

2013 臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

作品編號	010047
參展科別	數學科
作品名稱	以直向、橫向、斜向磁磚鋪滿 $m \times n$ 矩形的 研究
得獎獎項	四等獎

就讀學校 臺北市立建國高級中學

指導教師 沈朋裕、郭君逸

作者姓名 藍祥予、江誠敏

關 鍵 字 轉移矩陣、磁磚鋪設、對角化

作者簡介



我是藍祥予，這張照片中我在馬祖北竿島一家小吃店內。

目前就讀於建國中學三年級，目前我的興趣在資訊。

在高二的專題課，開始針對鋪磁磚進行研究，

後來和江誠敏合作，在他的協助下，

專題有了更多的進展。

由於江誠敏對程式頗有鑽研，

亦引起了我對寫程式的興趣。



從小就對數學充滿興趣，喜歡探索數學裡許多有趣的規律和性質，在這次的研究中我嘗試了許多的方法，並且想辦法加以改進，雖然現在這個研究還有許多尚須努力的地方，但在一步步嘗試的過程中，不僅閱讀了許多的書籍和論文，得到了許多數學上的知識，更重要的是在其中發現了數學的趣味！

摘要

我們的主題是研究使用直向、橫向與斜向磁磚不交疊地鋪滿 $m \times n$ 的長方形的方法總數。磁磚總共有如圖 A 中間所列出的四種（其中著上藍色和綠色兩者統稱為「斜向的」磁磚），並且斜向磁磚不能夠有圖所顯示的交疊的情形。

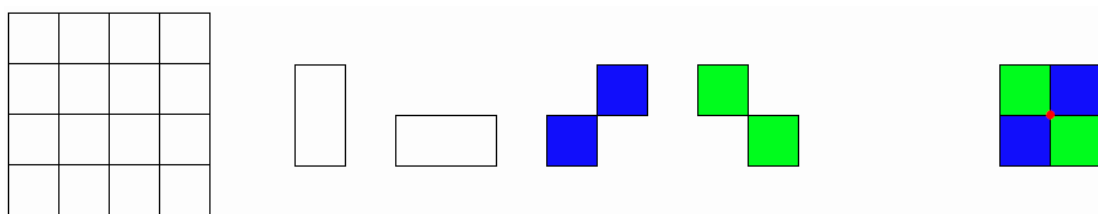


圖 A

在 1961 年的論文中給出了只使用直向、橫向磁磚鋪滿 $2m \times 2n$ 的長方形的方法數的一個漂亮的公式，而 2001 年的論文以一個較簡單的方法證明了這個結果。

(1)(2)(3)

$$4^{mn} \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \left(\cos^2 \frac{i\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{j\pi}{2n+1} \right)$$

而我們先從固定 m 尋找遞迴式的方法出發，接著用 m 的結果推出 $m+1$ ，最後期望能找出與論文一樣的一個漂亮的一般通式。

Abstract

The purpose of this research is to study a tiling problem: Given an $m \times n$ chessboard, how many ways are there to tile the chessboard with 1×2 dominoes and also "diagonal" dominoes (display in the picture below). We use a transfer-matrix method and recursive method to calculate the answer.

Then we try to use a similar method given out by a research in 2001 to find out the formula of the tiling number.

壹、前言

一、研究動機

在網站中有一個叫做 Connectors 的遊戲⁽⁴⁾，玩法如下：一共有 $2n$ 個圈圈（燈座，上方有燈泡）排成 n 行 n 列，每個圈圈內都有一個數字，如圖 1，是 $n=3$ 的一個例子。遊戲規則為：每個圈圈可以往上下左右或是斜角方向做連結（接電線），但連結線不可交疊。最後連結到的圈圈數目，必須要與自己圈圈內的數字相符（否則燈泡會燒毀）。

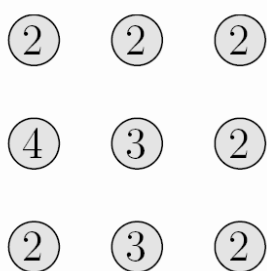


圖 1

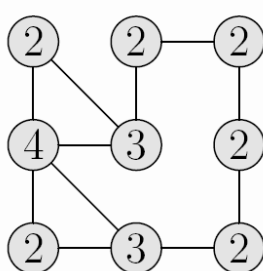


圖 2

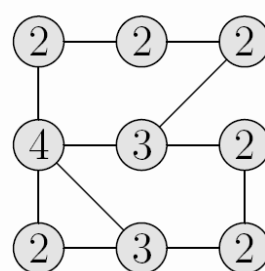


圖 3

圖 2、圖 3 都可以是這題目（圖 1）的個解。很顯然，一個題目有可能會有一個以上的解。這觸發了我們對於鋪磁磚的研究（如果每個圓圈內的數字都是 1，那麼這個遊戲便能夠轉成鋪磁磚的形式）：如果除了使用直向、橫向的磁磚，再加上「斜向的」磁磚來鋪滿一個矩形，這與只使用直向、橫向的磁磚的鋪法有哪些方面的相同與相異？

此次研究的內容，與矩陣、遞迴數列相關。

二、研究目的

找出拼湊的方法數與矩形的長度、寬度的關聯。

貳、研究內容過程與方法

最初我們在電腦上寫出一個程式：只要給定 m 與 n ，就能夠列舉出 $m \times n$ 的矩形被磁磚填充的所有方法，並計算出方法總數，之後就能用來檢驗後來寫出的公式是否正確無誤。論文中⁽⁴⁾並非使用以圖形的變化來研究遞迴關係，因此我們決定先固定 m ，即矩形的寬度，並從較小的 m 開始討論，定義關於圖形的函數，並建立圖形上的關聯，寫出一轉移矩陣。將轉移矩陣轉換成單一函數的遞迴關係，再寫出生成函數，最後寫出一般式。論文（參考資料一）中，已提出一個漂亮的公式，能計算 1×2 的長方形（骨牌）填充的 $2m \times 2n$ 長方形的方式總數：

$$4^{mn} \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \left(\cos^2 \frac{i\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{j\pi}{2n+1} \right)$$

我們也希望加入斜向的磁磚後，能夠推廣到任意的 m 與 n ，並寫出計算方法數的一般式。

參、研究內容

一、狀態說明

我們用 $Rect_{m,n}$ 表示 $m \times n$ 的矩形區域。在討論鋪磁磚的過程中，我們由左至右依序鋪上磁磚，此時我們定義一個「狀態」：當我們由左至右依序鋪上磁磚後，若恰好將前面 i 行完全鋪滿了，即 $1, 2, \dots, i$ 行上的所有格子都被磁磚所覆蓋時，我們就稱目前 $i+1$ 行上的格子是否被磁磚填滿的狀況為一個「狀態」。

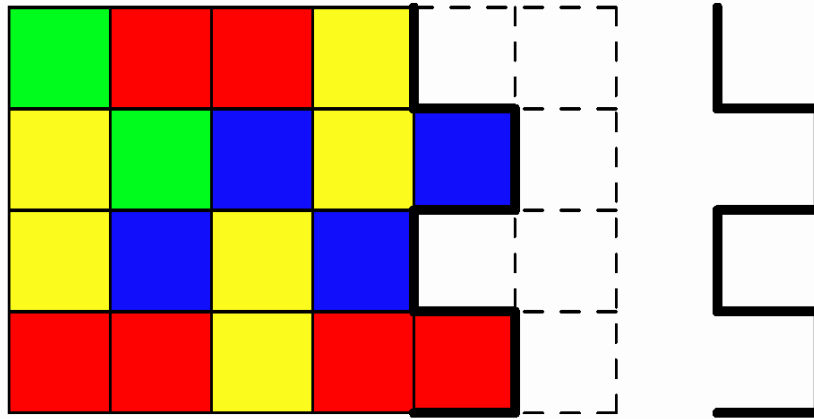


圖 4

如圖 4 所示為撲滿第 4 行的情況，而此時的狀態如右圖所示。

為了方便我們將給每種狀態一個標號的方式。對於一個狀態，我們從上到下如果格子已被填滿則記為 1，否則為 0，這樣每一個狀態會對應到一個 01 字串，我們把這個 01 字串的值當作狀態的編號。

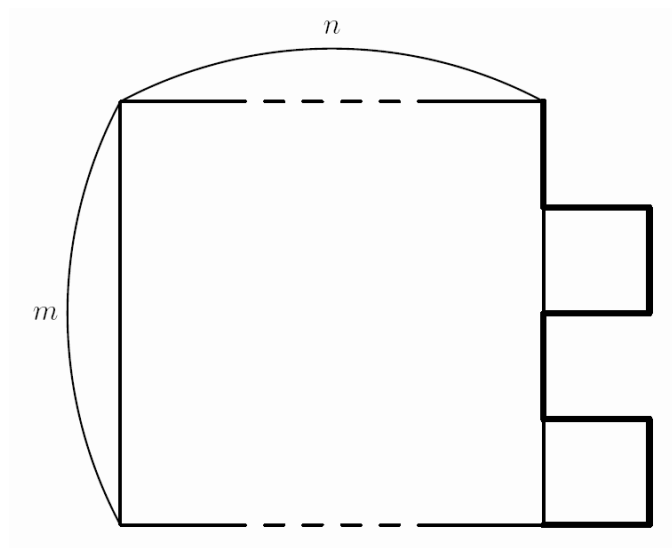


圖 5

如（圖 5）這個狀態對應到的 01 字串為(0101)，而後面會用字串的 2 進位值來排序。

二、 $m = 4$ 的情況

我們討論當 $m = 4$ 時的情況，首先我們列出 $m = 4$ 時所有可能的狀態如下（圖 6）。

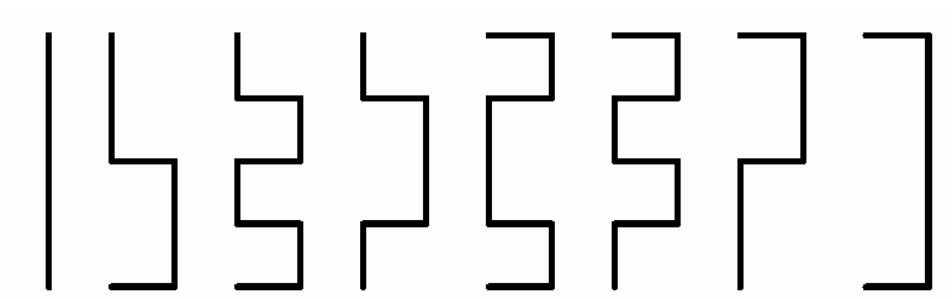


圖 6

這 8 種分別為(0000), (0011), (0101), (0110), (1001), (1010), (1100), (1111)而我們發現，當我們沿著左至右的順序依序鋪上磁磚後，目前的狀態會隨著我們鋪完第 $1, 2, \dots, n$ 行而改變。

如果某種鋪法可以使得在第 i 行時為狀態 S ，在第 $i + 1$ 行時變為狀態 T ，我們就稱這是一種狀態 S 到 T 的轉移。顯然如果 m 是固定的，兩種狀態之間的轉移方法數和目前所在的行數無關，因此轉移的方法數會是固定的。

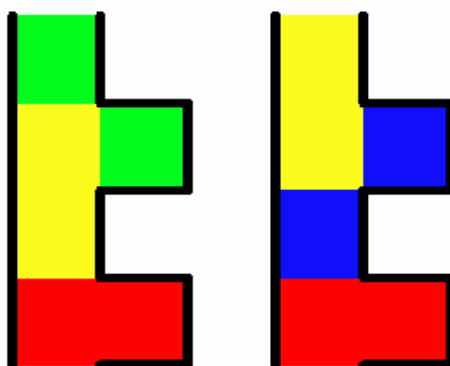


圖 7

比如說（圖 7）的狀況，枚舉後可以發現狀態(0000) 轉移到狀態(0101) 的方法數共有兩種。

經過觀察問題以後，我們可以歸納出以下結論：

1. 在一開始(即第 0 行的時候)，我們尚未鋪上任何磁磚，我們所在的狀態為(0000)(即一直線的狀態)。
2. 在最終(即第 n 行的時候)，因為我們最後要將矩形撲滿而不能有任何磁磚凸出矩形，我們所在的狀態必須為(0000)。
3. 因為我們總共要撲滿 n 行，我們必須從第 0 行的狀態轉移到第 1 行的狀態，第 1 行的狀態轉移到第 2 行的狀態... 一直到第 $n-1$ 行的狀態轉移到第 n 行的狀態。因此我們總共會經過 n 次轉移。

由以上討論我們要求的鋪法總數就可以轉化為另一個圖論的問題：現在我們有 8 個頂點分別為(0000), (0011), (0101), (0110), (1001), (1010), (1100), (1111)，並且任兩個頂點可能有若干條邊或是沒有任何邊連接，而我們要計算的就相當於從(0000)出發，走過 n 條邊最後又回到(0000)的方法數。而這個問題可以使用矩陣計算。

令在第 i 行時，走到狀態(0000), (0011), (0101), (0110), (1001), (1010), (1100), (1111) 的方法數分別為 $a(i)$, $b(i)$, $c(i)$, $d(i)$, $e(i)$, $f(i)$, $g(i)$, $h(i)$ ，我們便可以列出以下的轉移式

$$\begin{bmatrix} a(i+1) \\ b(i+1) \\ c(i+1) \\ d(i+1) \\ e(i+1) \\ f(i+1) \\ g(i+1) \\ h(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & m_{17} & m_{18} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & m_{27} & m_{28} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} & m_{37} & m_{38} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} & m_{47} & m_{48} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} & m_{57} & m_{58} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} & m_{67} & m_{68} \\ m_{71} & m_{72} & m_{73} & m_{74} & m_{75} & m_{76} & m_{77} & m_{78} \\ m_{81} & m_{82} & m_{83} & m_{84} & m_{85} & m_{86} & m_{87} & m_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(i) \\ b(i) \\ c(i) \\ d(i) \\ e(i) \\ f(i) \\ g(i) \\ h(i) \end{bmatrix}$$

其中 m_{ij} 的值就是第 j 行對應到的狀態 S 轉移到第 i 行對應到的狀態 T 的方法總數，如 $m_{13} = 2$ ，這可以由對每一個 m_{ij} 都以同（圖 7）討論的方法得知。

而經過小心地計算所有的 m_{ij} ，我們即可得到以下的轉移矩陣：

$$\begin{bmatrix} a(i+1) \\ b(i+1) \\ c(i+1) \\ d(i+1) \\ e(i+1) \\ f(i+1) \\ g(i+1) \\ h(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(i) \\ b(i) \\ c(i) \\ d(i) \\ e(i) \\ f(i) \\ g(i) \\ h(i) \end{bmatrix}$$

根據定義， $a(0) = 1$ ； $b(i) = c(i) = d(i) = e(i) = f(i) = g(i) = h(i) = 0$ ，令

$$T'_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以知道

$$\begin{bmatrix} a(k) \\ b(k) \\ c(k) \\ d(k) \\ e(k) \\ f(k) \\ g(k) \\ h(k) \end{bmatrix} = T_4'^k \begin{bmatrix} a(0) \\ b(0) \\ c(0) \\ d(0) \\ e(0) \\ f(0) \\ g(0) \\ h(0) \end{bmatrix}$$

我們利用軟體 Mathematica 算出矩陣 T'_4 的特徵多項式。

$$p(x) = x^8 - 5x^7 - 4x^6 + 12x^5 - 9x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 5x$$

根據 Cayley-Hamilton 定理有 $p(T'_4) = O_{8,8}$ 則對於 $n \geq 7$ ，有

$$T_4'^n = 5T_4'^{n-1} + 4T_4'^{n-2} - 12T_4'^{n-3} + 9T_4'^{n-4} + 7T_4'^{n-5} - 14T_4'^{n-6} + 5T_4'^{n-7}$$

$$\begin{bmatrix} a(i) \\ b(i) \\ c(i) \\ d(i) \\ e(i) \\ f(i) \\ g(i) \\ h(i) \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} a(i-1) \\ b(i-1) \\ c(i-1) \\ d(i-1) \\ e(i-1) \\ f(i-1) \\ g(i-1) \\ h(i-1) \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} a(i-2) \\ b(i-2) \\ c(i-2) \\ d(i-2) \\ e(i-2) \\ f(i-2) \\ g(i-2) \\ h(i-2) \end{bmatrix} - 12 \begin{bmatrix} a(i-3) \\ b(i-3) \\ c(i-3) \\ d(i-3) \\ e(i-3) \\ f(i-3) \\ g(i-3) \\ h(i-3) \end{bmatrix}$$

$$+ 9 \begin{bmatrix} a(i-4) \\ b(i-4) \\ c(i-4) \\ d(i-4) \\ e(i-4) \\ f(i-4) \\ g(i-4) \\ h(i-4) \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} a(i-5) \\ b(i-5) \\ c(i-5) \\ d(i-5) \\ e(i-5) \\ f(i-5) \\ g(i-5) \\ h(i-5) \end{bmatrix} - 14 \begin{bmatrix} a(i-6) \\ b(i-6) \\ c(i-6) \\ d(i-6) \\ e(i-6) \\ f(i-6) \\ g(i-6) \\ h(i-6) \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} a(i-7) \\ b(i-7) \\ c(i-7) \\ d(i-7) \\ e(i-7) \\ f(i-7) \\ g(i-7) \\ h(i-7) \end{bmatrix}$$

只取我們所需的部分，即為

$$a_n = 5a_{n-1} + 4a_{n-2} - 12a_{n-3} + 9a_{n-4} + 7a_{n-5} - 14a_{n-6} + 5a_{n-7}$$

n	a_n
0	1
1	1
2	5
3	25
4	139
5	751
6	4051
7	21849
8	117877
9	635969
10	3431155
11	18511575
12	99872603

其中 $a(0), a(1), \dots, a(6)$ 我們先以一開始所說的程式幫助我們計算得出， $a(7)$ 以後便可以用遞迴式計算。

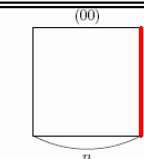
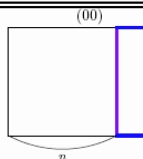
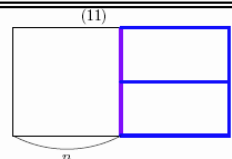
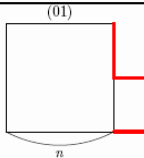
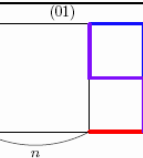
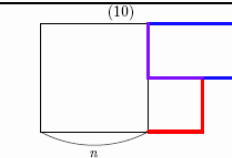
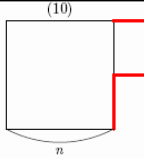
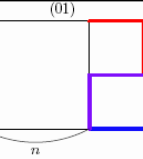
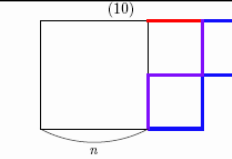
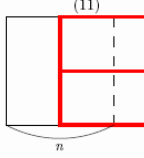
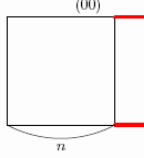
並且由這個遞迴式，我們便可導出其生成函數，並計算出一般式。

三、轉移矩陣間的遞迴關係

以上我們找到了當 $m = 4$ 的遞迴式，即 $Rect_{4,n}$ 的情況，但我們還希望能夠解決當 m 為任意數的情況。當然對於任何一個 m 值，我們都可以使用以上的方法計算出轉移矩陣，但是如果對於每個 m 值都要重新計算出轉移矩陣，那顯然是沒有效率的，並且也不夠一般。因此我們希望找到一個有系統的方法，讓我們能從小的 m 值即能推出 $m + 1, m + 2, \dots$ 的轉移矩陣，進而推出 m 為任意數時的轉移矩陣。

四、 $m = 2$ 轉移矩陣

我們先計算 $m = 2$ 時的轉移矩陣，即 $Rect_{2,n}$ 的情況，詳細的計算過程如下：

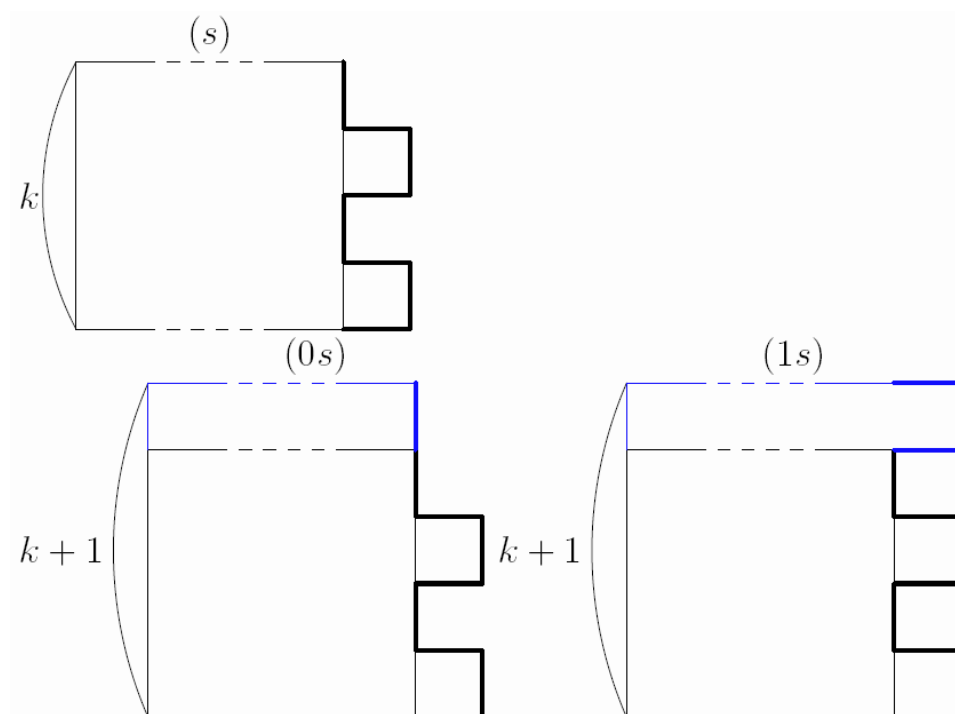
$Rect_{2,n}$	$Rect_{2,n+1}$	
(00) 	(00) 	(11) 
(01) 	(01) 	(10) 
(10) 	(01) 	(10) 
(11) 	(00) 	

因此我們可以列出如下的轉移式

	(00)	(01)	(10)	(11)
(00)	1	0	0	1
(01)	0	1	1	0
(10)	0	1	1	0
(11)	1	0	0	0

五、從 $Rect_{m,n}$ 到 $Rect_{m+1,n}$

現在我們希望能利用 $Rect_{m,n}$ 的轉移矩陣推出 $Rect_{m+1,n}$ 的轉移矩陣。例如： $m = 2$ 的狀態(00), (01), (10), (11)，推到 $m = 3$ 的狀態(000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111)。事實上對於每一個 $m = k$ 時的狀態(s)，當我們要推至 $m = k + 1$ 時，只需要考慮兩種情況，(0s) 和(1s)。



因此鋪滿 $Rect_{m+1,n}$ 的轉移矩陣的長和寬都會是原來 $Rect_{m,n}$ 轉移矩陣的 2 倍令 S 代表鋪滿 $Rect_{m,n}$ 時的所有狀態的集合， T 代表 $Rect_{m+1,n}$ 時的所有狀態的集合，可知 $T = \{(0s); (1s) \mid \in S\}$ ，若鋪滿 $Rect_{m,n}$ 的轉移矩陣型態如下

	(S)
(S)	

則鋪滿 $Rect_{m+1,n}$ 的轉移矩陣即如下

	(0S)	(1S)
(0S)		
(1S)		

我們有以下定理：

定理 1. 假設 $Rect_{m,n}$ 轉移矩陣為 T_m ，且其中 A_{00} , A_{10} , A_{01} , A_{11} 為將 T_m 切成 4 個相等大小的 block。即

$$T_m = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} \\ A_{01} & A_{11} \end{bmatrix}$$

而將 $Rect_{m,n}$ 轉移矩陣 T_{m+1} 表示成

$$T_{m+1} = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{10} \\ B_{01} & B_{11} \end{bmatrix}$$

其中 A_{00} , A_{10} , A_{01} , A_{11} 為將 T_{m+1} 切成 4 個相等大小的 block。

則我們可以證明會有以下關係式：

$$B_{01} = B_{10} = T_m = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{10} \\ A_{01} & A_{11} \end{bmatrix}$$

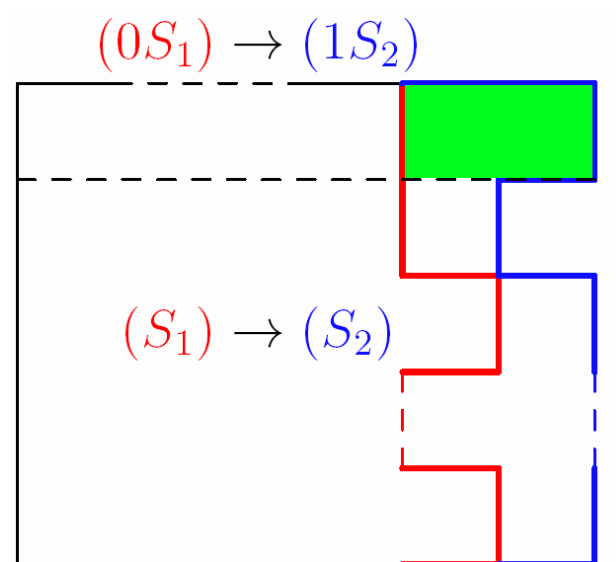
$$B_{11} = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ A_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{00} = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ A_{00} + A_{11} & A_{10} \end{bmatrix}$$

六、證明

(一) $B_{01} = T_m$

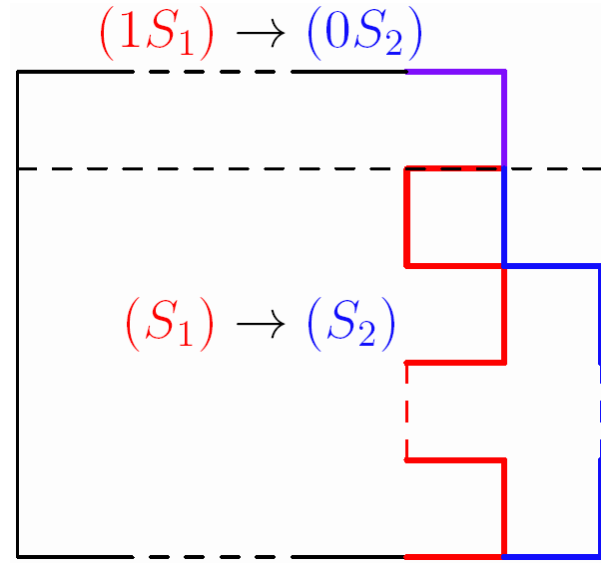
由我們定義的轉移矩陣可以知道 B_{01} 代表 $(0S_1)$ 轉移到 $(1S_2)$ 的方法數，即未轉移前的最右上角的區域是還沒有被填滿的，而轉移後最右上角的區域必須是被填滿的，如圖所示：



可以知道綠色的部分一定要放置橫的瓷磚，因此方法數相當於忽略最右上角的區域而只看下面的方法數，即為 (S_1) 轉移到 (S_2) 的方法數可用轉移矩陣 T_m 表示。

(二) $B_{10} = T_m$

B_{10} 代表從 $(1S_1)$ 轉移到 $(0S_2)$ 的方法數，即未轉移前的最右上角的區域是已被填滿的，而轉移後最右上角的區域必須是沒有填滿的，如圖所示：



可以知道最上面無法放置瓷磚，因此方法數相當於忽略第一列只看下面的方法數，即 (S_1) 轉移到 (S_2) 的方法數可用轉移矩陣 T_m 表示。

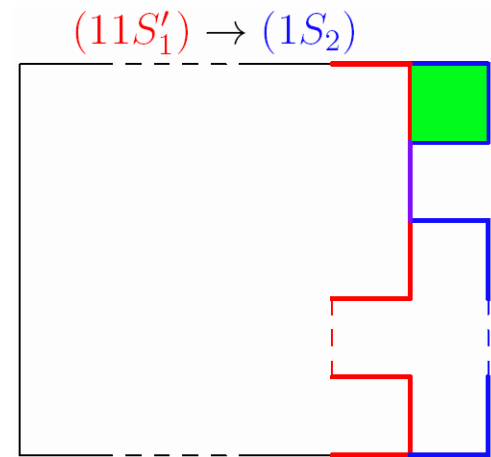
$$B_{11} = \begin{pmatrix} A_{10} & 0 \\ A_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

B_{11} 代表從 $(1S_1)$ 轉移到 $(1S_2)$ 的方法數，即未轉移前最右上角的區域已被填滿的，而轉移後最右上角的區域必須是沒有填滿的，此時我們分兩種情況討論。

假設起始的狀態集為 $(1S_1)$ ，轉移後的狀態集為 $(1S_2)$ 。

i. $S_1 = (1S_1')$

即未轉移前的第二格也必須是已被填滿的。

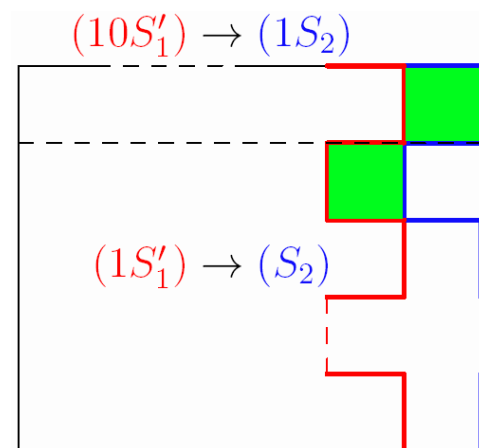


上圖為 $(11S'_1)$ 移到 $(10S'_2)$ 的例子，可以知道綠色的格子無法放置瓷磚，而 $(11S'_1)$ 轉移到 $(11S'_2)$ 為同樣的狀況，因此沒有方法可以填滿，故方法數=0。

$$\text{即 } \begin{matrix} (0S'_2) \\ (1S'_2) \end{matrix} \begin{bmatrix} (1S'_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii. $S_1 = (0S'_1)$

即未轉移前的第二格也必須是未被填滿的。



上圖為 $(10S'_1)$ 轉移到 $(10S'_2)$ 的例子，可以知道綠色的格子必須放置斜的瓷磚，而 $(10S'_1)$ 轉移到 $(11S'_2)$ 為同樣的狀況，因此方法數相當於先把轉移前的第二格方塊填滿的轉移方法數，即 $(1S'_1)$ 轉移到 (S_2)

的方法數，也就是 $(1S'_1)$ 轉移到 (S_2) 的方法數。

$$\begin{matrix} (0S'_1) \\ (0S'_2) \\ (1S'_2) \end{matrix} \begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{11} \end{bmatrix}$$

綜合以上兩點，有：

$$B_{11} = \begin{matrix} (0S'_1) & (1S'_1) \\ (0S'_2) & (1S'_2) \end{matrix} \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ A_{11} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ A_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

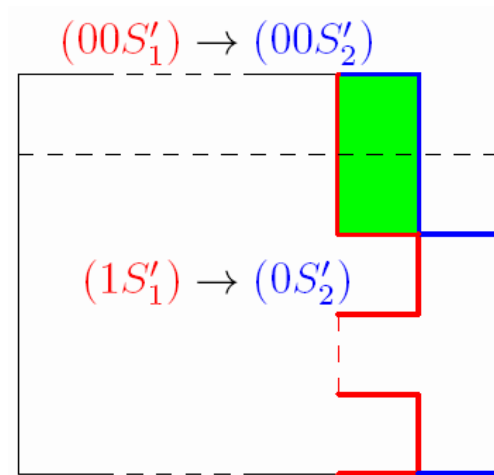
$$(四) \quad B_{00} = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ A_{00} + A_{11} & A_{10} \end{bmatrix}$$

B_{00} 代表從 $(0S_1)$ 轉移到 $(0S_2)$ 的方法數，即未轉移前最右上角的區域已被填滿的，而轉移後最右上角的區域必須是沒有填滿的，此時我們分四種情況討論。

假設起始的狀態集為 $(0S_1)$ ，轉移後的狀態集為 $(0S_2)$ 。

$$1. \quad S_1 = (0S'_1), S_2 = (0S'_2)$$

即未轉移前和轉移後的第二列也必須是沒有被填滿的。



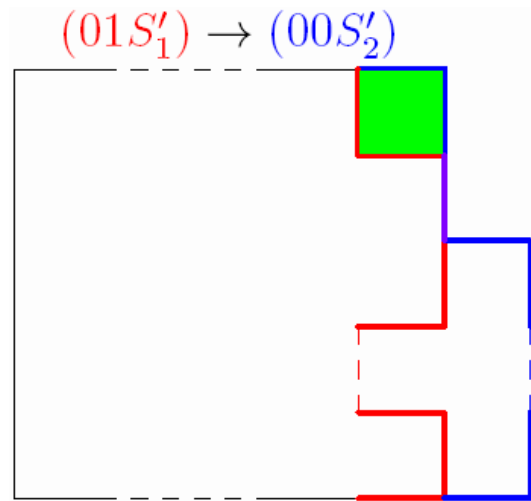
可以知道綠色的格子一定要放置直向的瓷磚，因此方法數相當於先把轉移前的第二列方塊填滿的轉移方法數，即 $(1S_1)$ 轉移到 (S_2)

轉移到 $(0S'_2)$ 的方法數可用 A_{00} 表示。

因此方法數為兩種擺法的總和，即可以用矩陣 $A_{00} + A_{11}$ 表示。

3. $S_1 = (1S'_1), S_2 = (0S'_2)$

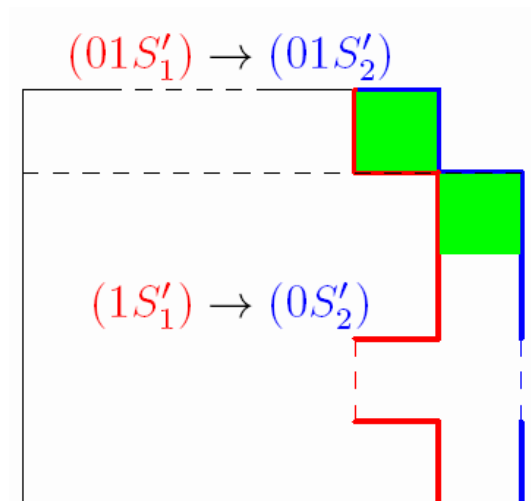
即未轉移前的第二列必須是已被填滿的，而轉移後的第二列是未被填滿的。



可以知道綠色的格子無法放置瓷磚，因此沒有方法可以填滿，故方法數=0。

4. $S_1 = (1S'_1), S_2 = (1S'_2)$

即未轉移前和轉移後的第二列也必須都是被填滿的。



可以知道綠色的格子一定要放置斜向的瓷磚，因此方法數相當於先把轉移後的第二列方格填滿的轉移方法數，即 (S_1) 轉移到 $(0S_2')$ 的方法數，也就是 $(1S_1')$ 轉移到 $(0S_2')$ 的方法數可用矩陣 A_{10} 表示。

綜合以上四點，有：

$$B_{11} = \begin{matrix} & (0S_2') & (1S_1') \\ \begin{matrix} (0S_2') \\ (1S_2') \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ A_{00} + A_{11} & A_{10} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ A_{00} + A_{11} & A_{10} \end{bmatrix}$$

七、遞推的結果

我們先從 $Rect_{2,n}$ 的轉移矩陣出發

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{依據我們找到的規則，} Rect_{3,n} \text{ 的轉移矩陣}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{再繼續做 } Rect_{4,n} \text{ 的轉移矩陣}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

現在我們可以把與 1 和 0 的個數皆為偶數的狀態相關的行與列挑出來。

$$T'_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} (0000) & (0011) & (0101) & (0110) & (1001) & (1010) & (1100) & (1111) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (0000) \\ (0011) \\ (0101) \\ (0110) \\ (1001) \\ (1010) \\ (1100) \\ (1111) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

此為 $Rect_{4,n}$ 轉移到 $Rect_{4,n+1}$ 的簡化轉移矩陣，這個矩陣和我們上一節使用逐一計算矩陣內的元素的結果相符。

肆、討論

我們找出了轉移矩陣間的遞迴關係，但是這個方法還不夠一般，並且當 m 值增大時轉移矩陣的大小會成長的非常快。

因此我們希望能參考論文中(3) 使用路徑對映的方法得到更一般的結果。

伍、結論

我們得出了一個有系統的方法，從最初 $m = 2$ 的轉移矩陣，能推出任意 m 時的轉移矩陣。

並且我們可以利用這個轉移矩陣，計算出與 n 有關的遞迴式，進而得出 $m \times n$ 矩形使用直向、橫向與斜向瓷磚鋪滿的鋪法數。

陸、參考資料

1. P. W. Kasteleyn, The statistics of dimers on a lattice, *Physica* 27 (1961), 1209–1225.
2. H. N. V. Temperley and M. E. Fisher, Dimer problem in statistical mechanics—an exact result, *Philos. Mag.* (8), 6 (1961), 1061–1063.
3. V. Strehl, Counting Domino Tilings of Rectangles via Resultants, *Advances in Applied Mathematics* 27, 597–626 (2001)
4. <http://www.agame.com/game/connectors.html>
5. <http://www.wolframalpha.com/>

評語

- 1.既有作品有注意到參考資料一的「漂亮公式」，就應該努力的去尋找該公式的幾何意義或物理意義。注意：每凡具有雙層連乘符號的式子，往往會帶來計算障礙。
- 2.參考資料引用一些超越作者功力的文獻，有可能產生巨大的壓力，恐怕不利於對於原本問題的研究衝力。
- 3.看版中出現中文別字、錯字，顯示作者沒有充足時間仔細檢閱作品內容。