在電漿體中，若離子質量遠大於電子(離子不動)，電子的振盪頻率 ω_p 為

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [2-19]$$

2. Ion acoustic wave :

當離子的移動於電漿中不可忽略，離子產生一種聲波，其 ω 為

$$\omega = k \left(\frac{KT_e + \gamma_i KT_i}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [2-20]$$

經過整理和變換，可以得到

$$\omega = k \left(\frac{m_e v_{th}^2}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [2-21]$$

3. Hybrid frequency :

在環境中有磁場的情況下，必須附帶考慮磁場所造成的頻率 ω_c 。

ω_p 與 ω_c 混合，產生 Upper hybrid frequency

$$\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 \quad [2-22]$$

對於離子，會產生另外一種混合頻率，稱做 Lower hybrid frequency

$$\frac{1}{\omega_l^2} = \frac{1}{\omega_c \Omega_c} + \frac{1}{\Omega_p^2} \quad [2-23]$$

4. Extraordinary wave (X wave) :

當 $\vec{E} \perp \vec{B}$ 且 $\vec{k} \perp \vec{B}$ 時，因系統震盪而產生感應磁場與電場。

由磁場震盪可以看到 X wave

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \quad [2-24]$$

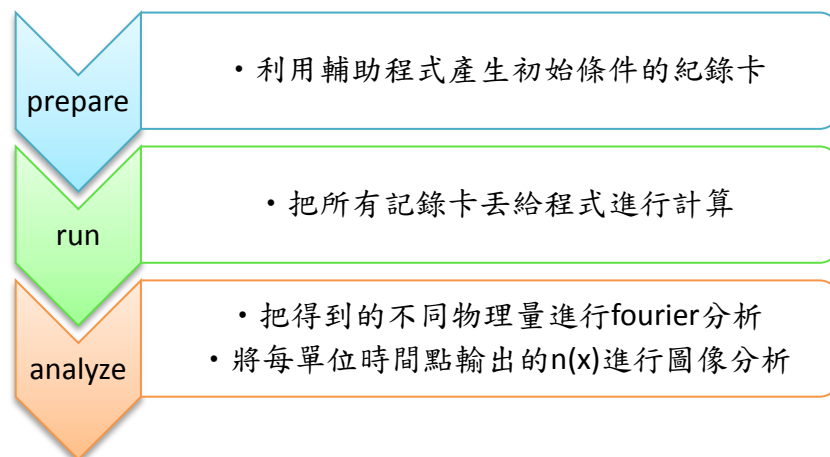
5. Magnetosonic wave :

在電磁感應的系統中，當 $\vec{k} \perp \vec{B}$ 且 $\vec{B}_0 \neq 0$ 時，可以看到離子的 Ion acoustic wave 演化成為 Magnetosonic wave

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_s^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2} \quad [2-25]$$

三、實驗流程及程式設計

(一)實驗流程：



(二)輸入資料：

1. VCAR：各粒子初始速度。
2. PCAR：各粒子初始位置。
3. FTCAR：所想要進行分析之波長。
4. INCAR：系統的其他初始參數。(圖 2-3)

(三)輸出資料：

1. DENCAR_E：電子密度經由 Fourier analysis 在不同波長的量值。
2. DENCAR_I：離子密度經由 Fourier analysis 在不同波長的量值。
3. EYWCAR：Y 方向電場之空間分布經由 Fourier analysis 在不同波長的量值。
4. BZWCAR：Z 方向磁場之空間分布經由 Fourier analysis 在不同波長的量值。
5. VECECAR：整體系統之質心速度。
6. VECECAR_E：電子之質心速度。
7. VECECAR_I：質子之質心速度。
8. KINECAR_E：電子之動能。
9. KINECAR_I：質子之動能。
10. ELEFIXCAR：X 方向電場所產生之電位能。
11. ELEFIYCAR：Y 方向電場所產生之電位能。
12. MANFIZCAR：Z 方向磁場所產生之磁位能。
13. ENERCAR：系統總能量。
14. MOMCAR：系統力學動量。
15. MOSCAR：系統電磁動量。
16. MOACAR：系統總動量。

```

chenyi@geisha:~/0921-0927/0924/bf/1
PARTICLE = 5000          Amount of particle
LENGTH    = 10000       Length of system
TIME      = 20000       Amount of time step
DT        = 0.005       delta T in real time line
r         = 4           σ of Gaussian distribution
M_ION     = 50          Ion mass
M_ELEC    = 1           Electron mass
System    = 2           System species
B_F type  = 1           Magnetic field type
B_F init  = 1           Initial magnetic field
B_F end   = 1           Terminal magnetic field
B_wave    = 10          Wave number of magnetic field oscillation
~

```

圖 2-3

(四)程式運作概要：

1. 初始條件：從輸入資料得到系統初始狀態以及粒子相關參數。
2. 模擬流程(圖 2-4)
3. 輸出

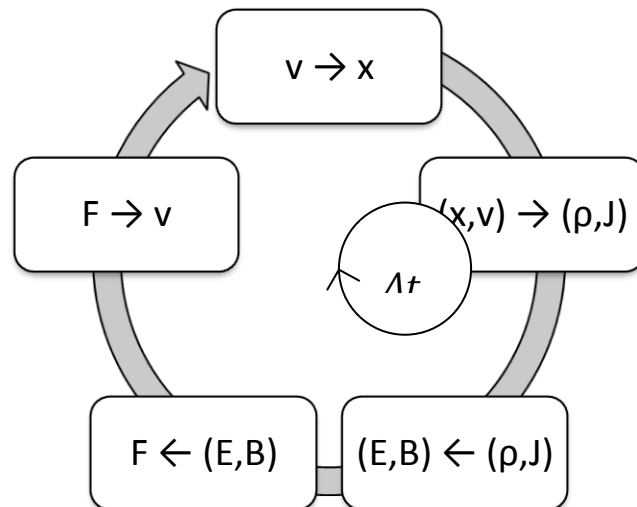


圖 2-4 模擬流程

參、研究結果與討論

一、Plasma oscillation：

本實驗將變因分為「系統密度」、「粒子帶電量」以及「電子質量」，以長波分析的方式，討論不同變因對模擬結果的影響以及其 ω_p 是否符合 Eq. [2-19]的理論值。

(一)以「系統密度」進行分析：

表 3-1-1 系統初始參數

Time step	20000
Δt	0.005
粒子數（電子,質子）	(2500,2500)
電量（電子,質子）	(-1,1)
質量（電子,質子）	(1, ∞)

表 3-1-2 實驗數據

密度	0.25	0.5	1	2
ω	1.772	2.518	3.392	4.851

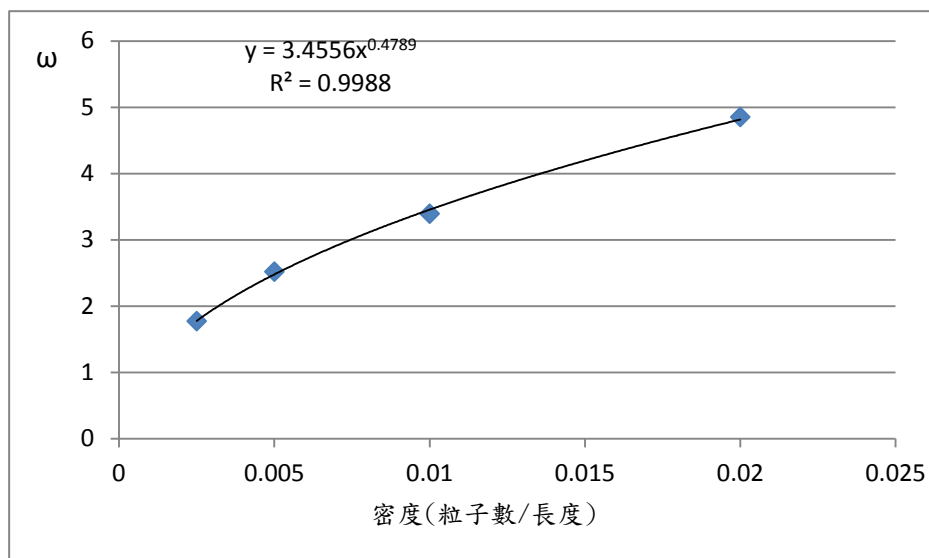


圖 3-1-1

由圖 3-1-1 可以得到「 $\omega \propto \sqrt{n}$ 」

此關係與 Eq. [2-19] 符合。而理論係數由 Eq. [2-19] 得出

$$\left(\frac{4\pi e^2}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}} = 3.5449$$

誤差為

$$\frac{3.4556 - 3.5449}{3.5449} = -0.0252$$

(二) 以「粒子帶電量」進行分析：

表 3-1-3. 系統初始參數

Time step	20000
Δt	0.005
系統長度	10000
粒子數 (電子, 質子)	(2500, 2500)
質量 (電子, 質子)	(1, ∞)

表 3-1-4 實驗數據

電量	-1	-2	-3	-4	-5
ω	1.774	3.544	5.321	7.092	8.850

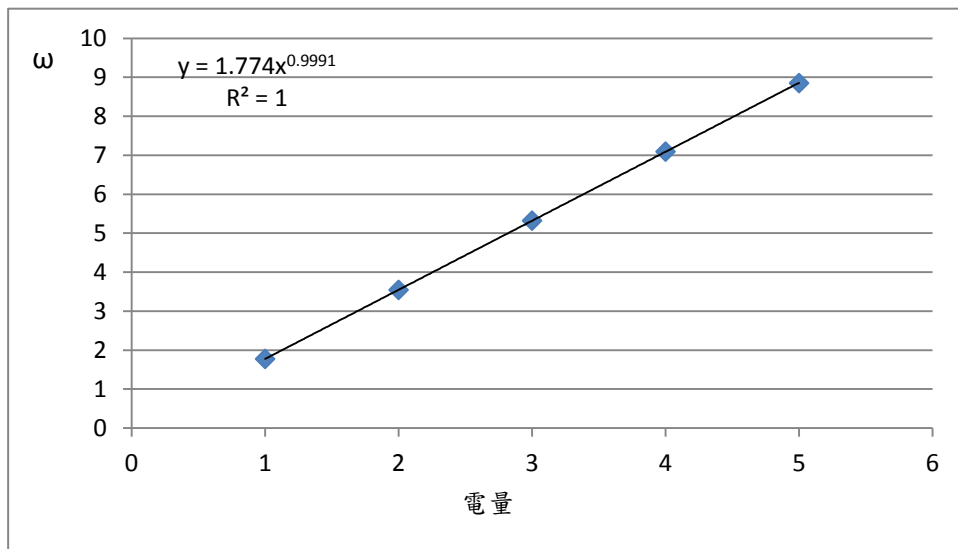


圖 3-1-2

由圖 3-1-2 可以得到「 $\omega \propto e$ 」

此關係與 Eq. [2-19] 符合。而理論係數由 Eq. [2-19] 得出

$$\left(\frac{4\pi n_0}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.7725$$

誤差為

$$\frac{1.7740 - 1.7725}{1.7725} = 0.0008$$

(三)以「電子質量」進行分析：

表 3-1-5 系統初始參數

Time step	20000
Δt	0.005
系統長度	10000
粒子數（電子,質子）	(2500,2500)
電量（電子,質子）	(-1,1)

表 3-1-6 實驗數據

質量	1	2	3	4	5
ω	1.773	1.255	1.025	0.888	0.795

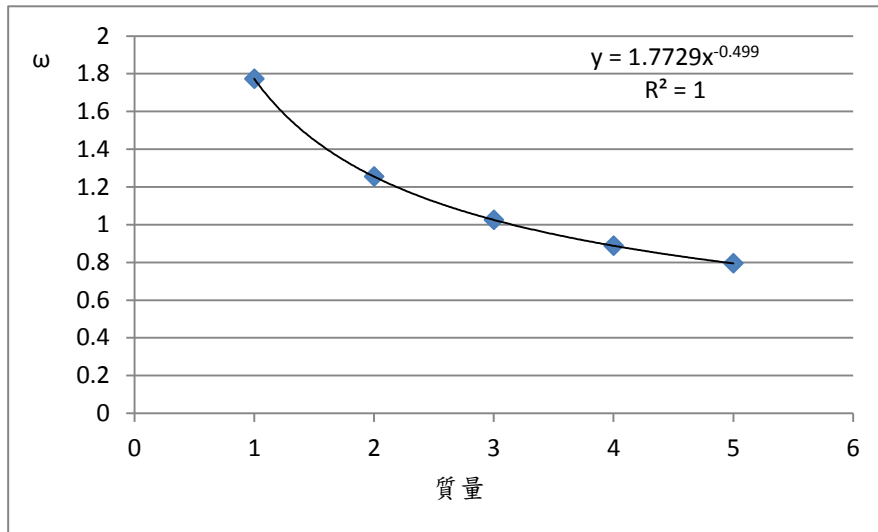


圖 3-1-3

由圖 3-1-2 可以得到「 $\omega \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$ 」

此關係與 Eq. [2-19] 符合。而理論係數由 Eq. [2-19] 得出

$$(4\pi n_0 e^2)^{\frac{1}{2}} = 1.7725$$

誤差為

$$\frac{1.7729 - 1.7725}{1.7725} = 0.0002$$

二、Ion acoustic wave：

本實驗變因為「質量比」，討論不同質量比對模擬結果的影響以及其

$\frac{\omega}{k} = v_s$ 是否符合 Eq. [2-21]。

表 3-2-1 系統初始參數

Time step	1000000
Δt	0.005
系統長度	10000
粒子數（電子,質子）	(2500,2500)
電量（電子,質子）	(-1,1)
熱速度	100

表 3-2-2 實驗數據

質量比	1:1000	1:100	1:10
k	ω		
0.000628	0.001257	0.003217	0.020860
0.001257	0.00372	0.009701	0.037825
0.001885	0.00573	0.015230	0.055041
0.002513	0.007879	0.021966	0.077535
0.003142	0.009274	0.027897	0.095127
0.003770	0.011925	0.033125	0.113977
0.004398	0.013584	0.040715	0.147529
0.005027	0.015193	0.046722	0.158211
0.005655	0.017354	0.052452	0.166756
0.006283	0.018749	0.058132	0.186862
0.009425	0.027822	0.086607	0.311143
0.012566	0.037548	0.115837	0.381264

將表 3-2-2 作圖可得到圖 3-2-1~3-2-3。

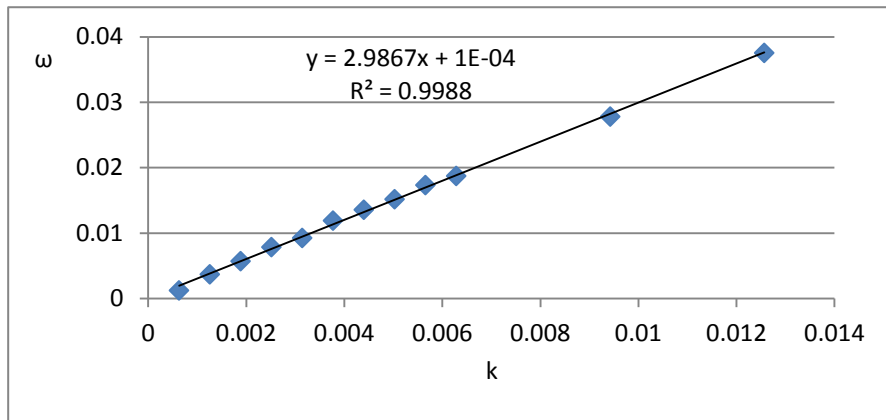


圖 3-2-1 質量比 1:1000

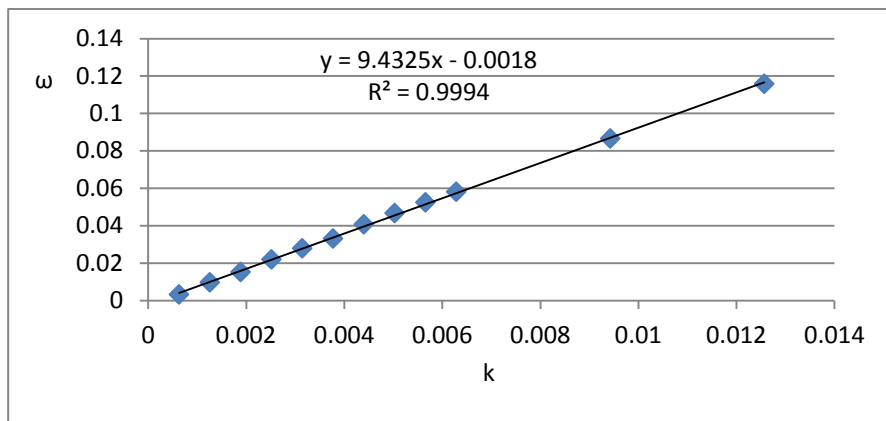


圖 3-2-2 質量比 1:100

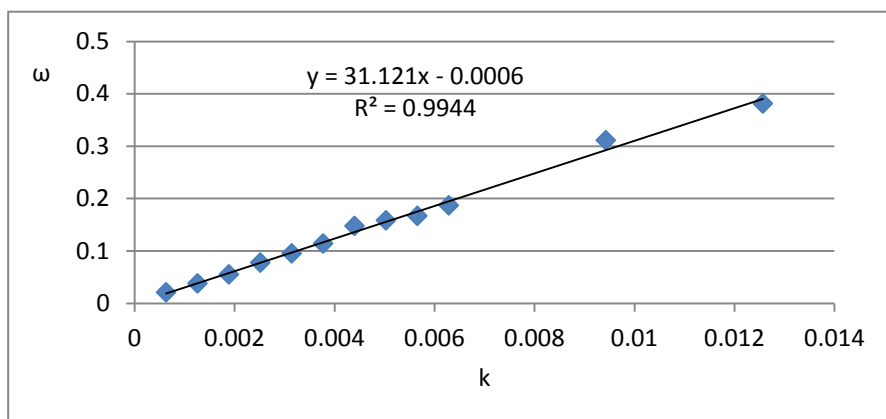


圖 3-2-3 質量比 1:10

可以從 $\omega - k$ 圖中得到各種質量比的斜率，也就是其「實驗相速度 v_s 」，而「理論相速度 v_s 」又可從 Eq. [2-21]推導成 Eq. [3-1]得知，其比較得到下表表 3-2-3。

$$v_s = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{m_e v_{th}^2}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{\bar{E}}{E_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [3-1]$$

※註： E_0 為初始能量扣除第一時間點電場能量之值。 $\bar{E}$ 為觀測時間區塊的平均動能。

表 3-2-3

質量比	1:1000	1:100	1:10
實驗 v_s	2.9867	9.4325	31.1210
理論 v_s	2.9697	9.8432	30.9508
誤差	0.57%	-4.17%	0.55%

三、Hybrid frequency：

本實驗將從對 Upper hybrid frequency 以及 Lower hybrid frequency 分別進行討論，觀察不同參數所產生的模擬結果與 Eq.[2-22]和 Eq.[2-23]的比較。

(一)Upper hybrid frequency：

1. 以「環境磁場」進行分析：

表 3-3-1 系統初始參數

Time step	20000
Δt	0.005
系統長度	10000
粒子數（電子,質子）	(2500,2500)
電量（電子,質子）	(-1,1)
質量（電子,質子）	(1,2000)
光速	1

表 3-3-2 實驗數據

磁場	0	0.5	1	2	3	4	5	7	10
ω	1.79	1.86	2.04	2.68	3.49	4.39	5.30	7.23	10.13

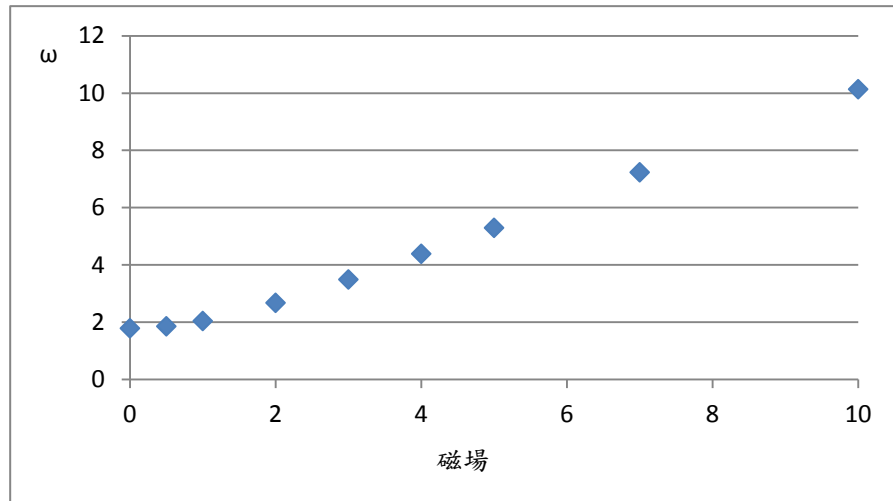


圖 3-3-1

表 3-3-1 對 Eq. [2-22] 的形式進行 fit 可以得到

$$\omega = \sqrt{1.789^2 + (0.9985B)^2}$$

由 Eq. [2-22] 可以得到理論數據表 3-3-3 以及圖 3-3-2

表 3-3-3 理論數據

磁場	0	0.5	1	2	3	4	5	7	10
ω	1.77	1.84	2.04	2.67	3.48	4.38	5.30	7.22	10.16

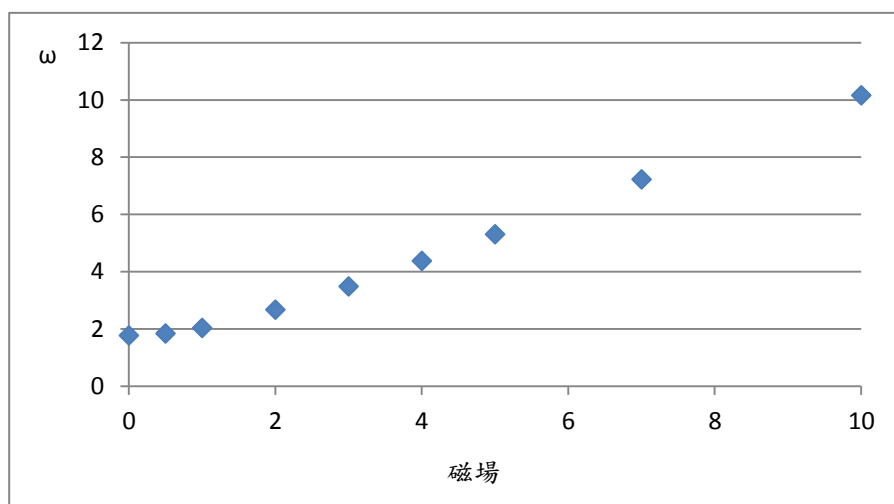


圖 3-3-2

實驗值(x)與理論值(y)相關係數為

$$r = \frac{\sum xy - n\mu_x\mu_y}{n\sigma_x\sigma_y} = 0.9999 \approx 1$$

2. 以「電子帶電量」進行分析：

表 3-3-4 系統初始參數

Time step	20000
Δt	0.005
系統長度	10000
粒子數（電子,質子）	(2500,2500)
質量（電子,質子）	(1,2000)
磁場	3
光速	1

表 3-3-5 實驗數據

電量	-1	-2	-3	-4	-5
ω	3.439543	6.700278	10.32852	13.63933	16.65423

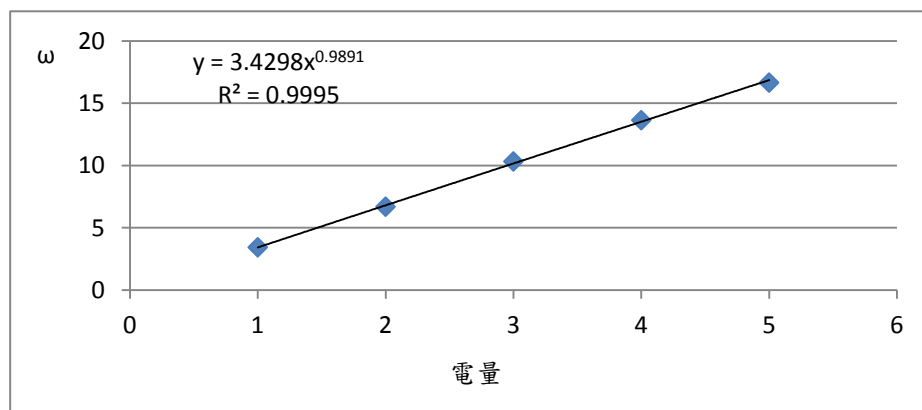


圖 3-3-3

由圖 3-3-3 可以得到「 $\omega \propto e$ 」

此關係與 Eq. [2-22] 符合。而理論係數由 Eq. [2-22] 得出

$$\left(\frac{4\pi n_0}{m_e} + \frac{B^2}{m_e^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3.4845$$

誤差為

$$\frac{3.4298 - 3.4845}{3.4845} = -0.0157$$

3. 以「電子質量」進行分析：

表 3-3-6 系統初始參數

Time step	20000
Δt	0.005
系統長度	10000
粒子數（電子,質子）	(2500,2500)
電量（電子,質子）	(-1,1)
磁場	3
光速	1

表 3-3-7 實驗數據

質量	0.5	1	2	3
ω	6.229086	3.439543	1.94556	1.427348

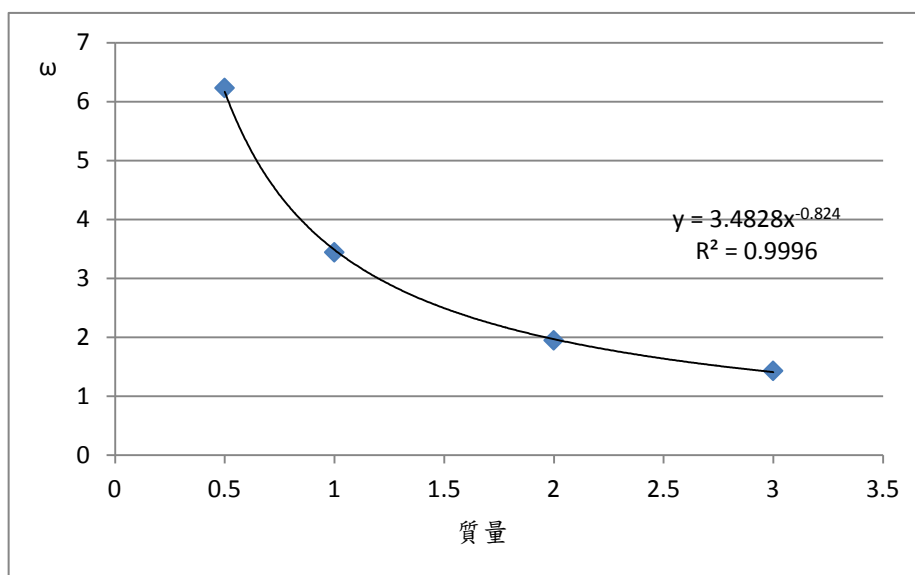


圖 3-3-4

由圖 3-3-4 可以得到「 $\omega \propto m_e^{-0.824}$ 」，代表 ω 與 m_e 沒有直接的特殊關係，根據 Eq. [2-22]可知 ω 與 m_e 的關係應為

$$\omega^2 = \frac{am_e + b}{m_e^2}$$

得到理論數據表 3-3-8

表 3-3-8 理論數據

質量	0.5	1	2	3
ω	6.502552	3.484479	1.954686	1.430803

實驗值(x)與理論值(y)相關係數為

$$r = \frac{\sum xy - n\mu_x\mu_y}{n\sigma_x\sigma_y} = 0.99981 \approx 1$$

(二)Lower hybrid frequency：

以「環境磁場」進行分析：

表 3-3-9 系統初始參數

Time step	20000
Δt	0.005
系統長度	10000
粒子數（電子,質子）	(2500,2500)
電量（電子,質子）	(-1,1)
質量（電子,質子）	(1,50)
光速	1

表 3-3-10 實驗數據

磁場	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	7	10	13	16	20	25	30
ω	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.24	0.26	0.27	0.28	0.32	0.36	0.40	0.47	0.56	0.65

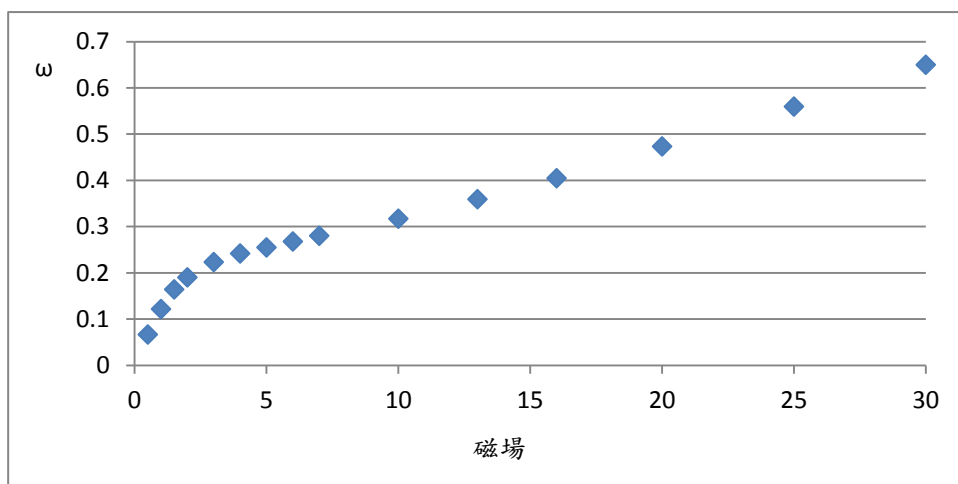


圖 3-3-5

Lower hybrid frequency 為離子所產生的波，所以會受到離子的 cyclotron 頻率影響，故將表 3-3-10 的 ω 扣除 Ω_c 後，可得到表 3-3-11 以及圖 3-3-6

表 3-3-11 實驗數據

磁場	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	7	10	13	16	20	25	30
ω	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.23	0.23	0.24	0.24	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25

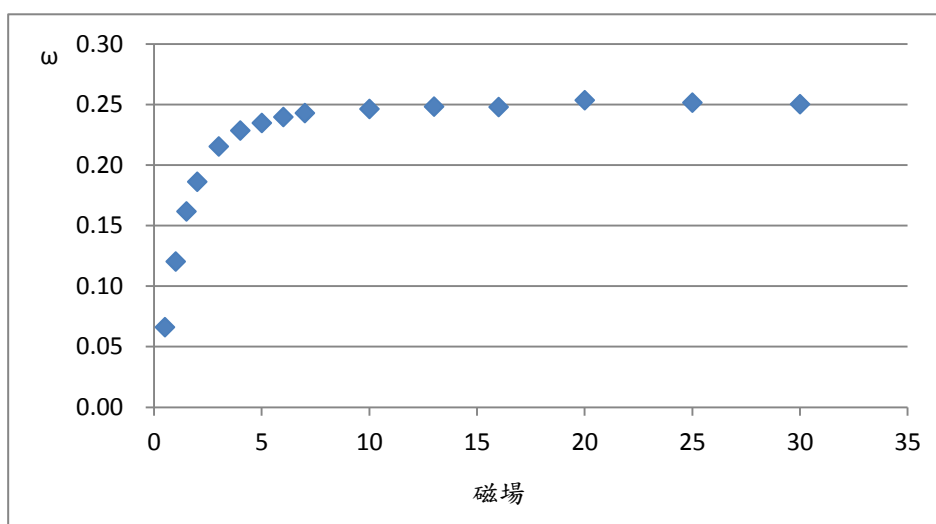


圖 3-3-6

表 3-3-11 對 Eq. [2-23] 的形式進行 fit 可以得到

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\frac{50}{B^2} + \frac{1}{0.25^2}}}$$

由 Eq. [2-23] 可以得到理論數據表 3-3-12 以及圖 3-3-7

表 3-3-12 理論數據

磁場	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	7	10	13	16	20	25	30
ω	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.23	0.24	0.24	0.24	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25

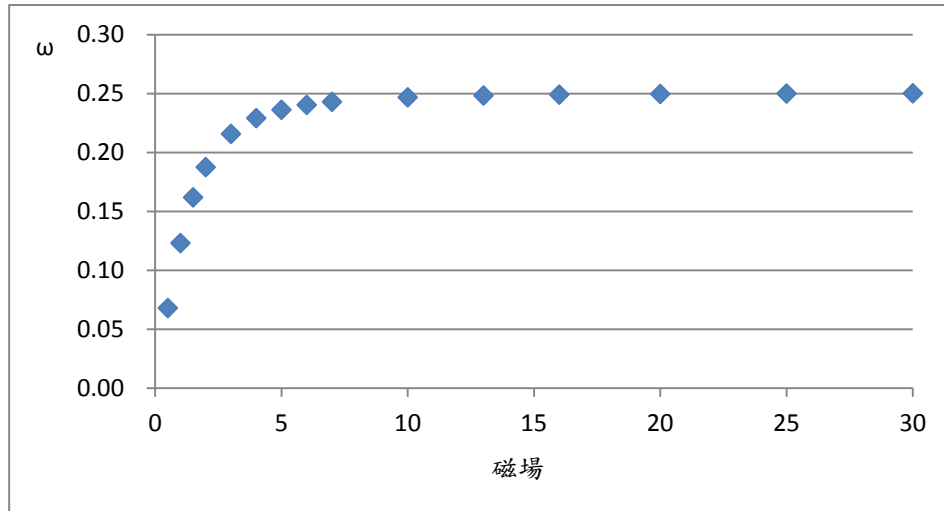


圖 3-3-7

實驗值(x)與理論值(y)相關係數為

$$r = \frac{\sum xy - n\mu_x\mu_y}{n\sigma_x\sigma_y} = 0.99973 \approx 1$$

四、Extraordinary wave (X wave)：

本實驗將「環境初始磁場」以及「分析之波數」作為變因，探討□如何受其影響，並將實驗結果與 Eq. [2-24]做比較。

以「環境初始磁場」與「分析之波數」做分析：

表 3-4-1 系統初始參數

Time step	20000
Δt	0.005
系統長度	10000
粒子數（電子,質子）	(2500,2500)
電量（電子,質子）	(-1,1)
質量（電子,質子）	(1,2000)
光速	1

表 3-4-2 實驗數據

$\omega \left(\frac{1}{s} \right)$		分析之波數							
		1	3	5	10	20	50	100	200
環境 初始 磁場	0	1.77	1.77	1.77	1.77	1.77	1.77	1.77	1.77
	1	1.55	1.96	2.01	2.02	2.03	2.02	1.99	1.85
	2	1.34	2.30	2.54	2.64	2.67	2.66	2.63	2.54
	3	1.22	2.61	3.26	3.42	3.46	3.48	3.46	3.38
	4	1.15	2.78	3.91	4.28	4.36	4.36	4.36	4.29
	5	1.11	2.84	4.40	5.22	5.28	5.29	5.28	5.24
	10	1.03	2.95	4.92	10.00	10.09	10.17	10.15	10.12
	20	1.01	2.99	4.97	10.01	19.12	19.84	20.02	20.02
	30	1.00	3.00	4.99	10.00	19.99	30.12	29.99	29.98
	40	1.00	3.00	4.99	9.99	19.97	40.28	40.01	39.94
	50	1.00	3.00	5.00	9.98	19.97	49.87	49.54	49.68
	75	1.00	3.00	5.00	10.01	19.95	49.60	73.92	74.36
	100	1.00	3.00	5.00	10.00	19.98	49.81	98.41	97.85
	140	1.00	3.00	5.00	10.00	20.02	49.47	98.38	135.12
	180	1.00	3.00	5.00	10.00	19.99	49.71	97.92	170.65
	200	1.00	3.00	5.00	10.00	20.01	49.75	98.04	190.40

將表 3-4-2 繪製成圖 3-4-1，其以磁場作為 x 軸， ω 作為 y 軸，每一條曲線分別代表不同波數。

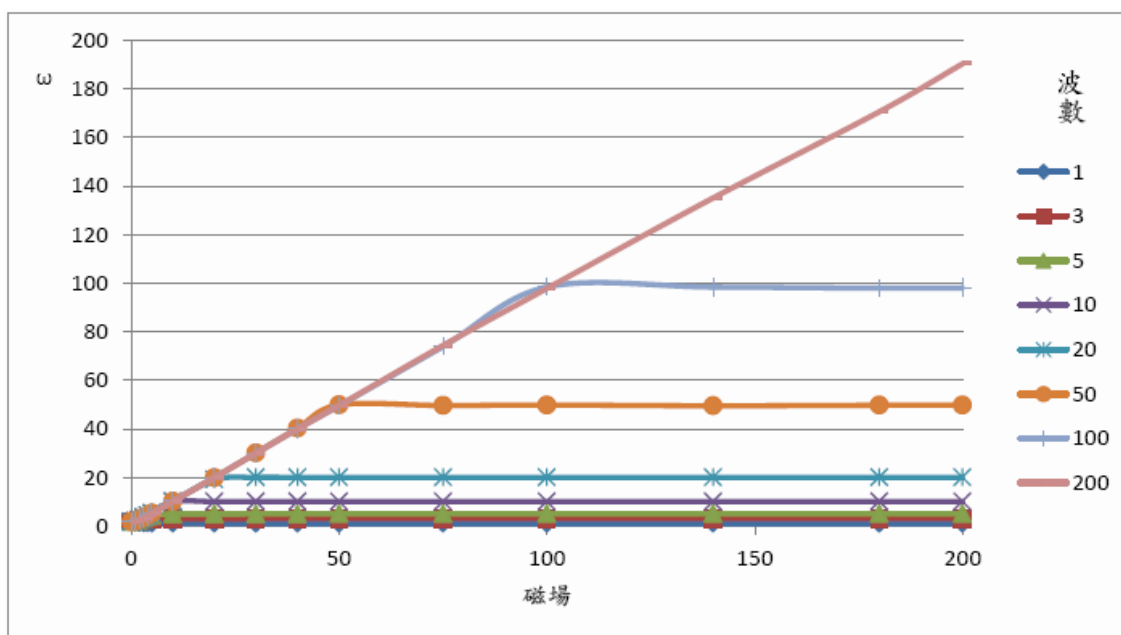


圖 3-4-1

將低波數與低磁場部份放大得到圖 3-4-2

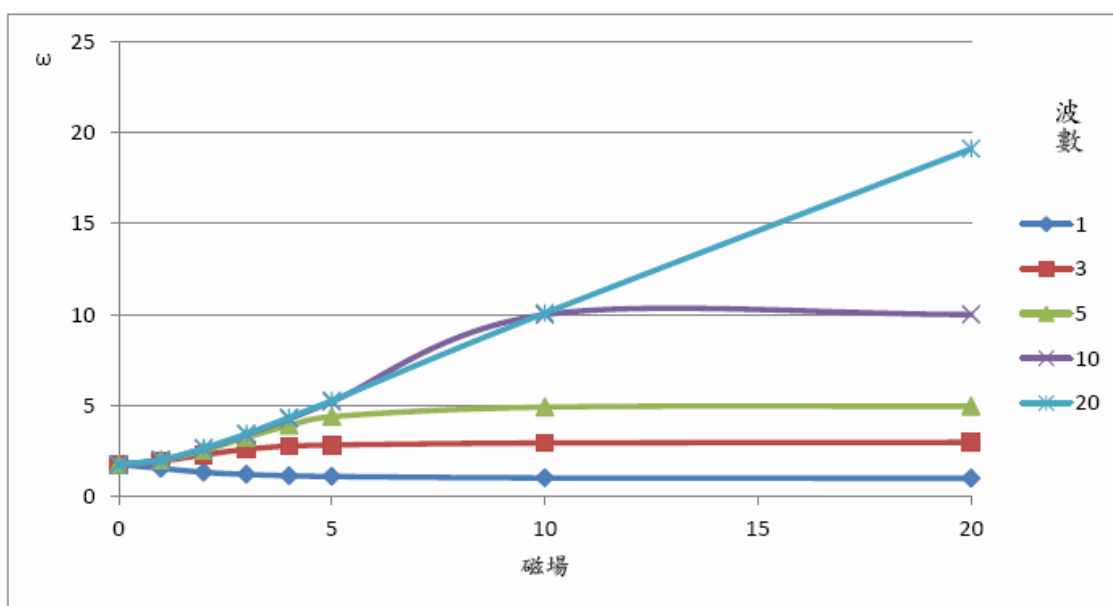


圖 3-4-2

可以發現磁場夠大，其頻率將趨近於波數，意味著其波速趨近於光速。

$$\frac{\omega}{c} = k$$

根據 Eq.[2-24]，我們可以代入不同的 k 值與磁場，得到理論表格表 3-4-3

表 3-4-3 理論數據

$\omega \left(\frac{1}{s} \right)$		分析之波數							
		1	3	5	10	20	50	100	200
環 境 初 始 磁 場	0	1.77	1.77	1.77	1.77	1.77	1.77	1.77	1.77
	1	1.54	1.94	2.00	2.03	2.03	2.03	2.04	2.04
	2	1.34	2.30	2.56	2.65	2.67	2.67	2.67	2.67
	3	1.22	2.61	3.25	3.44	3.47	3.48	3.48	3.48
	4	1.15	2.78	3.90	4.31	4.36	4.37	4.37	4.37
	5	1.11	2.86	4.39	5.21	5.29	5.30	5.30	5.30
	10	1.03	2.97	4.92	9.24	10.10	10.15	10.15	10.16
	20	1.01	2.99	4.98	9.95	19.18	20.06	20.08	20.08
	30	1.00	3.00	4.99	9.98	19.94	30.02	30.05	30.05
	40	1.00	3.00	5.00	9.99	19.97	39.97	40.03	40.04
	50	1.00	3.00	5.00	9.99	19.99	49.14	50.02	50.03
	75	1.00	3.00	5.00	10.00	19.99	49.97	74.99	75.02
	100	1.00	3.00	5.00	10.00	20.00	49.99	99.13	100.01
	140	1.00	3.00	5.00	10.00	20.00	50.00	99.98	140.00
	180	1.00	3.00	5.00	10.00	20.00	50.00	99.99	179.97
	200	1.00	3.00	5.00	10.00	20.00	50.00	99.99	199.12

將其部份繪製成圖可以得到圖 3-4-3，其與實驗圖圖 3-4-2 幾乎吻合。

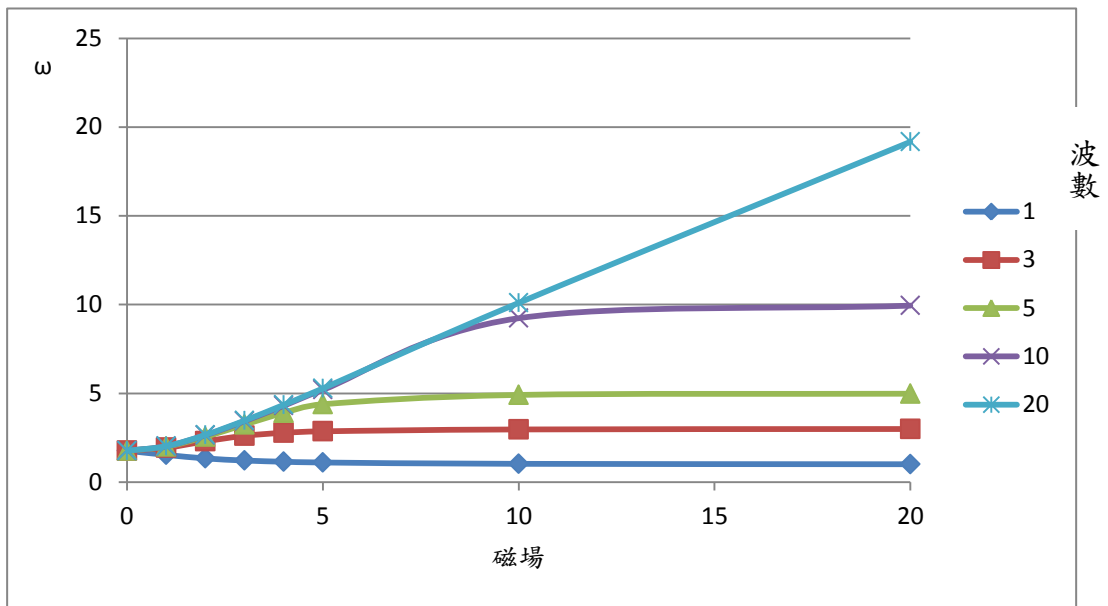


圖 3-4-3

實驗值(x)與理論值(y)相關係數為

$$r = \frac{\sum xy - n\mu_x\mu_y}{n\sigma_x\sigma_y} = 0.99980 \approx 1$$

五、Magnetosonic wave：

本實驗變因為「初始環境磁場」以及「分析波數」，探討□如何受其影響，並將實驗結果與 Eq. [2-25]做比較。

表 3-5-1

Time step	20000
Δt	0.005
系統長度	10000
粒子數（電子,質子）	(2500,2500)
電量（電子,質子）	(-1,1)
質量（電子,質子）	(1,2000)
光速	1

表 3-5-2 實驗數據

波數 磁場	1	3	5	10	20	50
0.5	0.004838	0.009048	0.010204	0.010820	0.010267	0.011071
0.6	0.006786	0.011021	0.011875	0.011762	0.013584	0.012466
0.8	0.008583	0.014162	0.014979	0.015243	0.015394	0.016236
1	0.009965	0.016902	0.019063	0.019063	0.019855	0.019930
1.2	0.012353	0.019541	0.021401	0.022155	0.022293	0.021463
1.5	0.015080	0.023512	0.02458	0.025271	0.025560	0.024982
2	0.019742	0.027545	0.028777	0.029468	0.029644	0.029719
3	0.025183	0.032698	0.034294	0.033778	0.034218	0.033854
4	0.030021	0.035312	0.035776	0.036317	0.036430	0.035990
5	0.032296	0.036757	0.037121	0.036920	0.037310	0.037171
6	0.033716	0.037674	0.037800	0.038541	0.038353	0.039006
7	0.034658	0.038013	0.038051	0.038616	0.038541	0.038428

將表 3-5-2 繪製成圖 3-5-1，可以觀察到當波數增大時，Ion 振盪頻率會逐漸趨於緩和，這與 Eq. [2-25] 的隨 k 成線性關係有所違背，而若將其 $k=1$ 的數據繪圖，可發現其與磁場也並非成正比關係，因此推測 Ion 的振盪還有另外一個不受 k 影響的因素存在，觀察逐漸趨於穩定的頻率可以發現，它逐漸趨近於 Lower hybrid frequency，故將其與 Lower hybrid frequency 共製成 $\omega-B$ 圖 (圖 3-5-2)，。

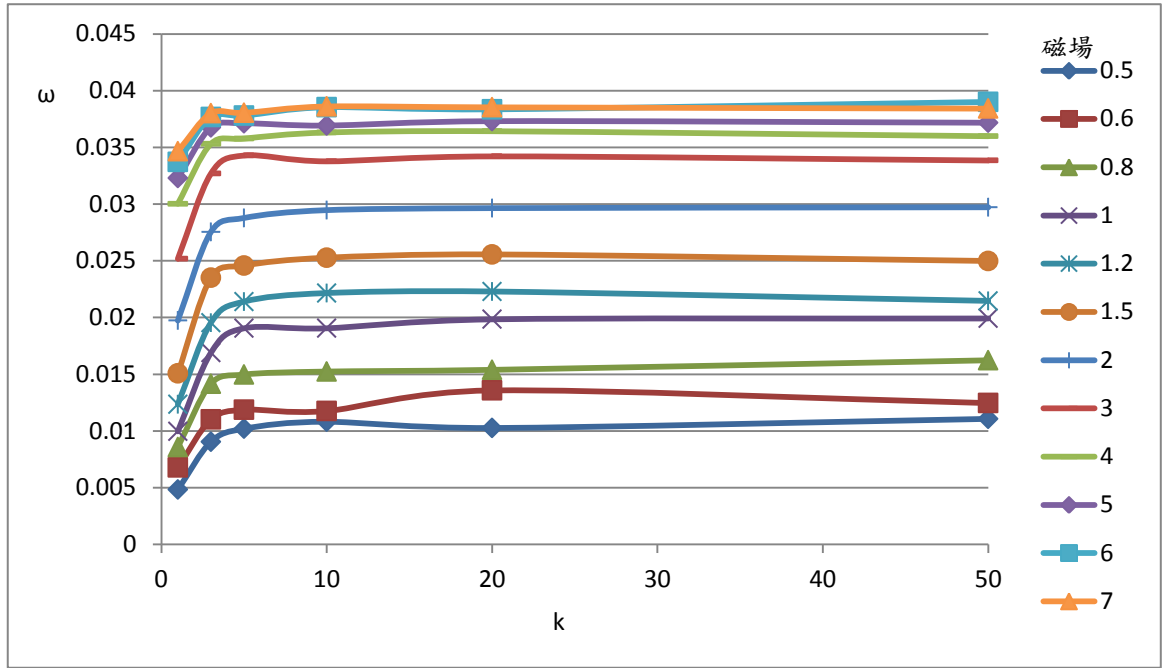


圖 3-5-1

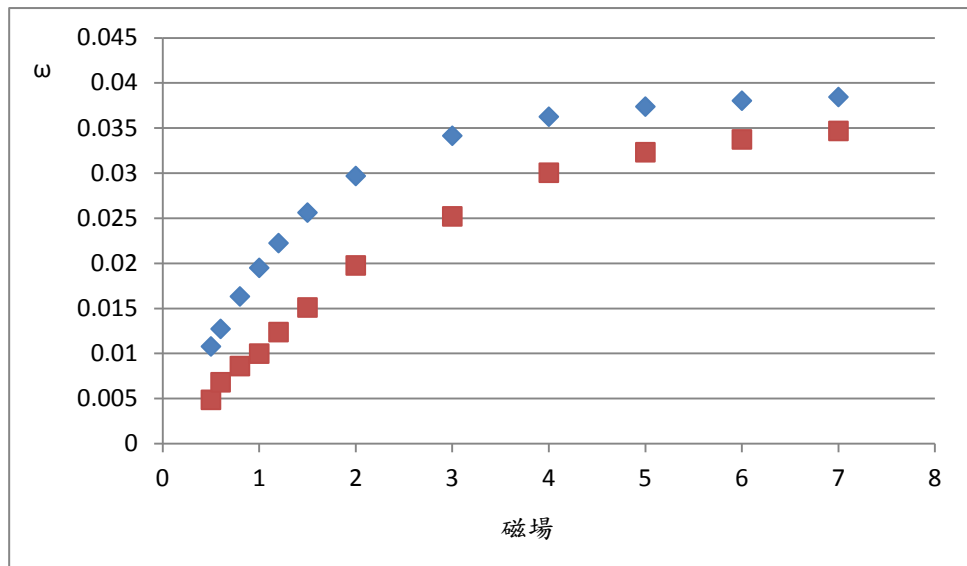


圖 3-5-2 實驗數據(紅)與 Lower hybrid frequency(藍)

合理推測這個系統中，Ion 的頻率是從 Magnetosonic wave 逐漸轉變為 Lower hybrid frequency，因此可以假設其頻率為兩者混合而成，而混合的方式猜測為 Eq. [3-2]

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_m^2} + \frac{1}{\omega_l^2} \quad [3-2]$$

由 Eq. [3-2] 可以得出理論數據表 3-5-3，將其與表 3-5-2 進行比較。

表 3-5-3 理論數據

波數 磁場	1	3	5	10	20	50
0.5	0.005683	0.009484	0.010244	0.010624	0.010726	0.010755
0.6	0.006705	0.011197	0.012096	0.012546	0.012667	0.012701
0.8	0.008730	0.014431	0.015549	0.016106	0.016254	0.016297
1	0.010703	0.017372	0.018633	0.019254	0.019419	0.019466
1.2	0.012602	0.020000	0.021338	0.021989	0.022161	0.022210
1.5	0.015284	0.023366	0.024726	0.025375	0.025546	0.025594
2	0.019259	0.027630	0.028880	0.029460	0.029611	0.029653
3	0.025355	0.032682	0.033582	0.033985	0.034088	0.034117
4	0.029430	0.035239	0.035867	0.036142	0.036212	0.036231
5	0.032131	0.036646	0.037096	0.037290	0.037339	0.037353
6	0.033951	0.037485	0.037818	0.037961	0.037997	0.038008
7	0.035211	0.038020	0.038275	0.038384	0.038412	0.038419

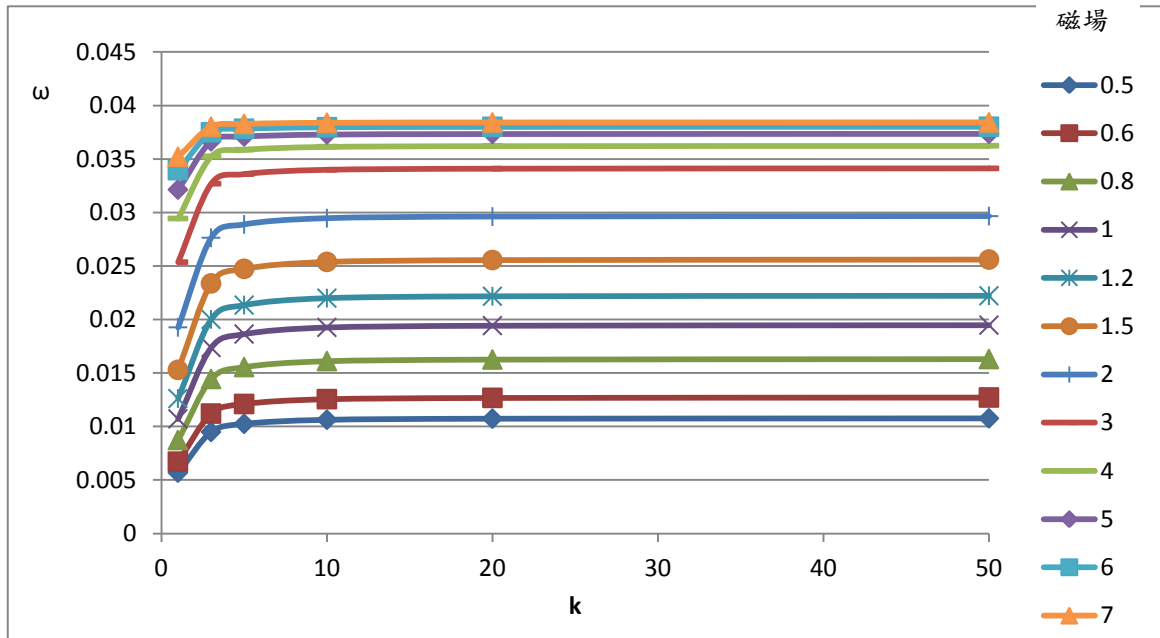


圖 3-5-3

將實驗值(x)與理論值(y)進行相關係數的比較可以得到

$$r = \frac{\sum xy - n\mu_x\mu_y}{n\sigma_x\sigma_y} = 0.999386 \approx 1$$

六、Nonlinear effect：

(一)Electrostatic wave:

無磁場的電漿離子孤立子，是在電漿系統中不均匀粒子分布的首次試驗。

以 Gaussian 式分布的初始離子密度（下稱孤立子源），以及維持均勻分布的電子，藉由電場的推動，發展成一對背道而馳的孤立子。

為了產生孤立子，我們給予系統不同初始條件（參見「附錄三」），觀察其在環境中會如何演變。經過多次嘗試，初步以孤立子源半寬以及孤立子源高度作為操縱變因，觀察其演化。

設定一個對照組，其產生孤立子可以做為一個標準的比較條件，其系統設定如表 3-6-1，而圖 3-6-1 為產生孤立子的情況。

表 3-6-1 對照組之初始條件

Time step	50000
Δt	0.002
系統長度	1000
粒子數（電子,質子）	(5000,5000)
電量（電子,質子）	(-1,1)
質量（電子,質子）	(1,2000)
熱速度	100
Ratio	3
Width	20

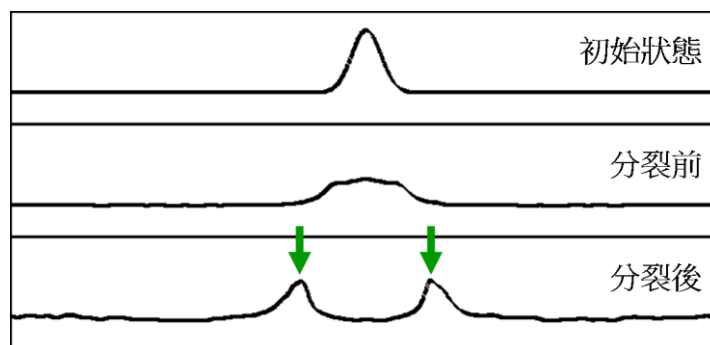


圖 3-6-1 對照組孤立子源及產生之孤立子

1. 以孤立子源高度為變因：

設定 3 種高度的孤立子源，分別為 4、5、6，其產生之孤立子演化繪製成圖 3-6-2~3-6-4，可發現其演化到最後會相當接近。

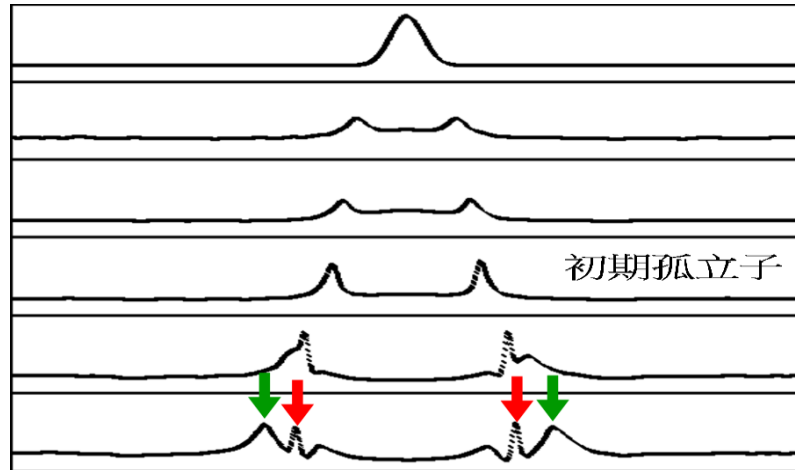


圖 3-6-2 高度為 4 之孤立子演化

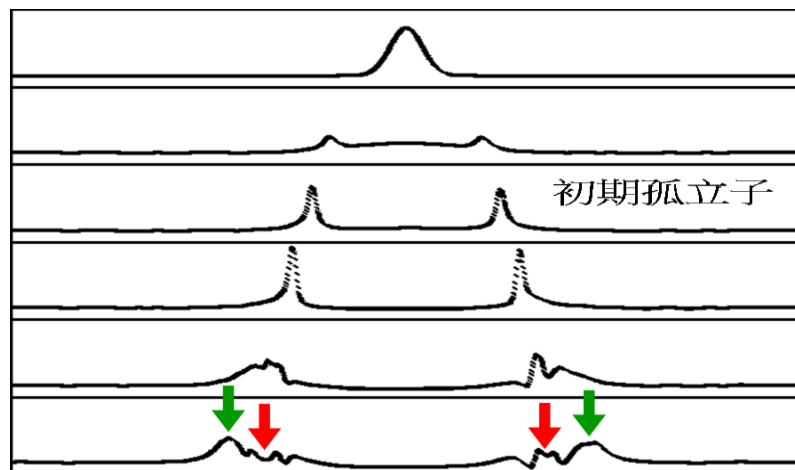


圖 3-6-3 高度為 5 之孤立子演化

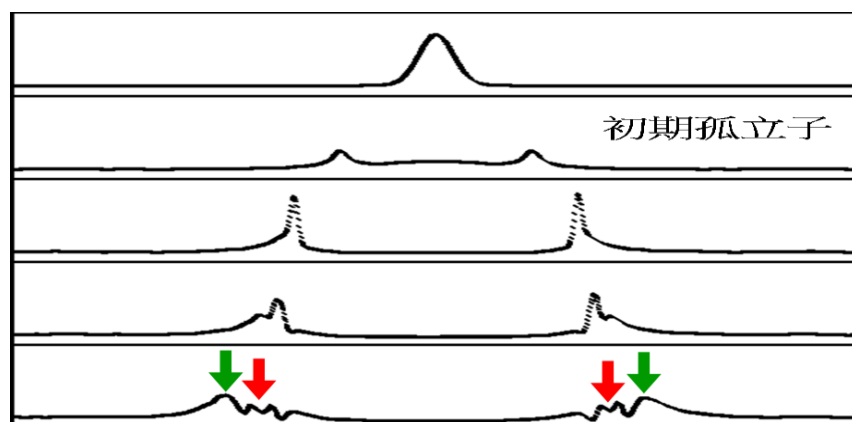


圖 3-6-4 高度為 6 之孤立子演化

2. 以孤立子源寬度為變因：

設定 3 種高度的孤立子源，分別為 5、10、40，其產生之孤立子演化繪製成圖 3-6-5~3-6-7，可發現其演化到最後會相當接近。

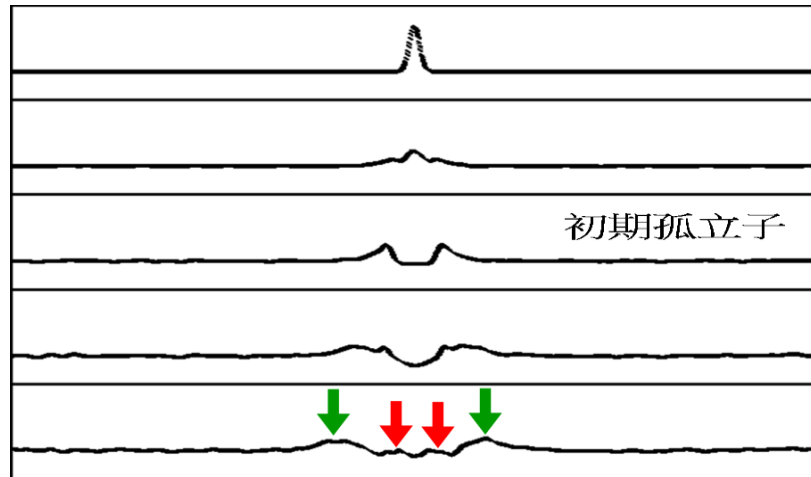


圖 3-6-5 寬度為 5 之孤立子演化

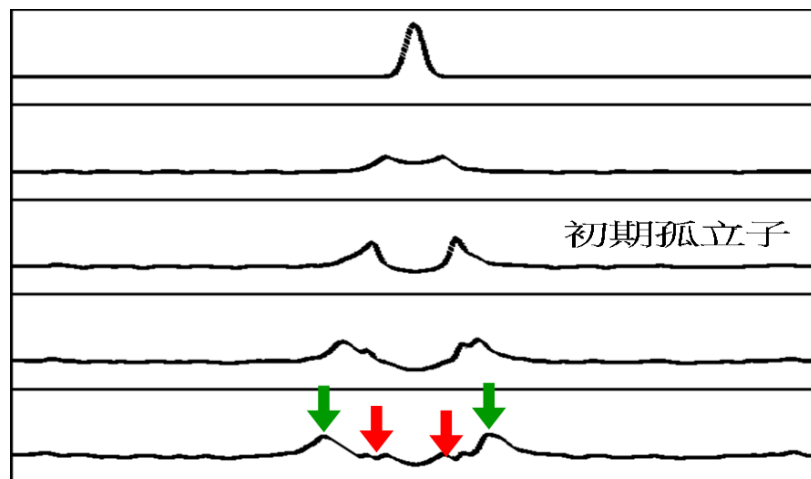


圖 3-6-6 寬度為 10 之孤立子演化

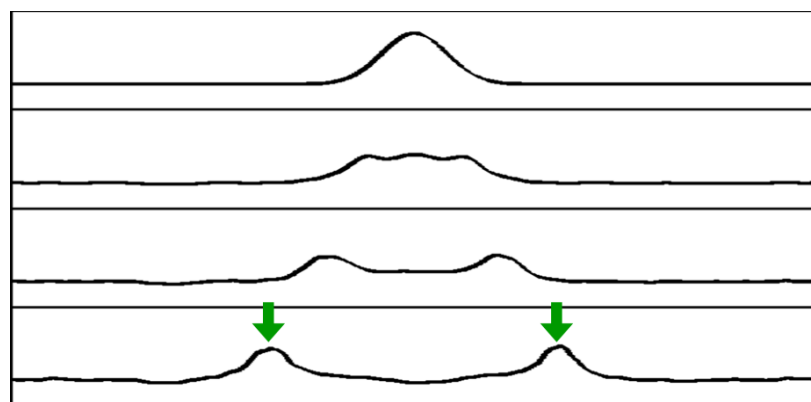


圖 3-6-7 高度為 40 之孤立子演化

(二)Shock wave:

將表 3-6-1 的系統條件參數全部放大 10 倍，因為場能量放大 10 倍，可以得到一個與孤立子截然不同的演化結果(圖 3-6-8)。

原先要成為孤立子的孤立子源因為受不了太高的電位能，因此迅速向兩旁炸裂開來，形成 Shock wave，我們從觀察數據中發現，電漿中產生的 Shock wave 似乎與流體力學中的 Shock wave 有著相似的現象。

表 3-6-2 系統初始條件

Time step	50000
Δt	0.002
系統長度	10000
粒子數（電子,質子）	(50000,50000)
電量（電子,質子）	(-1,1)
質量（電子,質子）	(1,2000)
熱速度	100
Ratio	30
Width	200

起先形成的孤立子瞬間炸裂開來，分開成往兩邊傳播的 Shock wave(紅&綠)。

而其中 Shock wave(綠)穿越週期性邊界快速傳播，Shock wave(紅)速度則較為緩慢，且有一段時間 Shock wave(紅)達平衡，其兩邊壓力相同，類似流體力學的守恆律。

Shock wave(綠)不斷等速向前傳播，在撞擊後，產生震幅的疊加。這樣的過程重複了多次，時間愈久，Shock Wave 的震幅受系統阻尼影響，震幅漸小，最後可以觀察到 Ion 從中央的局部高溫慢慢增溫到全體皆高溫。

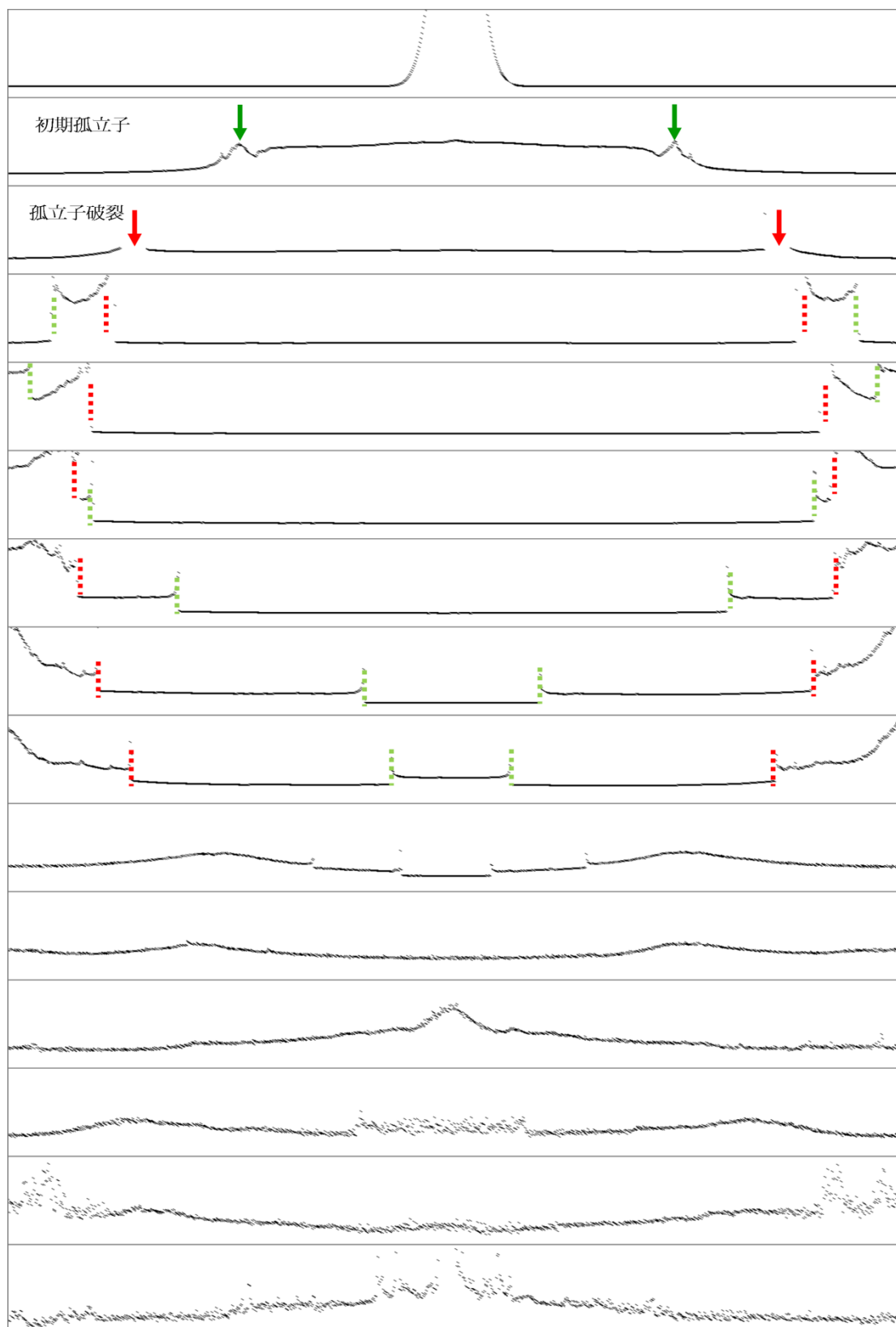


圖 3-6-8 Shock wave 發展過程

肆、結論與應用

一、Plasma Oscillation：

由三個變因來看，系統粒子密度之實驗結果稍稍偏離預期，而電量與質量兩個變數都相當符合理論預測。

由此可知，由庫倫力形成之電漿震盪，在這個系統中是確實存在的。故此模型應能正確描述電漿之基本行為。

二、Ion acoustic wave：

Ion acoustic wave 之週期相當大，且波形非弦波，十分紊亂，使用傅立葉分析尋找特徵頻率能有效解決這個問題，但分析結果仍舊有些許誤差，且 Ion 與 Electron 的熱能隨時間不斷的變化，因此採用 Eq. [3-1]來修正理論，得到的結果證實系統準確性。

三、Hybrid frequency：

對於 Ion 及 Electron 的波形及震盪頻率，都非常精確地符合理論所預期：Electron 為隨磁場上升之雙曲線，Ion 為 Lower hybrid frequency 與 cyclotron 之混合。

這項結果顯示，背景磁場對於此模型的作用，符合電漿之行為。定性上來看，使帶電粒子『繞圈』，穩定其運動，是背景磁場的最主要的特徵。

四、Extraordinary wave：

這種頻率與磁場之關係較為特殊：越高波數的波，其速度越接近光速；磁場越高，所對應到的臨界波數也愈高，形成樓層般的「頻率—磁場—波數」關係。

這項結果表示，此模型的電磁感應機制是正確的。

五、Magnetosonic wave：

在進行理論計算時，往往省略很多影響因素，才能使推導出來的公式能完美的表達所想觀測的東西，但在真實系統中，Ion 的震盪可以清楚的看到受到兩種頻率的影響，一個是受磁場產生的 Lower hybrid frequency，另一者則是受到電磁感應所產生的 Magnetosonic wave，利用模擬，有效找出其混成方式為 $\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_m^2} + \frac{1}{\omega_l^2}$ 。

六、Nonlinear effect：

(一)Electrostatic soliton:

半寬 20、高度 3 初始條件，所發展出的孤立子，是我們在此系統環境下，所發現的其中一種穩定孤立子。以此穩定孤立子為基礎，嘗試了其他三種源半寬與源高度。

源高度為 4, 5, 6 的孤立子源，產生的「初期孤立子」高度與源高度成正相關。但在傳播一小段距離後，初期孤立子逐漸「丟棄」了過高的密度，將其高度調整到半寬 20、高度 3 情況之穩定孤立子。我們推測：孤立子會根據其半寬，限制其高度之上限值。

半寬為 5, 10 之孤立子源，與初期孤立子的寬度明顯呈正相關。傳播一段距離後，初期孤立子同樣丟棄了過多的粒子，根據其寬度，形成了異於對照組之較矮的穩定孤立子。可見較小半寬的孤立子，高度的上限值亦小。

半寬為 40 的孤立子源，在形成初期孤立子後，便沒有明顯的「丟棄」現象。我們推測：孤立子之半寬，只限制其高度上限，而低於此上限之高度皆能穩定傳播。

(二)Shock wave:

由流體不連續密度界面的質量、動量、能量守恆 Eq. [4-1]~[4-3]，有 Shock Wave 解，其中 Q 為游離能，在我們的系統中為 0，因此不需考慮。

$$\rho_i v_i = \rho_0 v_0 \equiv I \quad [3-1]$$

$$P_i + \rho_i v_i^2 = P_0 + \rho_0 v_0^2 \quad [3-2]$$

$$Q + \frac{v_i^2}{2} + U_i + \frac{P_i}{\rho_i} = \frac{v_0^2}{2} + U_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \quad [3-3]$$

將系統長度拉長十倍、密度不變，孤立子源半寬 200、高 30，我們得到了迥異於孤立子傳播的現象。初始條件過高的場能量，使孤立子的波前破裂，形成一對相向、來回穿梭的一對 Shock Wave。

電漿中之 Shock Wave，與非線性流體之 Shock Wave 非常相似，但對其之定量分析尚未完成。

七、未來發展及應用：

藉由觀察理論上預測的波，我們已經確認模擬電漿系統在電磁學上是正確的，並確認一維模擬模型的參考價值。

在模型確立之後，便真正進入了應用模型的部分。包括電漿物理學初步的非線性現象模擬、電漿態星體及天體的建模、行為預測等。

在實驗上，對未知現象的尋找幾乎是以各種初始條件碰運氣的方式進行，日後應顧及條件之全面性，以及分析的縝密度。

相較於真實電漿，電腦模擬電漿在實用上具有低成本、高效率的特性。對於電漿體之模型建構，具有相當大的功用。

伍、參考文獻

1. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, 1984, Chen, Francis F.
2. *Plasma Physics via Computer Simulation*, 1985, Charles K. Birdsall & A. Bruce Langdon
3. *Principles of Plasma Physics*, 1973, Nicholas A. Krall & Alvin W. Trivelpiece
4. 電漿的世界-探討物質的第四個狀態-, 1987.07, 曾煥華譯
5. 征服 C 語言程式設計：資料結構與程式設計競賽精集, 2005, 李啟龍、尤信翰
6. 圖解電漿入門, 2007.08.30, 山崎耕治
7. 電磁學的天堂祕笈—輕鬆解析最實用的馬克士威方程式, 2010.10.18, 夫雷胥

陸、附錄

附錄一：FFT 簡介

快速傅立葉變換 (Fast Fourier Transform, FFT)，是離散傅立葉變換的快速演算法，也可用於計算離散傅立葉變換的逆變換。快速傅立葉變換有廣泛的應用，如：數位訊號處理、計算大整數乘法、求解偏微分方程等等。

對於複數序列 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ ，離散傅立葉變換公式為：

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i}{n} jk} x_k \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

直接變換的計算複雜度是 $O(n^2)$ 。快速傅立葉變換可以計算出與直接計算相同的結果，但只需要 $O(n \log n)$ 的計算複雜度。通常，快速演算法要求 n 能被因數分解，但不是所有的快速傅立葉變換都要求 n 是合數，對於所有的整數 n ，都存在複雜度為 $O(n \log n)$ 的快速演算法。

除了指數的符號相反、並多了一個 $1/n$ 的因子，離散傅立葉變換的正變換與逆變換具有相同的形式。因此所有的離散傅立葉變換的快速演算法同時適用於正逆變換。

在數值模擬中，我們採用 `fftw` 函式庫中的 FFT 函式來幫助我們進行模擬，其本身適用於 C/C++ 以及 Fortran 語言。

一維 FFT 函式定義：

```
fftw_plan fftw_plan_dft_r2c_1d(int n, double *in, fftw_complex *out, unsigned flags);  
fftw_plan fftw_plan_dft_c2r_1d(int n, fftw_complex *in, double *out, unsigned flags);
```


附錄二： $\overline{\delta E_y^{i+0.5}}$ 推導過程

根據 Maxwell's equation：

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = c \nabla \times \vec{B}_z - \vec{j}$$

我們可以將其變換為

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{E^{i+0.5}} = c \nabla \times \left(\frac{\vec{B}_z^i + \vec{B}_z^{i+1}}{2} \right) - \overline{j^{i+0.5}}$$

因為

$$\vec{B}_z^{i+1} = \vec{B}_z^i + \delta \vec{B}_z^{i+0.5}$$

因此可以將其寫成

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{E^{i+0.5}} = c \nabla \times \left(\frac{2\vec{B}_z^i + \delta \vec{B}_z^{i+0.5}}{2} \right) - \overline{j^{i+0.5}}$$

又因為

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -c \nabla \times \vec{E}$$

$$\delta \vec{B}_z^{i+0.5} = -c \Delta t \nabla \times \overline{E^{i+0.5}} = -c \Delta t \nabla \times \left(\frac{\vec{E}^i + \vec{E}^{i+1}}{2} \right) = -c \Delta t \nabla \times \left(\frac{2\vec{E}^i + \delta \vec{E}^{i+0.5}}{2} \right)$$

所以可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{E^{i+0.5}} = \frac{c}{2} \nabla \times \left[2\vec{B}_z^i - c \Delta t \nabla \times \left(\frac{2\vec{E}^i + \delta \vec{E}^{i+0.5}}{2} \right) \right] - \overline{j^{i+0.5}}$$

將括弧拆解可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{E^{i+0.5}} = c \nabla \times \vec{B}_z^i - \frac{c^2 \Delta t}{2} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}^i) - \frac{c^2 \Delta t}{4} \nabla \times (\nabla \times \delta \vec{E}^{i+0.5}) - \overline{j^{i+0.5}}$$

移項整理並對時間積分得到

$$\delta \vec{E}^{i+0.5} + \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \nabla \times (\nabla \times \delta \vec{E}^{i+0.5}) = c \Delta t \nabla \times \vec{B}_z^i - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}^i) - \Delta t \overline{j^{i+0.5}}$$

最後可得 y 方向之 $\overline{\delta E_y^{i+0.5}}$ 的關係式：

$$\boxed{\overline{\delta E_y^{i+0.5}} - \frac{c^2 \Delta t^2}{4} \nabla^2 \overline{\delta E_y^{i+0.5}} = -c \Delta t \nabla \times \vec{B}_z^i + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \nabla^2 \vec{E}_y^i - \Delta t \overline{j_y^{i+0.5}}}$$

附錄三：粒子分佈方式

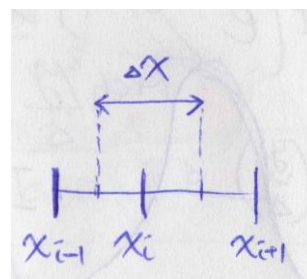
如果要在這個一維電漿模型中產生 Soliton，勢必要給予一個特殊的初始條件(initial condition)。在這個計劃中，我們將系統初始密度進行部份壓縮，也就是將一定範圍內的粒子拉近，產生一個 Gaussian distribution 的連續曲線(圖 6-3-1)。



圖 6-3-1

其計算方式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta x} = n = \frac{1}{\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}} \\ x_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2} \\ n = h + e^{-\frac{(x_i - \frac{L}{2})^2}{2\sigma^2}} \end{array} \right.$$



$$\left| x_i + \frac{1}{h + e^{-\frac{(x_i - \frac{L}{2})^2}{2\sigma^2}}} = x_{i+1} \right|$$

※註：h 為密度 $n(x)$ 扣除常態分布 $d(x)$ 的背景值且可由其推導出

$$\left| x_i + \frac{h' + \sigma\sqrt{2\pi}}{h' + e^{-\frac{(x_i - \frac{L}{2})^2}{2\sigma^2}}} = x_{i+1} \right|$$

※註： h' 為控制其高度與背景值的比值之可變常數

附錄四：圖像化

為了觀察孤立子的演化，因此我們將密度的空間變化隨時間記錄下來，並將此作為材料，經過自製程式繪製出每個時間點的 bmp 檔，再將這些圖檔串接，製成 AVI 檔。

製作出來的 bmp 檔分兩種，一種是 n - x 圖(圖 6-4-1)，另一種則是側視圖(圖 6-4-2)。

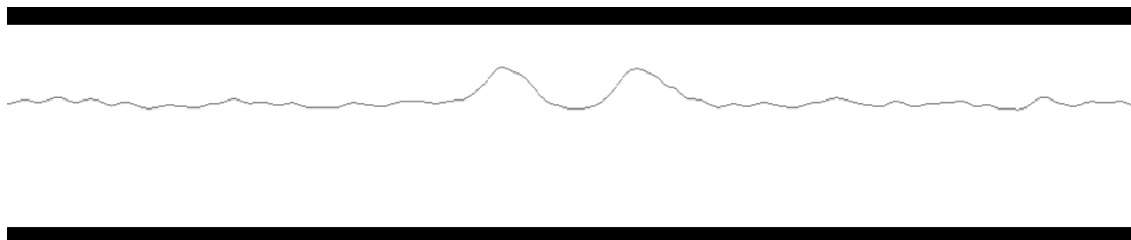


圖 6-4-1



圖 6-4-2

評語

1. 能完成動態式孤立子的數量改變，已實不易。
2. 應考量可否擴展成 2 維行為，且再增孤立子間的交互作用，再討論其是否會呈現非現線行為。
3. 應繼續再作較複雜的系統。