2013 臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號 **010035**

參展科別 **數學科**

作品名稱 **特殊型 pell 方程式之矩陣解研究**

得獎獎項 **三等獎**

就讀學校 國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師 翁立衛、許志農

作者姓名 黃敏書、謝昀佐

關 鍵 字 Pell 方程式之矩陣解、二階遞迴式二階遞迴式、P 邊形數

作者簡介

我們是黃敏書和謝昀佐，就讀師大附中1268班，在翁立衛老師的帶領數學專題研究下，所以對廣大的數學進行深度的探索。我們的研究主題是『特殊形Pell方程式之矩陣解研究』。最初是探討邊長為平方數的三邊形數亦為四邊形數，後來可推廣至p邊形數亦為四邊形數。在研究過程中，一直不斷有新的發現與突破，再加上老師長久以來的鼓勵，所以就鼓起勇氣來報名「2013臺灣國際科學展覽會」。

摘要

本研究接續去年的研究主題”驚奇的數”，邊長為平方數的三邊形數亦為四邊形數的問題。解決這個問題後，利用 Pell 方程式與矩陣計算來求哪些邊長的 p 邊形數亦同時為四邊形數。處理方法分為兩類：第一類可以使用矩陣計算來討論，已討論出附帶方程式部分的初始解情形，並嘗試改進矩陣計算的漏解問題以及對數據做詳細分析、歸納。目前已有兩種方法：1.放寬附帶方程式初始解的限制，也就是縮小遞迴式的係數；2.伸縮雙曲線為一套固定的方法，可以解出原矩陣計算所遺漏的解。第二類無法使用矩陣計算，利用因式分解的技巧處理，發現結果與切比雪夫多項式有著密切關係。

Abstract

We have continued with our previous research on “The Fantastic Number,” which suggests that the triangular numbers whose lengths are square numbers are also the square numbers. After processing “The Fantastic Number," we applied the Pell equation and matrix theory to transform the polygon number into a square number. The problems can be solved through two different transformation processes: one by matrix theory, and the other by factorization.

When solving it by matrix theory, we focus our attention on the matrix method and analyze the data in detail. So far, we have devised two solutions in the research. First, we relax the restriction on the initial root of the auxiliary equation; in other words, we narrow the recursive coefficients. Second, by applying stretching hyperbola we retrieve the missing roots acquired via the matrix theory. Furthermore, we try to find a systematic method to check whether we can find all solutions without missing some terms.

When solving it by factorization, we find the result has a close relationship with Chebyshev polynomial.

壹、前言

一、研究動機

本研究接續去年的研究主題"驚奇的數",探討邊長為平方數的三邊形數亦為四邊形數的問題。這個問題相當於討論某一類 Pell 方程式的解，處理方法分為兩類：第一類可以使用矩陣計算來討論，已討論出附帶方程式部分的初始解情形，第二類無法使用矩陣計算，利用因式分解的技巧處理，發現這部分的結果與切比雪夫多項式有著密切關係。

當使用文獻[1]矩陣計算時，我們將其結果做初步分類，發現在部分情況此矩陣計算只能求得部分的解，但尚未找出此方法漏解的原因及改善的方法。另外，在無法使用矩陣計算的部分，經由因式分解取得大量資料後，發現其與 的關係，但尚未發現其與切比雪夫的關係。接續去年國際科展的研究，今年我們聚焦於矩陣計算的漏解問題以及對數據做詳細分析、歸納，嘗試去改進並縮小窮舉的範圍以求效率較高的方式。

二、研究目的

1. 重新對主方程式的解進行分類，並試圖解釋每一組所代表的意義及漏解的原因。

2. 改進矩陣計算的理論以避免漏解

3. 我們已研究可以避免漏解的方法，需檢查主方程式的解 、 之間是否有不屬於由 經由有限次數運算所推得的解，但此方法無可避免的需要在有限範圍內窮舉，因此我們致力於縮小窮舉的範圍以提高效率。。

貳、研究方法或過程

一、理論推導

p邊形數的一般式為$\frac{n(n+1)}{2}+(p-3)\frac{n(n-1)}{2}=\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n$。此時假設

$\frac{p-2}{2}n^2+\frac{4-p}{2}n=t^2$，將$n=a^2, a\in N$代入可得:$(p-2)a^2+(4-p)=2(\frac{t}{a})^2$，移項可得到：

$$(p-2)a^2-2\left(\frac{t}{a}\right)^2=p-4,$$

看出這是一個$px^2-qy^2=r,\ p,q\in N, r\in Z$的形式。為了處理$px^2-qy^2=r$這種情形，我們從網路上查到一份有關 Pell 方程式的資料(參考文獻[1])。

引理 1：矩陣方法

將 Pell 方程式推廣為$px^2-qy^2=r,\ p,q\in N, r\in Z$的形式。先求出**主方程式**:$px^2-qy^2=r$的初始解$(x_1,y_1)$，然後再求出**附帶方程式**:$x^2-pqy^2=1$的初始解$(x_0,y_0)$，根據其文章一系列循序漸進的論證過程，我們可證得$x_m, y_m$可表為下列形式:

$$\begin{bmatrix}x_m\\y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0 & qy_0\\py_0 & x_0\end{bmatrix}^{m-1}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$

因此可以使用這個公式解決**主方程式**:$(p-2)a^2-2\left(\frac{t}{a}\right)^2=p-4$的問題，也就是求出哪些邊長為$a^2$的$p$邊形數亦為四邊形數的問題。

我們可以利用矩陣討論驚奇的數，也就是將$p=3$代入**主方程式**得到

$a^2-2\left(\frac{t}{a}\right)^2=-1$，將a、$\frac{t}{a}$分別以x、y代換得$x^2-2y^2=-1$，由**主方程式**：

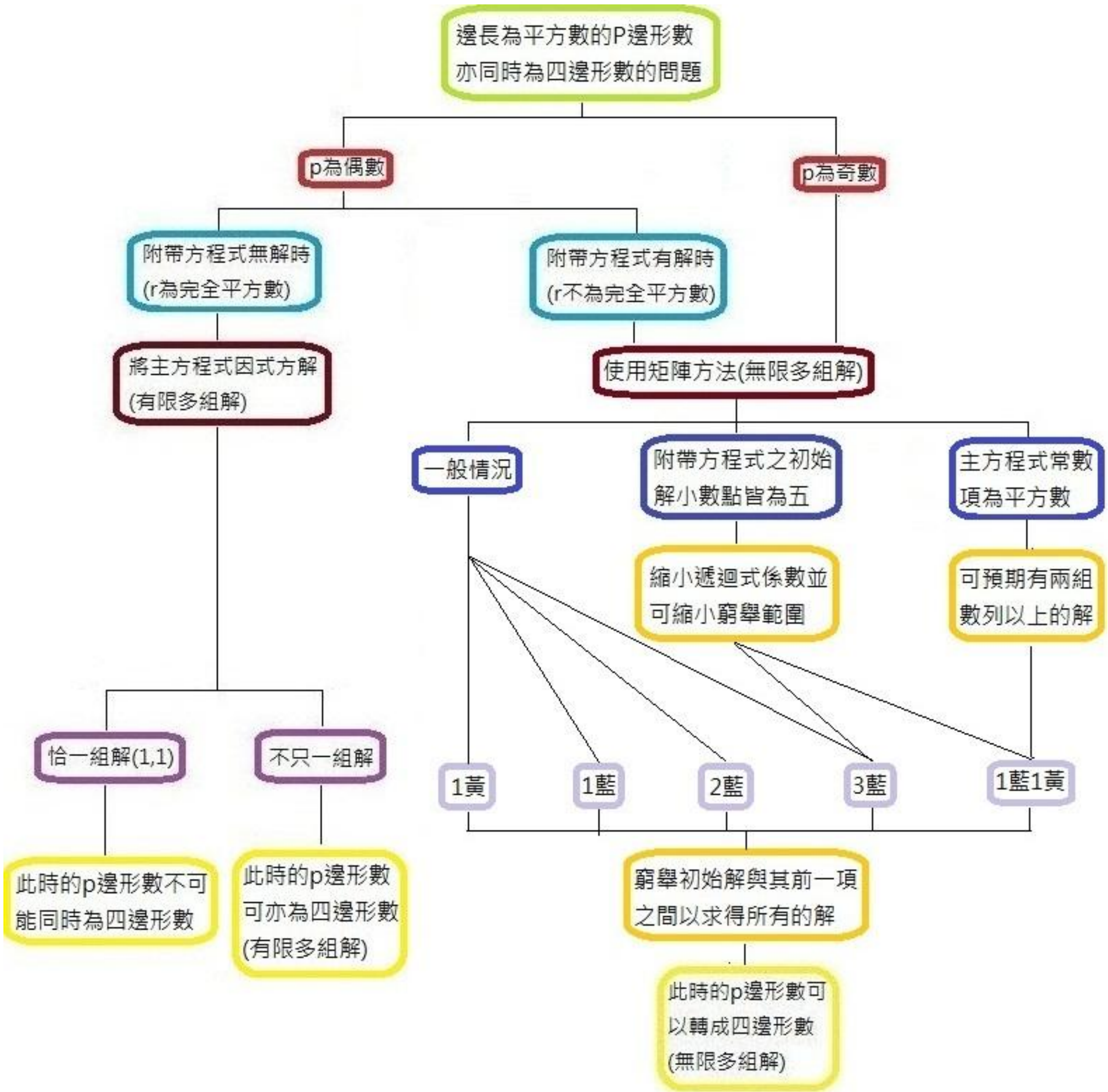
$x^2-2y^2=-1$得到初始解$(x_1,y_1)=(1,1)$，再求出附帶方程式$x^2-2y^2=1$的初始解(x_0,y_0)=(3,2)，可推得$x_2=7$、$x_3=41\ldots$，以$p=6$為例可得方程

$2c^2-\left(\frac{v}{c}\right)^2=1$，同乘負號可得$(\frac{v}{c})^2-2c^2=-1$

一樣可以化為$x^2-2y^2=-1$的形式，顯然數對$(a,\frac{t}{a})$的所有整數解與數對$\left(\frac{v}{c},c\right)$的所有整數解恰吻合，皆為(1,1)、(7,5)、(41,29)、(239,169)…，容易看

出$c_n = 1,5,29,169\ldots$，其遞迴式為：$c_{n+2} = 6c_{n+1} - c_n$，它和a_n有一樣的遞迴式。

二、研究流程



根據矩陣計算，若想要求出**主方程式**:$(p-2)a^2 - 2\left(\frac{t}{a}\right)^2 = p-4$的通解，我們要先討論出**附帶方程式**:$a^2 - 2(p-2)\left(\frac{t}{a}\right)^2 = 1$的初始解，方便討論，將$(a, \frac{t}{a})$以$(x, y)$取代。

1. **當p為偶數**，**主方程式**:$(p-2)x^2 - 2y^2 = p-4$可同除以2，即化為

$\left(\frac{p-2}{2}\right)x^2-y^2=\frac{p-4}{2}$時，所以代入矩陣計算，得**附帶方程式**:$x^2-\left(\frac{p-2}{2}\right)y^2=1$。

2. **當p為奇數**，**主方程式**:$(p-2)x^2-2y^2=p-4$，所以代入矩陣計算，得**附帶方程式**:$x^2-2(p-2)y^2=1$。

3. 附帶方程式必定可表示為$x^2-ry^2=1$的形式，容易證明：到當r為平方數時(p必為偶數)，則此附帶方程式無解，在這個情況下，不能用矩陣方法來解，只能回到因式分解的技巧來討論其整數解；因此，在p為奇數或p為偶數但r非完全平方數時，可使用矩陣方法。這就是我們要先將問題分為p為偶數與奇數兩種情形的原因。

(一)無法用矩陣解

當無法使用矩陣計算時，我們使用因式分解，因此所求得的解必定為有限多組解。又由於主方程式有明顯解$(x_1,y_1)=(1,1)$，當主方程式只有此一組解，則此所代表的意義為一個點，亦即此時的p邊形數不可能同時為四邊形數。若其解不只一組解，可藉由切比雪夫多項式解出其有限多組解。

當$\frac{p-2}{2}$為平方數時，則$x^2-\left(\frac{p-2}{2}\right)y^2=1$，**無解**，所以我們**不能以上述的矩陣公式去計算之**。因此，我們回歸到原來的問題$\left(\frac{p-2}{2}\right)x^2-y^2=\frac{p-4}{2}$，此時我們可以假設$\frac{p-2}{2}=k^2$，代入原式可得

$$\boxed{k^2x^2-y^2=k^2-1}$$

以k值來討論，數對(x,y)的所有正整數解。即是求方程式$k^2x^2-y^2=k^2-1$的解。隨著k值逐一討論，發現：

1. 當k為任意正整數時，$(x,y)=(1,1)$為解；

2. 當$k = 2x$，$(x, y) = (x, 2x^2 - 1)$，為方程式的解；

3. 當$k = 4x^2 - 1$，$(x, y) = (x, 4x^3 - 3x)$為方程式的解；

4. 當$k = 8x^3 - 4x$，$(x, y) = (x, 8x^4 - 8x^2 + 1)$為方程式的解。

我們發現：$(x, y) = (1,1)$為共同的解，稱為第一鏈；當$k = 2x$時，$(x, y) = (x, 2x^2 - 1)$都會成為方程式的解，稱之第二鏈；當$k = 4x^2 - 1$，也就是$k = 15, 35, 63, 99$時，$(x, 4x^3 - 3x)$會成為方程式的解，這一部分，稱之為第三鏈，以此類推，以**第n鏈**來稱呼同一系列、符合相同關係的(x, y)。把這些結果列於【表 1】：

p	k	第一鏈	第二鏈	第三鏈	第四鏈	p	k	第一鏈	第二鏈	第三鏈	第四鏈
10	2	(1_1)				1802	30	(1_1)	(15_449)		
20	3	(1_1)				1924	31	(1_1)			
34	4	(1_1)	(2_7)			2050	32	(1_1)	(16_511)		
52	5	(1_1)				2180	33	(1_1)			
74	6	(1_1)	(3_17)			2314	34	(1_1)	(17_577)		
100	7	(1_1)				2452	35	(1_1)		(3_99)	
130	8	(1_1)	(4_31)			2594	36	(1_1)	(18_647)		
164	9	(1_1)				2740	37	(1_1)			
202	10	(1_1)	(5_49)			2890	38	(1_1)	(19_721)		
244	11	(1_1)				3044	39	(1_1)			
290	12	(1_1)	(6_71)			3202	40	(1_1)	(20_799)		
340	13	(1_1)				3364	41	(1_1)			
394	14	(1_1)	(7_97)			3530	42	(1_1)	(21_881)		
452	15	(1_1)		(2_26)		3700	43	(1_1)			
514	16	(1_1)	(8_127)			3874	44	(1_1)	(22_967)		
580	17	(1_1)				4052	45	(1_1)			
650	18	(1_1)	(9_161)			4234	46	(1_1)	(23_1057)		
724	19	(1_1)				4420	47	(1_1)			
802	20	(1_1)	(10_199)			4610	48	(1_1)	(24_1151)		
884	21	(1_1)				4804	49	(1_1)			
970	22	(1_1)	(11_241)			5002	50	(1_1)	(25_1249)		
1060	23	(1_1)				5204	51	(1_1)			
1154	24	(1_1)	(12_287)			5410	52	(1_1)	(26_1351)		
1252	25	(1_1)				5620	53	(1_1)			
1354	26	(1_1)	(13_337)			5834	54	(1_1)	(27_1457)		
1460	27	(1_1)				6052	55	(1_1)			
1570	28	(1_1)	(14_391)			6274	56	(1_1)	(28_1567)		(2_97)
1684	29	(1_1)				6500	57	(1_1)			

表 1

繼續向前推進，列出更多鏈的關係，整理出【表 2】，如下所示：

	第一鏈		第二鏈		第三鏈		第四鏈
k	(x, y)	k	(x, y)	k	(x, y)	k	(x, y)
x	1 , 1	2x	$(x, 2x^2-1)$	$4x^2-1$	$(x, 4x^3-3x)$	$8x^3-4x$	$(x, 8x^4-8x^2+1)$
2	1 , 1	4	2 , 7	15	2 , 26	56	2 , 97
3	1 , 1	6	3 , 17	35	3 , 99	204	3 , 577
4	1 , 1	8	4 , 31	63	4 , 244	496	4 , 921
5	1 , 1	10	5 , 49	99	5 , 485	980	5 , 4801
6	1 , 1	12	6 , 71	143	6 , 846	1704	6 , 10081
7	1 , 1	14	7 , 97	195	7 , 1351	2716	7 , 18817
8	1 , 1	16	8 , 127	255	8 , 2024	4064	8 , 32257
9	1 , 1	18	9 , 161	323	9 , 2889	5796	9 , 51841
10	1 , 1	20	10 , 199	399	10 , 3970	7960	10 , 79201
11	1 , 1	22	11 , 241	483	11 , 5291	10604	11 , 116161
12	1 , 1	24	12 , 287	575	12 , 6876	13776	12 , 164737
13	1 , 1	26	13 , 337	675	13 , 8749	17524	13 , 227137
	第五鏈		第六鏈		第七鏈		第八鏈
k	(x, y)	k	(x, y)	k	(x, y)	k	(x, y)
$16x^4-12x^2+1$	$(x, 16x^5-20x^3+5x)$	$32x^5-32x^3+6x$	$(x, 32x^6-48x^4-18x^2-1)$	$64x^6-80x^4+24x^2-1$	$(x, 64x^7-112x^5+56x^3-7x)$	$128x^7-192x^5+80x^3-8x$	$(x, 128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1)$
209	2 , 362	780	2 , 1351	2911	2 , 5042	10864	2 , 18817
1189	3 , 3363	6930	3 , 19601				
3905	4 , 15124						
9701	5 , 47525						

表 2

1. 由【表 2】可以針對k與(x, y)的關係整理出【表 3】如下：

第n鏈	k	(x, y)	舉例
第一鏈	x	$(1,1)$	(1,1),(1,1),(1,1)
第二鏈	$2x$	$(x, 2x^2-1)$	(2,7),(3,17),(4,31)
第三鏈	$4x^2-1$	$(x, 4x^3-3x)$	(2,26),(3,99),(4,244)
第四鏈	$8x^3-4x$	$(x, 8x^4-8x^2+1)$	(2,97),(3,577)
第五鏈	$16x^4-12x^2+1$	$(x, 16x^5-20x^3+5x)$	(2,362),(3,3363)
第六鏈	$32x^5-32x^3+6x$	$(x, 32x^6-48x^4-18x^2-1)$	(2,1351),(3,19601)
第七鏈	$64x^6-80x^4+24x^2-1$	$(x, 64x^7-112x^5+56x^3-7x)$	(2,5042)
第八鏈	$128x^7-192x^5+80x^3-8$	$(x, 128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1)$	(2,18817)

表 3

求解主方程式$k^2x^2-y^2=k^2-1$時，嘗試以因式分解的方法，求出x,y的解，我們把k,x,y的關係列之如表，經市賽的口試教授及指導老師的提點後。查閱文獻[6][7]知：方程式$k^2x^2-y^2=k^2-1$的解y與k分別為第一類及第二類切比雪夫多項式。

第一類切比雪夫多項式：$T_0=1$，$T_1=x$，$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$

第二類切比雪夫多項式：$U_0=1$，$U_1=2x$，$U_{n+2}(x)=2xU_{n+1}(x)-U_n(x)$

並以 Pell 方程式定義切比雪夫多項式：$T_n^2-(x^2-1)U_{n-1}^2=1$

經過移項可得：$U_{n-1}^2x^2-T_n^2=U_{n-1}^2-1$

恰與主方程式：$k^2x^2-y^2=k^2-1$

發現k對應著U_{n-1}，y對應著T_n，也就是U_{n-1}為k的解，T_n為y的解。

(二)矩陣解法的結果呈現

分析完無法用矩陣解的情況後，我們繼續處理可以用矩陣方法來解整數解的情況。由於要求出主方程式的解，除了要先求主方程式的初始解(x_1,y_1)，還需要求附帶方程式的初始解(x_0,y_0)。從主方程式可以觀察出初始解$(x_1,y_1)=(1,1)$，而附帶方程式不論奇數或偶數的情況下，皆可表示為$x^2-ry^2=1$的形式，其中$r=\frac{p-2}{2}$或$2(p-2)$。因為以r來討論此方程式的初始解會比較方便，以下就是我們所掌握的r值與初始解的關係，列【表 4】如下：

方程式$x^2-ry^2=1$ 的初始解：	
當$r=\lambda^2-1$時	**初始解$(x_0,y_0)=(\lambda,1)$**
當$r=\lambda^2+1$時	**初始解$(x_0,y_0)=(2\lambda^2+1,2\lambda)$**
當$r=\lambda(\lambda+1)$時	**初始解$(x_0,y_0)=(2\lambda+1,2)$**
當$r=\lambda^2-2$時	**初始解$(x_0,y_0)=(\lambda^2-1,\lambda)$**
當$r=\lambda^2+2$時	**初始解$(x_0,y_0)=(\lambda^2+1,\lambda)$**
當$r=k^2\lambda^2\pm\lambda$時	**初始解$(x_0,y_0)=(2k^2\lambda\pm1,2k)$**
當$r=k^2\lambda^2\pm2\lambda$時	**初始解$(x_0,y_0)=(k^2\lambda\pm1,k)$**

表 4

證明以$r = k^2\lambda^2 \pm 2\lambda$為例：

方程式$(k^2\lambda \pm 1)^2 - (k^2\lambda^2 \pm 2\lambda)(k)^2 = 1$恆成立

透過 Excel 計算，可獲得主方程式的初步數據。但這與我們以矩陣計算的結果不完全相符，因此發現矩陣計算有漏解的情況。

(三)彙整

p邊形數亦為四邊形數的方程式為$(p-2)x^2 - 2y^2 = p-4$，觀察係數後可以得到$(x_1, y_1) = (1,1)$。根據之前的求法要求出方程式$x^2 - 2(p-2)y^2 = 1$的初始解，逐一檢查出$p = 3\sim50$的情況。以下為三邊形數到五十邊形數的簡表【表 5】整理，以下為a值與遞迴式的關係：

p	主方程式	a值	遞迴式
3	$x^2 - 2y^2 = -1$	-239,-41,-7,-1,1,7,41,239	$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$
4	$x^2 - y^2 = 0$	-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5	$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$
5	$3x^2 - 2y^2 = 1$	881,89,9,1,1,9,89,881	$a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$
6	$2x^2 - y^2 = 1$	169,29,5,1,1,5,29,169	$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$
7	$5x^2 - 2y^2 = 3$	265,7,1,31,1177	$a_{n+2} = 38a_{n+1} - a_n$
8	$3x^2 - y^2 = 2$	41,11,3,1,1,3,11,41	$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$
9	$7x^2 - 2y^2 = 5$	209,7,1,23,689	$a_{n+2} = 30a_{n+1} - a_n$
10	$4x^2 - y^2 = 3$	1	
11	$9x^2 - 2y^2 = 7$	305,9,1,25,849	$a_{n+2} = 34a_{n+1} - a_n$
12	$5x^2 - y^2 = 4$	89,5,1,13,233 34,2,2,34,610	$a_{n+2} = 18a_{n+1} - a_n$
13	$11x^2 - 2y^2 = 9$	44521,113,1,281,110713 3537,9,9,3537	$a_{n+2} = 394a_{n+1} - a_n$
14	$6x^2 - y^2 = 5$	29,3,1,7,69	$a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$
15	$13x^2 - 2y^2 = 11$	3161,31,1,71,7241	$a_{n+2} = 102a_{n+1} - a_n$
16	$7x^2 - y^2 = 6$	79,5,1,11,175	$a_{n+2} = 16a_{n+1} - a_n$
17	$15x^2 - 2y^2 = 13$	153,7,1,15,329	$a_{n+2} = 22a_{n+1} - a_n$

18	$8x^2 - y^2 = 7$	64,11,2,1,4,23,134	$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$
19	$17x^2 - 2y^2 =$	1609,23,1,47,3289	$a_{n+2} = 70a_{n+1} - a_n$
20	$9x^2 - y^2 = 8$	1	
21	$19x^2 - 2y^2 = 17$	1849,25,1,49,3625	$a_{n+2} = 74a_{n+1} - a_n$
22	$10x^2 - y^2 = 9$	18721,493,13,1,25,949,36037 4215,111,3,3,111,4215	$a_{n+2} = 38a_{n+1} - a_n$
23	$21x^2 - 2y^2 = 19$	6049,233,9,1,17,441,11449	$a_{n+2} = 26a_{n+1} - a_n$
24	$11x^2 - y^2 = 10$	2773,139,7.1,13,259,5167	$a_{n+2} = 20a_{n+1} - a_n$
25	$23x^2 - 2y^2 = 21$	17159,1,31511 271,41,1995199	$a_{n+2} = 48670a_{n+1} - a_n$
26	$12x^2 - y^2 = 11$	961,69,5,1,9,125,1741	$a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n$
27	$25x^2 - 2y^2 = 23$	14057,71,1,127,25145	$a_{n+2} = 198a_{n+1} - a_n$
28	$13x^2 - y^2 = 12$	608761,469,1,829 98644,76,4,5116 55807,43,7,9043	$a_{n+2} = 1298a_{n+1} - a_n$
29	$27x^2 - 2y^2 = 25$	342409,353,1,617 14535,15,15,14535	$a_{n+2} = 970a_{n+1} - a_n$
30	$14x^2 - y^2 = 13$	9859,329,11,1,19,569,17051	$a_{n+2} = 30a_{n+1} - a_n$
31	$29x^2 - 2y^2 = 27$	14455,1,24751 609,15,587481	$a_{n+2} = 39206a_{n+1} - a_n$
32	$15x^2 - y^2 = 14$	1425,181,23,3,1,5,39,307,2417	$a_{n+2} = 8a_{n+1} - a_n$
33	$31x^2 - 2y^2 = 29$	745999,5921,47,1,79,9953,125 3999	$a_{n+2} = 126a_{n+1} - a_n$
34	$16x^2 - y^2 = 15$	1,2	
35	$33x^2 - 2y^2 = 31$	827961,6369,49,1,81,10529,13 68689	$a_{n+2} = 130a_{n+1} - a_n$
36	$17x^2 - y^2 = 16$	108809,1649,25,1,41,2705,178 489 17156,260,4,4,260,17156	$a_{n+2} = 66a_{n+1} - a_n$
37	$35x^2 - 2y^2 = 33$	95881,191,1,311,156121 8527,17,7,3497,1755487	$a_{n+2} = 502a_{n+1} - a_n$
38	$18x^2 - y^2 = 17$	14981,441,13,1,21,713,24221	$a_{n+2} = 34a_{n+1} - a_n$
39	$37x^2 - 2y^2 = 35$	21002921,2839,1,4559 761977,103,17,125663	$a_{n+2} = 7398a_{n+1} - a_n$
40	$19x^2 - y^2 = 18$	44539,1,71059 3051,9,1037331 209,131,15143129	$a_{n+2} = 115598a_{n+1} - a$
41	$39x^2 - 2y^2 = 37$	460529,4345,41,1,65,6889,730 169	$a_{n+2} = 106a_{n+1} - a_n$

42	$20x^2-y^2=19$	40249,2243,125,7,1,11,197,35 35,63433	$a_{n+2}=18a_{n+1}-a_n$
43	$41x^2-2y^2=39$	41401,127,1,199,64873	$a_{n+2}=326a_{n+1}-a_n$
44	$21x^2-y^2=20$	4729,43,1, 67,7369 1538,14,2,206,22658 987,9,3,321,35307	$a_{n+2}=110a_{n+1}-a_n$
45	$43x^2-2y^2=41$	8161,1,12649	$a_{n+2}=20810a_{n+1}-a_n$
46	$22x^2-y^2=21$	61069,155,1,239,94165 7481,19,5,1951	$a_{n+2}=394a_{n+1}-a_n$
47	$45x^2-2y^2=43$	820497,21607,569,15,1,23,873 ,33151	$a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$
48	$23x^2-y^2=22$	43709,911,19,1,29,1391,66739	$a_{n+2}=48a_{n+1}-a_n$
49	$47x^2-2y^2=45$	1701167,1,2585423 26313,39,167150697 2521,407,1744639609	$a_{n+2}=4286590a_{n+1}-$
50	$24x^2-y^2=23$	3821,386,39,4,1,6,59,584,5781	$a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$

表 5

備註:【表 5】中之x、y分別表a、$\frac{t}{a}$。

當$p=12,28,44$時，可以將多條遞迴式合併成一條新的遞迴式。

三、數據的歸納與整理，發現漏解問題

以 7 邊形數為例：由矩陣計算可求出a值 1 的下一項為 31，繼續推得下一項為 1177。但是無意間將 1、31 分別代回遞迴式$a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$的a_1、a_2，卻求得$a_0=7$，依照此方法，將 7、1 分別反代回遞迴式$a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$的a_0、a_1，求得$a_{-1}=265$，如此一來會產生新數列，顯示先前所疏漏的解。

我們發現a值數列有五個類型：

1. 僅有**有限個數解**，(如**【表 5】**淡紫色部分)，$p=10,20,34,52)$，這是由於方程式$x^2-(\frac{p-2}{2})y^2=1$的y^2係數$\frac{p-2}{2}$為平方數，沒有實數解，因此a_n就無法寫成遞迴形式。

2. 逆推的數列呈會**絕對值相等但為負號的數**(如【表 5】淺綠色部分)；

3. 逆推的數列呈會**等值的數**(如【表 5】淺黃色部分)；

4. 逆推的數列呈會**出現異於前述數列的值(如**【表 5】淺藍色部分)；

5. **利用窮舉與手算，發現有遺漏的解**，(如【表 5】部分，p=12,13)。

說明如下：

如$p=3$時的，a值 1 由矩陣計算可以求出下一項是 7，1、7 分別反代入由矩陣所推得的遞迴式$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$的a_1、a_2，可求得$a_0=-1$，卻和$a_1=1$差一個負號；繼續推出$a_{-1}=7$卻和a_2差一個負號，這一部分以綠色的底色表示。

有些數列反代後會呈現等值的數列，如 6 邊形數a值 1 由矩陣計算可以求出下一項是 5，由 1、5 分別反代回遞迴式$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$的a_1、a_2，可求得$a_0=1$，$a_{-1}=5$恰與a_1、a_2，這一部分以黃色的底色表示。

除此之外，有一部分反代回遞迴關係式，會得到新的數列，如前述的 7 邊形數，反代後所呈現的新數列(以前兩項為例)：$a_0=7$、$a_{-1}=265$並未出現在原來的數列中，代回原方程式檢查，發現這些新數列亦為方程式的解，這表示「反代」的方式產生新的解，這顯示「反代」是有意義的，值得我們後續探討；這一部分以淺藍色底色表示。

我們依照矩陣的公式去討論 13 邊形數的情形時，發現其(x_0,y_0)遠大於其他邊形數的(x_0,y_0)，13 邊形數的$(x_0,y_0)=(197,42)$，代入矩陣計算可推得其遞迴式$a_{n+2}=394a_{n+1}-a_n$，由於a_{n+1}的係數異常的大，好奇心的驅使我去驗證此遞迴式是否涵蓋了所有的解。由矩陣計算可得到$(x_1,y_1)=(1,1)$，$(x_2,y_2)=(281,659)$，於是從 1 窮舉，尋找有沒有遺漏掉的解，神奇的是發現了$(x_2',y_2')=(9,21)$，然後將(x_2',y_2')代入矩陣計算得到

$(x_3', y_3') = (3537,8295)$，因此我們可以將 13 邊形數的情形視為**有 2 組初始解** $(1,1)$、$(9,21)$，一遞迴式$a_{n+2} = 394a_{n+1} - a_n$，造出兩條數列，這一部分稱為第五類型。

(一)遞迴式係數的推導

我們試著歸納p邊形數a_n的一般式，所以需要先求初始解(x_0, y_0)。以下為p邊形數(x_0, y_0)及遞迴式的簡表【表 6】，強調(x_0, y_0)與遞迴式係數的關係:

邊形數	x_0	y_0	遞迴式
3	3	2	$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$
4	1	1	$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$
5	5	2	$a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$
6	3	2	$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$
7	19	6	$a_{n+2} = 38a_{n+1} - a_n$
8	2	1	$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$
9	15	4	$a_{n+2} = 30a_{n+1} - a_n$
10	1	1	
11	17	4	$a_{n+2} = 34a_{n+1} - a_n$
12	9	4	$a_{n+2} = 18a_{n+1} - a_n$
13	197	42	$a_{n+2} = 394a_{n+1} - a_n$
14	5	2	$a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$
15	51	10	$a_{n+2} = 102a_{n+1} - a_n$
16	8	3	$a_{n+2} = 16a_{n+1} - a_n$
17	11	2	$a_{n+2} = 22a_{n+1} - a_n$
18	3	1	$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$
19	35	6	$a_{n+2} = 70a_{n+1} - a_n$
20	1	1	

【表 6】

由【表 6】可觀察到，若將遞迴式$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} - a_n$的形式，則可以發現$\alpha = 2x_0$，將遞迴式簡化為$x_{n+2} = \alpha x_{n+1} - x_n (a = x)$。

定理 1：主方程式：$px^2 - qy^2 = r$，其初始解(x_1, y_1)，附帶方程式：$x^2 - pqy^2 = 1$的初始解(x_0, y_0)。則主方程式的遞迴式為

$x_{n+2} = \alpha x_{n+1} - x_n (a = x)$，其中$\alpha = 2x_0$。

[證明]

令$A = \begin{bmatrix} x_0 & qy_0 \\ py_0 & x_0 \end{bmatrix}$，

現在求$\begin{vmatrix} x_0 - x & qy_0 \\ py_0 & x_0 - x \end{vmatrix} = 0$之$x$解。(使$det(A - Ix) = 0$)，也就是特徵方程式的解。

即求$(x - x_0)^2 - py_0 qy_0 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x_0 x + x_0^2 - pqy_0^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x_0 x + 1 = 0$($\because$由公式定義)

得$x = \frac{2x_0 \pm \sqrt{4x_0^2 - 4}}{2} = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 1}$

取$B = \begin{bmatrix} x_0 - \sqrt{x_0^2 - 1} & 0 \\ 0 & x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1} \end{bmatrix}$

令可逆矩陣$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$使$AP = PB$，即

$$\begin{bmatrix} x_0 & qy_0 \\ py_0 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 - \sqrt{x_0^2 - 1} & 0 \\ 0 & x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1} \end{bmatrix}$$

所以$\begin{cases} x_0 a + qy_0 c = ax_0 - a\sqrt{x_0^2 - 1} \\ x_0 b + qy_0 d = bx_0 + b\sqrt{x_0^2 - 1} \\ x_0 c + py_0 a = cx_0 - c\sqrt{x_0^2 - 1} \\ x_0 d + py_0 b = dx_0 + d\sqrt{x_0^2 - 1} \end{cases}$，則$\begin{cases} a = \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} c \\ b = \frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} d \\ c = \frac{-py_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} a \\ d = \frac{py_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} b \end{cases}$

令$c = d = 1$，則$P = \begin{bmatrix} \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} & \frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

可得$P^{-1} = \frac{1}{\frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} - \frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}}}\begin{bmatrix} 1 & \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \\ -1 & \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{-2qy_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}}}\begin{bmatrix} 1 & \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \\ -1 & \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \end{bmatrix}$

故$A = APP^{-1} = (AP)P^{-1} = PBP^{-1}$

$A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}} & \frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n & 0 \\ 0 & (x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{-2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\frac{2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n & \frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n \\ (x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n & (x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{-2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\frac{2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n & \frac{1}{2}\frac{-qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n+\frac{1}{2}\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}} \\ \frac{1}{\frac{-2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n+\frac{1}{\frac{2qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n & \frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n+\frac{1}{2}(x_0+ \end{matrix}\right.$$

又$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$，且$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

故$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}})$

$$2x_0x_{n+1} = 2x_0\left[\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^n\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^n(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}})\right]$$

$$-x_n = -\left[\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}})\right]$$

$2x_0x_{n+1}-x_n$

$$=\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)[2x_0(x_0-\sqrt{x_0^2-1})-1]+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}})[2x_0(x_0+\sqrt{x_0^2-1})-1]$$

$$=\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)\left(2x_0^2-2x_0\sqrt{x_0^2-1}-1\right)+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)\left(2x_0^2+2x_0\sqrt{x_0^2-1}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^2+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^{n-1}\left(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^2$$

$$=\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{x_0^2-1})^{n+1}\left(1-\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)+\frac{1}{2}(x_0+\sqrt{x_0^2-1})^{n+1}\left(1+\frac{qy_0}{\sqrt{x_0^2-1}}\right)$$

$= x_{n+2}$

也就是$x_{n+2} = 2x_0x_{n+1} - x_n$，可得$\alpha = 2x_0$。

四、漏解問題的探討

(一)遞迴式的合併

我們發現在以下情況下，可以將多條遞迴式合併成另一條遞迴式。

合併前：

p	主方程式	a值	遞迴式
12	$5x^2-y^2=4$	89,5,1,13,233 34,2,2,34,610,10946	$a_{n+2}=18a_{n+1}-a_n$
28	$13x^2-y^2=12$	469,1,829 98644,76,4,5116 55807,43,7,9043	$a_{n+2}=1298a_{n+1}-a_n$
44	$21x^2-y^2=20$	4729,43,1, 67,7369 1538,14,2,206,22658 987,9,3,321,35307	$a_{n+2}=110a_{n+1}-a_n$

表 7

合併後：

p	主方程式	a值	遞迴式
12	$5x^2-y^2=4$	13,5,2,1,1,2,5,13,34,89,233,610	$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$
28	$13x^2-y^2=12$	5116,469,43,4,1,7,76,829,9043	$a_{n+2}=11a_{n+1}-a_n$
44	$21x^2-y^2=20$	206,43,9,2,1,3,14,67,321,1538	$a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n$

表 8

我們試著去觀察係數$2x'$與係數$2x_0$的關係，列之如【表 9】：

p	係數$2x_0$	係數$2x'$	$\frac{2x_0}{2x'}$	關係
12	18	3	6	$18=3^3-3(3)$
28	1298	11	118	$1298=11^3-3(11)$
44	110	5	22	$110=5^3-3(5)$

表 9

由上表可以看出當遞迴式可以合併時，則係數$2x'$必為係數$2x_0$的倍數，

且此倍數恰為係數$2x'$的平方減 3，也就是$\frac{2x_0}{2x'}=(2x')^2-3$，同乘$2x'$得

$(2x')^3-3(2x')=2x_0$

移項可得：

$(2x')^3-3(2x')-2x_0=0$

另外，根據我們先前所推得理論，遞迴式的係數α恰為附帶方程式的初始解x_0的兩倍，亦即$\alpha=2x_0$。於是我們想試著將x'代入附帶方程式，解得y'，發現x'、y'的小數部分皆為 0.5，例如當$p=12$時，主方程式$5x^2-y^2=4$，$x'=1.5$，將x'代入附帶方程式$x^2-5y^2=1$解得$y'=0.5$，此時我們使用矩陣計算$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0 & qy_0\\py_0 & x_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5 & 0.5\\2.5 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$，
$\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0 & qy_0\\py_0 & x_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5 & 0.5\\2.5 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\11\end{bmatrix}$，我們成功的將第二列的解與第一列合併了，而且新的遞迴式$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$之a_{n+1}的係數與附帶方程式的初始解依然符合$\alpha=2x_0$的關係。我們的這種作法其實就是想取一個比x_0更理想的初始解x'，條件從x_0為整數，放寬至只要$2x'$為整數即可，使得遞迴式的係數變小，來合併遞迴式。至於$(2x')^3-3(2x')-2x_0=0$為什麼成立我們仍在努力驗證中。

(二)伸縮雙曲線求出矩陣計算會漏的解

定理 2：p為偶數的主方程式為$\frac{(p-2)}{2}x^2-y^2=\frac{p-4}{2}$，當$\frac{p-4}{2}$為完全平方數時，經過矩陣計算會漏解。

證明：

令$\frac{p-4}{2}$為完全平方數j^2

若方程式有解$(x,y)=j$，可設$x=jx'$，$y=jy'$，則主方程式：

$(j^2+1)x^2-y^2=j^2$

$\Rightarrow (j^2+1)(jx')^2-(jy')^2=j^2$

$\Longrightarrow (j^2+1)(x')^2-(y')^2=1$，利用文獻[1]可得主方程式的所有正整數解 (x',y')。因此原主方程式：$(j^2+1)x^2-y^2=j^2$，所遺漏的正整數解(x,y)，即是(jx',jy')。因為文獻[1]的矩陣計算只能求得(x,y)=1 的正整數解，因此若有解$(x,y)=j$，則無法由矩陣計算求得。

此方法可利用伸縮雙曲線的想法來解釋主方程式的常數項為完全平方數會漏解的情形。

以$p=22$為例：

p	主方程式	a值	遞迴式
22	$10x^2-y^2=9$	18721,493,13,1,25,949,36037 111,3,3,111,4215,160059	$a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$

表 10

由$(x_1,y_1)=(1,1)$代入矩陣計算可求得上排藍色的解。將主方程式伸縮：$10(x')^2-(y')^2=1$，其中$x=3x'$，$y=3y'$，在以矩陣計算解得此伸縮後的方程式之x'依序為1、37、$1405\ldots$，所求之$x=3x'$則依序為3、111、$4215\ldots$，即為下排黃色部分的解。

(三)有限範圍的窮舉可求出所有的解

定理 3：假設有一組解(x_n',y_n')是主方程式的解，但並不屬於由$(x_1,y_1)=(1,1)$經由矩陣計算所推得的解(x_m,y_m)中，則必可經過有限次數的矩陣計算使其分別介於x_1、x_2，y_1、y_2之間。

證明：假設有一組解(x_n',y_n')是主方程式的解，但並不屬於由$(x_1,y_1)=(1,1)$經由矩陣計算所推得的解(x_m,y_m)中，因此假設

$x_k<x_n'<x_{k+1}$，$y_k<y_n'<y_{k+1}$。

計算

$$\begin{bmatrix} x_0 & qy_0 \\ py_0 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0x_k + qy_0y_k \\ py_0y_k + x_0x_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 & qy_0 \\ py_0 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_n \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0x'_n + qy_0y'_n \\ py_0y'_n + x_0x'_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 & qy_0 \\ py_0 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{k+2} \\ y_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0x_{k+1} + qy_0y_{k+1} \\ py_0y_{k+1} + x_0x_{k+1} \end{bmatrix}$$

$\because x_k < x'_n < x_{k+1}$，$y_k < y'_n < y_{k+1}$

$\therefore x_0x_k + qy_0y_k < x_0x'_n + qy_0y'_n < x_0x_{k+1} + qy_0y_{k+1}$

$py_0y_k + x_0x_k < py_0y'_n + x_0x'_n < py_0y_{k+1} + x_0x_{k+1}$

$\Rightarrow x_{k+1} < x'_n < x_{k+2}$，$y_{k+1} < y'_n < y_{k+2}$

同理，$x_{k-1} < x'_{n-1} < x_k$，$y_{k-1} < y'_{n-1} < y_k$

$\Rightarrow x_1 < x'_{n-k+1} < x_2$，$y_1 < y'_{n-k+1} < y_2$

因此，我們只需要檢查x_1、x_2之間是否存在x'_1不屬於數列x_m中。若x'_1不存在，則數列x_m就包含了主方程式的所有解；若x'_1存在，則可將(x'_1,y'_1)是為一組新的初始解，再由(x'_1,y'_1)替換(x_1,y_1)，代入矩陣計算可求得數列(x'_m,y'_m)，若又存在x''_1不包含於數列x_m及x'_m，亦可使用上述方法將(x''_1,y''_1)代入矩陣計算求得數列x''_m，以此方法必可完整求出主方程式的解。

以$p=25$為例，其主方程式的解如下

p	主方程式	a值	遞迴式
25	$23x^2-2y^2=21$	17159,1,31511 13189529,271,41,1995199	$a_{n+2}=48670a_{n+1}-a_n$

表 11

容易得到$(x_1,y_1)=(1,1)$，由此初始解可經由一次矩陣運算得到$x_2=31511$，也可經由一次反矩陣的運算得到x_1之前一項$x_{-1}=17159$。接著再窮舉方程式1到31511之間，可以得到41、271、17159，由於1、17159屬

於同一組解，且41、271又為另一組解，則可利用這兩組，分別利用矩陣計算求得主方程式所有的解。

推廣：可將**定理 3** 之檢查範圍縮小為檢查x_1、x_{-1}之間。(x_1之前一項為$x_{-1} \in N$，y_1之前一項為$y_{-1} \in Z$)

證明：由於$(x_1, y_1) = (1,1)$，則此為數列(x'_m, y'_m)中最小的解，因此將數列$x_m^{(n)}$中最小的解皆定為$x_1^{(n)}$。令x_1之前一項為$x_{-1} \in N$，y_1之前一項為$y_{-1} \in Z$。

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & -qy_0 \\ -py_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 - qy_0 \\ -py_0 + x_0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{-1} = x_0 - qy_0 < x_0 + qy_0 = x_2$$

由此可看出當足碼$k < 1$，則$x_k > x_{k+1}$(且$x_{-1} > x_1$)，又根據定理，可知若存在x'_n亦為主方程式的解，且$x_k > x'_n > x_{k+1}$，則$x_{-2} > x'_{n-k-2} > x_{-1}$，$x_{-1} > x'_{n-k-1} > x_1$($\because x_{-1}$之下一項為$x_1$)。令$x'_1$為$x_1$、$x_2$之間最小的解且$\notin$數列$x_m$已知$x'_1 \neq x_{-1}$，若$x_{-1} < x'_1 < x_{-2}$，則$x_1 < x'_2 < x_{-1}$

$\because x_{-1} > x_1$

$\therefore x'_1 > x'_2 (\rightarrow\leftarrow)$

同理，若$x_{-2} < x'_1 < x_{-3}$，則存在$x'_3 < x'_1 (\rightarrow\leftarrow)$

因此，x'_1必小於x_{-1}，也就是說$x_1 < x'_1 < x_{-1}$

由此可知，只需檢查x_1、x_{-1}之間是否存在x'_1，如同**定理 3** 的解法即可完整求出主方程式的解。

再以$p = 25$為例，其主方程式的解如下

p	主方程式	a值	遞迴式
25	$23x^2 - 2y^2 = 21$	17159,1,31511 13189529,271,41,1995199	$a_{n+2} = 48670a_{n+1} - a_n$

表 12

$(x_1, y_1) = (1,1)$，由此初始解可經由一次矩陣運算得到$x_2 = 31511$，也可經由一次

反矩陣的運算得到x_1之前一項$x_{-1}=17159$。接著再窮舉方程式1到17159之間，可以得到41、271，由於1、17159屬於同一組解，且41、271又為另一組解，則可利用這兩組組，分別利用矩陣計算求得主方程式所有的解。

參、研究結果

一、p邊形數亦為四邊形數的研究結果

利用 Pell 方程式與矩陣計算試著找出p邊形數和四邊形數之間的關係，發現：$p=10,20,34\ldots 2n^2+2\ldots$是無解的，其他的$p$邊形數都可以同時為四邊形數。下表是$p\le 50$的情況下，$p$邊形數的邊長${a_n}^2$的遞迴式、前幾項以及轉換後的 Pell 方程式列之如【表 13】：

p	主方程式	a值	遞迴式
3	$x^2-2y^2=-1$	-7,-1,1,7,41,239	$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$
4	$x^2-y^2=0$	-2,-1,0,1,2,3,4,5	$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$
5	$3x^2-2y^2=1$	89,9,1,1,9,89,881	$a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$
6	$2x^2-y^2=1$	5,1,1,5,29,169	$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$
7	$5x^2-2y^2=3$	265,7,1,31,1177	$a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$
8	$3x^2-y^2=2$	3,1,1,3,11,41	$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$
9	$7x^2-2y^2=5$	209,7,1,23,689	$a_{n+2}=30a_{n+1}-a_n$
10	$4x^2-y^2=3$	1	
11	$9x^2-2y^2=7$	305,9,1,25,849	$a_{n+2}=34a_{n+1}-a_n$
12	$5x^2-y^2=4$	89,5,1,13,233 34,2,2,34,610,10946	$a_{n+2}=18a_{n+1}-a_n$
13	$11x^2-2y^2=9$	44521,113,1,281,110713 3537,9,9,3537	$a_{n+2}=394a_{n+1}-a_n$
14	$6x^2-y^2=5$	29,3,1,7,69	$a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$
15	$13x^2-2y^2=11$	3161,31,1,71,7241	$a_{n+2}=102a_{n+1}-a_n$
16	$7x^2-y^2=6$	79,5,1,11,175	$a_{n+2}=16a_{n+1}-a_n$

17	$15x^2 - 2y^2 = 13$	153,7,1,15,329	$a_{n+2} = 22a_{n+1} - a_n$
18	$8x^2 - y^2 = 7$	64,11,2,1,4,23,134	$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$
19	$17x^2 - 2y^2 =$	1609,23,1,47,3289	$a_{n+2} = 70a_{n+1} - a_n$
20	$9x^2 - y^2 = 8$	1	
21	$19x^2 - 2y^2 = 17$	1849,25,1,49,3625	$a_{n+2} = 74a_{n+1} - a_n$
22	$10x^2 - y^2 = 9$	18721,493,13,1,25,949,36037 3,111,4215,160059	$a_{n+2} = 38a_{n+1} - a_n$
23	$21x^2 - 2y^2 = 19$	6049,233,9,1,17,441,11449	$a_{n+2} = 26a_{n+1} - a_n$
24	$11x^2 - y^2 = 10$	2773,139,7.1,13,259,5167	$a_{n+2} = 20a_{n+1} - a_n$
25	$23x^2 - 2y^2 = 21$	17159,1,31511 13189529,271,41,1995199	$a_{n+2} = 48670a_{n+1} - a_n$
26	$12x^2 - y^2 = 11$	961,69,5,1,9,125,1741	$a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n$
27	$25x^2 - 2y^2 = 23$	14057,71,1,127,25145	$a_{n+2} = 198a_{n+1} - a_n$
28	$13x^2 - y^2 = 12$	469,1,829 98644,76,4,5116 55807,43,7,9043	$a_{n+2} = 1298a_{n+1} - a_n$
29	$27x^2 - 2y^2 = 25$	342409,353,1,617 14535,15,15,14535	$a_{n+2} = 970a_{n+1} - a_n$
30	$14x^2 - y^2 = 13$	9859,329,11,1,19,569,17051	$a_{n+2} = 30a_{n+1} - a_n$
31	$29x^2 - 2y^2 = 27$	14455,1,24751 609,15,587481	$a_{n+2} = 39206a_{n+1} - a_n$
32	$15x^2 - y^2 = 14$	1425,181,23,3,1,5,39,307,2417	$a_{n+2} = 8a_{n+1} - a_n$
33	$31x^2 - 2y^2 = 29$	745999,5921,47,1,79,9953,125 3999	$a_{n+2} = 126a_{n+1} - a_n$
34	$16x^2 - y^2 = 15$	1,2	
35	$33x^2 - 2y^2 = 31$	827961,6369,49,1,81,10529,13 68689	$a_{n+2} = 130a_{n+1} - a_n$
36	$17x^2 - y^2 = 16$	108809,1649,25,1,41,2705,178 489 4,260,17156	$a_{n+2} = 66a_{n+1} - a_n$
37	$35x^2 - 2y^2 = 33$	95881,191,1,311,156121 8527,17,7,3497,1755487	$a_{n+2} = 502a_{n+1} - a_n$
38	$18x^2 - y^2 = 17$	14981,441,13,1,21,713,24221	$a_{n+2} = 34a_{n+1} - a_n$
39	$37x^2 - 2y^2 = 35$	2839,1,4559 761977,103,17,125663	$a_{n+2} = 7398a_{n+1} - a_n$
40	$19x^2 - y^2 = 18$	44539,1,71059 3051,9,1037331 209,131,15143129	$a_{n+2} = 115598a_{n+1} - a_n$

41	$39x^2-2y^2=37$	460529,4345,41,1,65,6889,730169	$a_{n+2}=106a_{n+1}-a_n$
42	$20x^2-y^2=19$	40249,2243,125,7,1,11,197,3535,63433	$a_{n+2}=18a_{n+1}-a_n$
43	$41x^2-2y^2=39$	41401,127,1,199,64873	$a_{n+2}=326a_{n+1}-a_n$
44	$21x^2-y^2=20$	4729,43,1, 67,7369 1538,14,2,206,22658 987,9,3,321,35307	$a_{n+2}=110a_{n+1}-a_n$
45	$43x^2-2y^2=41$	8161,1,12649	$a_{n+2}=20810a_{n+1}-a_n$
46	$22x^2-y^2=21$	61069,155,1,239,94165 7481,19,5,1951	$a_{n+2}=394a_{n+1}-a_n$
47	$45x^2-2y^2=43$	820497,21607,569,15,1,23,873,33151	$a_{n+2}=38a_{n+1}-a_n$
48	$23x^2-y^2=22$	43709,911,19,1,29,1391,66739	$a_{n+2}=48a_{n+1}-a_n$
49	$47x^2-2y^2=45$	1701167,1,2585423 26313,39,167150697 2521,407,1744639609	$a_{n+2}=4286590a_{n+1}-a_n$
50	$24x^2-y^2=23$	37824,3821,386,39,4,1,6,59,584,5781	$a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$

表 13

當$p=12,28,44$時，可以將多條遞迴式合併成一條新的遞迴式。

二、遞迴式$a_{n+2}=\alpha a_{n+1}-a_n$及附帶方程式：$x^2-pqy^2=1$，有$\alpha=2x_0$關係

型如$px^2-qy^2=r$的**主方程式**，欲求出其初始解(x_1,y_1)，先求出**附帶方程式**：$x^2-pqy^2=1$的初始解(x_0,y_0)。當pq不是平方數時，把$x^2-pqy^2=1$的x解寫成遞迴式：$a_{n+2}=\alpha a_{n+1}-a_n$，可得證$\alpha=2x_0$。

三、無法使用矩陣計算，方程式$k^2x^2-y^2=k^2-1$，探討k、x、y之間的關係

	k	(x,y)
第一鏈	x	$(1,1)$
第二鏈	$2x$	$(x,2x^2-1)$

第三鏈	$4x^2-1$	$(x, 4x^3-3x)$
第四鏈	$8x^3-4x$	$(x, 8x^4-8x^2+1)$
第五鏈	$16x^4-12x^2+1$	$(x, 16x^5-20x^3+5x)$
第六鏈	$32x^5-32x^3+6x$	$(x, 32x^6-48x^4-18x^2-1)$
第七鏈	$64x^6-80x^4+24x^2-1$	$(x, 64x^7-112x^5+56x^3-7x)$
第八鏈	$128x^7-192x^5+80x^3-8$	$(x, 128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1$
． ． ．	． ． ．	． ． ．
第 n 鏈	$\boldsymbol{U_{n-1}(x)}$	$(x, \boldsymbol{T_n}(x))$

表 14

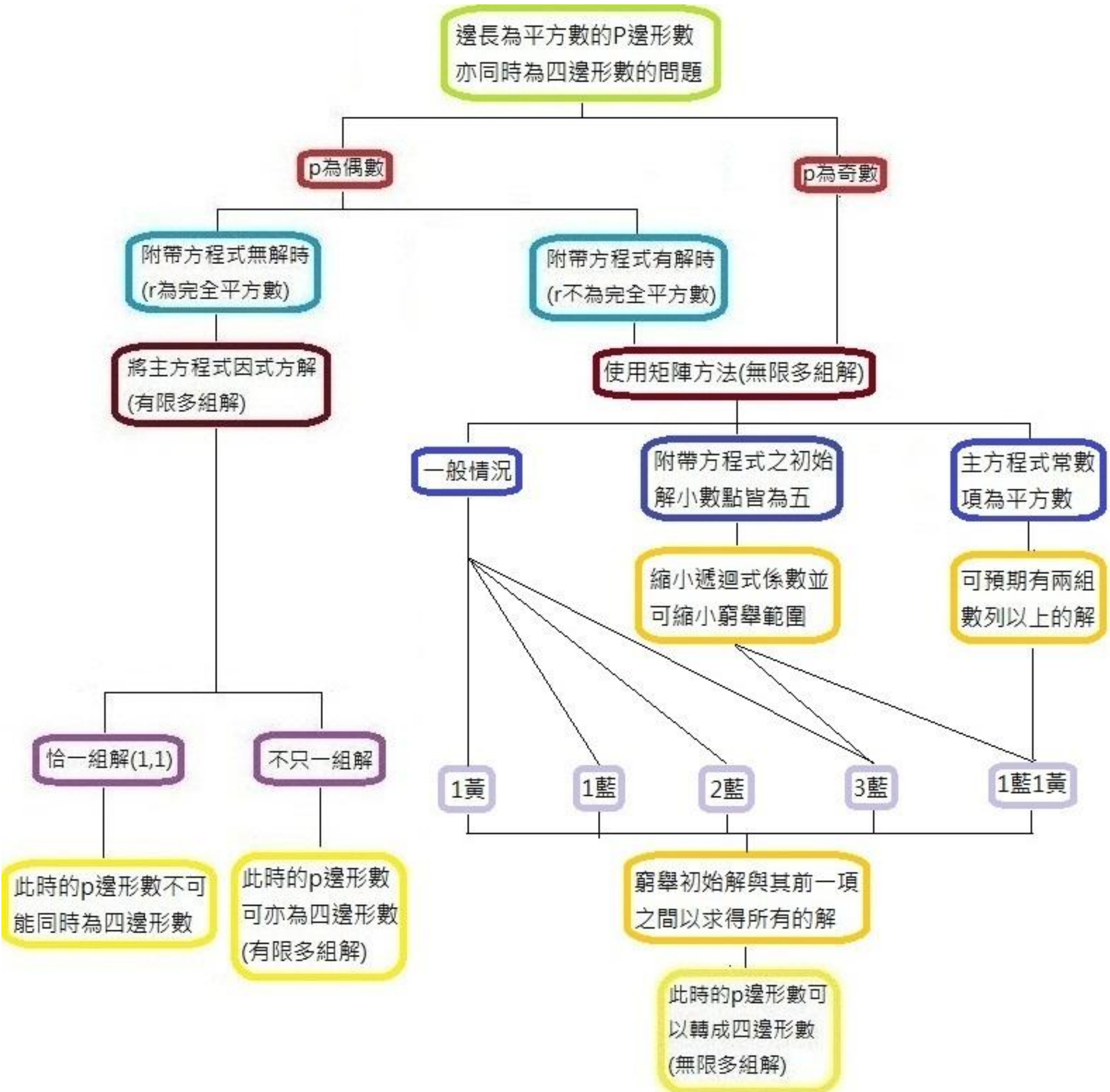
由文獻[6][7]可知：方程式$k^2x^2-y^2=k^2-1$的解y與k分別為第一類$\boldsymbol{T_n}(x)$及第二類$\boldsymbol{U_{n-1}(x)}$切比雪夫多項式。

肆、結論與展望

去年以窮舉的方式蒐集數據，設法將問題轉換成直角三角形連續股問題，但這些方式不能處理一般性的問題。在研究過程中，找到高雄中學李老師的《論 Pell 方程式及其推廣》一文，文中說明了一種簡潔的表達方法——矩陣，可用來描述$px^2-qy^2=r$方程的通解，使得方程式的解呈現出一種簡潔而有系統的美。這篇文章幫助我們更全面處理p邊形數亦為四邊形數的問題，但是發現在一些特定的情況下，此矩陣計算會漏解；另外找$x^2-ry^2=1$的初始解是有困難的；少數情況下無法以矩陣計算討論，在解$k^2x^2-y^2=k^2-1$時，我們以因式分解討論之，而y與k分別對應第一類$\boldsymbol{T_n}(x)$及第二類$\boldsymbol{U_{n-1}(x)}$切比雪夫多項式。且其解為有限個數，缺點是隨著p的增大，其計算量也更加複雜。

當初使用矩陣計算處裡我們的問題，再發現有漏解的情形後，我們致力於處理漏解的問題。我們最初是放寬附帶方程式(x_0, y_0)的條件，允許其可以有小數點

為五的形式，這樣的作法其實就是等價於放寬遞迴式係數$2x_0$的條件，從原本限制其必為偶數到只要是整數即可。後來又想到伸縮雙曲線的方法，當主方程式型如$(j^2+1)x^2-y^2=j^2$時，則我們可以預期至少會有兩組初始解，求出原本矩陣計算沒有窮舉x_1、x_2之間所遺漏的解。最後我們從決定去看所有矩陣計算所漏掉的解，發現每一組遺漏的解必定皆存在一組解會介於x_1、x_2之間，因此我們以矩陣計算為基礎，再做有限範圍x_1、x_2之間的窮舉，即可求得所有的解，而上述兩個傻法亦可搭配此改進後的矩陣計算，更有效率的解出所有的解。



經過研究，我們要先將問題分為p為偶數或是奇數兩類。由於無法使用矩陣的

情況只會發生在p為偶數時，所以再將p為偶數時的情況再細分成：(1)矩陣可以解的，要找出$x^2-ry^2=1$的初始解，再以矩陣表示$(p-2)x^2-2y^2=p-4$的通解。我們目前已構造出 6 類情形的初始解，尚須多一點時間去整理、涵蓋p為任意數的情況。其中矩陣可以解的可細分成：①附帶方程式之初始解(x_0,y_0)如果小數點為五，此時多條遞迴式的解，可以合併成一條新的遞迴式，也就是縮小了遞迴式的係數，同時也縮小了窮舉範圍，適用此方法解出的解通常為 3 藍。②當主方程式的常數項為平方數時，則我們可事先預期會有兩組以上的解，且可藉由伸縮雙曲線的觀點解出黃色型(左右對稱)的解，再次縮小窮舉範圍的上限，因此適用此方法解出的解必為 1 藍 1 黃。③除了以上兩個情況之外的情況，只能使用矩陣計算並窮舉x_1與x_{-1}之間，以求得所有的解。 (2)矩陣不可以解的：要找出$k^2x^2-y^2=k^2-1$的解。在(1)(2)中，求解的意義是代表這些p邊形數恰為四邊形數。我們目前已掌握：p =10, 20, 52, 100, 164, 244, 340, 580, 724, 884, 1060, 1252, 1460, 1684, 1924, 2180, 2740, 3044, 3364, 3700, 4052, 4420, 4804, 5204, 5620, 6052, 6500，**這些p邊形數不可能同時為四邊形數。**

雖然我們已經從研究過程中得到部分的結果，但還有四項要點以及邊長為a^2的p邊形數亦為四邊形數的應用，需要突破、繼續思考。另外在處裡型如$x^2-dy^2=1$形式的 Pell 方程式，這部分在文獻中已經研究完畢了，但型如$px^2-qy^2=r$的 Pell 方程式在我們找到的文獻中並沒有找到一個完整的結論，"Introduction To Number theory"一書有提到$px^2-qxy-ry^2=s$的方程式，雖然有涵蓋我們的研究範圍，但我們尚未看到一個清楚完整的結論。於是我們用一般高中的初等方法—矩陣，來研究型如$px^2-qy^2=r$這類 Pell 方程式，雖然無法完整去說明方程式解的一般情況，但這已經是我們竭盡利用矩陣所得到的結果了。往後，將努力解決邊長為a^2的p邊形數亦同時為邊長為b^2的q邊形數的問題，

期盼我們能有所突破，持續進步。

研究至此，有下列四點需要更進一步突破：

1. 在找尋$x^2-ry^2=1$的初始解時，雖然找出六類的初始解，但尚未對任意的$r\in N$有完整的掌握，至少希望能把足夠大的範圍填滿，需要一些努力及時間，克服這個問題。
2. 方程式 $(j^2+1)x^2-y^2=j^2$，可以藉由伸縮雙曲線的方法，找出x_1、x_{-1}之間會漏的解。但其它情況，我們無法預期x_1、x_{-1}之間是否有遺漏的解。
3. 在某些情況下，我們可以將多條遞迴式合併為一條新的遞迴式。我們試圖改進高雄中學李老師的《論 Pell 方程式及其推廣》的矩陣計算，以減少漏解的情況。原文獻所提供的方法為求出附帶方程式的最小正整數初始解(x_0,y_0)，可推得其遞迴式係數為$2x_0$；我們想試著放寬條件至只要使遞迴式係數為正整數即可，也就是新遞迴式係數$2x'$我們允許x'為小數點為五，且x'亦為附帶方程式的解。這樣的想法其實就是在設法縮小遞迴式係數，以求得更多的解，改進之前矩陣計算的疏漏，但至於嚴謹的證明與$(2x')^3-3(2x')-2x_0=0$為什麼成立？以及理解此演算法的意義是我們的未來的重要目標。
4. **無法以矩陣解時，以因式分解方式**求方程$k^2x^2-y^2=k^2-1$的解時，觀察k與數對(x,y)的規律性，發現：當將y表示成x的函數時，其係數恰好與$cos\ (n\theta)$的係數吻合，除了與切比雪夫多項式的關係，似乎還隱藏著某些未知的連結，找出這些連結的原因，是我們未來努力的方向。

伍、參考文獻

1. 李家奇(民國 94 年 11 月 1 日)《論 pell 方程式及其推廣》雄中學報第八期 p211-p218 http://lib.kshs.kh.edu.tw/lib/journals/journals-94/P211.pdf
2. 許志農算術講義(2004 年 12 月 28 日)《佩爾方程式》 http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/arith37.pdf
3. 許志農算術講義(2004 年 12 月 28 日)《再談佩爾方程式》 http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/arith38.pdf
4. 李政豐、洪有情、陳昭地(2011 年 11 月 28 日)《初探多邊形數》高中數學電子報第 59 期 http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/ePaper/Default.aspx?id=59
5. 李政豐、洪有情、陳昭地(2011 年 12 月 20 日)《續探多邊形數》高中數學電子報第 60 期 http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/eArticleDetail.aspx?id=a7a0ea34-0775-428e-a150-5763640614f8
6. Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A., eds. (1965), "Chapter 22", *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover, pp. 773 http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_773.htm
7. 切比雪夫多項式. (2012, April 13). Retrieved from 維基百科, 自由的百科全書 http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%88%87%E6%AF%94%E9%9B%AA%E5%A4%AB%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F&oldid=20745790

評語

1. 本研究探討 P 邊形數等於 4 邊形數的問題，經過變換成為一個解 Pell 方程式的問題，是一個不錯的方法。
2. 當該 Pell 方程式無法用矩陣方法來求解時，其與 Chebychev 多項式的關係沒有善加利用，應可用來說明其解。
3. 用矩陣求解時發現可能的漏解，已用逆矩陣來縮小尋找漏解的範圍，相當不錯，但應理論證明此方法確實可以縮小範圍。