

2013 臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

作品編號 140021

參展科別 物理與太空科學科

作品名稱 水中的華爾滋

得獎獎項 一等獎

荷蘭正選代表:2013 年國際環境及永續發展競賽

就讀學校 臺北市立成功高級中學

指導教師 邱育民、游慈卉

作者姓名 李依哲

關鍵字 流體力學、白努利方程、週期運動

作者簡介



我是李依哲，成功高中三年級學生。國中時，即對物理有著極大的興趣，此研究題目就是在當時想到的，但當時並沒有任何想法，對於這個問題我一直耿耿於懷。升上高一後，為了解決此問題，我參加科展，投入研究，兩年多來，大部分的課餘時間都是在實驗室裡度過。研究過程中雖然一波三折，但在許多老師們的協助與建議，還有父母的支持與鼓勵下，讓我可以有毅力持續研究，非常謝謝他們。

摘要

本實驗將小型塑膠圓片置於水中釋放模擬落葉的運動模式，發現圓片與水平之夾角呈現週期性變化，變化範圍會隨著時間改變。在運動幾個週期後，變化範圍會被限制，此時為穩定狀態。在水中加入鋁粉以觀察圓片運動時流場的變化，提出分流模型與最短時間原理，發現此模型可以解釋圓片的轉動機制。

Abstract

The research is to investigate in the motion of falling leaves in the air which were substituted with small plastic circles in the water. The circles motion approached a steady state after some period of the circles falling. Aluminum powder was added to the water to observe the variation of the flow field while the circles moved, and a separating model and the least time principle was proposed to explain the rotation of the circles. We illustrated that the experimental and theoretical values are in a good agreement.

壹、前言

一、研究動機

走在路上，常常會看到有許多落葉左右擺動飄落，像極舞動翅膀的小天使，在空中跳著華爾滋，那看似規律又複雜的舞蹈，啟動我心中對研究這美妙舞姿的好奇心。於是，我決定對樹葉飄落的左右擺動做研究，期盼能解構這其中的奧秘。

我們先在空氣中釋放紙片，觀察紙片在空氣(流體)中自由飄落的情況，但因為空氣的流動容易受環境影響，於是決定將實驗的流體換成水，將釋放物先換成鐵片，並改以電磁鐵來控制鐵片的釋放。經實驗後發現，鐵片的掉落速度太快，可觀察的擺動週期數太少，因此又將釋放物換成密度較小的塑膠片。為了釋放塑膠片，我們使用小螺帽夾住塑膠片後釋放。

二、研究目的

1. 觀察數據並繪圖分析，找出物體的運動規律性
2. 在水中加入鋁粉觀察圓片運動時流場的變化情形
3. 提出分流模型與分流點的假設，結合白努利方程推導理論解釋圓片轉動
4. 以能量觀察圓片運動，並探討圓片力學能變化與流場變化的關係

貳、研究過程或方法

一、研究設備與器材

(一)實驗設備

1. 玻璃水缸(29 cm*31 cm*24 cm)
2. 電磁鐵
3. 攝影機(240 fps)

(二)實驗器材

1. CD 片
2. 小螺帽
3. 游標尺(精確度 0.01 cm)
4. 圓規刀
5. 量角器
6. 鏡子
7. 吊有重物的鉛錘線
8. 鋁粉(粒徑 0.063 cm)
9. 手電筒(500 lm)

二、實驗流程與步驟

(一)實驗設計：

1. 實驗一：分析圓片的運動

我們以電磁鐵和小螺帽夾住小型塑膠圓片並置於水中，關掉電磁鐵後，釋放圓片，同時以攝影機記錄圓片的運動，再用軟體「Tracker」分析影片，取得圓片的位置，並計算圓片運動的各種物理量。

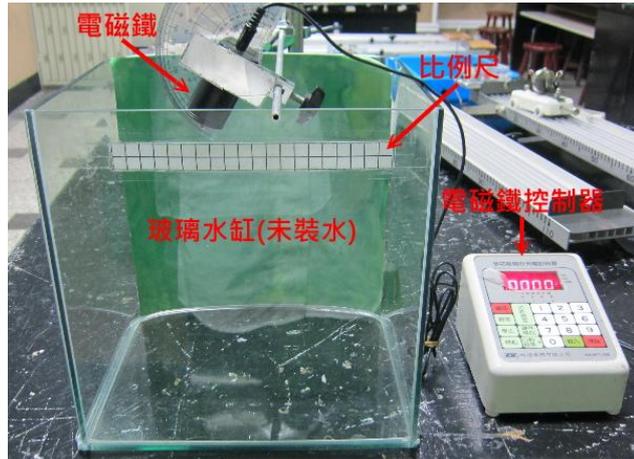


圖 1 架設完成的實驗裝置

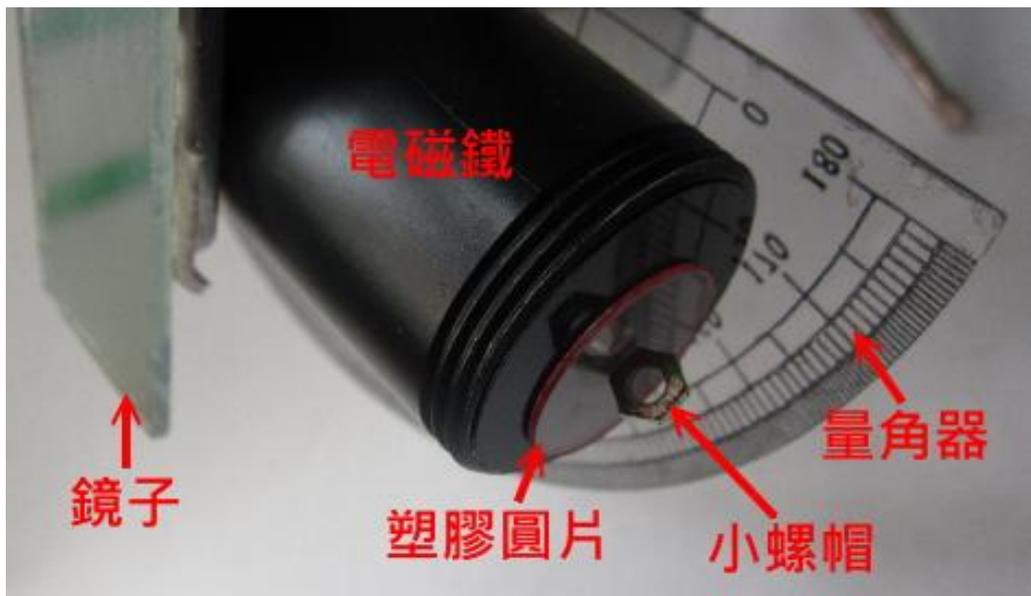
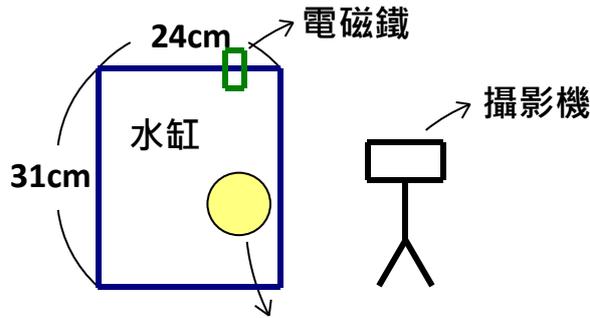


圖 2 圓片以電磁鐵與小螺帽夾住

2. 實驗二：觀察流場的變化

我們在水中加入鋁粉，同時以手電筒從旁邊照射，如圖 3，使鋁粉反光，再釋放圓片以攝影機記錄。因鋁粉很小，若以攝影機全景記錄將難以觀察，所以只取圓片運動的其中一小段攝影。在觀察多次的實驗影片後，繪製出流場隨時間的變化圖。



手電筒在面向水缸的左下方斜斜照射上去

圖 3 實驗裝置示意圖

(二) 實驗一(分析圓片的運動)的詳細步驟：

1. 流程圖



2. 詳細步驟

- (1) 用圓規刀將 CD 片的塑膠部分裁下數個半徑不等的圓形。
- (2) 將水缸裝滿水，且盡量讓水溫保持在 14°C 以下，可以減少發生在實驗中出現小氣泡的情況，影響圓片的運動。待水平靜後，沿著水平線貼上比例尺，並利用攝影機的九宮格線校正攝影機的垂直與水平。
- (3) 將電磁鐵的角度利用鉛錘線、量角器與鏡子調整到固定角度後鎖緊，並放入裝滿水的玻璃水缸中。

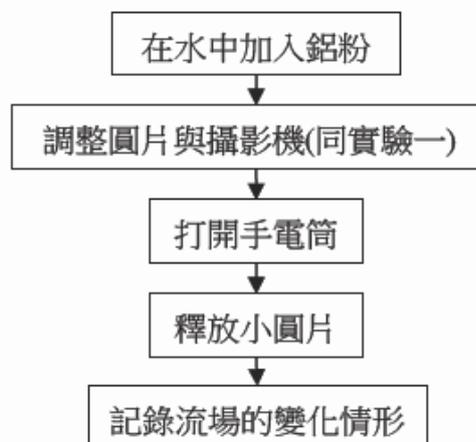
- (4) 開啟電磁鐵，小螺帽受磁力吸引，把圓片夾在電磁鐵上，並用滴管清除附著在圓片上的小氣泡。
- (5) 開始錄影後關閉電磁鐵，小螺帽脫落，待圓片掉落至水缸底部，結束錄影。

3. 數據分析

- (1) 將錄製好的實驗影片放入電腦中，並用軟體「Tracker」開啟影片。
- (2) 利用 Tracker 分別將每一個影格中圓片最左端和最右端的位置標示出來，並將數據匯出。
- (3) 將數據每 10 個做一次平均。
- (4) 將每個影格最左端和最右端的位置數據做平均，可以得到圓片質心的水平位置(X_c)和鉛直位置(Y_c)。
- (5) 分別計算每組數據的質心速率(v)、圓片與水平的夾角(θ 或 Θ)、相對質心的角速度(ω)與角加速度(α)。

(三) 實驗二(觀察流場的變化)的詳細步驟：

1. 流程圖



2. 詳細步驟

- (1) 在水中加入鋁粉，並靜置一段時間。
- (2) 將攝影機架設至欲觀察的部分。

- (3) 調整手電筒，使其可以完整照射到欲觀察的部分。
- (4) 調整圓片與攝影機(同實驗一)。
- (5) 開始錄影後釋放圓片，待圓片掉落至水缸底部，結束錄影。
- (6) 多次觀察實驗影片後繪製流場隨時間的變化圖。

參、研究結果與討論

一、實驗一：分析圓片的運動

(一) 實際記錄影片截圖(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角 48°)

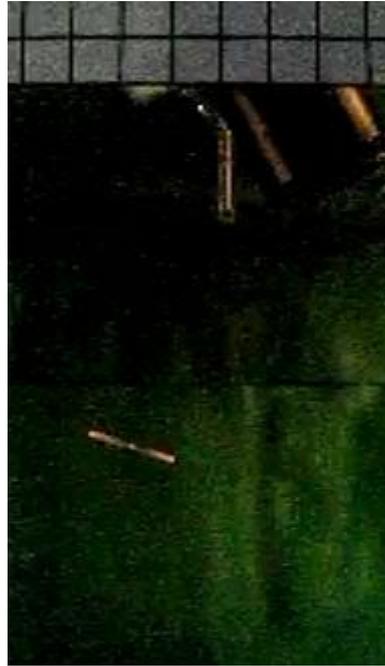


圖 4 圓片運動的記錄影片截圖(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角 48°)

(二) 相同圓片大小，不同初始釋放角

1. 質心運動軌跡

圖表標題內的括號為「 r =圓片半徑，初始釋放角大小」

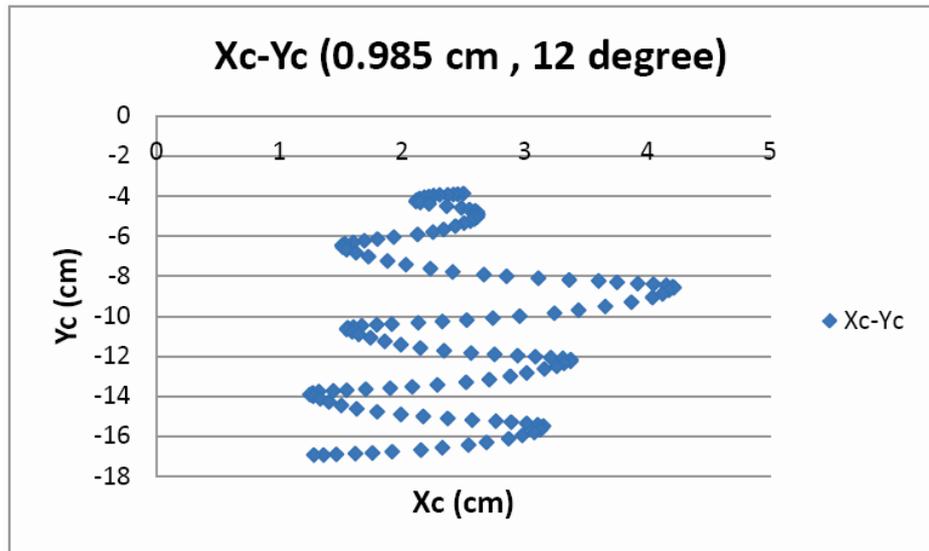


圖 5 質心運動軌跡(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 12°)

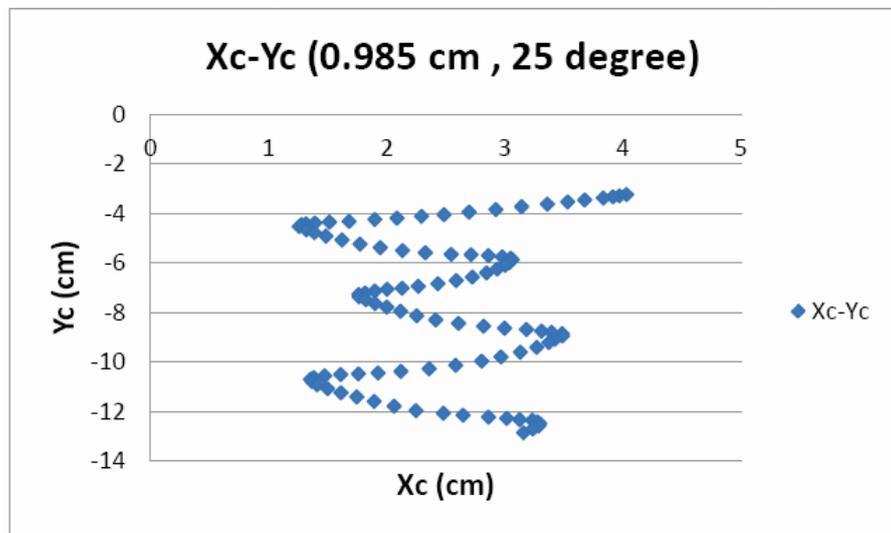


圖 6 質心運動軌跡(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 25°)

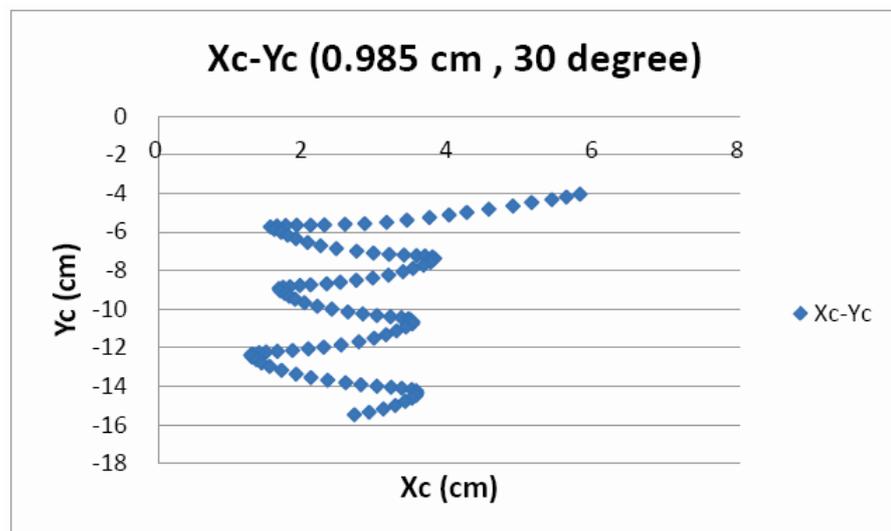


圖 7 質心運動軌跡(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 30°)

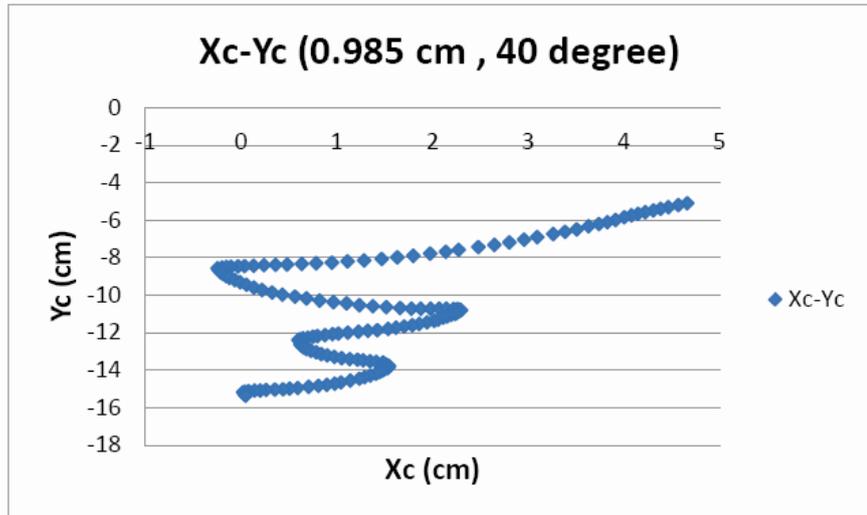


圖 8 質心運動軌跡(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 40°)

在比較圖 5~圖 8 後發現，不論初始釋放角為何，圓片的質心在水平放向上都呈現週期性變化。

2. θ -t 圖的規律性

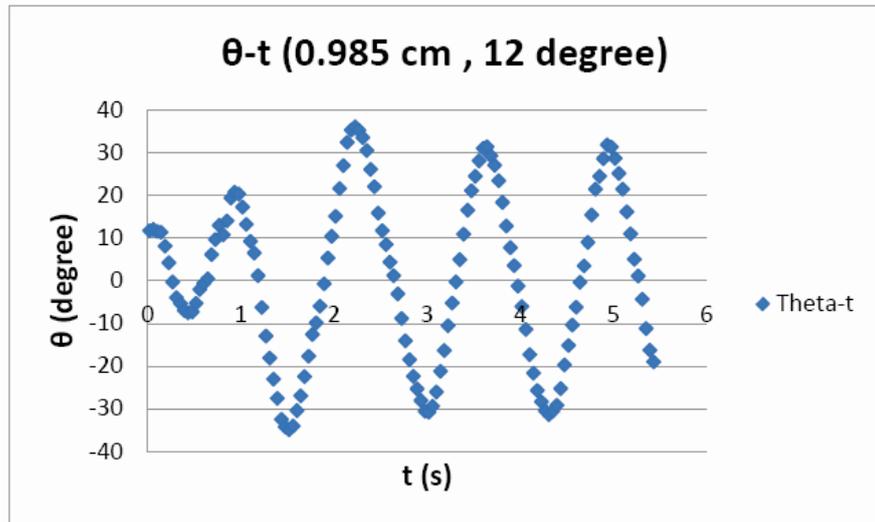


圖 9 θ -t 圖(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 12°)

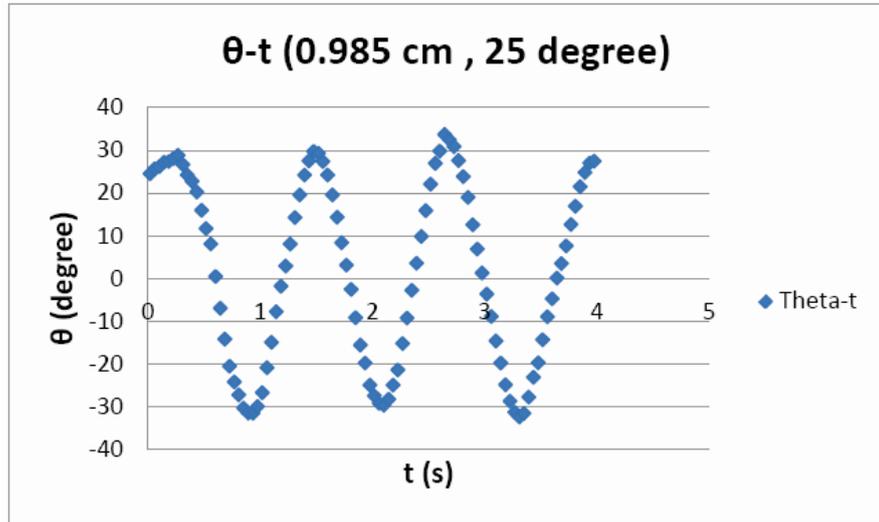


圖 10 θ -t 圖(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 25°)

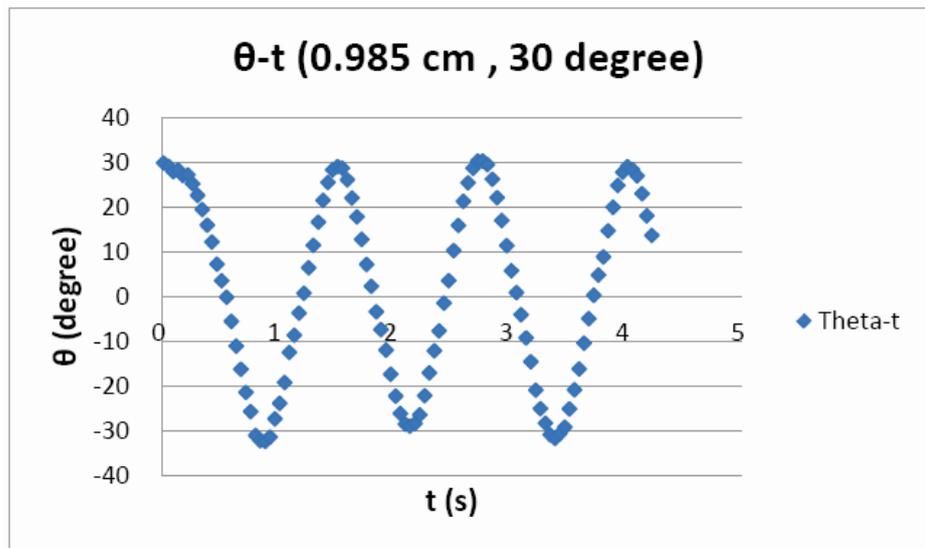


圖 11 θ -t 圖(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 30°)

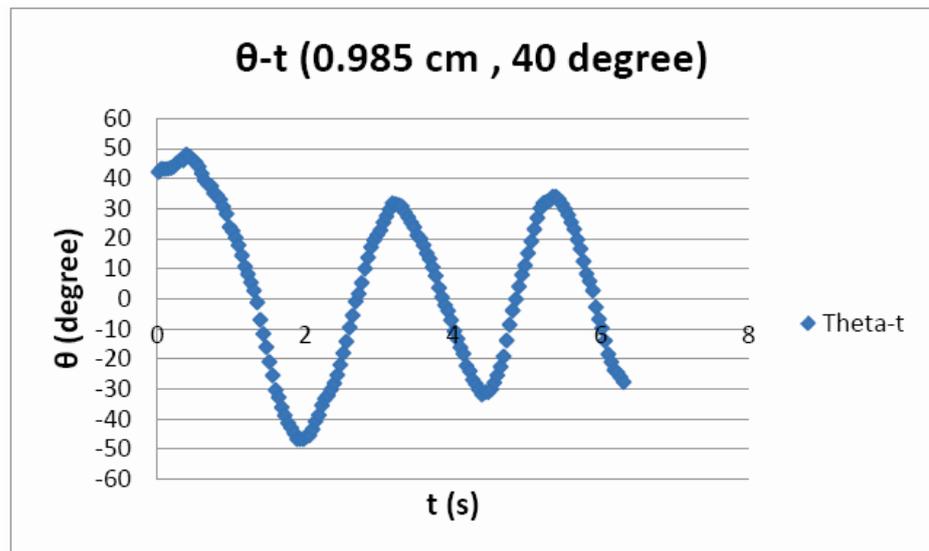


圖 12 θ -t 圖(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 40°)

在比較圖 9~圖 12 後發現，不論初始釋放角為何，圓片與水平之夾角亦呈現週期性變化，變化範圍會隨著時間改變。在運動幾個週期後，變化範圍會被限制在約 $\pm 30^\circ$ 左右，我們稱之為穩定擺動範圍，此時為穩定狀態。

(三) 不同圓片大小

由上述可知，初始釋放角對相同大小的圓片，不會影響其穩定擺動角度大小。我們對不同大小的圓片進行實驗。

1. 質心運動軌跡

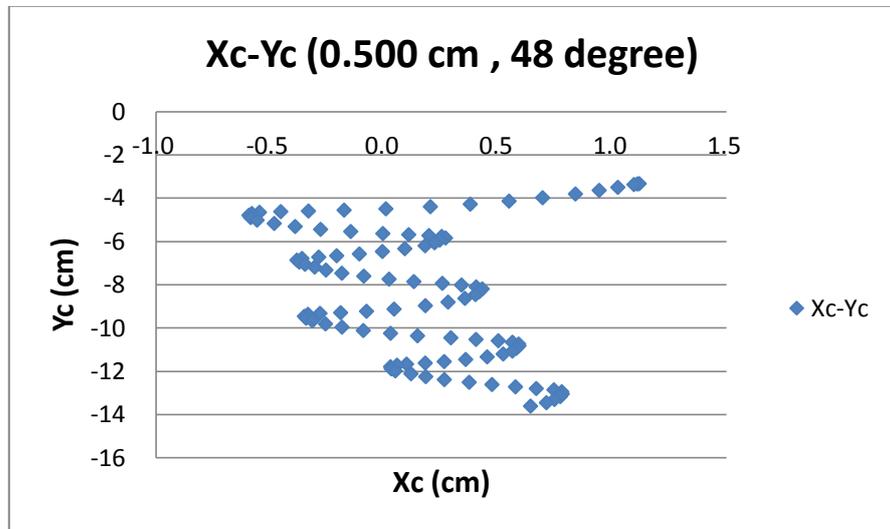


圖 13 質心運動軌跡(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角 48°)

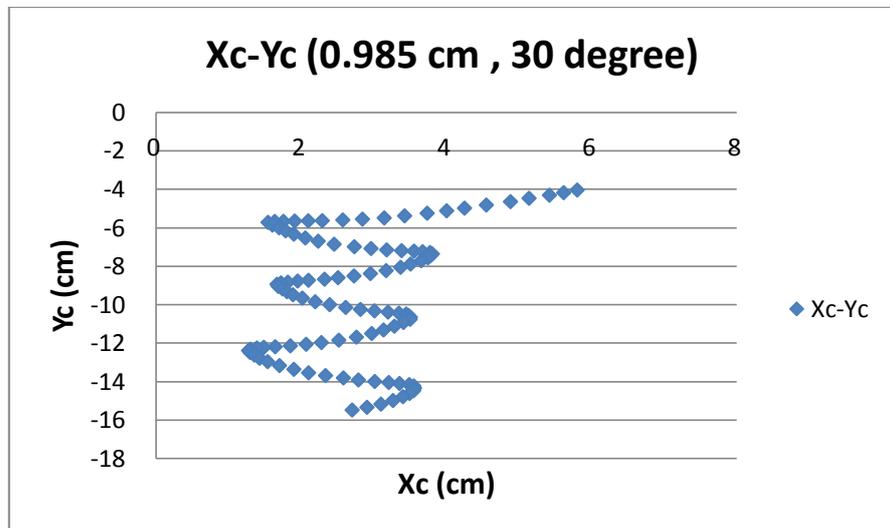


圖 14 質心運動軌跡(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 30°)

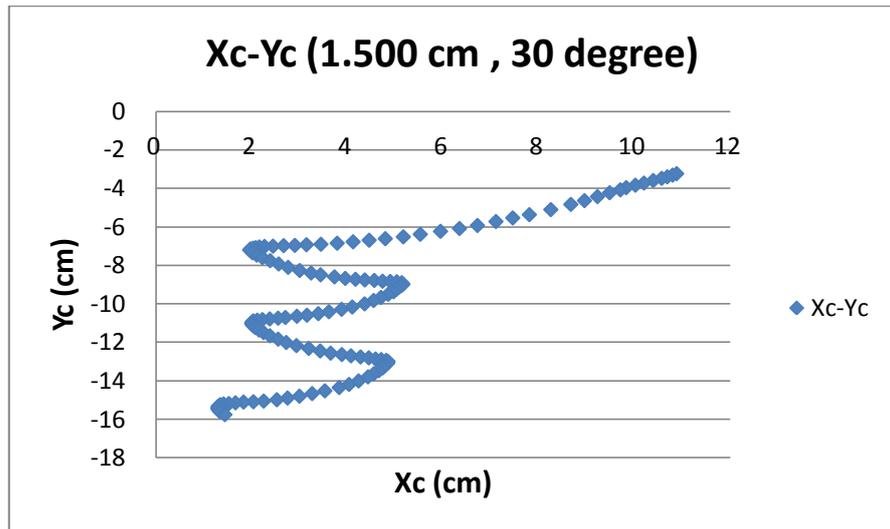


圖 15 質心運動軌跡(圓片半徑 1.500 cm、初始釋放角 30°)

在比較圖 13~圖 15 後發現，不論圓片大小為何，圓片的質心在水平放向上都呈現週期性變化。

2. θ -t 圖的比較

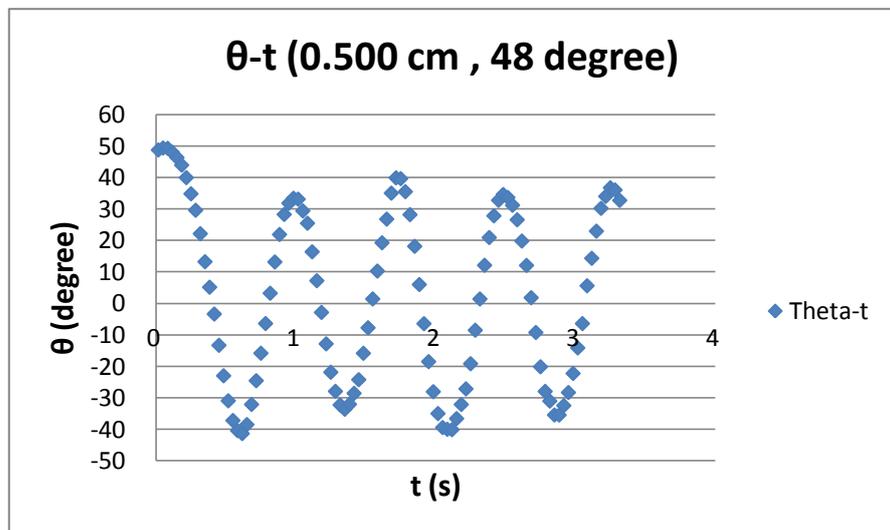


圖 16 θ -t 圖(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角 48°)

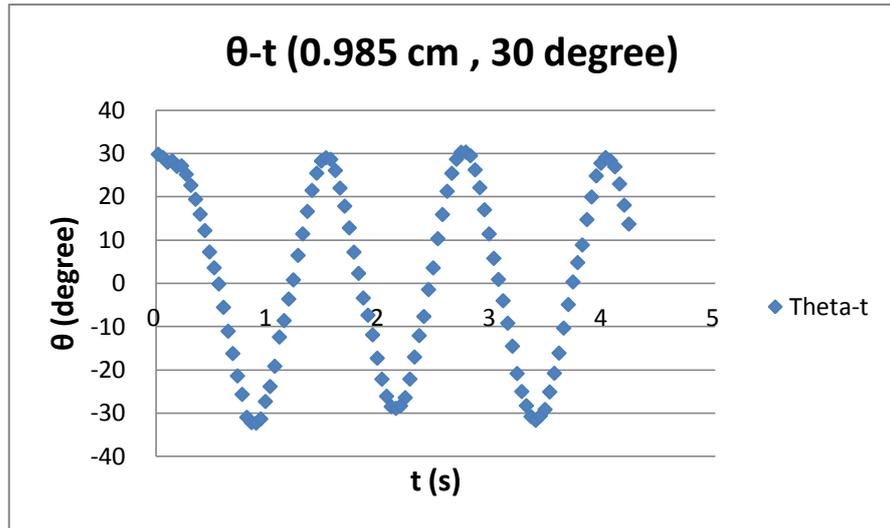


圖 17 θ -t 圖(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 30°)

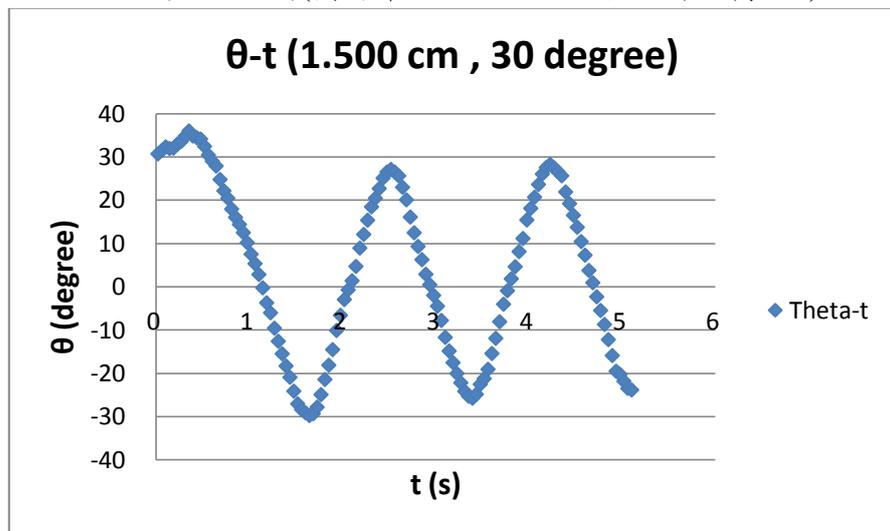


圖 18 θ -t 圖(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 30°)

在比較圖 16~圖 18 後發現，不論圓片大小為何，圓片與水平之夾角亦呈現週期性變化，變化範圍會隨著時間改變。在運動幾個週期後，變化範圍會被限制在穩定擺動範圍，此時為穩定狀態。半徑為 0.500 cm、0.985 cm、1.500 cm 圓片的穩定擺動範圍分別約為 $\pm 35^\circ$ 、 $\pm 30^\circ$ 、 $\pm 25^\circ$ 。

二、實驗二：觀察流場的變化

(一) 實際記錄影片截圖(圓片半徑 0.985 cm)



圖 19 流場變化的記錄影片截圖(圓片半徑 0.985 cm)

(二) 流場圖

觀察半徑為 0.985 cm 的圓片在穩定狀態時，一個週期(圓片變化至相同姿態)的流場變化，取其中七個時間點($t_1 \sim t_7$)繪製流場。

在觀察流場的變化時發現，鋁粉雖然會有初始運動，但因其速率遠小於欲觀察的鋁粉速率，視鋁粉初始時為靜止。

我們將所觀察的流場分割，流場的速度以箭頭標示，箭頭的粗細代表流場速率的相對大小，未標示箭頭的部分表示未觀測到流場速度(靜止)。在流場圖中，紅線是圓片的投影，大小未按比例繪製，但圓片與水平的夾角可代表圓片的運動狀態，其中 t_1 、 t_4 、 t_7 代表圓片與水平夾角為極值角度(穩定擺動角度)。

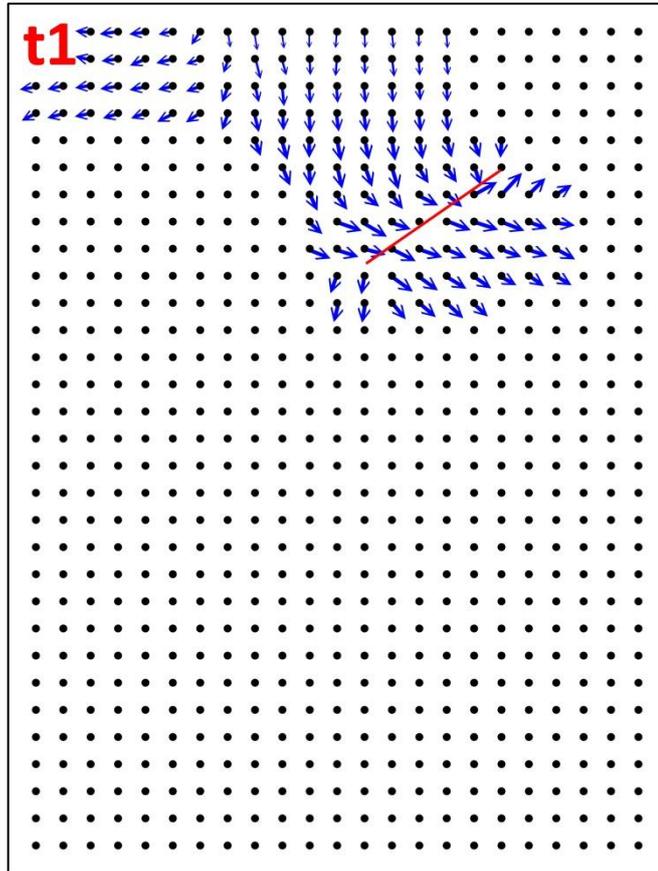


圖 20 t1 的流場圖

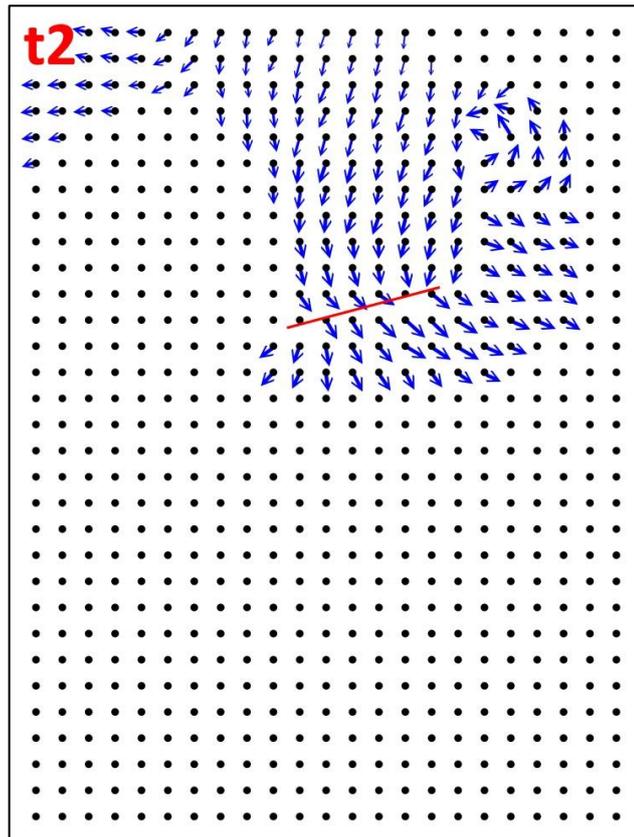


圖 21 t2 的流場圖

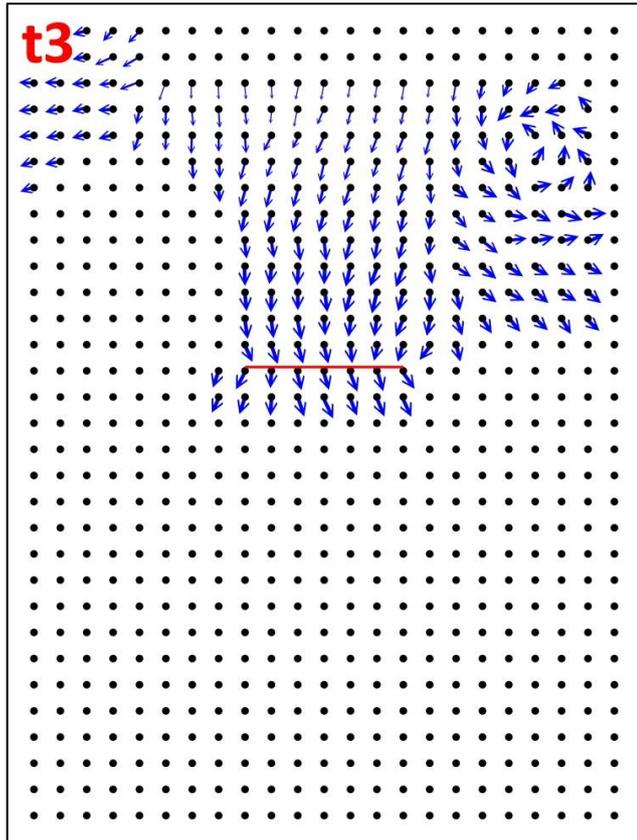


圖 22 t3 的流場圖

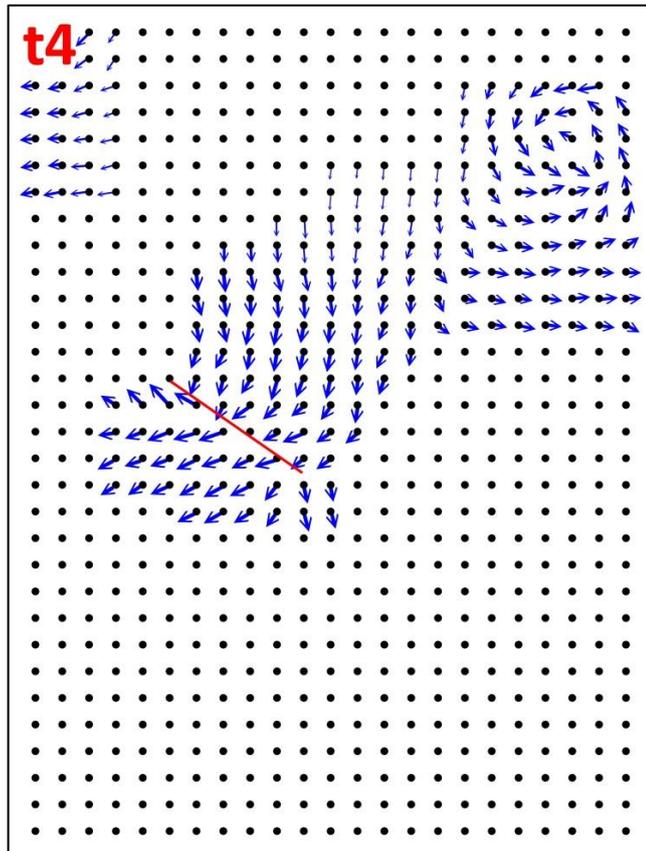


圖 23 t4 的流場圖

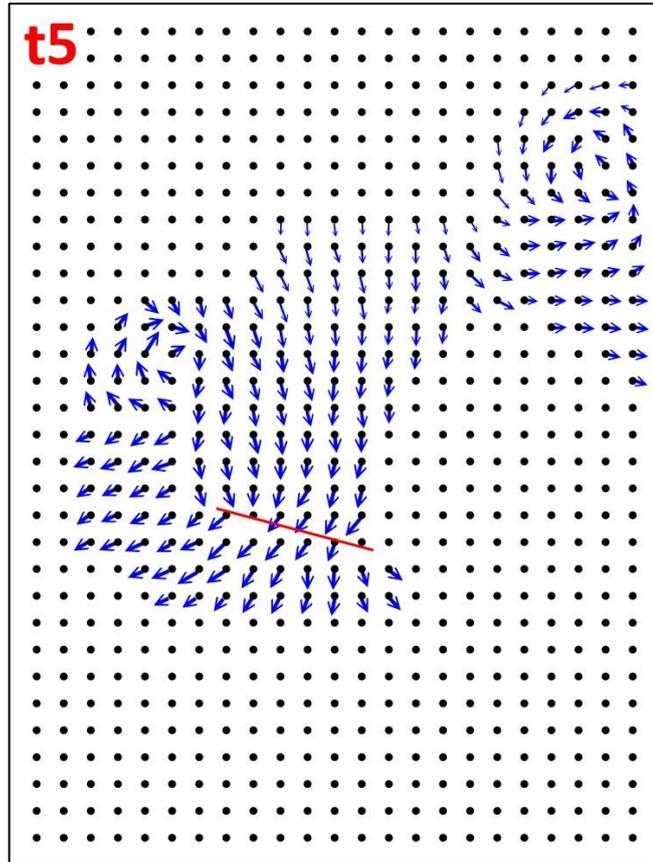


圖 24 t5 的流場圖

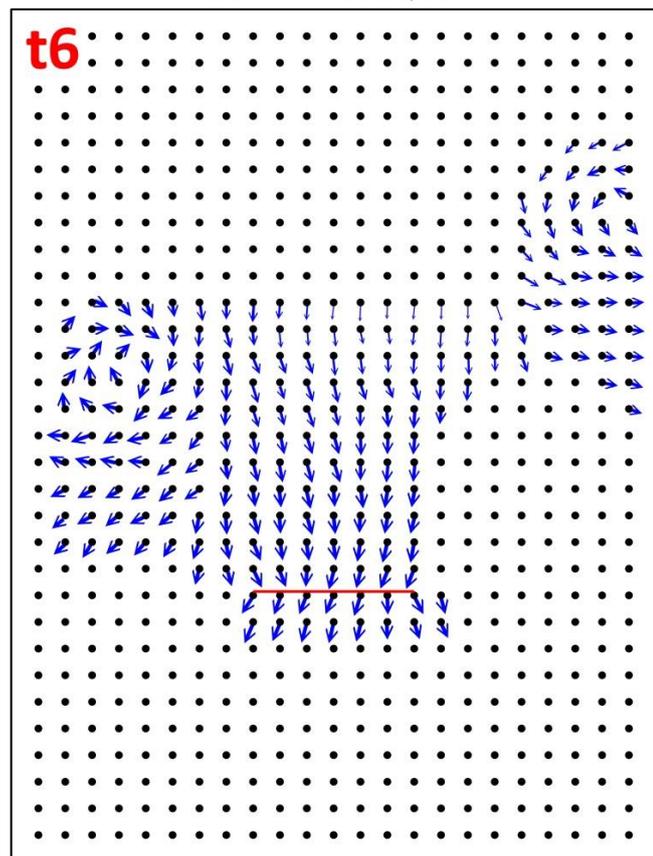


圖 25 t6 的流場圖

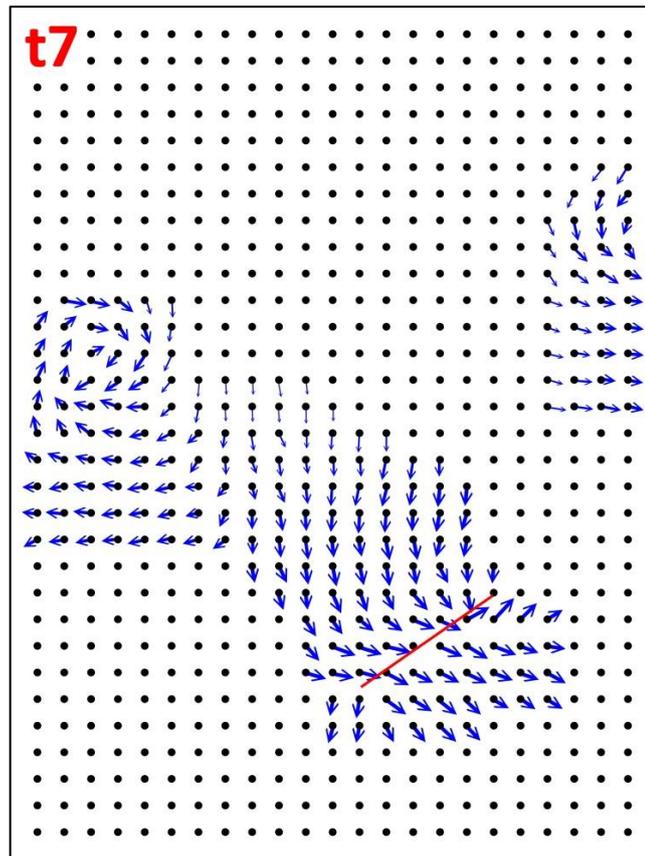


圖 26 t7 的流場圖

(三) 觀察結果：

1. 在圓片下方的水流會向左或向右被圓片推開，但其向左和向右的分界並不一定是在中間，而是會隨著時間變化，例如： $t_1 \rightarrow t_2$ (圖 20 \rightarrow 圖 21)，水流向左和向右的分界的從最左邊向右移。我們猜測這與水流在圓片表面的流動方式有關。
2. 在圓片上方的水流速率小於圓片的運動速率，也就是說圓片向下移動後，上方的水流無法及時遞補空出來的空間，但因流體具有連續性，我們認為應有水流平行圓片流入圓片上側。
3. $t_1 \rightarrow t_4$ 和 $t_4 \rightarrow t_7$ 的流場變化幾乎呈現對稱的結果，意即從右側運動到左側和從左側運動到右側的流場變化是幾乎一樣的。
4. 在圓片 $t_1 \rightarrow t_2$ (圖 20 \rightarrow 圖 21)、 $t_4 \rightarrow t_5$ (圖 23 \rightarrow 圖 24)時都會產生渦流，此與參考文獻一的結果相同。而渦流會隨著時間向外傳遞，並慢慢消失，原本產生渦流的地方漸漸恢復平靜。

三、理論

(一) 等效模型：根據流場觀察結果 1、2，圓片下側會有水流分開，而上側會有水流匯聚。於是，我們建立一個等效的模型：假設圓片不動，是一股水流衝擊圓片，當水通過圓片時向左右分開，而後在圓片上側匯合。在水流分流後，因左右分流的流速不同造成壓力差，引起圓片轉動。

(二) 相對運動：如圖 27，圓片以速率 v 運動時，可視為圓片保持水平且靜止不動，而速率 v 的水流以角度 δ ，斜向衝擊圓片。

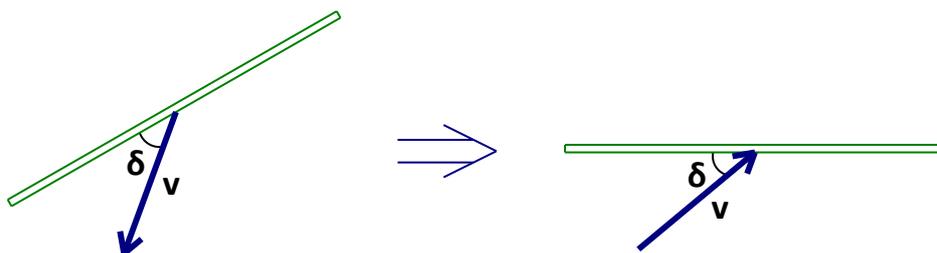


圖 27 相對運動示意圖(僅畫出一條水流示意整體水流方向和速度)

(三) 假設：

1. 如圖 28，若水流由一側平行圓片衝擊($\delta = 0^\circ$)，一端分流，而另一端匯合，分流點和匯合點在兩端。



圖 28 水流以 $\delta = 0^\circ$ 衝擊圓片示意圖

其在圓片上的分流情形如圖 29：

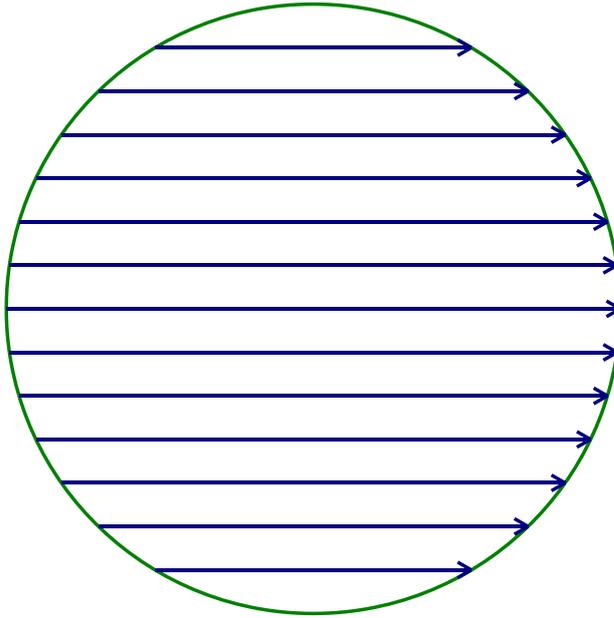


圖 29 水流以 $\delta = 0^\circ$ 衝擊圓片時，在圓片上的分流情形示意圖

2. 如圖 30，若水流垂直衝擊圓片($\delta = 90^\circ$)，一端分流，而另一端匯合，分流點和匯合點均在中央。

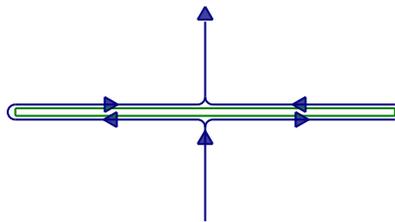


圖 30 水流以 $\delta = 90^\circ$ 衝擊圓片示意圖

其在圓片上的分流情形如圖 31，我們稱水流分流後每一組的左右分流為一條「分流線」：

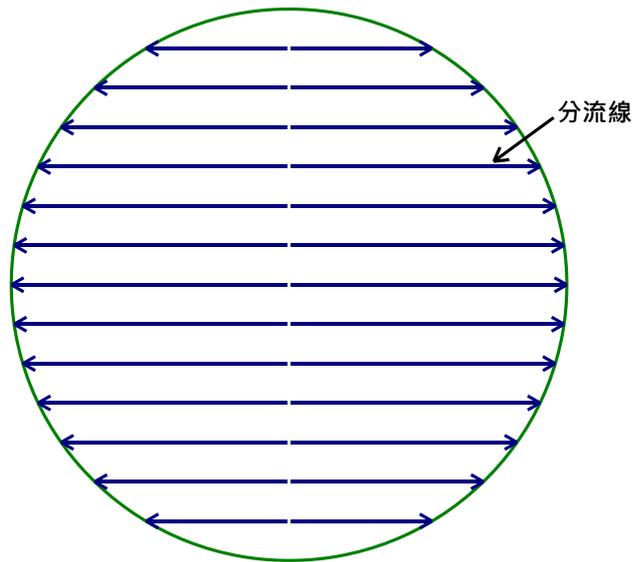


圖 31 水流以 $\delta = 90^\circ$ 衝擊圓片時，在圓片上的分流情形示意圖

3. 故可推論，若水流斜向衝擊圓片，分流點及匯合點的位置，設在每一條分流線上和中點的距離與一半分流線長度的比例為 e ，如圖 32。

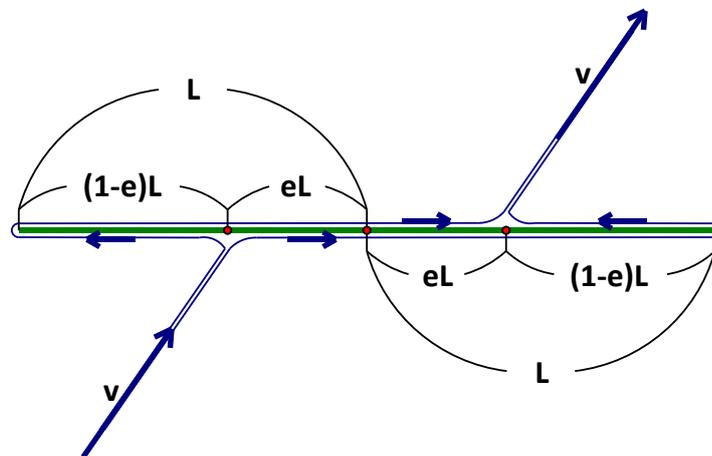


圖 32 水流的分流位置示意圖

L ：任一條分流線長度的一半

v ：水相對於圓片運動之速率

e ： $\frac{\text{分流點或匯合點與分流線中點的距離}}{L}$

(四) 水流流速差：

1. 我們假設水流以速率 v 衝擊到圓片時，原本分流後的流速應都

為 v ，如圖 33

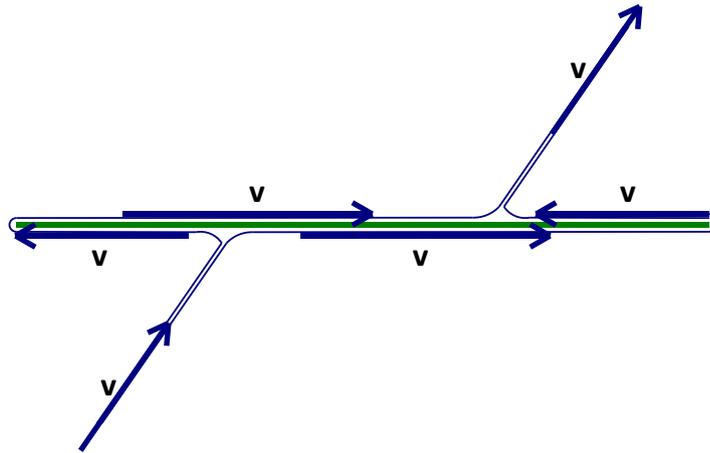


圖 33 水流原本的分流流速示意圖

2. 但水流分流後，因受到「周圍水流」x 方向分量 $v \cos \delta$ 的影響，其流速會改變，如圖 34。

由圖 34 可知

$$v_1 = v - v \cos \delta$$

$$v_2 = v + v \cos \delta$$

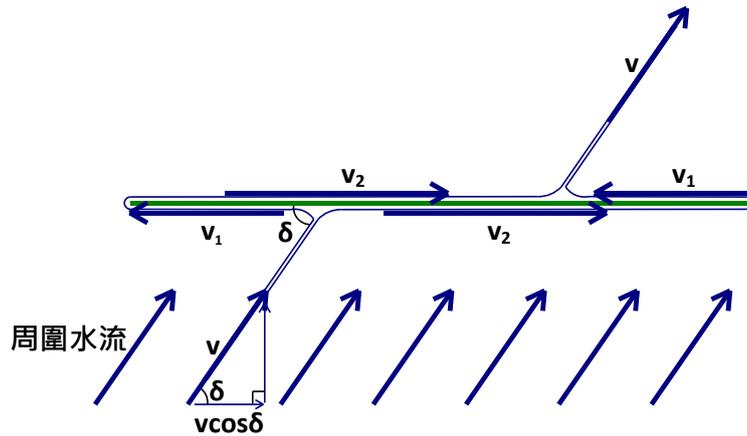


圖 34 水流的分流流速受周圍水流影響示意圖

v ：水相對於圓片運動之速率

v_1 ：水流分流或匯合時向左流動的速率

v_2 ：水流分流或匯合時向右流動的速率

δ ：水流衝擊圓片的夾角($0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$)

(五) 計算壓力差和力矩：

1. 壓力差：

如圖 35，因上下兩側流速不同造成壓力差，計算點 H 上下兩側之壓力差如下

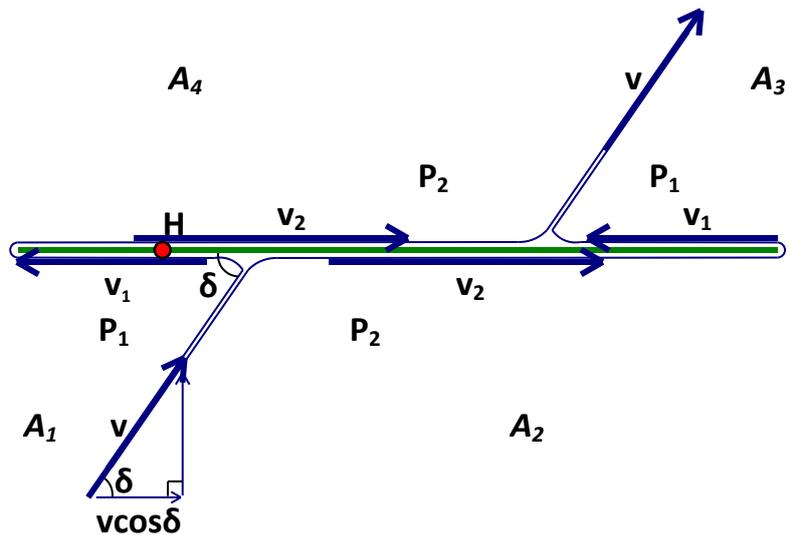


圖 35 壓力差示意圖

v ：水流相對於圓片運動之速率

v_1 ：水流分流或匯合時向左流動的速率

v_2 ：水流分流或匯合時向右流動的速率

P_1 ：區域 A_1 之壓力

P_2 ：區域 A_2 之壓力

δ ：水流衝擊圓片的夾角($0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$)

假設水為理想流體，並引用白努利方程(Bernoulli equation)計算水流流速差所造成的壓力差

由白努利方程已知

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2$$

代入 v_1 、 v_2 後得

$$P_1 - P_2 = 2\rho v^2 \cos \delta \quad \text{--- 式(1)}$$

2. 力矩：

(1) 計算後得知，圓片上的分流點和匯合點連線為橢圓形，其方程式如下：

$$\frac{x^2}{(er)^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

將橢圓分流位置繪製於圖 36、圖 37

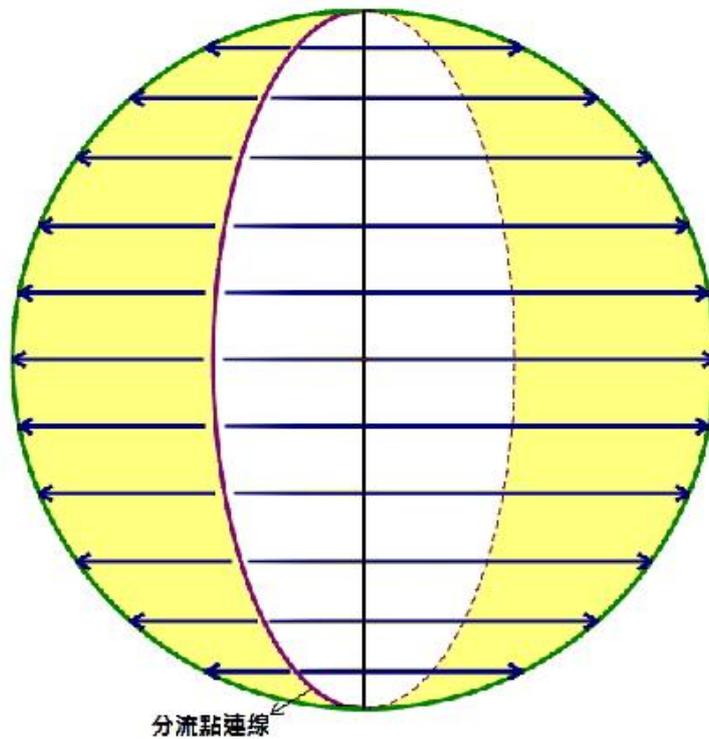


圖 36 分流點連線仰視示意圖

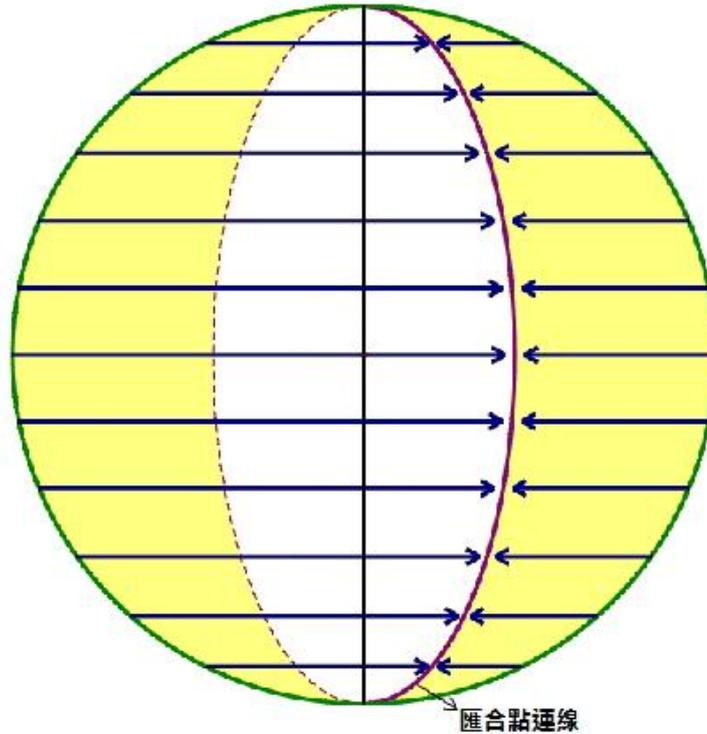


圖 37 匯合點連線俯視示意圖

(2) 計算作用力：

由圖 34 可知，圖 36 和圖 37 中白色區域的流速均為 v_2 ，不會造成壓力差，我們只需要計算圖 36 和圖 37 中黃色區域的壓力差所產生的作用力。

單邊黃色區域面積 A

$$A = \frac{1}{2} \pi r^2 (1 - e)$$

單邊黃色區域的作用力 F 即為

$$F = (P_1 - P_2) \times \frac{1}{2} \pi r^2 (1 - e)$$

將式(1)代入可得

$$F = \rho v^2 \cos \delta \pi r^2 (1 - e)$$

(3) 計算力矩：

由壓力差產生之作用力，在圓片上的施力位置我們可視為在圖 36 中單邊黃色區域的重心位置。

A. 由積分得知：

半圓形的重心位置在直徑上距離圓心 $\frac{4r}{3\pi}$

半橢圓形的重心位置在直徑上距離圓心 $\frac{4er}{3\pi}$

B. 計算重心位置：

我們假設單邊黃色區域的重心位置距離圓心為 x

計算後可得

$$x = \frac{4r}{3\pi}(1 + e)$$

C. 總力矩 τ 為

$$\tau = (F \times x) \times 2 \quad * \text{見註 1}$$

計算後可得

$$\tau = \frac{8}{3} \rho v^2 \cos \delta r^3 (1 - e^2) \quad \text{--- 式(2)}$$

將式(2)移項後可得

$$e = \pm \sqrt{1 - \frac{3\tau}{8\rho v^2 \cos \delta r^3}} \quad \text{--- 式(3)}$$

設實驗所測得的力矩為 τ_0

$$\tau_0 = I\alpha = \frac{1}{4}mr^2\alpha$$

其中 m 為圓片的質量

則可將式(3)改為

$$e = \pm \sqrt{1 - \frac{3mr^2\alpha}{32\rho v^2 \cos \delta r^3}} \quad \text{--- 式(4)}$$

故由實驗測得 v 、 α 、 δ 值，即可算出 e 值

*註 1：因圖形為對稱圖形，將單邊的力矩乘以 2 可得總

力矩

(六) 最短時間求 e 值：

根據流場觀測結果，當圓片向下移動後，圓片下側的水流會平行圓片流出，而圓片上側也會有水流平行圓片流入，以保持水的連續性。

在等效模型中，我們認為水流為何一定要在分流點分流或在匯合點匯合，是因為當圓片向下移動，水流必須在最短的時間之內，從圓片下側平行圓片流出，並流入圓片上側以保持水的連續性。根據此想法，我們可以計算 e 值。

水流分流並匯合的時間 t 為

$$t = \frac{(1 - e)r}{v - v \cos \delta} + \frac{(1 + e)r}{v + v \cos \delta}$$

符合最短時間

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = 0$$

計算後可得

$$e = \frac{2 \cos \delta}{1 + (\cos \delta)^2} \text{ --- 式(5)}$$

我們將由式(4)得到的 e 值稱為「實驗 e 值」，式(5)得到的 e 值稱為「理論 e 值」。

四、 δ 的討論

(一) δ 的計算

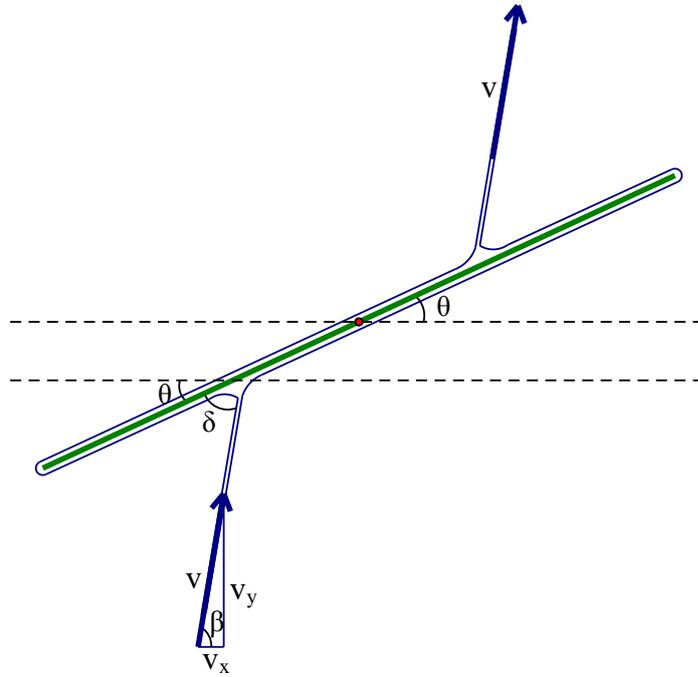


圖 38 δ 的示意圖

δ : 水流衝擊圓片的夾角($0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$)

β : 水流與水平的夾角

θ : 圓片與水平的夾角

由上圖可知， $\delta = \beta - \theta$

(二) 實驗結果

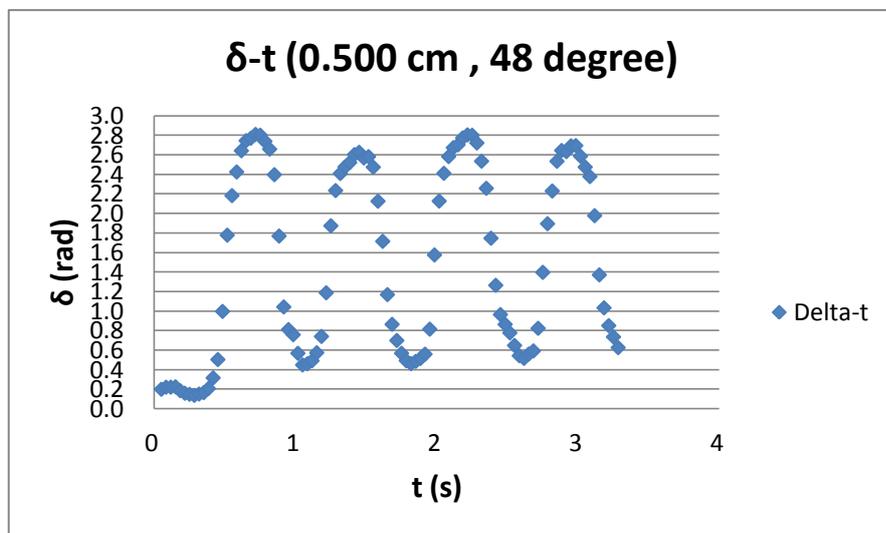


圖 39 δ -t 圖(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角 48°)

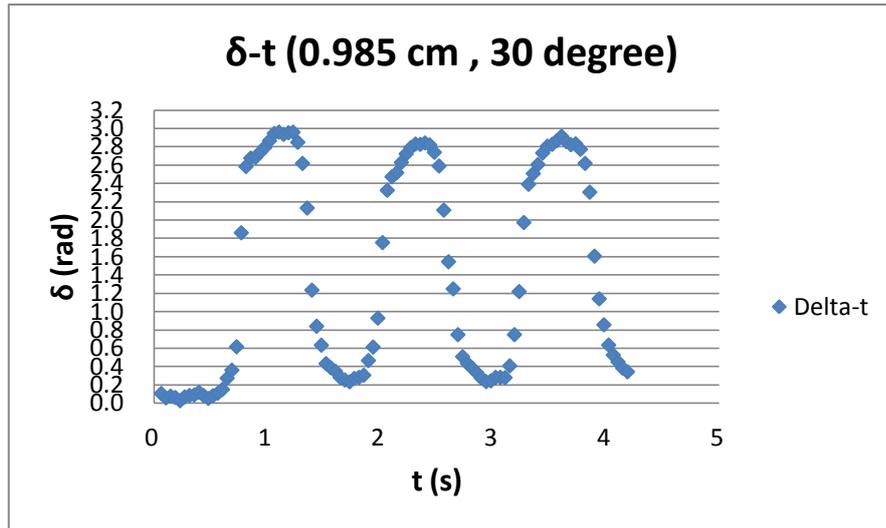


圖 40 δ -t 圖(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 30°)

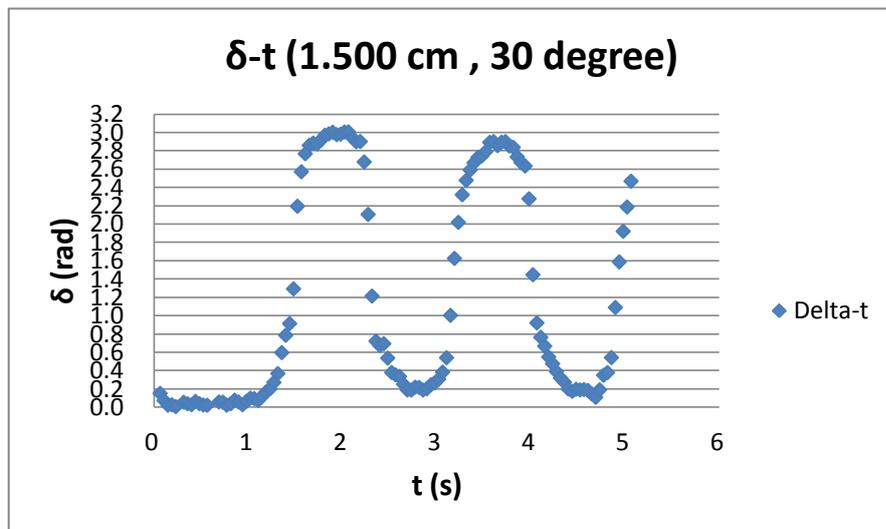


圖 41 δ -t 圖(圓片半徑 1.500 cm、初始釋放角 30°)

在比較圖 39~圖 41 後發現，水流衝擊角度 δ 呈現週期性的變化。不論圓片大小為何， δ 在經過 1~2 個週期之後，都會被限制在一個範圍之內做週期性變化，而這個範圍會隨著圓片增大而變小。以半徑為 0.985 的圓片(圖 40)為例，其 δ 在經過 1 個週期之後，只會在 $15^\circ \sim 165^\circ$ 之間變化。

五、e 值的討論

由實驗可測得圓片的 v 、 α 、 δ 值，將這些數值代入式(4)可得實驗 e 值；另外，將不同的 δ 值代入式(5)可得理論 e 值，將上述兩種 e 值對 δ 繪製圖表，並比較其差異。

我們以式(6)表示兩組數據的偏差程度(d_0)：

$$d_0 = \sqrt{\frac{(\text{實驗 e 值} - \text{理論 e 值})^2}{\text{數據組數}}} \quad \text{--- 式(6)}$$

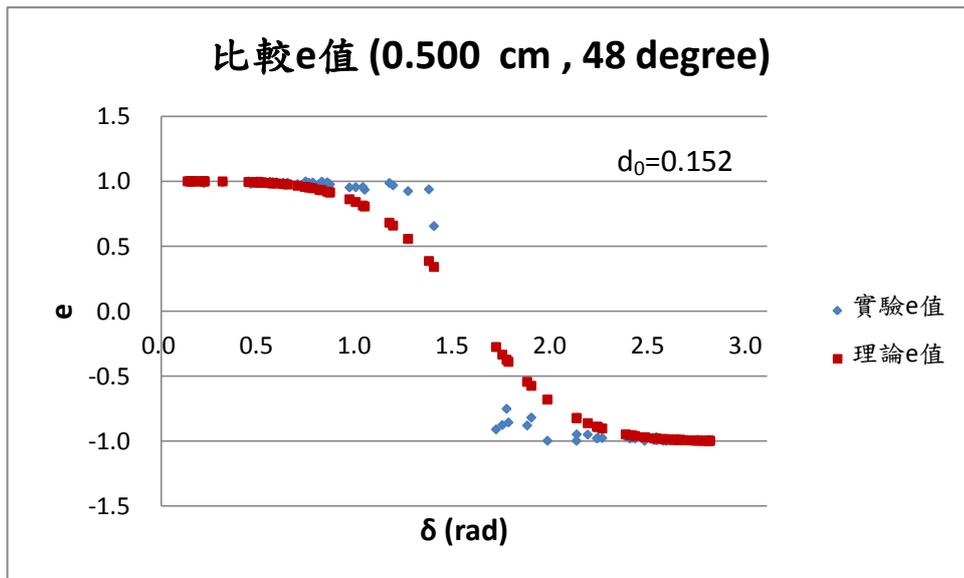


圖 42 比較 e 值(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角48°)

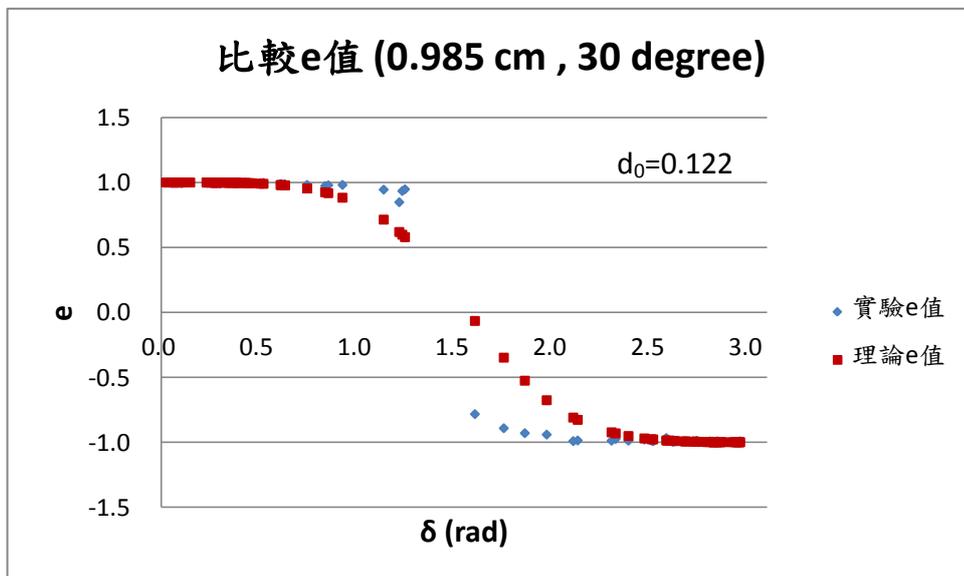


圖 43 比較 e 值(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 30°)

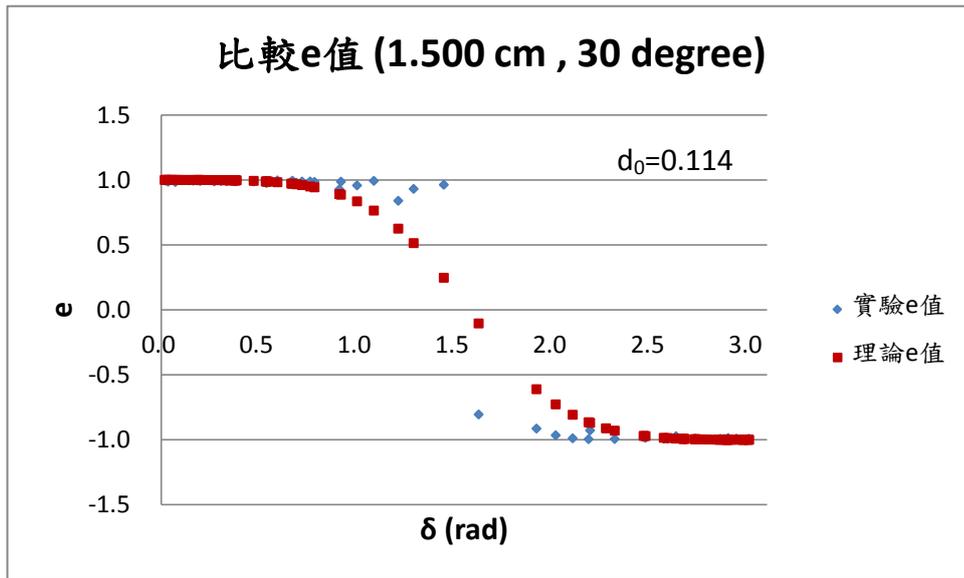


圖 44 比較 e 值(圓片半徑 1.500 cm、初始釋放角 30°)

在觀察圖 42~圖 44 後，我們發現實驗 e 值和理論 e 值有相同的趨勢，但仍有些偏差。當 δ 越接近 0° 時，實驗 e 值和理論 e 值的偏差就越小；當 δ 越接近 90° 時，實驗 e 值和理論 e 值的偏差就越大。

六、模型與力矩調整

為了減少實驗 e 值和理論 e 值的偏差，我們先探討模型的調整。

(一) 我們進行下面兩個分流實驗，以水流直接衝擊塑膠圓片

1. 水流以 $\delta = 0^\circ$ 衝擊圓片，如下圖所示



圖 45 水流以 $\delta = 0^\circ$ 衝擊圓片示意圖

分流點連線為半圓弧，如圖 46，此即原先建立之模型，我們稱之為「線分流」。

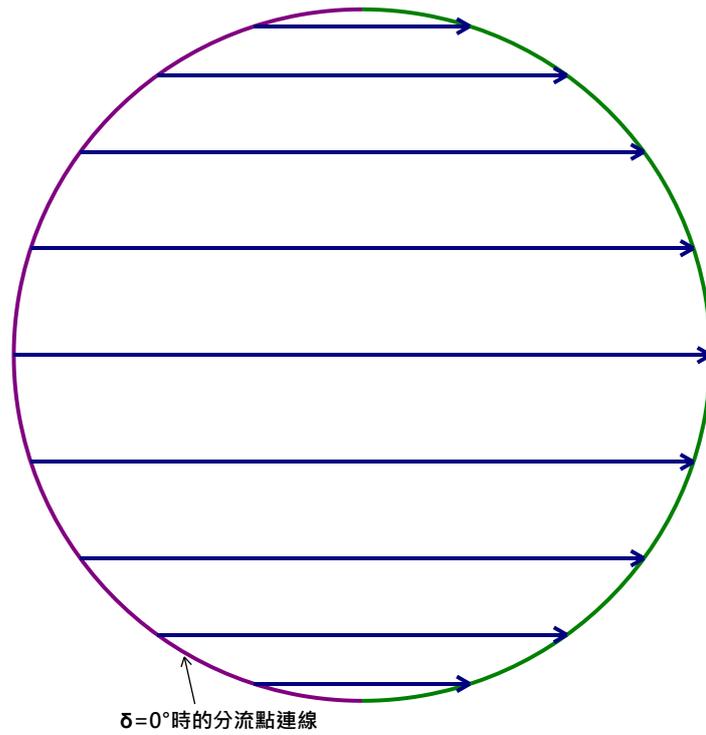


圖 46 $\delta = 0^\circ$ 時的分流點連線為半圓弧

2. 水流以 $\delta = 90^\circ$ 衝擊圓片，如下圖所示

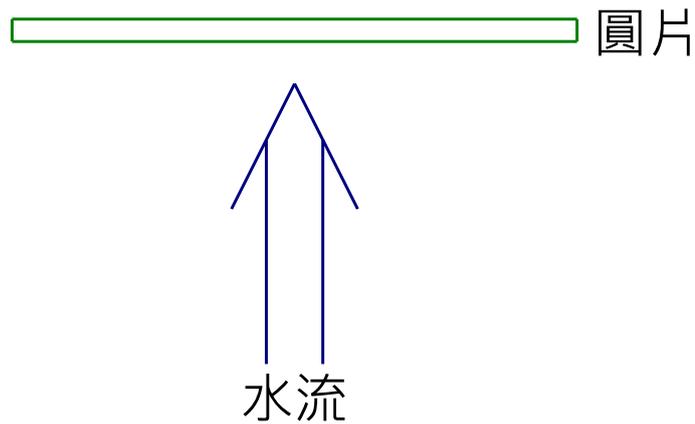


圖 47 水流以 $\delta = 90^\circ$ 衝擊圓片示意圖

分流點位於圓片圓心，水的分流呈輻射狀，如圖 48，我們稱之為「點輻射分流」。

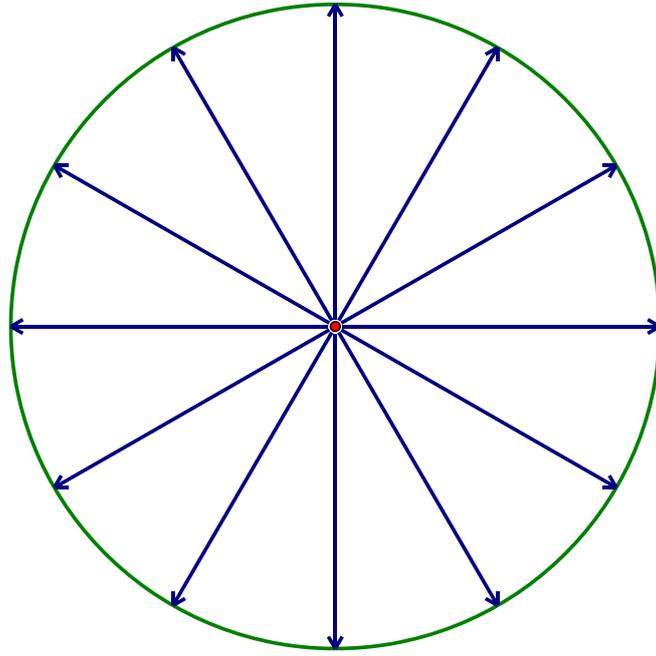


圖 48 $\delta = 90^\circ$ 時的分流點位於圓片圓心，分流呈輻射狀

3. 若水流斜向衝擊圓片，我們推論水的分流模式應介於上述兩種分流之間，亦即為線分流與點輻射分流之混合，如圖 49。而當 δ 越接近 0° 時，分流模式就越接近線分流；當 δ 越接近 90° 時，分流模式就越接近點輻射分流。

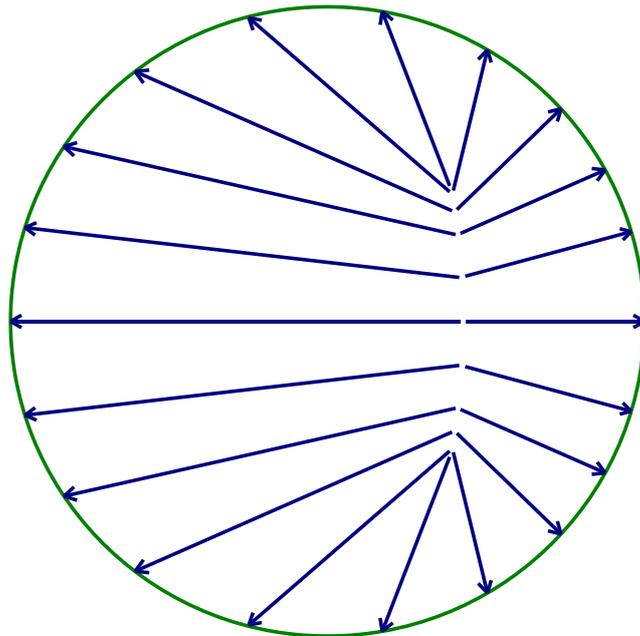


圖 49 線分流與點輻射分流之混合示意圖

- (二) 承上，關於水的分流，我們建立了線分流及點輻射分流之「混合模型」，如圖 49，藉以取代原先單純的「線分流模型」。

1. 原先線分流模型下，水分流後水流速度限制在 x 方向上，受到周圍水流的影響(詳見 p.22 的圖 34)，水流速度變化情形如圖 50 所示

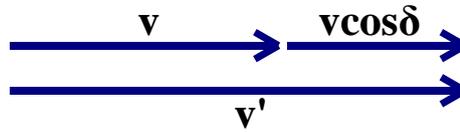


圖 50 線分流模型下之水流速度變化情形

v ：原水流速度

$v \cos \delta$ ：周圍水流 x 方向分量(詳見圖 34)

v' ：受周圍水流影響後的水流速度

2. 混合模型下，水流速度不再限制於 x 方向，而是任意方向的，則水流速度變化情形如圖 51 所示

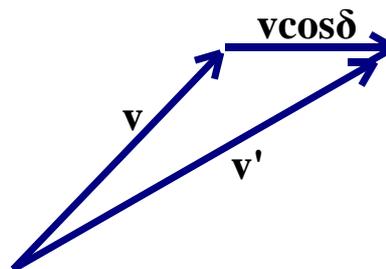


圖 51 混合模型下之水流速度變化情形

3. 由上可知，混合模型下，水流速率變化量較小，而我們原先建立的理論(詳見 p.19)認為：「速率變化造成壓力差，進而產生力矩。」故在混合模型下，圓片所受力矩 τ 較線分流模型下的小。
4. 在混合模型下， δ 越接近 0° 時，圓片所受力矩 τ 與線分流差距較小， e 值與原本模型的實驗 e 值較接近； δ 越接近 90° 時，圓片所受力矩 τ 與線分流差距較大， e 值較不接近原本模型的實驗 e 值，此與圖 42~圖 44 的實驗結果相符。

(三)由以上論述可知，在混合模型下，圓片受到的力矩 τ 較線分流模型小，且當 δ 越接近 0° 時， τ 與線分流模型差距較小； δ 越接近 90° 時， τ 與線分流模型差距較大。我們

將式(2)： $\tau = \frac{8}{3}\rho v^2 \cos \delta r^3(1 - e^2)$ 假設為

$$\tau = k(\csc \delta)^n \rho v^2 \cos \delta r^3(1 - e^2) \quad \text{--- 式(7)}$$

其中 n 、 k 為常數

e 代入理論 e 值

$$e = \frac{2 \cos \delta}{1 + (\cos \delta)^2}$$

為了計算上的方便，我們設

$$\varepsilon = \rho v^2 \cos \delta r^3(1 - e^2)$$

代入式(7)後得到

$$\tau = k(\csc \delta)^n \varepsilon$$

將上式取對數，並代入實驗所測得的力矩 τ_0 ，可得

$$\log \frac{\tau_0}{\varepsilon} = n \log \csc \delta + \log k$$

將實驗數據代入後，對數據點 $(\log \csc \delta, \log \frac{\tau_0}{\varepsilon})$ 作線性迴歸，可得迴歸

直線 $y = ax + b$ 中的 a 和 b ，而 $n = a$ 、 $k = 10^b$

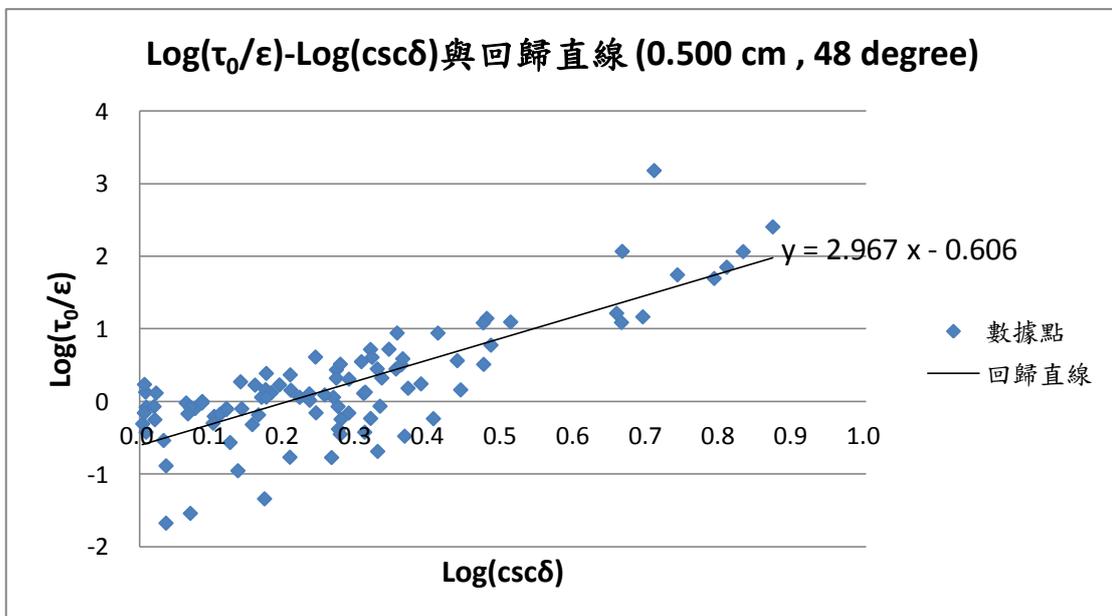


圖 52 迴歸直線 $y = 2.967x - 0.606$ ，相關係數 $R = 0.789$

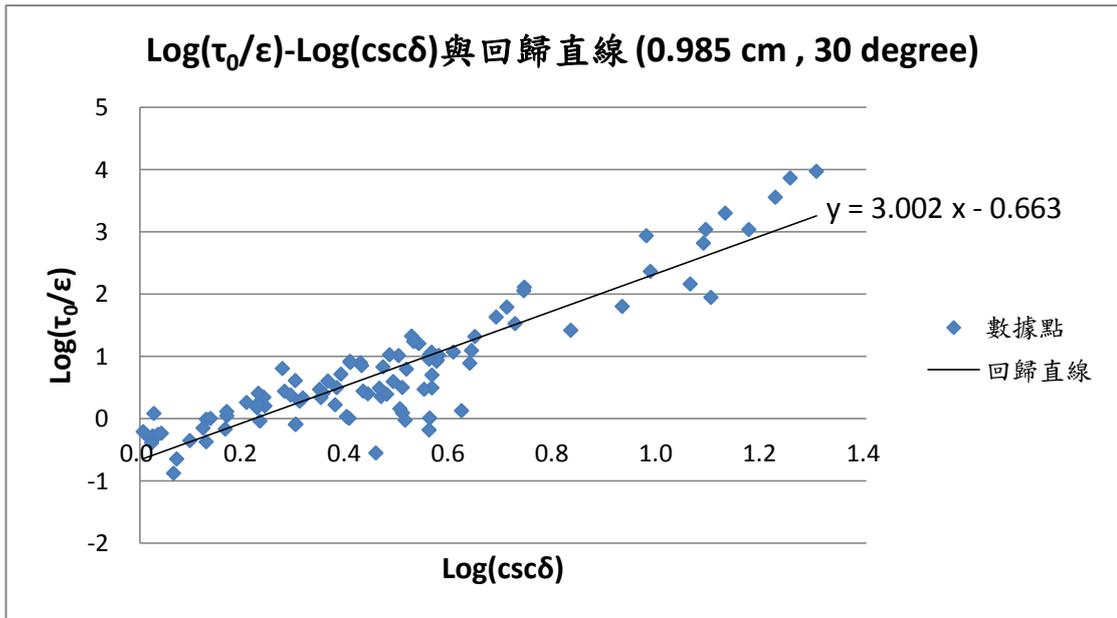


圖 53 迴歸直線 $y = 3.002x - 0.663$ ，相關係數 $R = 0.910$

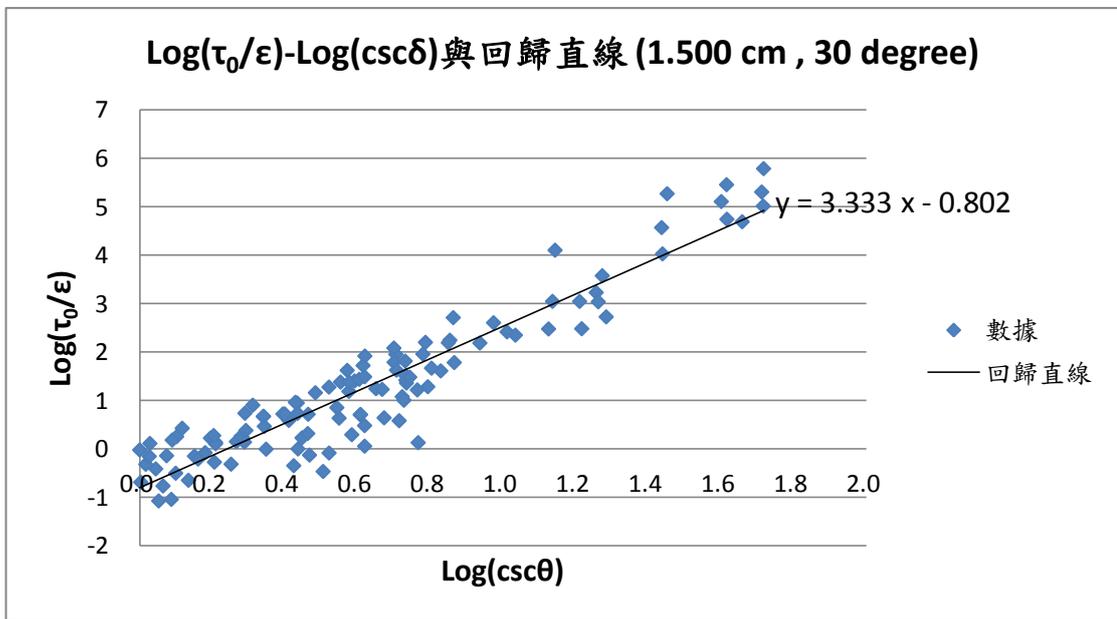


圖 54 迴歸直線 $y = 3.333x - 0.802$ ，相關係數 $R = 0.942$

(四)根據圖 52~圖 54 的結果，我們繪製表 1

項目 \ 圓片大小	0.500 cm	0.985 cm	1.500 cm	平均
n	2.967	3.002	3.333	3.101
k	0.248	0.217	0.158	0.207

表 1 不同圓片大小的 n、k 值與其平均

從表 1 中可得 n、k 的平均值：n=3.101、k=0.207。將 n 和 k 值代入式(7)得到調整的力矩

$$\tau = 0.207(\csc \delta)^{3.101} \rho v^2 \cos \delta r^3 (1 - e^2) \quad \text{--- 式(8)}$$

將式(8)移項後可得到調整的實驗 e 值

$$e = \pm \sqrt{1 - \frac{(\csc \delta)^{3.101} \tau}{0.207 \rho v^2 \cos \delta r^3}} \quad \text{--- 式(9)}$$

(五) 將實驗數據代入式(9)後，比較調整後的實驗 e 值和理論 e 值的差異，並以式(6)計算其偏差程度 d。

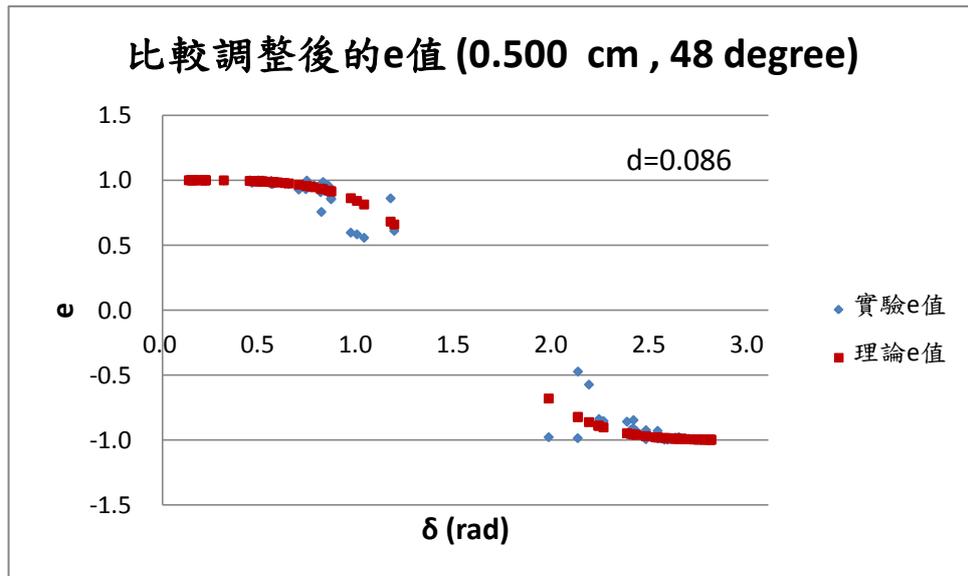


圖 55 比較調整後的 e 值(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角48°)

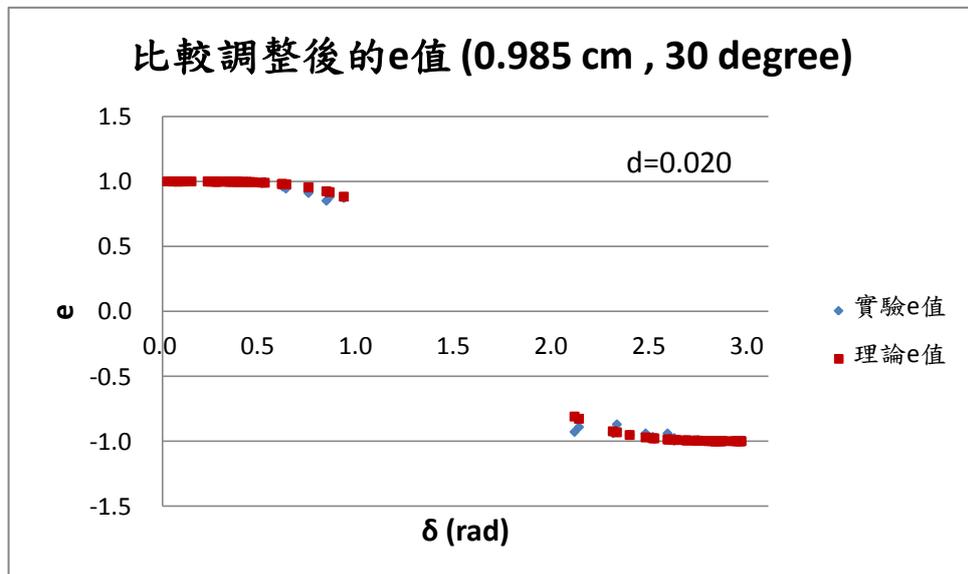


圖 56 比較調整後的 e 值(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角30°)

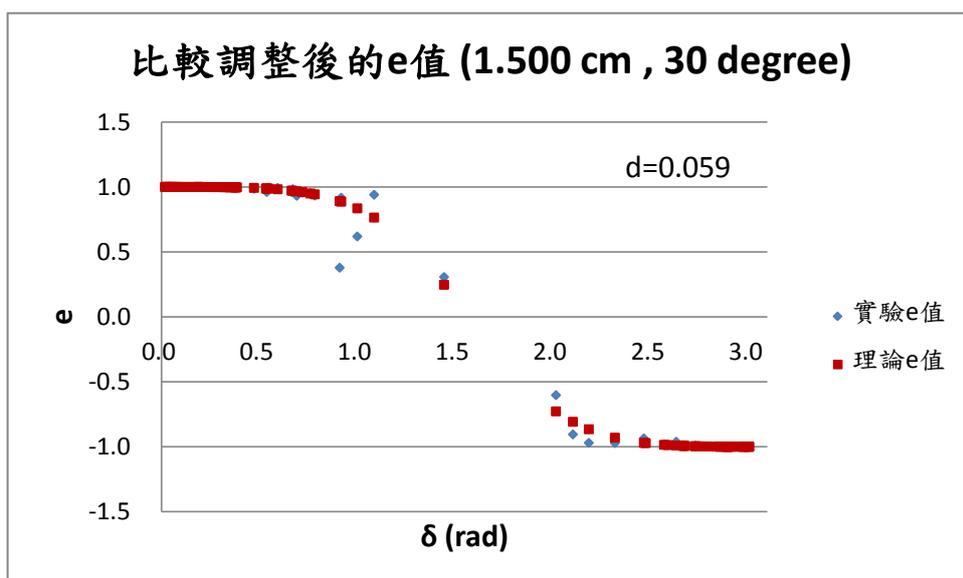


圖 57 比較調整後的 e 值(圓片半徑 1.500 cm、初始釋放角30°)

在計算實驗 e 值時，不論調整與否，有些 e 值會是虛數，而調整後的 e 值會比較多，且水流衝擊角度 δ 越靠近 90° 的數據越容易有此現象，我們不將其列入偏差討論。

為了要比較調整前後 e 值的差別，我們先將未調整前的 e 值扣除在調整後無法得到(虛數)的 e 值後，再計算其偏差程度 d_0 ，比較 d_0 與 d 的差異，繪製成表 2：

項目 \ 圓片大小	0.500 cm	0.985 cm	1.500 cm
d_0	0.092	0.030	0.080
d	0.086	0.020	0.059
$d - d_0$	-0.006	-0.010	-0.021

表 2 不同圓片大小的差異程度與其比較

從表 2 中得知，調整後的力矩所算出來的 e 值與理論 e 值的偏差程度確實比調整前的小。

七、以能量觀察穩定狀態

在圓片運動的觀測結果(p.14)中得知，圓片的運動會達到穩定狀態，我們以能量觀察穩定狀態。

(一)計算圓片動能：

計算並繪製圓片的動能 E_k 隨時間的變化圖。

$E_k = \text{移動動能} + \text{轉動動能}$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

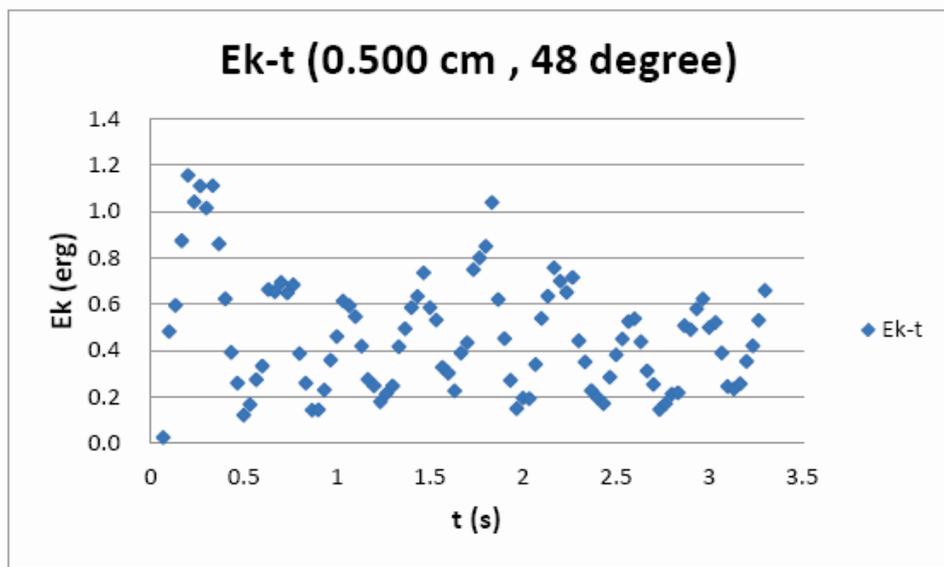


圖 58 Ek-t 圖(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角48°)

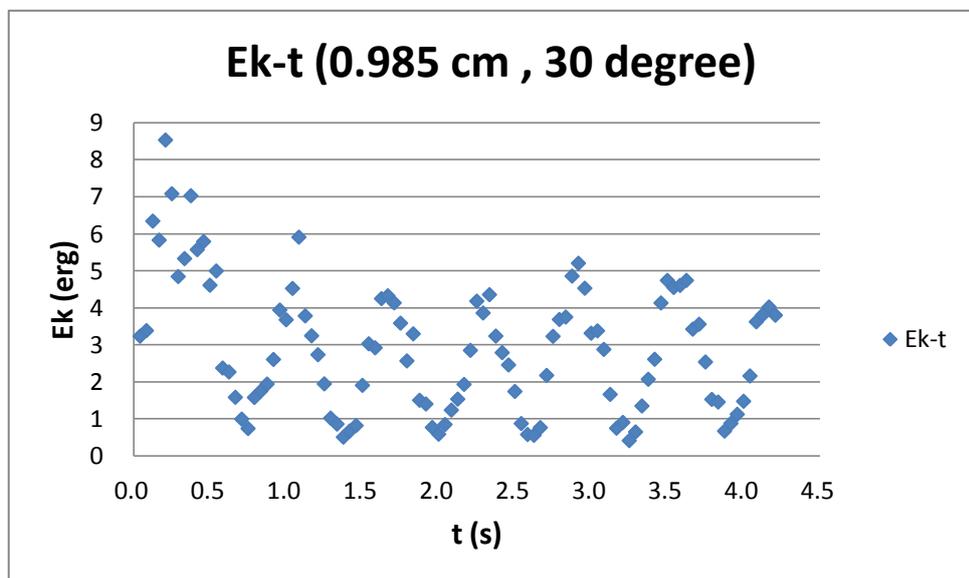


圖 59 Ek-t 圖(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角30°)

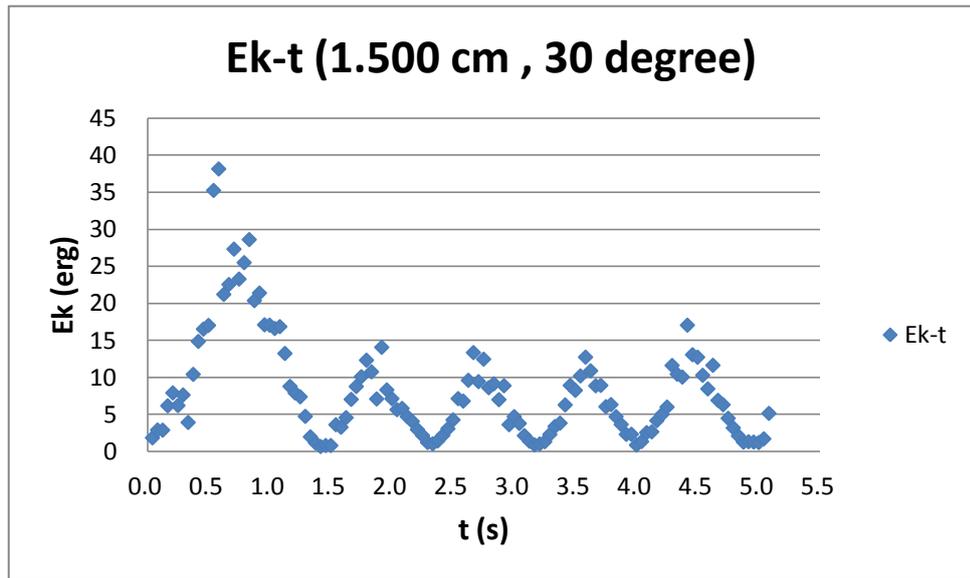


圖 60 Ek-t 圖(圓片半徑 1.500 cm、初始釋放角30°)

在觀察圖 58~圖 60 後發現，圓片的動能會呈現週期性的變化，且對於同一圓片來說，圓片動能的極大值和極小值都分別會越來越趨近於一個定值。

(二) 觀察圓片每一個週期的平均動能(Ekave)的變化

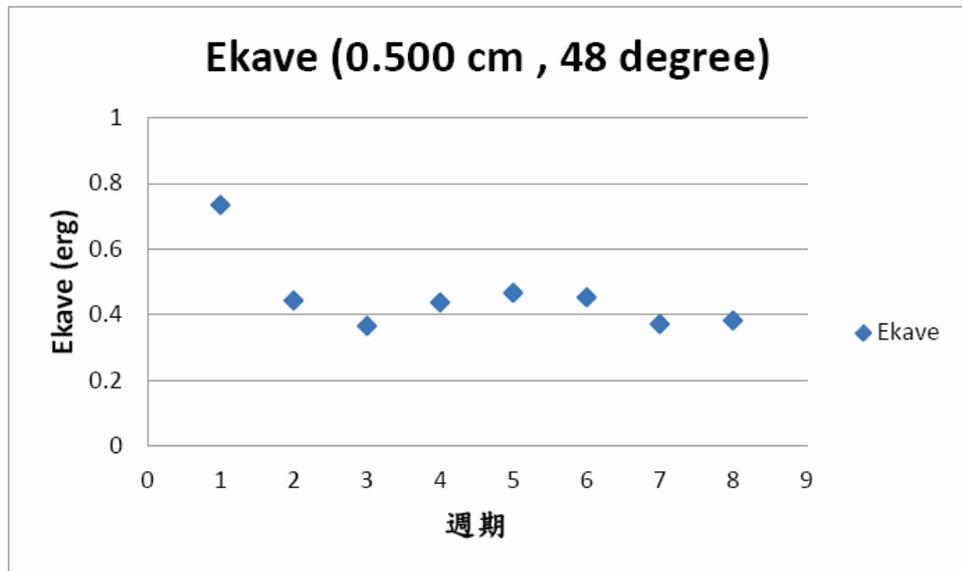


圖 61 Ekave-t 圖(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角48°)

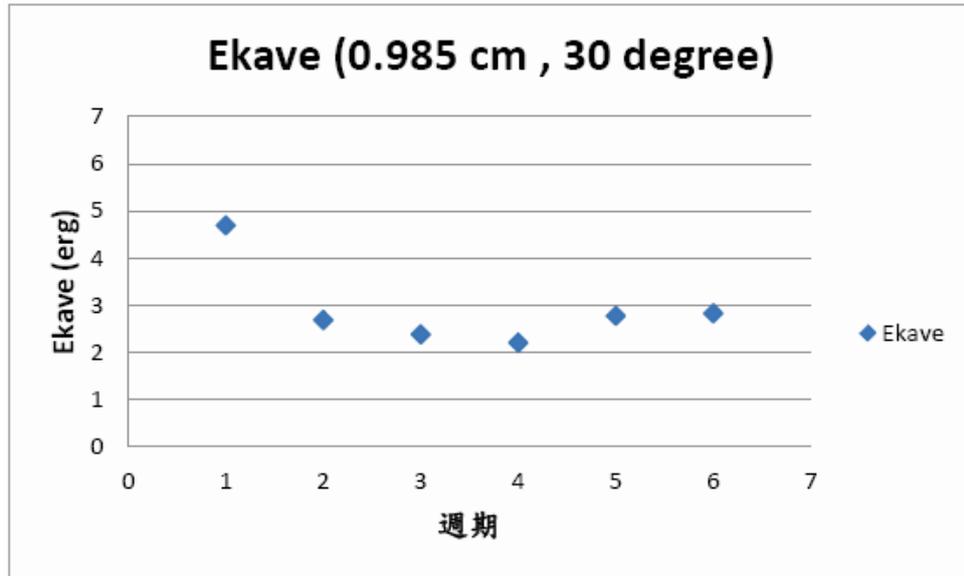


圖 62 Ekave-t 圖(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角30°)

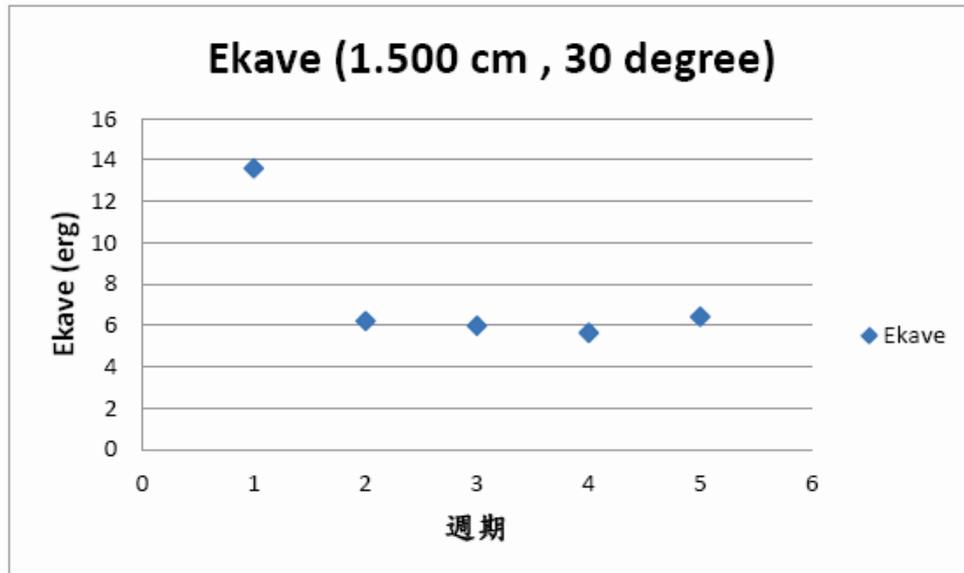


圖 63 Ekave-t 圖(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角30°)

觀察圖 61~圖 63 後發現，圓片的平均動能會越來越趨近於一個特定的值，這顯示出穩定狀態的一種性質。且因重力有對圓片做功，這也代表重力對圓片在一個週期內所作的功會損失掉。

八、探討圓片力學能變化與流場變化的關係

在流場觀察結果中，我們得知流場在圓片通過後會獲得動能，根據力學能守恆定律，圓片的力學能必須減少。

(一) 計算圓片力學能

圓片力學能 E

$$E = \text{動能}(E_k) + \text{位能}(U)$$

設每組測量數據點的最低點為位能 0 位面 y_0 ，任一時間的高度為 y ，則位能 U 的計算方式為

$$U = mg(y - y_0)$$

代入數據後繪製力學能 E 隨時間 t 的變化圖

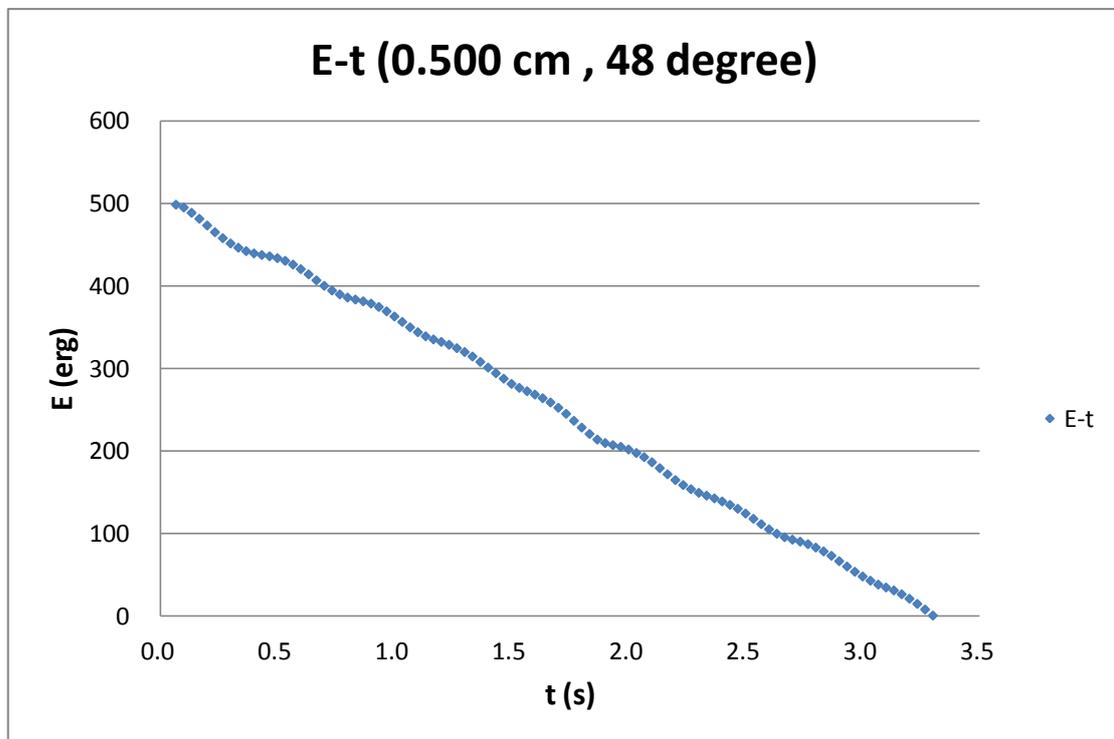


圖 64 E-t 圖(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角48°)

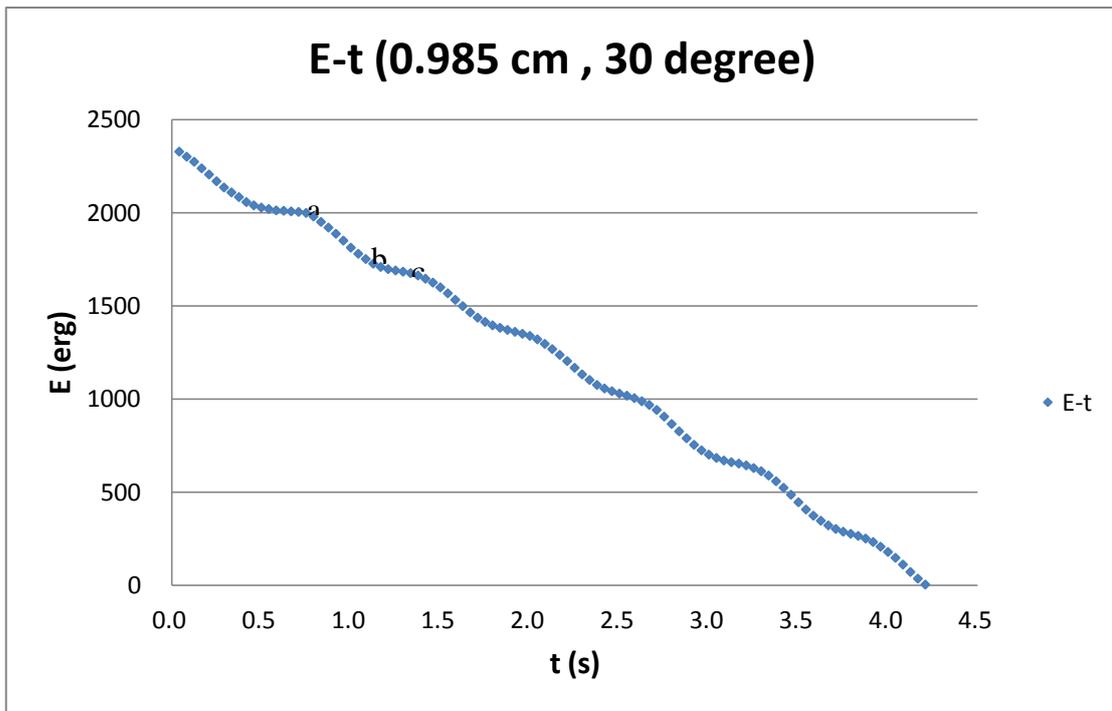


圖 65 E-t 圖(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角30°)

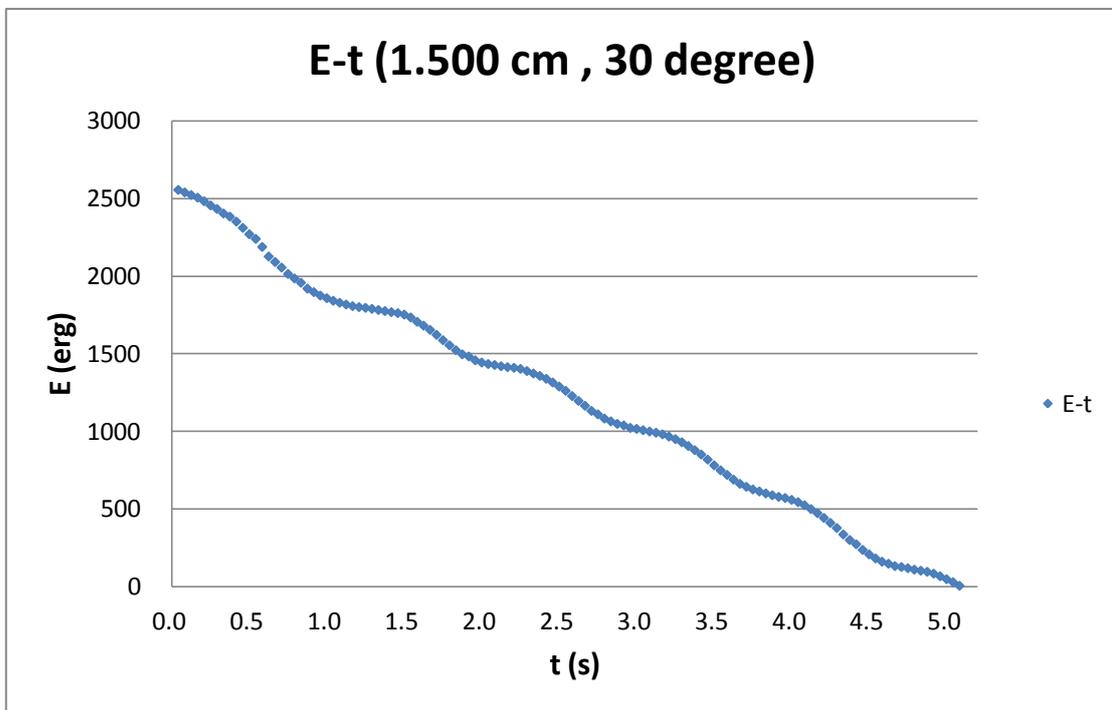


圖 66 E-t 圖(圓片半徑 1.500 cm、初始釋放角30°)

比較圖 64~圖 66 後發現，不論圓片的大小為何，其力學能都會以階梯狀的方式下降，有時較快速，有時較緩慢，且不論是快速下降或緩慢下降，每一區段(如圖 65 中的 a~b 或 b~c)都接近直線。

(二) 計算圓片的力學能下降率

我們對每一區段作線性迴歸，可得每一區段的迴歸直線 $y=ax+b$ 和相關係數 R ，而斜率 a 就是該區段的力學能變化率。

區段	迴歸直線	R	力學能變化率
1	$y=-202.050x+513.612$	-0.997	-202.050
2	$y=-56.972x+462.261$	-0.998	-56.972
3	$y=-181.793x+528.287$	-0.998	-181.793
4	$y=-72.561x+444.030$	-0.999	-72.561
5	$y=-182.482x+545.033$	-0.999	-182.482
6	$y=-106.065x+459.186$	-0.998	-106.065
7	$y=-196.045x+575.309$	-0.999	-196.045
8	$y=-128.757x+474.201$	-1.000	-128.757
9	$y=-230.277x+643.240$	-0.999	-230.277
10	$y=-88.363x+378.016$	-0.989	-88.363
11	$y=-199.505x+604.599$	-0.999	-199.505
12	$y=-109.195x+400.691$	-0.999	-109.195
13	$y=-184.368x+584.768$	-1.000	-184.368
14	$y=-91.611x+340.075$	-0.995	-91.611
15	$y=-185.267x+603.544$	-1.000	-185.267
16	$y=-119.764x+405.866$	-0.998	-119.764

表 3 線性迴歸與力學能變化率(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角 48°)

區段	迴歸直線	R	力學能變化率
1	$y=-722.704x+2355.380$	-0.998	-722.704
2	$y=-105.607x+2077.252$	-0.979	-105.607
3	$y=-768.859x+2603.192$	-0.999	-786.859
4	$y=-205.864x+1947.473$	-0.994	-205.864
5	$y=-710.403x+2655.995$	-0.997	-710.403
6	$y=-259.488x+1857.246$	-1.000	-259.488
7	$y=-740.747x+2835.468$	-0.998	-740.747
8	$y=-317.588x+1822.757$	-0.997	-317.588
9	$y=-838.699x+3205.153$	-0.998	-838.699
10	$y=-231.945x+1386.528$	-0.994	-231.945
11	$y=-792.137x+3218.890$	-0.997	-792.137
12	$y=-301.462x+1418.779$	-0.999	-301.462
13	$y=-804.090x+3388.374$	-0.998	-804.090

表 4 線性迴歸與力學能變化率(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 30°)

區段	迴歸直線	R	力學能變化率
1	$y=-811.354x+2645.281$	-0.992	-811.354
2	$y=-206.773x+2057.167$	-0.983	-206.773
3	$y=-706.134x+2823.319$	-0.998	-706.134
4	$y=-176.959x+1797.782$	-0.986	-176.959
5	$y=-640.210x+2874.689$	-0.996	-640.210
6	$y=-232.138x+1713.235$	-0.996	-232.138
7	$y=-708.111x+3259.973$	-0.998	-708.111
8	$y=-268.472x+1630.115$	-0.998	-268.472
9	$y=-778.443x+3710.286$	-0.999	-778.443
10	$y=-216.090x+1145.206$	-0.993	-216.090

表 5 線性迴歸與力學能變化率(圓片半徑 1.500 cm、初始釋放角 30°)

從表 3~表 5 中得知，每一區段的相關係數 R 皆非常接近-1，都是呈現高度負相關，相當地接近直線。為了方便討論力學能的變化，我們將所有的力學能變化率都乘以-1，得到每一區段力學能下降率的大小 ΔE ，並繪製力學能下降率隨時間(區段)的變化圖。

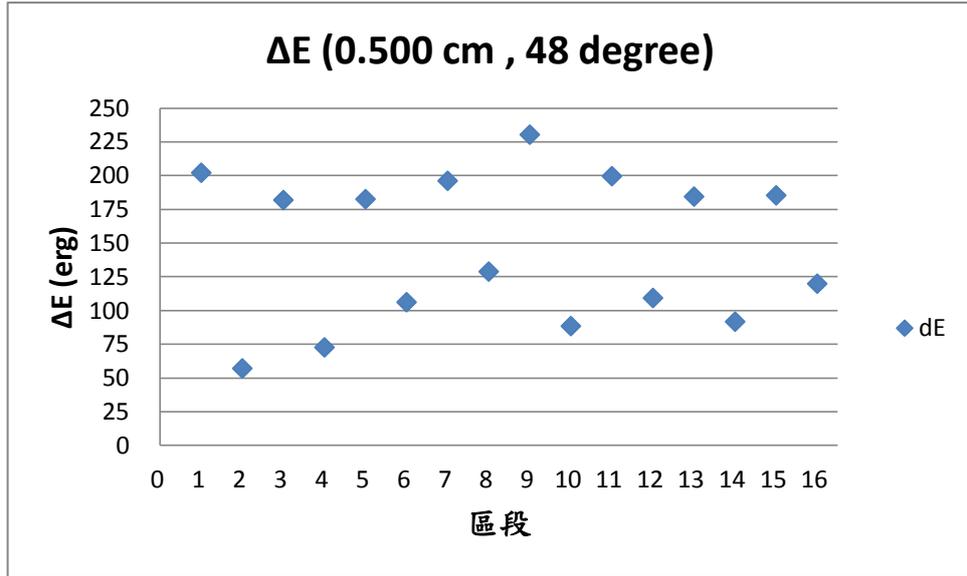


圖 67 ΔE 隨時間(區段)的變化(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角 48°)

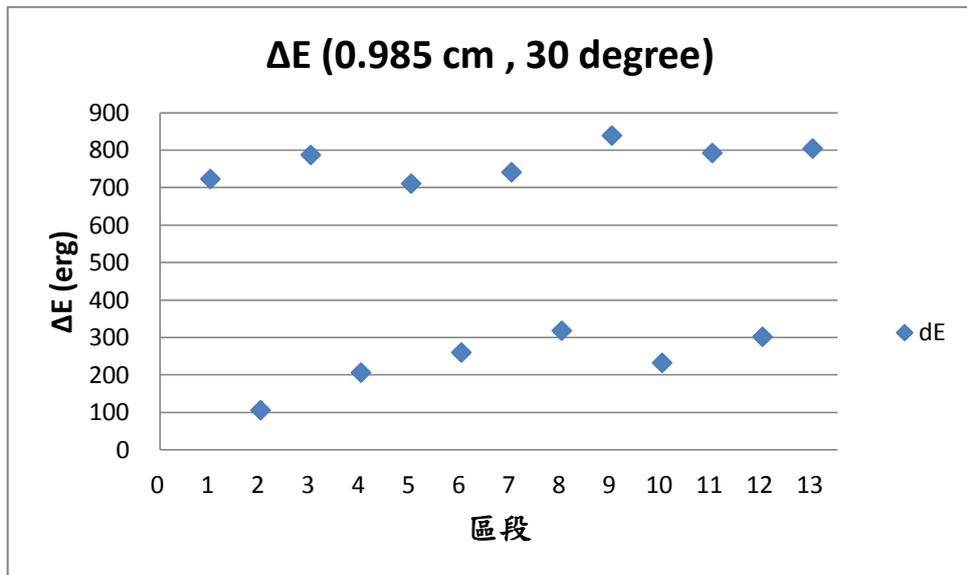


圖 68 ΔE 隨時間(區段)的變化(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 30°)

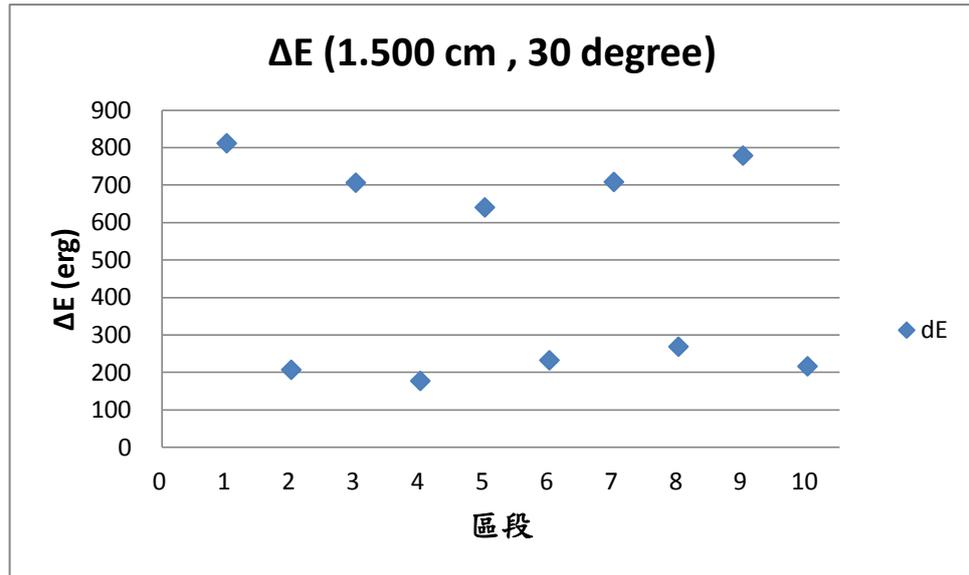


圖 69 ΔE 隨時間(區段)的變化(圓片半徑 1.500 cm、初始釋放角 30°)

在比較圖 67~圖 69 後發現，不論圓片的大小為何，力學能下降率都會一大一小的相間，也就是會一段快速下降，一段緩慢下降，且對於同一圓片來說，快速下降率與緩慢下降率都分別會越來越趨近於一個定值。以半徑為 0.985 cm 的圓片為例，其快速下降率會漸漸趨近於 800 erg 左右，緩慢下降率會漸漸趨近於 300 erg 左右。

(三) θ -t 圖與力學能下降率的關係

在流場觀察圖中，圓片與水平的夾角 θ 可代表圓片的運動狀態。為了要了解力學能下降率與流場的關係，我們在 θ -t 圖上標示出力學能快速下降(速降)與緩慢下降(緩降)的區段，並比較流場觀察圖。

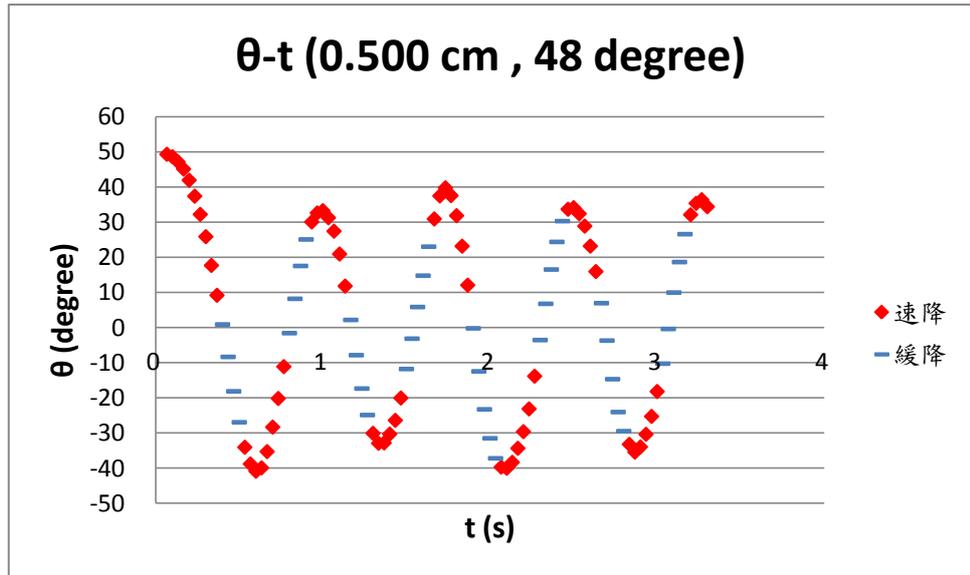


圖 70 θ -t 圖標示力學能下降快慢(圓片半徑 0.500 cm、初始釋放角 48°)

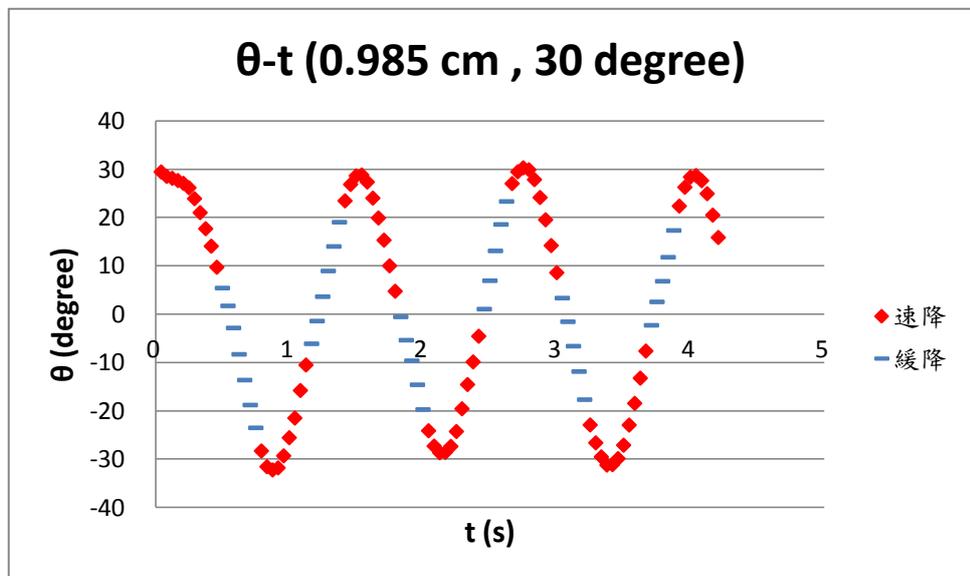


圖 71 θ -t 圖標示力學能下降快慢(圓片半徑 0.985 cm、初始釋放角 30°)

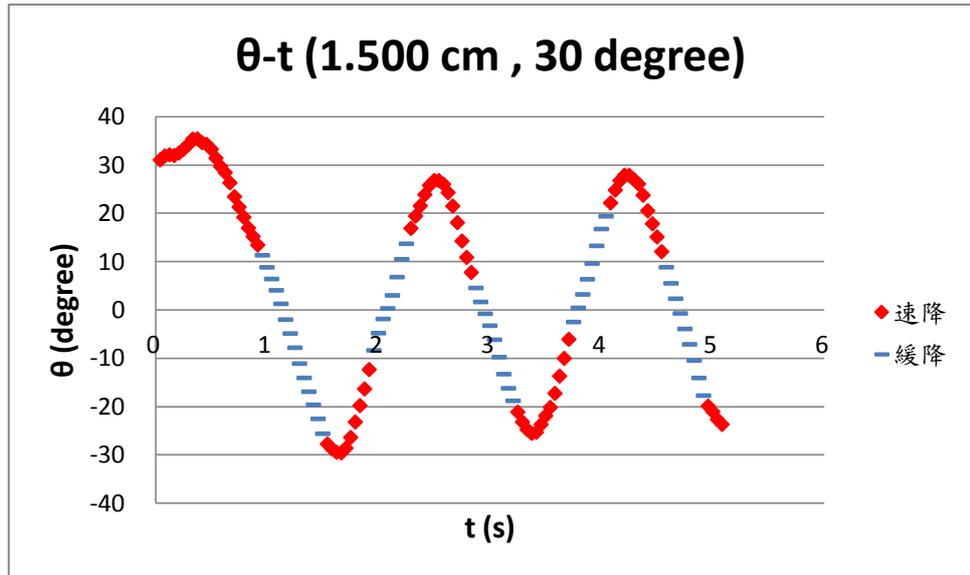


圖 72 θ - t 圖標示力學能下降快慢(圓片半徑 1.500 cm、初始釋放角 30°)

因流場觀察的範圍為圓片在穩定狀態時的結果，所以我們觀察在穩定狀態時的力學能變化與流場變化的關係。

在比較圖 70~圖 72 後發現，當圓片在穩定狀態時，力學能快速下降的區段恰為渦流產生之處。我們推測在未達穩定狀態時，力學能快速下降的區段亦會產生渦流。

肆、結論與應用

一、結論

本實驗將小型塑膠圓片置於水中釋放模擬落葉的運動模式，經由上述討論，我們可以得出以下結論：

- (一) 圓片質心的運動在水平方向上具有週期性。
- (二) 圓片與水平之夾角亦呈現週期性變化，變化範圍會隨著時間改變。

在運動幾個週期後，變化範圍會被限制在穩定擺動範圍，此時為穩定狀態。

- (三) 在分流模型(線分流模型)中，力矩和 e 值(實驗 e 值)的關係式為：

$$\tau = \frac{8}{3} \rho v^2 \cos \delta r^3 (1 - e^2)$$

(四) 根據流體的連續性，提出最短時間原理，e 值(理論 e 值)和 δ 的關係

$$\text{式為：} e = \frac{2 \cos \delta}{1 + (\cos \delta)^2}$$

(五) 比較後發現實驗 e 值和理論 e 值有相同的趨勢，但仍有些偏差。經實驗後發現，水的分流應該是線分流和點輻射分流綜合的混合分流，且 δ 越接近 0° 時，分流模式就越接近線分流；當 δ 越接近 90° 時，分流模式就越接近點輻射分流。

(六) 經計算後得到調整的力矩：

$$\tau = 0.207(\csc \delta)^{3.101} \rho v^2 \cos \delta r^3 (1 - e^2)$$

(七) 當圓片在穩定狀態時，重力對圓片在一個週期內所做的功會完全損失。

(八) 圓片力學能的下降速率會一快一慢相間，而渦流產生時，圓片力學能快速下降；且當圓片在穩定狀態時，快速或緩慢下降的下降率會趨近於一個特定的值。

二、應用

本實驗結果可計算流體在物體上分流所產生的力矩，增加分析物體在流體中運動的準確性。

三、未來展望：

- (一) 從流場觀察結果(p.19)得知，圓片運動所產生的渦流會漸漸消失，若在計算時加入黏滯性的影響，可使力矩更加準確。
- (二) 因單台攝影機拍攝範圍有限，影像邊緣處會彎曲而失真，無法觀察到圓片運動時整個過程三維的流場變化，可以用多台攝影機多高度、多角度拍攝，並在水缸上畫上對準線，分割觀察區塊與校正不同相

機間的拍攝時間。

伍、參考文獻

1. Andrew Belmonte, Hagai Eisenberg, & Elisha Moses (1998). From Flutter to Tumble: Inertial Drag and Froude Similarity in Falling Paper. *Physical Review Letters*, 81(2), 345-348. doi:10.1103/PhysRevLett.81.345
2. 許蕙麒(民 94)。液體渦流與鐘擺物體交互作用之雷射發光實驗與無黏性流體計算(碩士論文)。取自 <http://ntur.lib.ntu.edu.tw/handle/246246/50299>
3. 陳順強(譯)。費因曼物理學(第二部一下)(原作者：Richard Feynman)。臺北市：徐氏基金會
4. 王行達、田麗文、李佳榮(譯)(民 97)。物理(原作者：David Halliday, Robert Resnick and Jearl Walker)。新北市：全華圖書
5. 黃福坤(民 101 年 4 月 11 日)。實驗數據的處理與分析【線上論壇】。取自 <http://enjoy.phy.ntnu.edu.tw/mod/resource/view.php?id=24185>

評語

本篇作品相當完整，有實驗結果，也有物理的探討。更難能可貴的是，本作品完全由作者獨力完成，是一件可喜的作品。當然本作品有改進的空間，在流場的量測可由攝影資料轉成數據資料，利用電腦程式分析計算而繪出圖形理論方面的探討，可以再深入，用更好的模型，做更精密的研究。本作品不用精密儀器，由高中生的物理知識，做出一個完整且獨立的作品，非常值得推薦。

The Water Waltz

Yi-Jhe Lee

Project ID: 1165

Country: Taiwan

School: Taipei Chenggong High School

Introduction

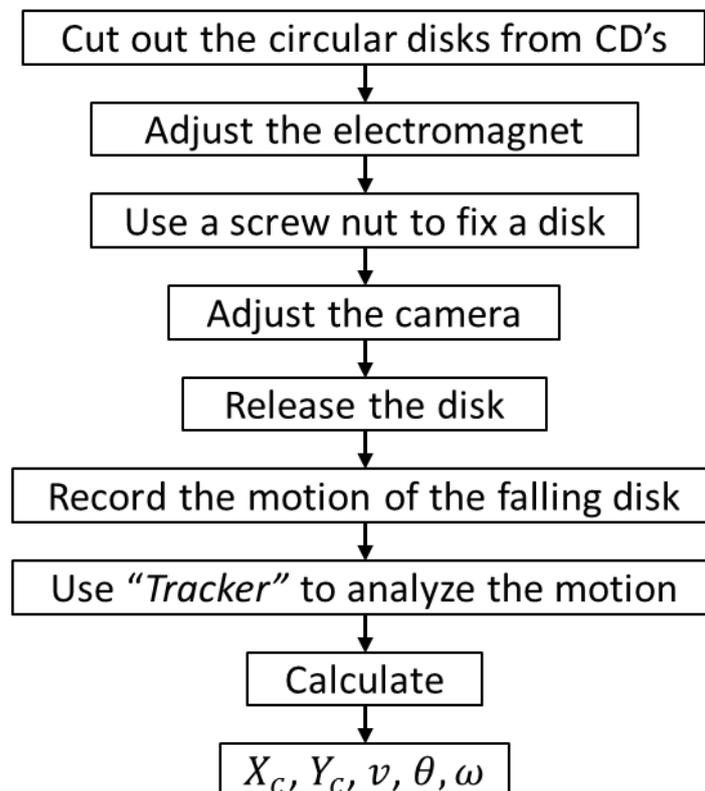
Investigating the motion of an object sinking in water is important to deep-sea explorations, because the motion of a probe in water might affect the data collected or even jeopardize the whole mission. We studied the motion of circular disks falling in water, and found that under certain conditions a stable periodic motion results. Based on our study, we also propose a new improved method for deep-sea data collection.

Objectives

1. Describe the motion of falling disks.
2. Quantitatively clarify the parameters that affect the motion of the disks.
3. Explain the motion of the disks.
4. Develop a theoretical understanding of the motion of the disks.
5. Come up with the applications of our project.

Methods

1. Experiment 1: Analysis of the falling disks



X_c = position of the center of mass of the disk in the horizontal direction

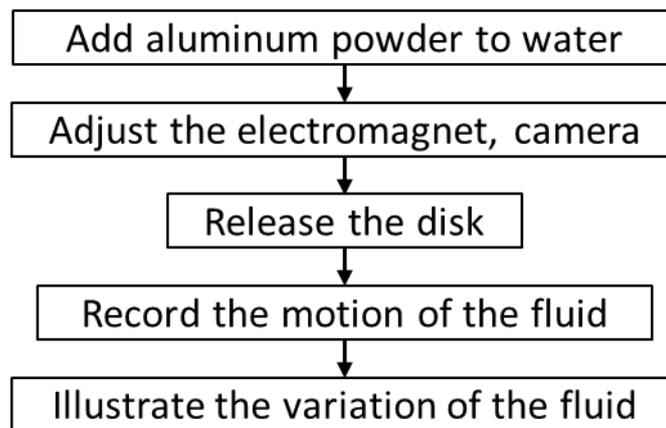
Y_c = position of the center of mass of the disk in the vertical direction

v = velocity of the center of mass of the disk

θ = angle between disk and the horizontal line

ω = angular velocity of the disk relative to the center of mass of the disk

2. Experiment 2: Observing the variation of the fluid while the disks moved



Apparatus

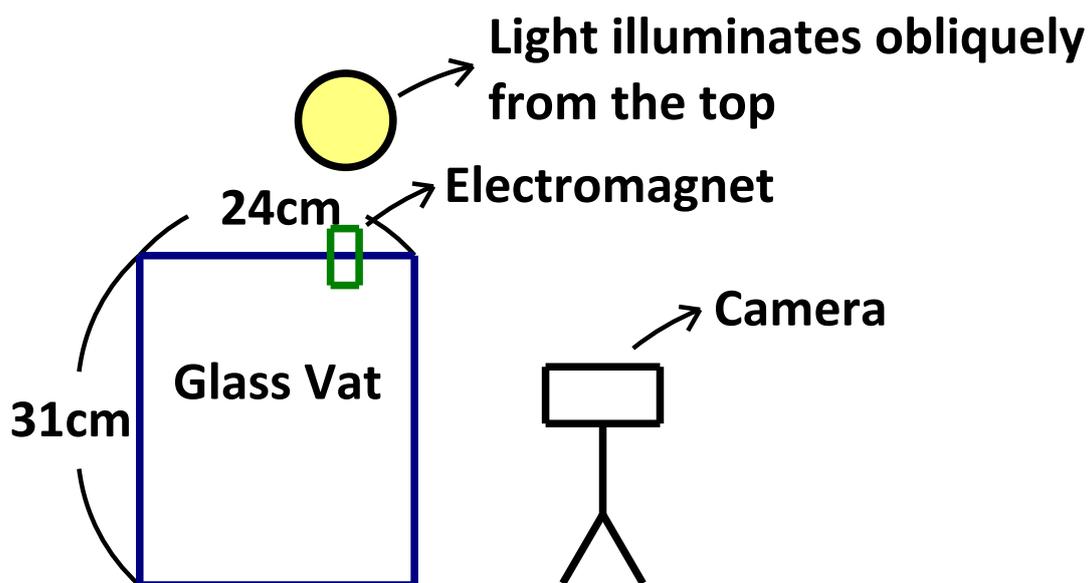


Fig. 1 The setting of Experiment 1

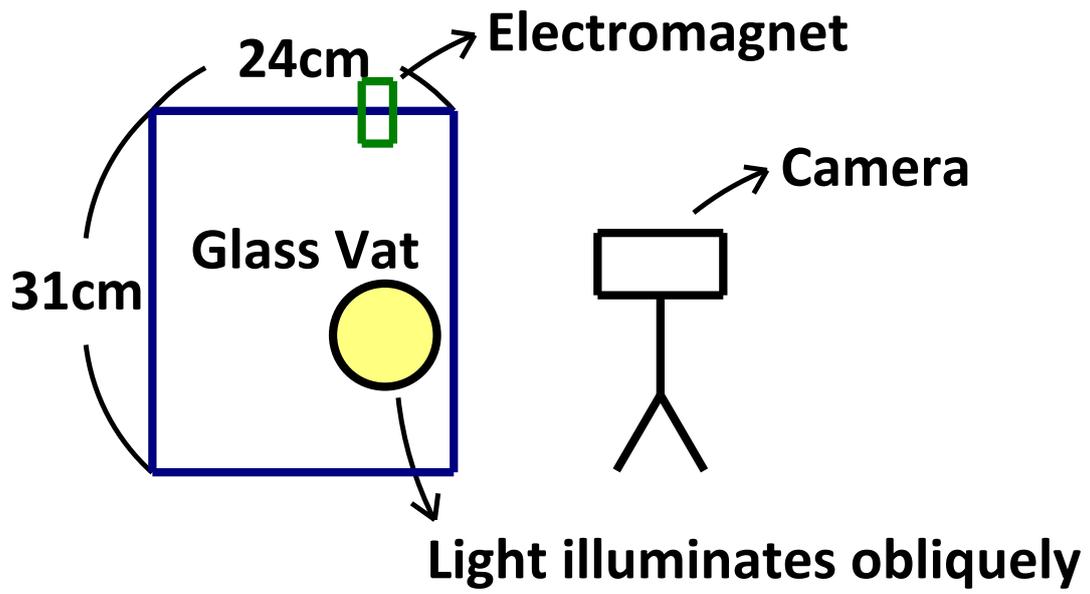


Fig. 2 The setting of Experiment 2

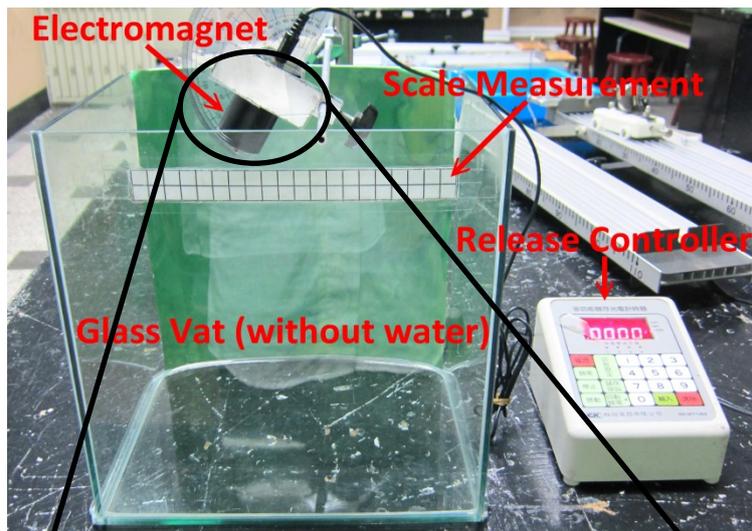


Fig. 3

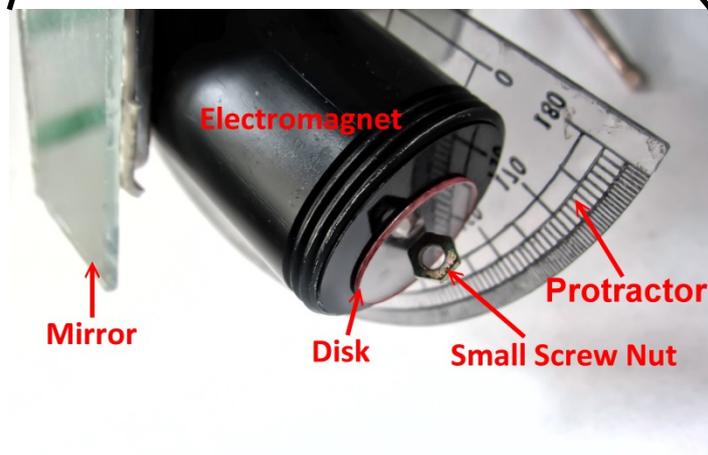


Fig. 4

Results

Experiment 1: Motion of the falling disks

- The chart title explains the chart classification, disk radius and initial release angle.

1. Motion of the center of mass of the disks

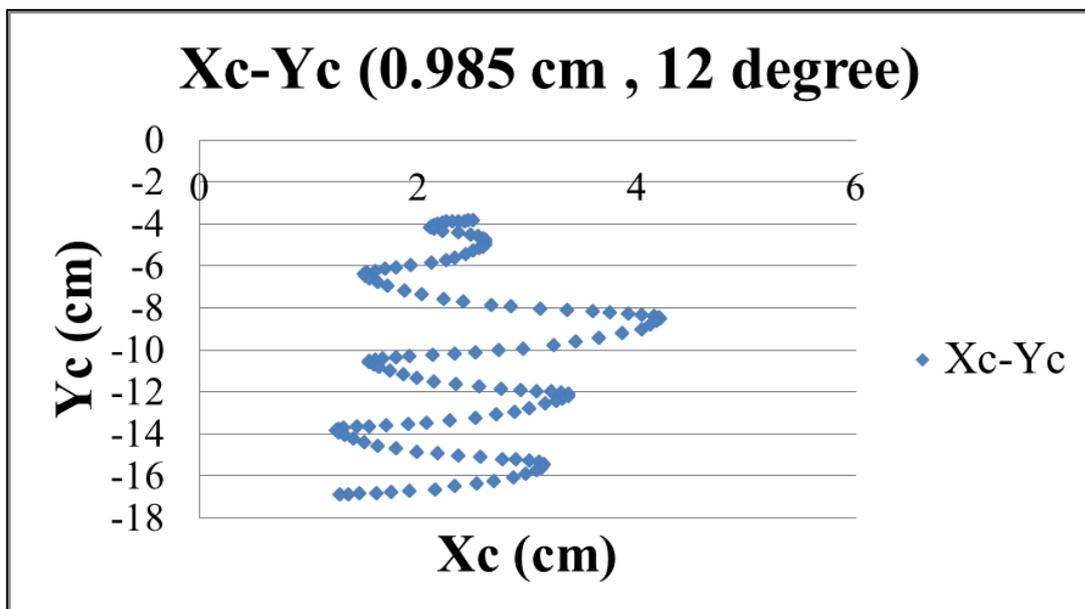


Fig. 5

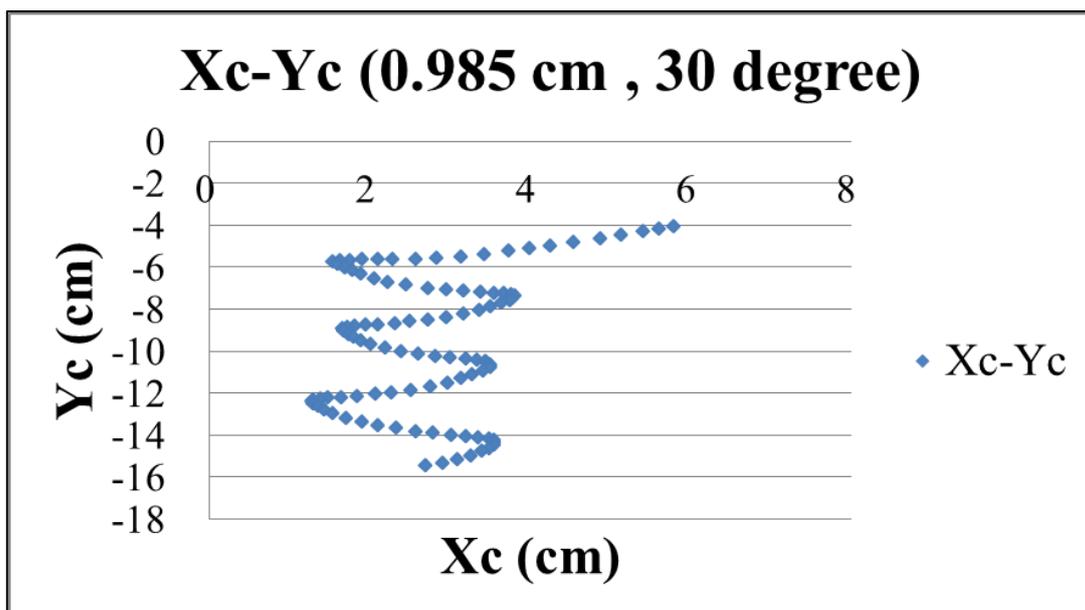


Fig. 6

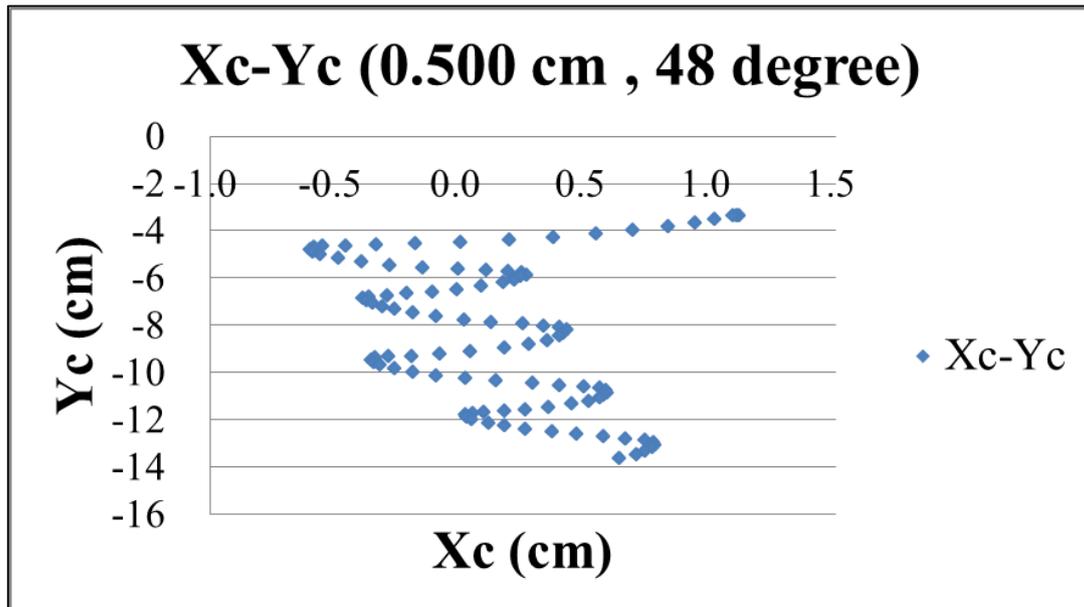


Fig. 7

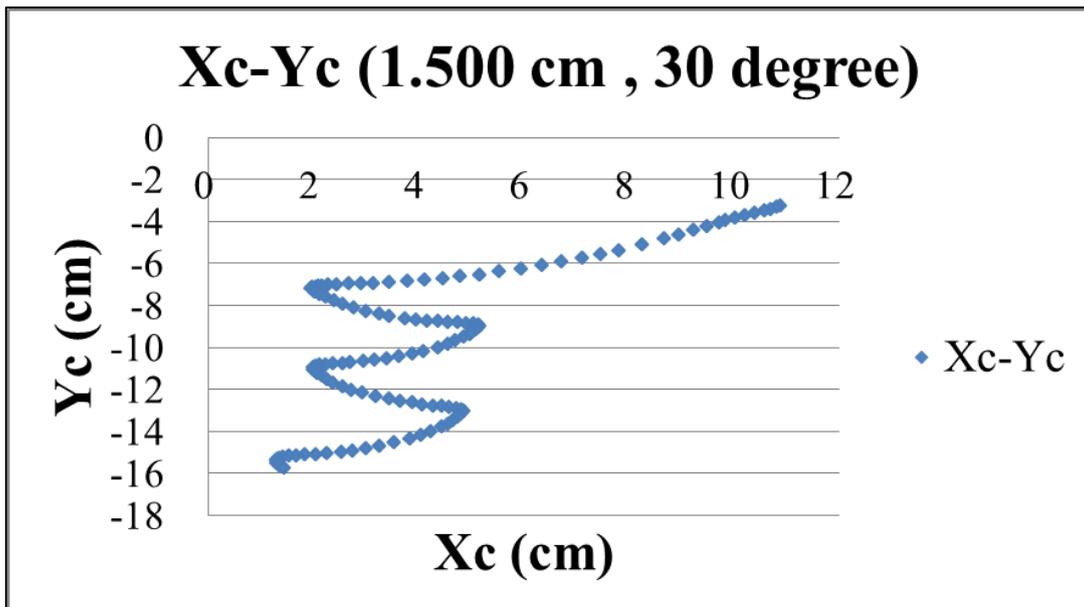


Fig. 8

Whatever the sizes or the initial angles are, the disks eventually moved periodically in the horizontal direction.

2. Angle between the disks and the horizontal line

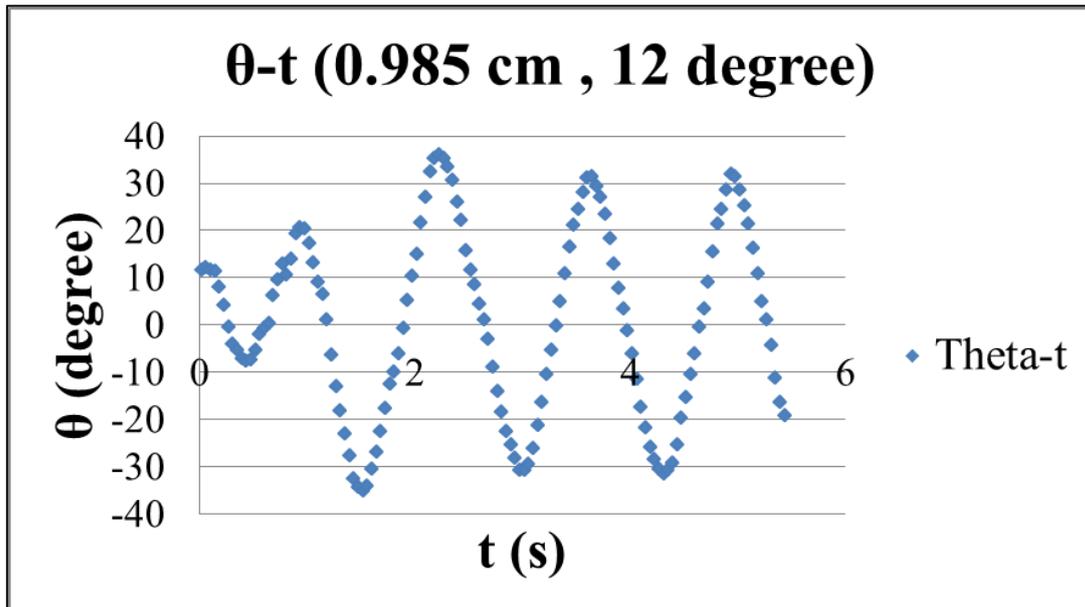


Fig. 9

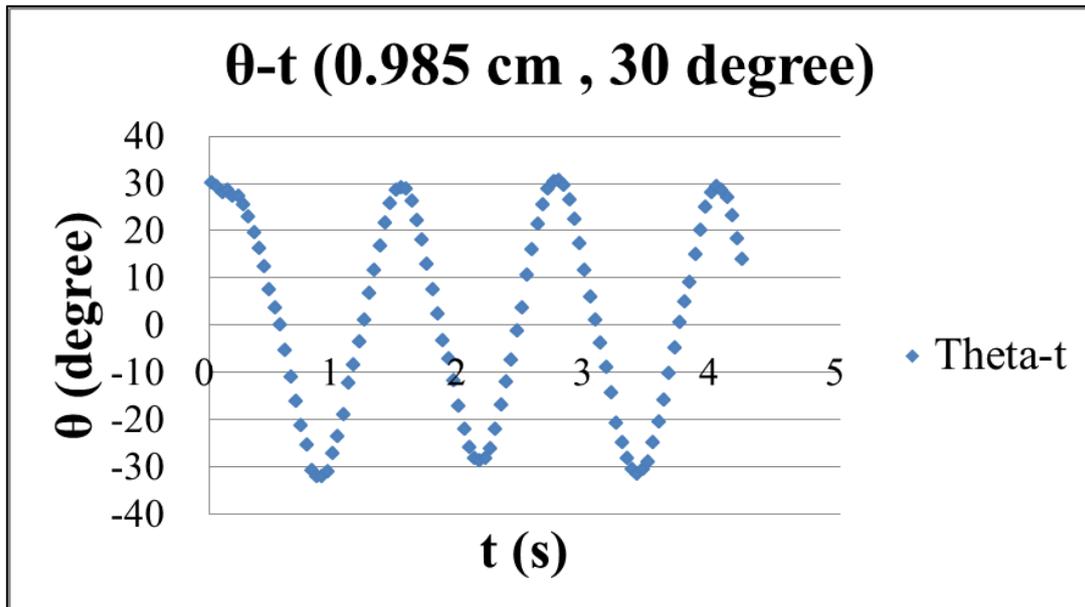


Fig. 10

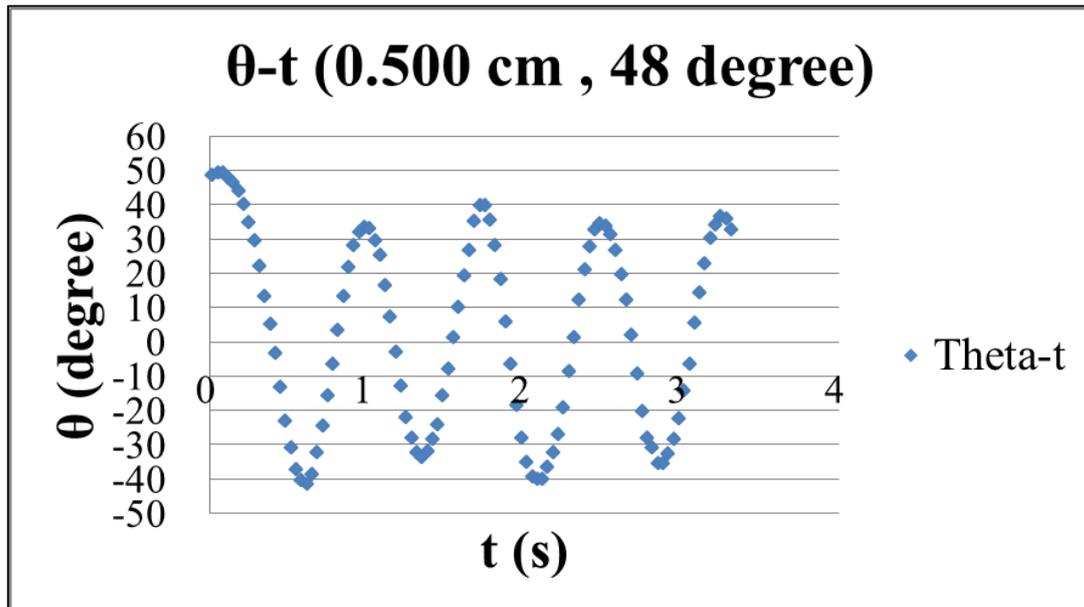


Fig.11

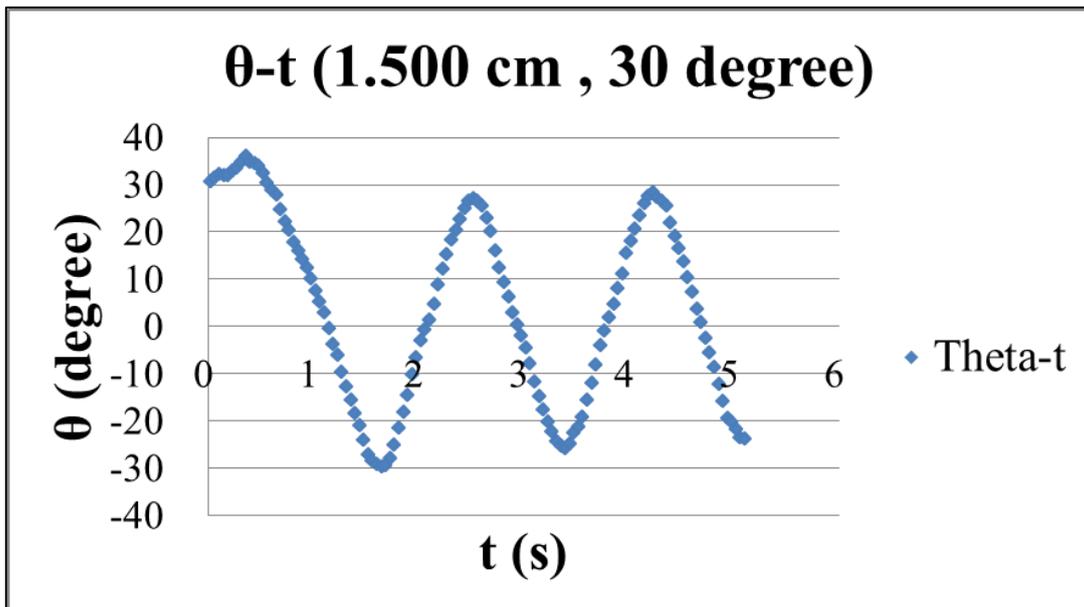


Fig. 12

The angle between the disk and the horizontal line became periodic after some time, irrespective of the size or initial angle. The amplitude of the angular rotation is larger for disks with a smaller radius.

Experiment 2: The time evolution of the flow field

1. Illustrations of the flow field

We used a disk with a radius $r=0.985$ cm for flow visualization, and plotted out the flow pattern using the recorded videos.

- The red lines represent the projection of the disks. The size of the disks is not drawn to scale.
- The blue arrows represent the velocity of the flow field. The size of an arrow shows the relative speed of a fluid element in water.

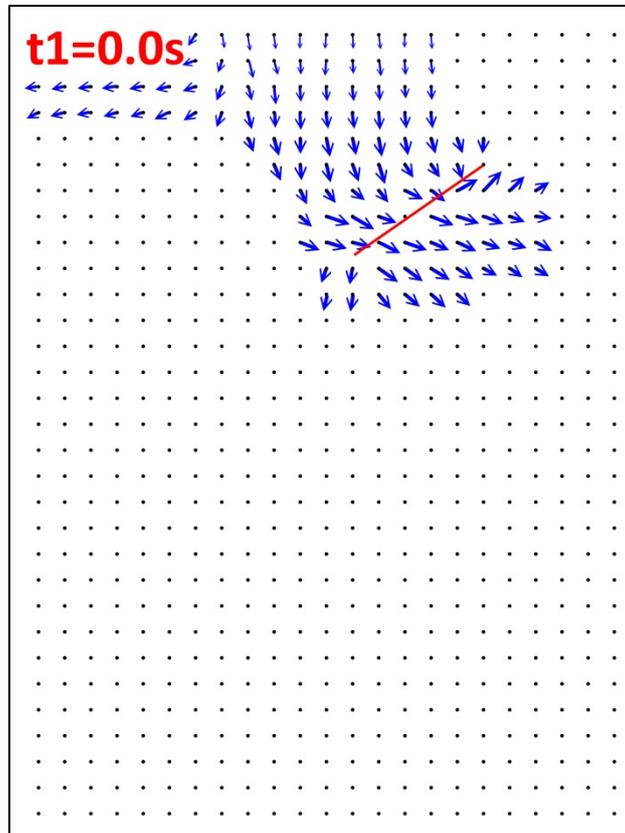


Fig. 13

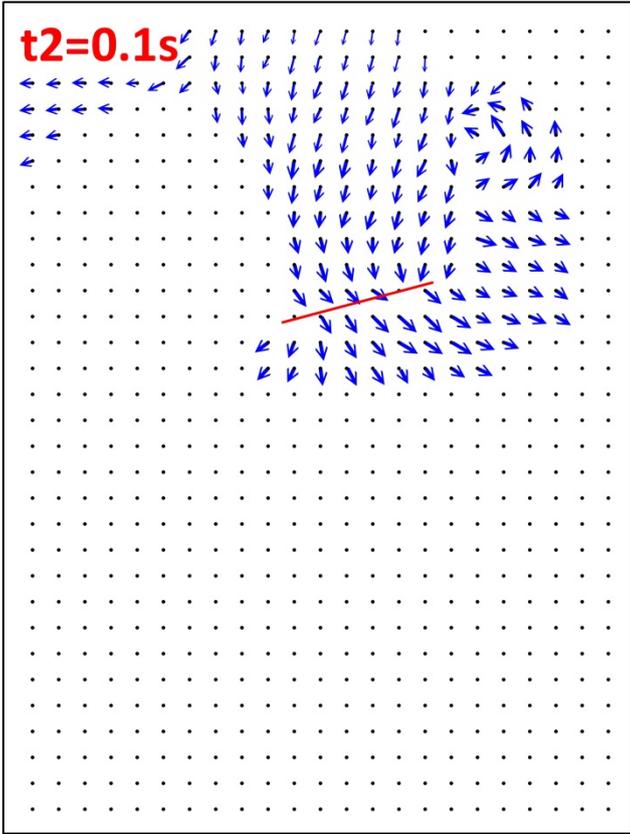


Fig. 14

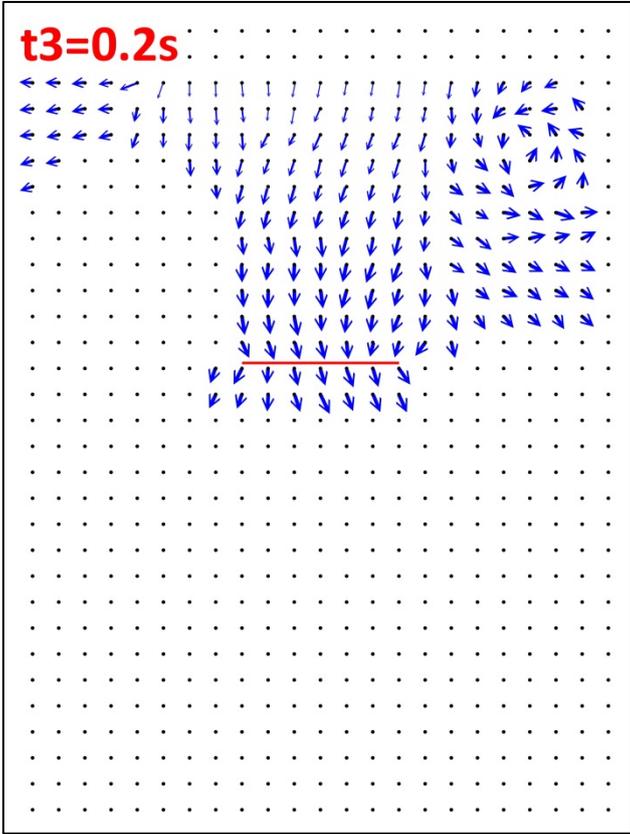


Fig. 15

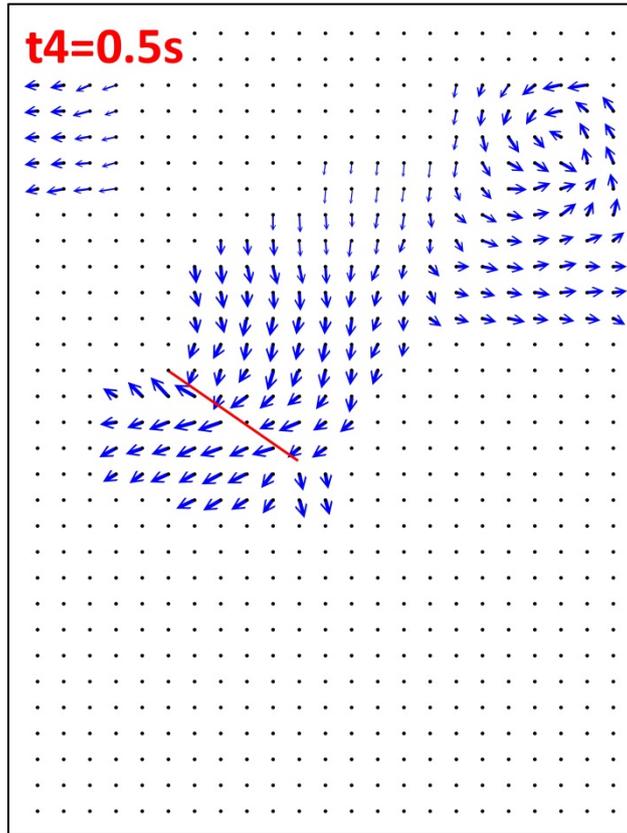


Fig. 16

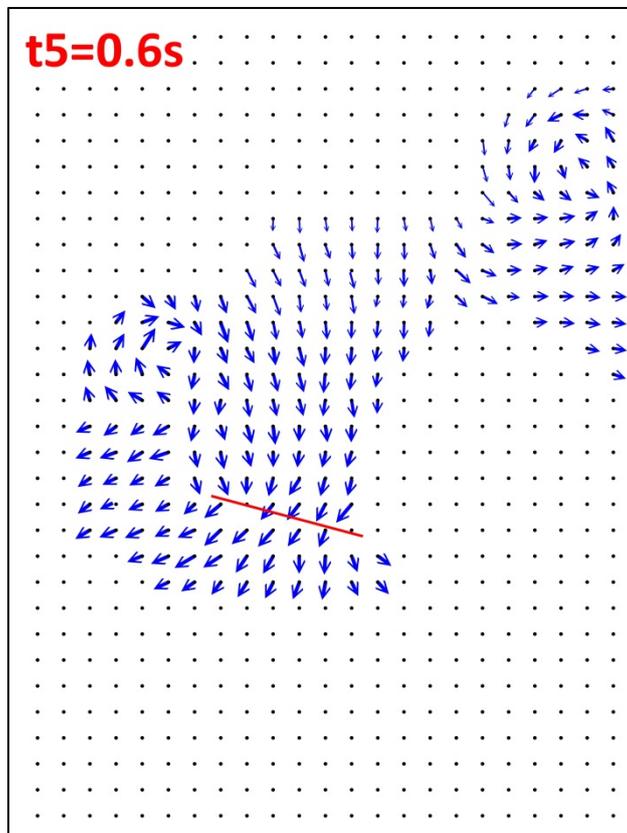


Fig. 17

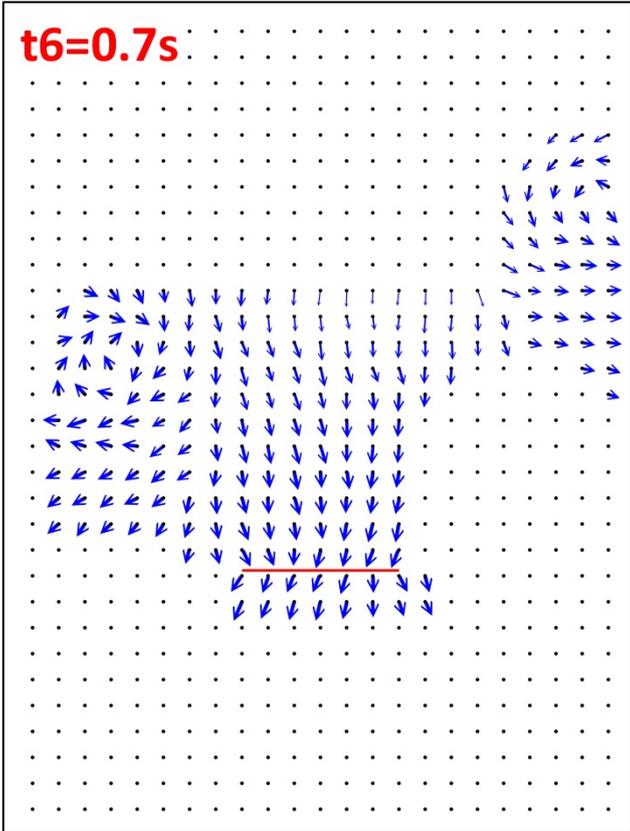


Fig. 18

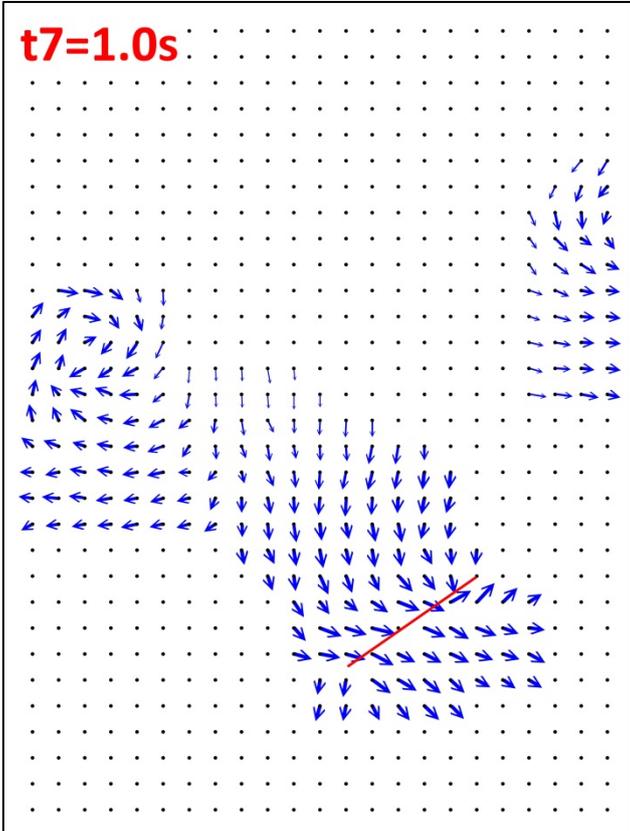


Fig. 19

2. Features observed

- i. The water right beneath the disk developed a stagnation point, and the flow separated from that point. The position of the stagnation point changed with time because the disk itself had a translational as well as a rotational motion.
- ii. Vortices were alternately generated near the two far edges of the disk as it rotated and swayed periodically in the fluid.

Discussion

Mechanism of the motion

We divide the motion into five steps.

- In every figure, the red line is the projection of the disk, the green arrow shows the velocity of the disk, and blue arrows stand for the velocity of the flow.
1. At first, gravity pulls the disk down, and the disk acquires a descending velocity (Fig. 20).

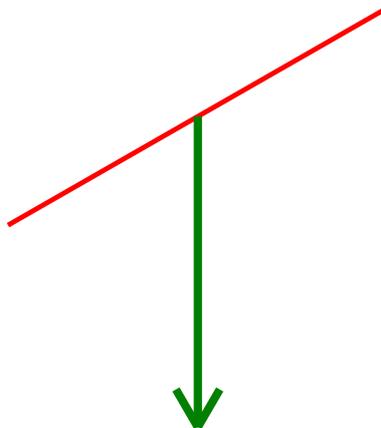


Fig. 20

2. The water hits the disk with the same speed relative to the disk in the opposite direction (Fig. 21). This tends to impede the falling of the disk, and also imparts a horizontal force to the disk, thus inducing a horizontal motion.

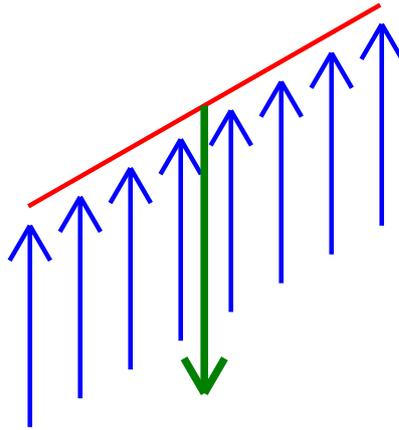


Fig. 21

3. In Fig. 22, when the water hits the disk, a stagnation point is created, and the water stream separates on the left side. Because the speed of the flow near the stagnation point is almost zero, the pressure at that point must be larger. In addition, after the water separates into left and right, the flow will pick up speed, implying that the pressure on the two sides of the disk must be smaller than that at the separation point. This asymmetry in pressure distribution creates a torque which makes the disk rotate clockwise.

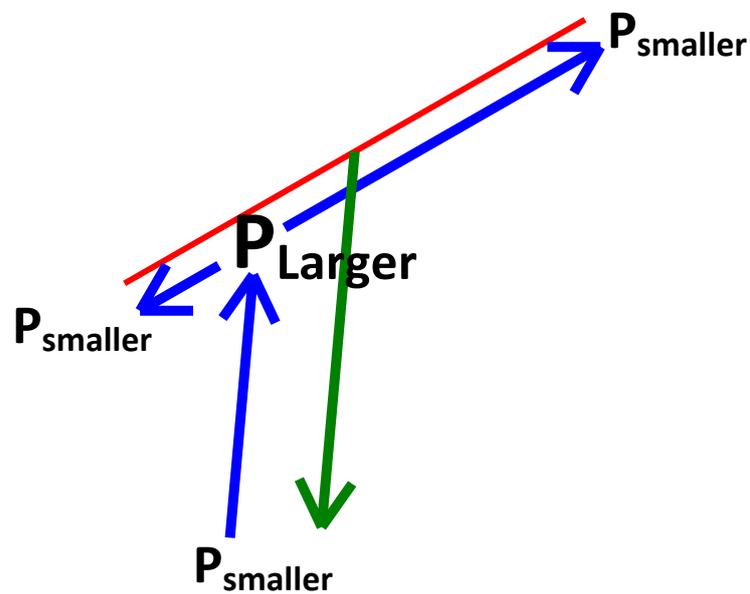


Fig. 22

4. The clockwise-rotating disk now rotates to the orientation shown in Fig. 23, because the flow hits the disk in the opposite direction of the horizontal velocity of the disk, the horizontal speed of the disk decreases. As time passes, the horizontal motion comes to a stop.

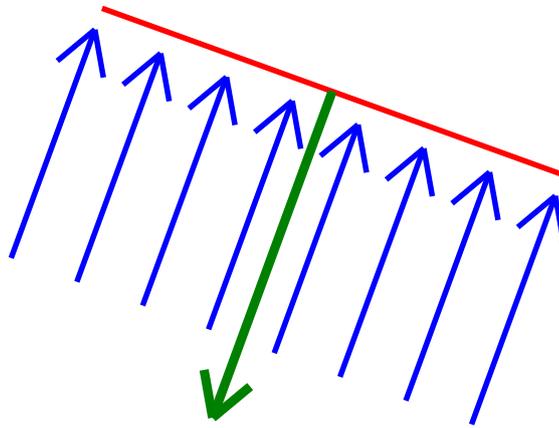


Fig. 23

5. In Fig. 24, the water separates on the right side, creating a counterclockwise torque on the disk. The situation looks very much like that of Step 3, except that the sense of rotation will be reversed. Then the system just alternately repeats this pattern.

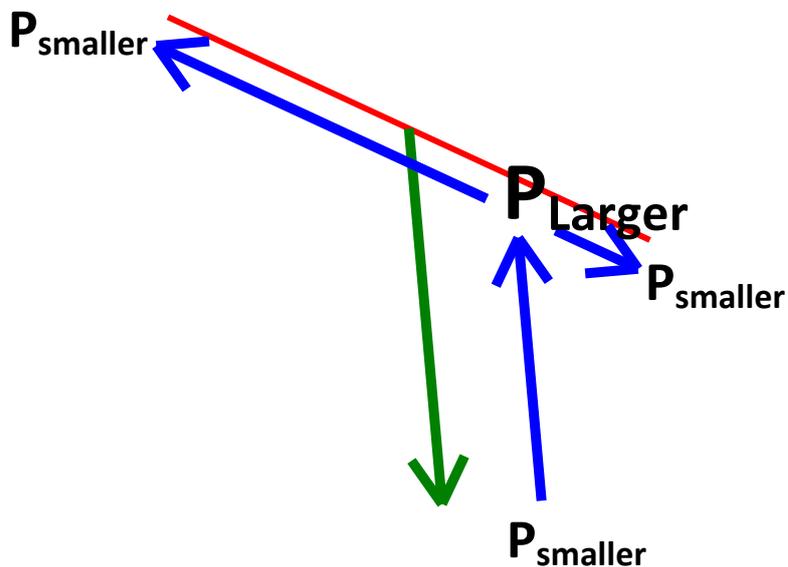


Fig. 24

Model equations for the falling disk

Set

f_{\perp} = The force vertical to the disk

f_{\parallel} = The force parallel to the disk

τ = The torque on the disk

A = The area of the disk

r = The radius of the disk

m = The mass of the disk

ρ = The density of the fluid (=1000 kg/m² for the water in our experiment)

I. Some observations on the behavior of f_{\perp} , f_{\parallel} and τ :

1. The variation of f_{\perp}
 - i. When the flow hits the disk vertically, as in Fig. 25, f_{\perp} attains its maximum.
 - ii. When the flow hits the disk horizontally, as in Fig. 26, f_{\perp} will be zero.
2. The variation of f_{\parallel}
 - i. When the flow hits the disk vertically, as in Fig. 25, f_{\parallel} will be zero.
 - ii. When the flow hits the disk horizontally, as in Fig. 26, f_{\parallel} will be zero.
 - iii. When the flow hit the disk obliquely, as in Fig. 27, there exists a maximum f_{\parallel} for a certain angle.
3. The variation of τ
 - i. When the flow hits the disk vertically, as in Fig. 25, τ will be zero.
 - ii. When the flow hits the disk horizontally, as in Fig. 26, τ will be zero.
 - iii. When the flow hits the disk obliquely, as in Fig. 27, there exists a maximum τ for a certain angle.
4. Due to the rotation of the disk, locally the velocity of a point on the disk relative to the fluid is of order $v + r \frac{d\theta}{dt}$. This implies that the torque experienced by the disk is a quadratic function of

the variables v and $r \frac{d\theta}{dt}$. Thus, we expect torque to consist of three terms, each proportional to v^2 , $v \cdot r \frac{d\theta}{dt}$, and $\left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2$, respectively.

5. Empirically, we expect that

$$f \propto \rho v \cdot v \cdot A$$
$$\tau \propto \rho v \cdot v \cdot A \cdot r$$

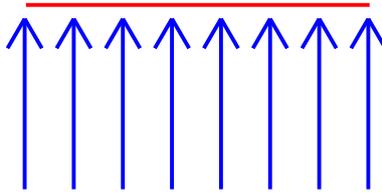


Fig. 25

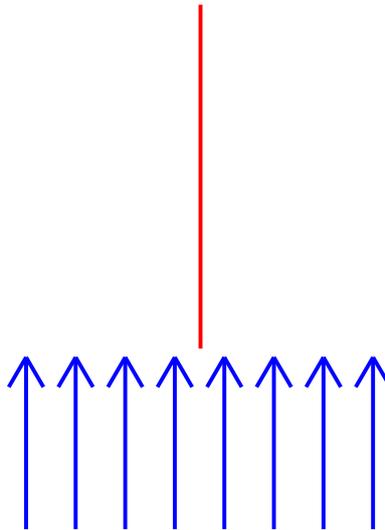


Fig. 26

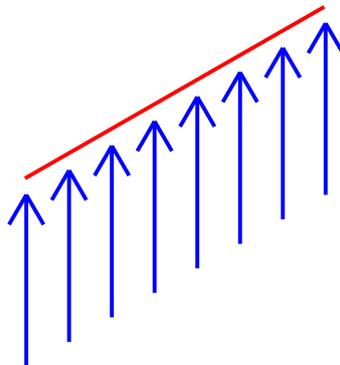


Fig. 27

II. Model equations

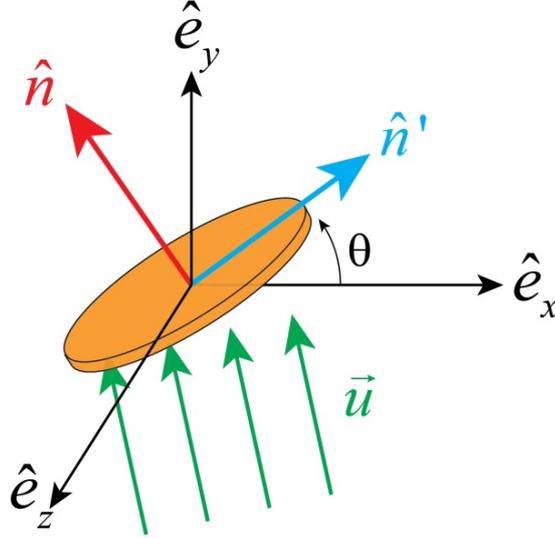


Fig. 28

Using the discussion above as a guide, we may setup a set of phenomenological equations to describe the motion. Let m' be the effective gravitational mass of the disk in the fluid, and let m be its actual mass then we assume the equations to satisfy

$$\begin{aligned} \hat{n} &= (-\sin \theta, \cos \theta), \quad \hat{n}' = (\cos \theta, \sin \theta), \\ \vec{u} &= -\vec{v}, \\ m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \{C_{\perp} \hat{n} - C_{\parallel} (\hat{u} \cdot \hat{n}') \hat{n}'\} (\hat{u} \cdot \hat{n}) \rho A u^2 + m' \vec{g}, \\ \tau &= I \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \\ I \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -C_{\tau 1} \rho A r u^2 (\hat{u} \cdot \hat{n}) (\hat{u} \cdot \hat{n}') - C_{\tau 2} \rho A r^2 u (\hat{u} \cdot \hat{n}) \frac{d\theta}{dt} \\ &\quad - C_{\tau 3} \rho A r^3 \frac{d\theta}{dt} \left| \frac{d\theta}{dt} \right|, \end{aligned}$$

In the above, all the C_i 's are positive constants, and \vec{v} is the instantaneous velocity of the disk. In the above, we have also made the approximation that the fluid can be treated as uniformly impinging on the disk with a relative velocity \vec{u} , which can be approximated as the negative of the velocity \vec{v} of the center of mass of the disk. Substituting \vec{u} with $-\vec{v}$, we then obtain

$$\hat{n} = (-\sin \theta, \cos \theta), \quad \hat{n}' = (\cos \theta, \sin \theta),$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \{-C_{\perp} \hat{n} - C_{\parallel} (\hat{v} \cdot \hat{n}') \hat{n}'\} (\hat{v} \cdot \hat{n}) \rho A v^2 + m' \vec{g}, \quad (1)$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C_{\tau 1} \rho A r v^2 (\hat{v} \cdot \hat{n}) (\hat{v} \cdot \hat{n}') + C_{\tau 2} \rho A r^2 v (\hat{v} \cdot \hat{n}) \frac{d\theta}{dt} - C_{\tau 3} \rho A r^3 \frac{d\theta}{dt} \left| \frac{d\theta}{dt} \right|. \quad (2)$$

III. Compare properties of model equations with experiments

Set

ω = angular velocity

θ_a = the amplitude of the variation of the angles

- $A \rho v^2 \sim m' g \propto r^2 g$
 $\Rightarrow v \sim \text{constant}$ (independent of disk radius r)

- $I = \frac{1}{4} m r^2 \propto r^4$

1. Prediction: $\omega \propto \frac{1}{r}$

i. Proof:

Assuming that the vertical fall of the disk has a speed having about the same order of magnitude of the rotational speed, we have

$$v \sim \omega r$$

But since we have argued that $v \sim \text{constant}$, the result follows.

ii. Experimental data:

r (cm)	0.500	0.985	1.500
ω (degree/s)	178°	108°	69°
$r\omega$	89.000	106.380	103.500

Thus, the agreement with experiments seems fair.

2. Prediction: $\theta_a \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$

i. Proof:

Again, assuming a simple harmonic motion and that θ_a is very small, we have

$$\begin{aligned}\tau\theta_a &\sim \frac{1}{2}I\omega^2 \\ \Rightarrow -C_\tau r A \rho v^2 (\hat{v} \cdot \hat{n})(\hat{v} \cdot \hat{n}') &\sim r^4 \left(\frac{v}{r}\right)^2 \\ \Rightarrow r^3 \theta^2 &\propto r^4 \left(\frac{1}{r^2}\right) \\ \Rightarrow \theta_a &\propto \frac{1}{\sqrt{r}}\end{aligned}$$

ii. Experimental data:

r (cm)	0.500	0.985	1.500
θ	37°	28°	25°
$\sqrt{r}\theta$	26.163	27.789	30.619

Again, the agreement with experiments seems good.

IV. Numerical integration of the model equations using Runge-Kutta 4th Order method

To solve the model equations, we used Runge-Kutta 4th order method, and wrote a program in Visual Studio Express 2010. Then we got the theoretical figures of $X - Y$ and $\theta - t$. We set $C_\perp = 0.5$, $C_\parallel = 0.005$, $C_{\tau 1} = 0.12$, $C_{\tau 2} = 0.5$, $C_{\tau 3} = 0.5$ then we obtained results as shown in Fig. 29 and 30.

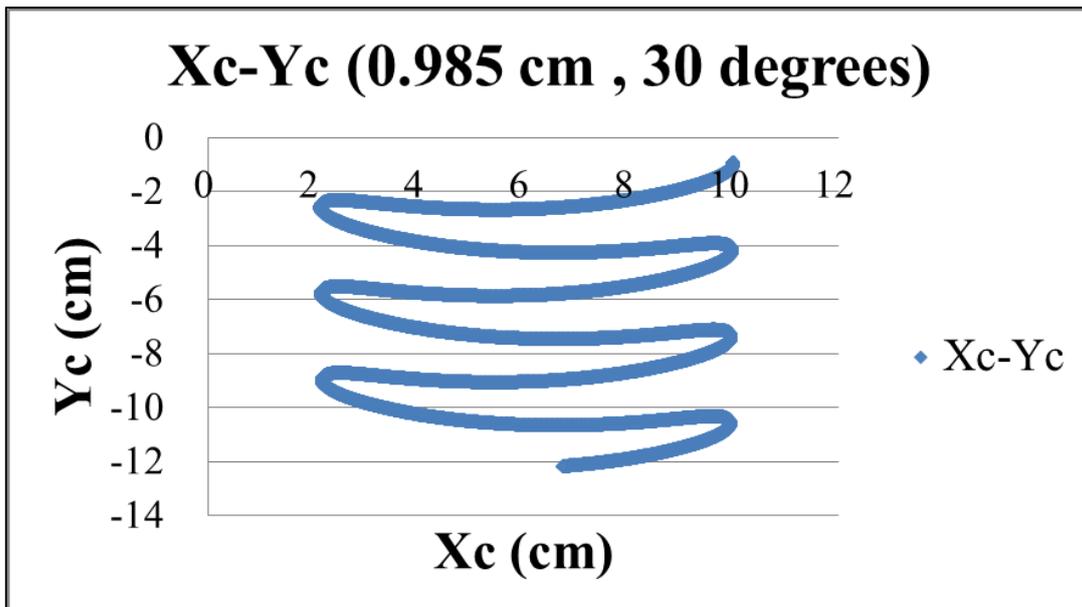


Fig. 29

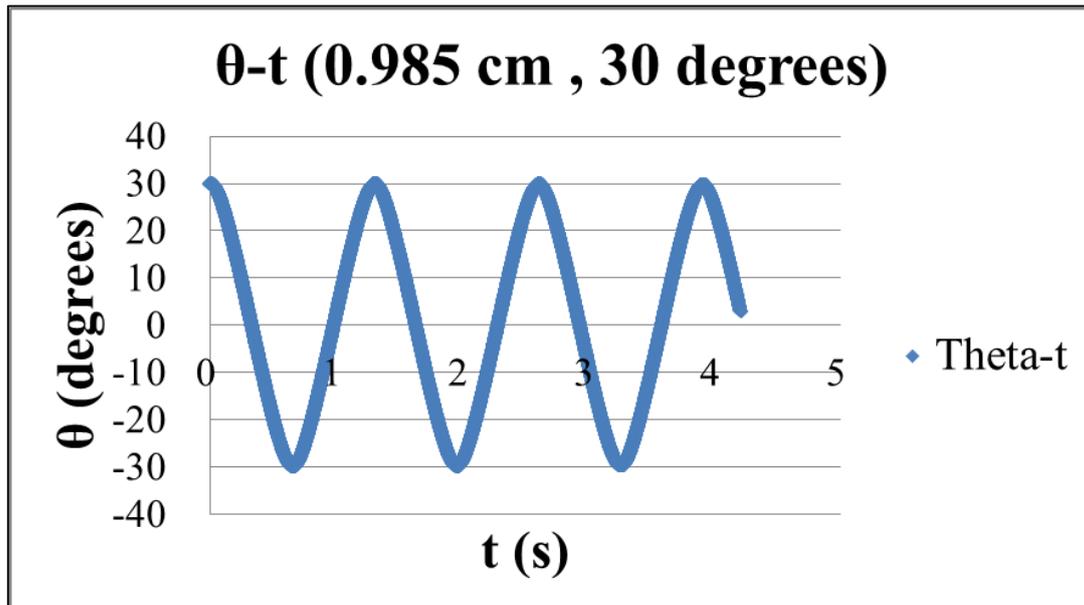


Fig. 30

The gross features of the theoretical results are similar to those observed in the experiments, and the order of magnitude fits as well, suggesting that our model must have correctly captured certain physics properties relating to the motion of the falling disks in the water.

Application

The world is experiencing rapid climate change. Science currently measures atmospheric change and sea surface variations to determine the reasons and speed of the change; however, we propose that time evolution of deep-sea properties needs to be included in climate change research. This is because human pollution sinks to the bottom of the sea, impacting ocean properties which interact with the atmosphere and change the climate.

Deep-sea exploration in manned submersibles can be quite dangerous to human investigators due to the technology now has power and air limitations, both critical for human survival. Currently methodology is often robotic, but challenging is that the present technique is hard to make a battery to afford long trip to the deep sea .In addition, sea ions break wireless transmission. Instrumentational collection is possible only if the apparatus can return to the surface intact for data examination. Today's technology is not capable of exploring the ocean's depths without a million dollar budget.

We came up with a new method of deep-sea exploration to achieve time evolution observation of deep-sea properties in a cost-effective and energy-saving method. The idea is to put the detectors in airtight balls then place them in a heavier disk-shaped object for their deep sea journey. As the disk-shaped object descends, it can open in two possible ways. One is the oceanic pressures that will cause the object to break when it reaches the point that it can no longer bear the stress of the ocean's depths; and the other way is to use a pressure sensor and a microcomputer to open the object by some control mechanism. Then, the equipment enclosed in the balls is released and floats back to the surface, and the deep-sea properties data can be collected.

Our method of deep-sea exploration has many advantages:

1. It has very good stability. Because a disk descending in water can achieve a steady state. Even if something influences its motion, it will be back to a steady state in a short-time interval. This is shown in our experimental and theoretical results.
2. The stability of the equipment can be improved if we modify the radius of the disk-shaped object such that the amplitude of the rotation, while in a steady state, can be very small.
3. Deep-sea properties can be detected at a specific position. In the circumstance of a side stream, compared with other shapes such as the shape of a ball, the disk shape of the probe has a motion that tends not to be overly affected by the side stream.
4. Energy consumption is greatly reduced because our method doesn't need as much power as other AUVs (autonomous underwater vehicles) or remote ones to control the motion.
5. Money talks and in comparing our probe with other underwater submersibles, our method only costs pennies when evaluated against the current mega million budgets. This makes it possible for use by every university, research institute, and government. It's very cheap so it can be used frequently to observe the time evolution of the deep sea.

Conclusions

1. The center of mass of the disk eventually moved periodically in the horizontal direction.
2. The vertical motion of the center of mass of the disk had a periodic motion superimposed on a terminal speed.
3. The angle between the disk and the horizontal line varied periodically, with the amplitude being greater for a smaller disk.
4. Our model equations seem to have captured the basic physics of the system.
5. Based on this study, the method we have developed can be used to improve the deep-sea exploration techniques.

References

1. A. Belmonte, H. Eisenberg, and E. Moses, “From Flutter to Tumble: Inertial Drag and Froude Similarity in Falling Paper”, *Phys. Rev. Lett.*, 81(2), 345-348 (1998) doi:10.1103/PhysRevLett.81.345
2. D. Kolomenskiy, and K. Schneider, “Numerical simulations of falling leaves using a pseudo-spectral method with volume penalization”, *Theo. and Comp. Fluid Dynamics*, 24, 1-4 (2009) doi:10.1007/s00162-009-0171-0