2013 臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號 **010022**

參展科別 **數學科**

作品名稱 **在地表上畫畫-球面上的尺規作圖**

得獎獎項 **三等獎**

就讀學校　國立嘉義高級中學

指導教師　謝孟恭

作者姓名　羅啟心、羅啟仁

關 鍵 字　尺規作圖、球面三角學、費馬質數

作者簡介

我是羅啟心（左），就讀嘉義高中二年級。興趣是和同學打球和做勞作，最喜歡數學，喜歡想題目，自己想出做法就很快樂，也喜歡欣賞別人的做法。第一次做科展就真的很幸運能夠接觸到這麼好玩的題目，密集做科展的這段時間，其他事都不太想管，只想研究出東西然後把有趣的結果打成報告分享。

我是羅啟仁（右），就讀嘉義高中三年級。數學、物理、化學都很喜歡，尤其科學之母的數學常常帶給我驚嘆！雖然國小到高中已經做了七件科展，但我還是第一次接觸如此深入的題材，學到了不少。就算現在已經高三，仍然懷抱著大夢，想了想，不如就這樣拼了，不要將來才後悔！

摘要

在這分作品中我們在球面上尺規作圖。目的是要完整描述球面上可作的角度。我們從平面尺規作圖的知識出發，卻遇到了困難，像是有很多平面尺規作圖的方式不能被如法炮製地運用到球面上。為了達成目標，我們著手探討在球面上和平面上作圖方式的關係，方法如下：

先定義兩個重要名詞 S ：球面上能作角度（弧長）的集合和 P：平面上能作角度（弧長）的集合。透過向量方程式的證明我們得到$S \subseteq P$。利用我們從球面三角學公式衍生出的作圖方法，並藉由「體」證明出$P \subseteq S$。在$P = S$的基礎上，我們引用伽羅瓦理論的已知結果，終於得到結論，也就是「球面上一個角度可作若且唯若其餘弦值為 1 經過有限次的加減乘除與開平方根運算」。最後我們也給出了球面上正 4 邊形、正 5 邊形和正 17 邊形的作法。

Abstract

In this project we are doing ruler and compass construction on a sphere. Our purpose is to confirm what angles can be done and not done on a sphere. We departed from known knowledge of a plane to draw figures on a sphere, but obstacles emerged, like some methods used on a plane cannot be applied to a sphere. We observed the relationship of the construction methods on a sphere and a plane using the following approaches in order to arrive at our goal：

We defined S and P, which respectively represents the set of the angles that are feasible on a sphere and those on a plane. By using vector algebra we first proved $S \subseteq P$. By expanding two spherical trigonometric theorems and employing the theory of Fields to our project, $P \subseteq S$ was proven. Finally, with $P=S$ and the already known conclusion of Galois Theory we came to our conclusion, to wit ”An angle is constructible on a sphere if and only if the cosine function of its degree can be expressed as 1 with not more than the operations of addition, subtraction, multiplication, division, and square root.” In the last part of the project we also gave the procedures of drawing regular 4-gons, regular 5-gons and regular 17-gons.

壹、 前言

一、 研究動機

當時我們想像拿著尺和圓規在球面上作圖時，感覺和以往平面尺規作圖的經驗有很大的不同，有些東西例如量出一個球的半徑、n 等分一個弧長、畫正方形等。有些真的很不好畫，甚至畫不太出來，而且有些平面上尺規作圖的方法在球面上不能用，球面尺規作圖也有一些平面沒有的作圖方法，於是我們想要知道在兩套不盡相同的作圖方式下，球面尺規作圖究竟可以畫出哪些圖形，有哪些是平面畫不出的，又有哪些是平面可以畫而球面畫不出來的。

二、 目的

我們的研究目的是想要知道球面尺規作圖究竟可以畫出哪些圖形，有哪些是平面畫不出的，又有哪些是平面可以畫而球面畫不出來的。

三、 研究方法

1. 一開始先在網路上搜尋資料，但相關資料寥寥可數，確定這個研究主題是創新的，因此我們先將球面三角學的資料看一看。
2. 起初想破頭卻沒大進展，查詢了關於平面尺規作圖的資料之後，我們想要藉由平面尺規作圖已知的結果來幫助我們描繪出球面尺規作圖能作的圖形。
3. 漸漸確立研究方向，猜測一些東西，並且用向量方程式、我們從球面三角學定理衍生的方法、體和引理來證明。
4. 既然已經證明某些圖形可以作了，就來做看看吧。
5. 作出正 5 邊形和正 17 邊形之後，作品總算有頭有尾。

貳、 研究過程及方法

一、 定義、工具、規則和引理

（一） 基本定義

1. 基本圖形

（1）球面： O 為球心，半徑 r 為正實數，則空間之點集 $\{P|\overline{OP}=r\}$ 稱為球面。不失一般性，以下我們均考慮半徑為 1 的球面。

（2）大圓（直線）： 平面上的直線為連接兩點最短的路徑，而球面上連接兩點最短的路徑即大圓弧，任給相異兩點 A、B 有唯一的直線通過（直線就是大圓，不過為了與平面對照稱之為球面的直線，有時會直接叫直線）。

（3）小圓： 球面與不通過球心的截平面所截之圓稱為小圓。

（4）圓心和圓的半徑： 定義在球面上與圓上各點所連的大圓弧長相等的點為圓心，圓心到圓上任一點的弧長為半徑。這樣定義是為了簡單描述使用圓規的半徑。

（5）正 n 邊形： 有 n 個頂點且 n 個內角皆相等且 n 個邊長皆相等的多邊形。

2. 工具

（1）直尺： 直尺是可以在球面上過任意兩點畫出大圓的工具。

（2）圓規： 和一般圓規相同，可以畫出和球面上某點等距的點集。和一般圓規不同的是，我們當我們說以球面上的點 A 為圓心，ℓ 為半徑畫圓時，代表我們畫的是球面上的一個圓，圓上的任一點與 A 連起來的大圓弧，其弧長為 ℓ。

（二） 作圖規則

在球面上利用沒有刻度的直尺、圓規在球面上作圖，完全不可以透過平面。

（三） 重要引理

我們需要用到下列引理，證明放在附錄（第 49、50 頁）：

【以下均考慮半徑為 1 的球面】

1. 球面餘弦定理：

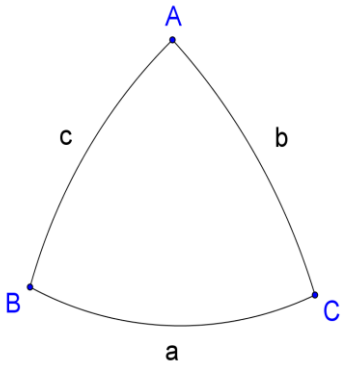


圖 1-1

$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c$

$\sin c \sin a \cos B = \cos b - \cos c \cos a$

$\sin a \sin b \cos C = \cos c - \cos a \cos b$

當$C = \frac{\pi}{2}$時（即 ABC 是球面直角三角形）時，

就有球面畢氏定理：$\cos c = \cos a \cos b$

2. 對偶三角形：

【定義】:

設 A、A' 互為對頂，則和 A、A' 等距的球面上的點集就是和 A、A' 的距離是 $\frac{\pi}{2}$ 的那個大圓，以O_1 記之。設 ΔABC 是一個任給球面三角形，在 $O_2 \cap O_3$、$O_3 \cap O_1$、$O_1 \cap O_2$ 中，分別取其靠 A、B、C 近者，以 A*、B*、C* 記之，則稱ΔABC 與 ΔA*B*C *互為對偶球面三角形。a、b、c 和 a*、b*、c* 分別是 ΔABC 和 ΔA*B*C* 的各角對邊邊長。

球面上，ΔABC 與ΔA*B*C *互為對偶，則有：

$a^* = \pi - A$，$b^* = \pi - B$，$c^* = \pi - C$

$A^* = \pi - a$，$B^* = \pi - b$，$C^* = \pi - c$

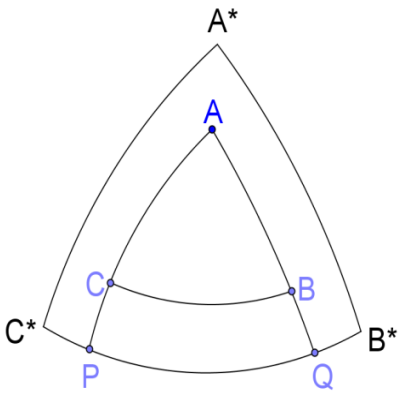


圖 1-2

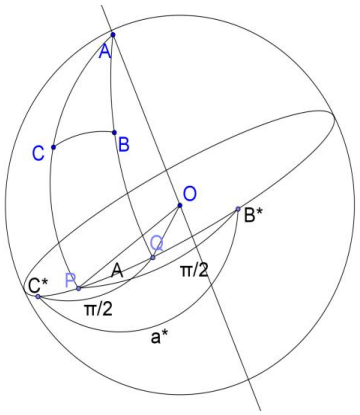


圖 1-3

以上可以看到，選用半徑 1 的單位球好處是：弧長和角度可以透過對偶三角形互換，三角形邊長和內角在球面上可以一視同仁，讓我們方便使用球面餘弦定理。

二、 平面上可作角度和球面上可作角度的關係

為了探討平面尺規作圖與球面尺規作圖的關係，我們定義了 P 與 S：

【定義】:

P：平面尺規作圖可以做的角度的集合

S：球面尺規作圖可以做的弧長的集合

選用 cos 值表示弧長的好處

1. 球面餘弦、球面畢式定理用到的都是 cos 值。

2. 球面上兩點 A、B，球心 O，則 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 恰為 $\cos\angle AOB$ 。

【定義】:

設 $\mathcal{X}$ 是球面尺規作圖上所有可以作角度（弧長）的 cos 值的集合，也就是 $\mathcal{X}=\{\cos\theta\,|\theta\in S\}$。注意 $\mathcal{X}$ 是 $[-1,1]$ 的一個子集合。

注意能作角度值為θ ⇔能作弧長長為θ

如圖，如果能作出$\angle A=\theta$，延長 $\angle A$ 的兩夾邊交於另一點 A’，作 $\overset{\frown}{AA'}$ 的中垂線交兩夾邊或其延長線於 B、C，用尺連接$\overset{\frown}{BC}$，則$\overset{\frown}{BC}=\theta$

反之如果能作出$\overset{\frown}{BC}=\theta$，分別過 B、C 作$\overset{\frown}{BC}$的垂線交於 A，得$\angle BAC=\theta$

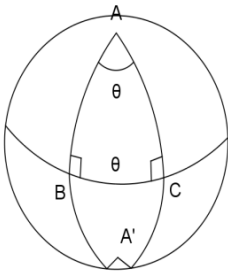


圖 2-1

當 $0 < \theta \leq 2\pi$ 時，$\theta \in S \Leftrightarrow \cos\theta \in X$，而且平面上能作出 $\cos\theta$ 這個長度 $\Leftrightarrow \theta \in P$。因此我們想要知道是否 $P = S$，只要探討是否 $\{\cos\theta \mid \theta \in P\} = \{\cos\theta \mid \theta \in S\}$。對於 P 與 S 的關係，我們分成 $P \supseteq S$ 及 $P \subseteq S$ 兩部分證明，進而得到 $P = S$。

（一） 證明 $P \supseteq S$：也就是球面上能作出的角度，平面上都能作出。

【引理】：

一個作圖是否可以用平面尺規來完成，其充要條件是：作圖過程中所要求出的未知長度值能夠由給定的已知長度值經過有限次的加減乘除與開平方根求出。

也就是 $\{\cos\theta \mid \theta \in P\} = 1$ 經過有限次的加減乘除與開二次方根 $\cap [-1, 1]$。

接著看球面，我們可以知道的是在球面尺規作圖中，所有作圖只有 3 種情況：作兩大圓交點、作兩小圓交點、作大圓與小圓交點。因為直線（大圓）也是一種圓，所以上述三種情況可以簡化為一種------作兩圓：

B 在以 A 為圓心的圓（球面上的圓）上，D 在另一以 C 為圓心的圓（球面上的圓）上，兩圓交點為 X

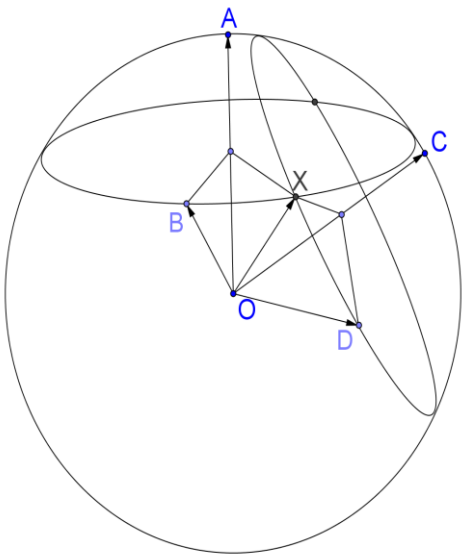


圖 2-2

可以設 $\vec{A}$ 和 $\vec{C}$ 不平行，否則兩圓會重合或沒有交點。

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{X}\cdot\vec{A} = \vec{B}\cdot\vec{A} \\ \vec{X}\cdot\vec{C} = \vec{D}\cdot\vec{C} \end{cases}$$

現在的已知量是球面上已知點 A、B、C、D 其中任兩點連起來的大圓弧的 cos 值，或說是 $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$、$\vec{D}$ 其中任兩者的內積。

設

$$\vec{X} = r\vec{A} + s\vec{C} + t\frac{(\vec{A}\times\vec{C})}{\|\vec{A}\times\vec{C}\|}$$

代入得

$$\begin{cases} \vec{B}\cdot\vec{A} = r + s(\vec{A}\cdot\vec{C}) \\ \vec{D}\cdot\vec{C} = r(\vec{A}\cdot\vec{C}) + s \end{cases}$$

所以

$$r = \frac{\vec{B}\cdot\vec{A} - (\vec{D}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{C})}{1 - (\vec{A}\cdot\vec{C})^2}$$

$$s = \frac{\vec{D}\cdot\vec{C} - (\vec{B}\cdot\vec{A})(\vec{A}\cdot\vec{C})}{1 - (\vec{A}\cdot\vec{C})^2}$$

又

$$1 = \vec{X}\cdot\vec{X} = r^2 + s^2 + t^2 + 2rs(\vec{A}\cdot\vec{C})$$

得

$$t = \pm\sqrt{1 - r^2 - s^2 - 2rs(\vec{A}\cdot\vec{C})}$$

可以看出 r、s、t 都是已知量的加減乘除開根號的結果。因此我們新得到的量是 X 和已知點連起來的大圓弧長的 cos 值，或說是 $\vec{X}$ 和已知向量的內積，也都是已知量加減乘除開根號的結果，例如：

$$\vec{X}\cdot\vec{D} = r(\vec{A}\cdot\vec{D}) + s(\vec{C}\cdot\vec{D}) + t\left(\frac{(\vec{A}\times\vec{C})}{\|\vec{A}\times\vec{C}\|}\cdot\vec{D}\right)$$

小結：

從上面我們知道球面上一段可作弧長（角度）θ（也就是說 $\theta \in S$）

其 cos 值頂多是已知 cos 值的有限次加減乘除開根號能做出來的值與 $[-1,1]$ 的交集。也就是

$\{\cos\theta \mid \theta \in S\} \subseteq$ 已知量經過有限次的加減乘除與開二次方根 $\cap [-1,1]$。

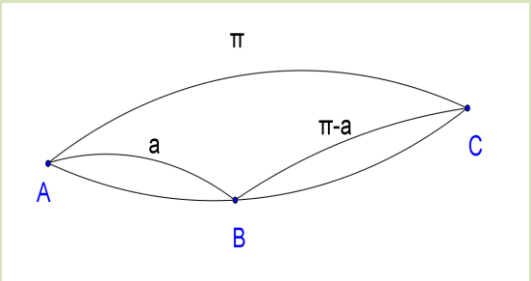
至此，我們有 $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{P}$。

（二） 證明 $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{S}$：也就是平面上能作出的角度，球面上都能作出。

我們已經知道 $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{P}$，這是因為球面上一段可作弧長（角度）$\theta$ 其 cos 值頂多是已知 cos 值的有限次加減乘除開根號能做出來的值與 $[-1,1]$ 的交集。現在我們想要知道的是：是否對於任意一個由已知量經過有限次加減乘除開根號所出現的值，我們在球面上都能作出一個長度其 cos 值等於那個值？如果答案為是，那我們就能得到 $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{S}$。

以下是用 cos 值當作運算媒介後導出幾個性質，幫助我們得到 $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{S}$：

性質 1： $x \in \mathcal{X}$，則 $-x \in \mathcal{X}$

只要在球面上畫一段弧長 $\overset{\frown}{AC} = \pi$，再以 A 為圓心 a（$\cos a = x$，取 $a \in [0,\pi]$ 者）為半徑畫圓交 $\overset{\frown}{AC}$ 於 B，則弧長 $\overset{\frown}{BC} = \pi - a$，其 cos 值為 $-x$	 圖 2-3

因此，只要能作出 cos 值為 x 的弧長，就能作出 cos 值為 $-x$ 的弧長。

性質 2： $x, y \in \mathcal{X}$，則 $xy \in \mathcal{X}$

作兩垂直的大圓 O_1 及 O_2，

一交點為 C，$\angle C = 90°$

在兩大圓上分別取 A 及 B，使

得 $\overset{\frown}{CA} = b$ 及 $\overset{\frown}{CB} = a$

$(\cos a = x,\ \cos b = y,\ a、b \in (0,\pi))$

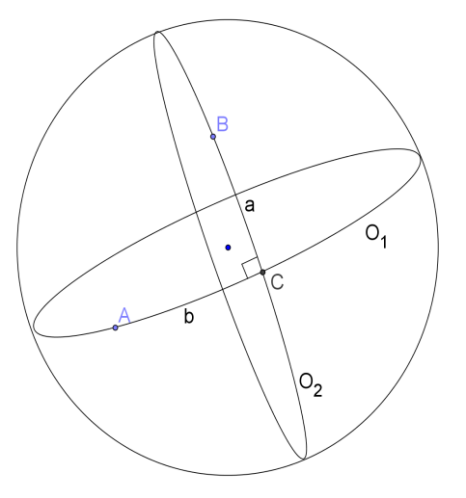


圖 2-4

用大圓連接 A、B，$\overset{\frown}{AB} = c$，

由球面畢氏定理 $\cos c = \cos a \cos b$

有 $\cos c = xy$

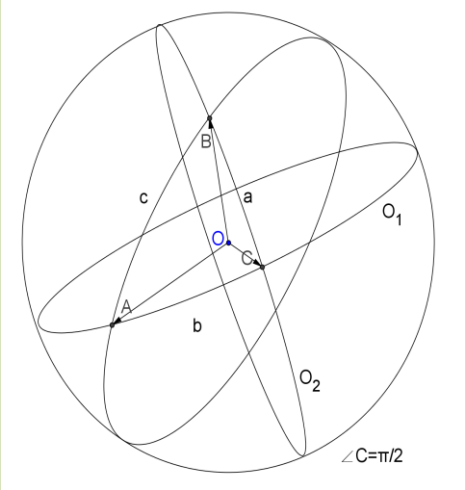


圖 2-5

《例》：要作 $\cos c = \frac{1}{2}$

先作三個互相垂直的大圓，得到一個三邊長皆為 $\frac{\pi}{2}$ 的球面三角，且三內角皆為直角。取其中兩邊分別作中點，再連接起來，得 c。則此時

$\cos c = \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$

註：這個方法可以量出球的半徑

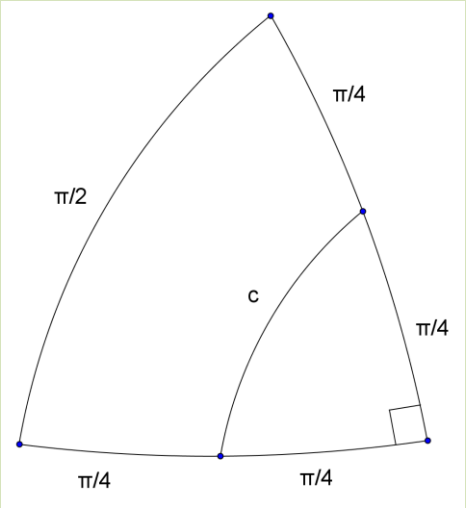
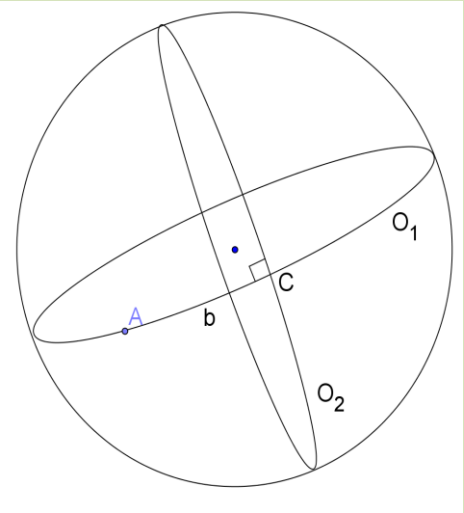
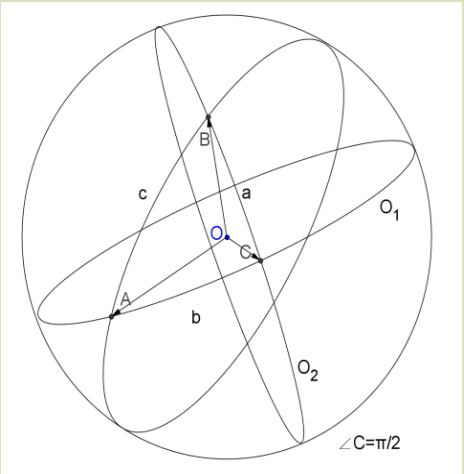


圖 2-6

因此，只要能作出 cos 值為 x 和 cos 值為 y 的弧長，就可以作出 cos 值為 xy 的弧長。

性質 3： $x, y \in \mathcal{X}$，且 $0<x<y$，則 $\frac{x}{y} \in \mathcal{X}$

球面畢氏定理可以用來乘，也可以用來除，乘的時候我們把它看成 $\cos c = \cos a \cos b$；除的時候則把它看成 $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$。

作兩垂直的大圓 O_1、O_2 以 C 為圓心，已知弧長 b 為半徑 $(\cos b = y, b \in (0,\pi))$畫一弧交 O_1 於 A，得$\overset{\frown}{AC} = b$	 圖 2-7
以 A 為圓心，已知弧長 c 為半徑 $(\cos c = x, c \in (0,\pi))$畫另一弧交 O_2 於 B，用大圓連接 B、C 便有 $\cos \overset{\frown}{BC} = \cos a = \frac{\cos c}{\cos b} = \frac{x}{y}$	 圖 2-8

因此，只要能作出 cos 值為 x 和 cos 值為 y 的弧長，且$0<x<y$，就可以作出 cos 值為 $\frac{x}{y}$ 的弧長。

性質 4： $x \in \mathcal{X}$，且 $x>0$，則 $\sqrt{x} \in \mathcal{X}$

球面畢氏定理也可以把 cos 值「開根號」，只要做出一個斜邊為 c 的等腰直角三角形（如果剛開始給的是弧長為$c' \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$，那麼就用長度為$2\pi$的弧減掉$c'$得到弧長為 c，$c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$），$\cos c = x\left(c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$，其直角邊 a = b，而$\cos a = \cos b = y$。那麼，和前面一樣，由球面畢氏定理 $x = \cos c = \cos a \cos b = y^2$，選取使得 $a、b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$就有$y = \sqrt{x} \in \mathcal{X}$

然而，直接作出斜邊為 c 的等腰直角三角形不能直接做出來，一次分割再一次對偶三角形才找到一個我們可以直接作圖的三角形。換句話說，必須先算出轉換後的狀況，再一步一步倒過來做。

以下先說明方法：

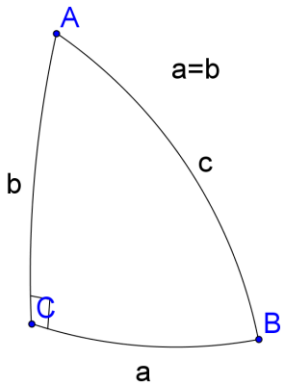


圖 2-9

圖 2-9　我們想要一個斜邊為 c 的等腰直角三角形$(a = b)$。

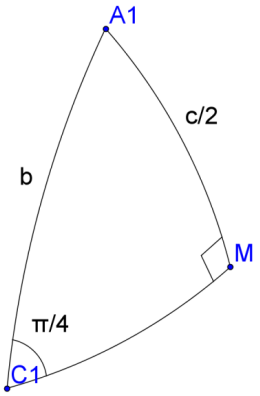


圖 2-10　因為圖 2-9 接作圖做不出來，所以我們先將圖 2-13 對稱切開

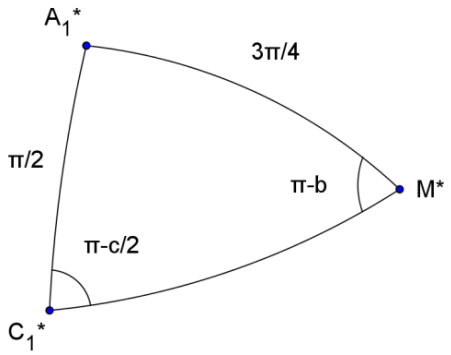
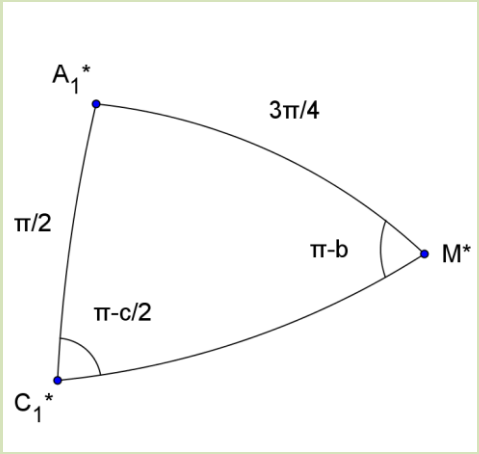
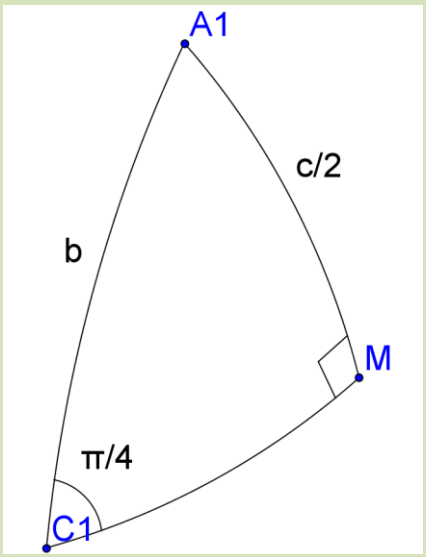


圖 2-11　因為圖 2-10 是不能作，所以把圖 2-14 對偶

我們要利用 SSA 做出這個三角形，但是 SSA 並不是球面三角型的全等條件，所以做出來會有兩個。一個其直角邊為 b，$b < \frac{\pi}{2}$，也就是我們要的$\cos b = \sqrt{x}$，另一種的直角邊為$\pi - b$，$\cos(\pi - b) = -\sqrt{x}$。我們要的是 cos 值為$\sqrt{x}$的 b，而 $b < \pi - b$，因此要選靠近C_1^*的那個交點。

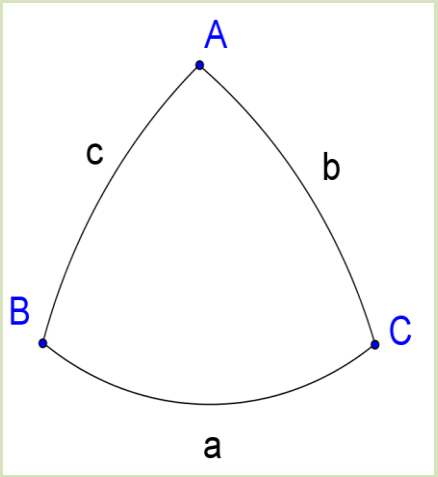
所以只要作出圖 2-11 再倒回來一步一步做回去，就可以作出 b 使得$\cos b = \sqrt{x}$了。

作圖：

作出一個$\angle C_1^* = \pi - \frac{c}{2}$，以$\angle C_1^*$為圓心$\frac{\pi}{2}$為半徑作圓交$\angle C_1^*$的一夾邊於$A_1^*$，再以$A_1^*$為圓心$\frac{3\pi}{4}$為半徑交$\angle C_1^*$的另一夾邊於兩點，取靠近$C_1^*$的那點為$M^*$。	 圖 2-12
把$\triangle A_1^* C_1^* M^*$對偶，得到$\triangle A_1 C_1 M$，其邊長和角度如圖所示。其實不用再繼續作回去了，因為由對偶三角形的邊長、角度關係我們有 $\overline{A_1 C_1} = \pi - \angle M^* = b$。	 圖 2-13

因此，只要能作出 cos 值為$x(x \geq 0)$的弧長，就可以作出 cos 值為$\sqrt{x}$的弧長。

性質 5： $x, y \in \mathcal{X}$，則 $x^2+(1-x^2)y \in \mathcal{X}$

作一角度 A，$\cos A = y$， 作夾 A 的兩邊 b、c， $\cos b = \cos c = x\left(b、c \in (0,\pi)\right)$， C、B 分別是兩邊 b、c 的另一個頂點，用大圓弧連接 C、B，由球面餘弦定理 $\cos a = \cos b \cos c + \sin c \sin b \cos A$ 有 $\cos \overset{\frown}{BC} = \cos a = x^2+(1-x^2)y$	 圖 2-14

因此只要能作出 cos 值為 x 的弧長和 cos 值為 y 的弧長，就可以作出 cos 值為 $x^2+(1-x^2)y$ 的弧長。

有了上述的運算性質後，接下來我們要確切地刻劃出 $\mathcal{X}$ 這個集合所包含的數值有哪些。

性質 6：$\mathcal{Q} \cap [-1,1] \subseteq \mathcal{X}$

（1）若 $x \in \mathcal{X}$，則 $\frac{x}{1+x} \in \mathcal{X}$

在球面上畫一段弧長為 $a\left(a \leq \frac{2\pi}{3}\right)$，$\cos a = x$，兩端點為 B、C。以 B 為圓心，a 為半徑作一圓；同樣以 C 為圓心，a 為半徑作另一圓，兩個圓交於 A 點，得到一個三邊長皆為 a 的三角形。

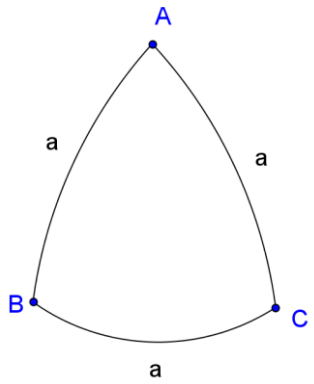


圖 2-15

由球面餘弦定理： $\sin c \sin b \cos A = \cos a - \cos b \cos c$ 得

$\cos B = \cos C = \cos A = \frac{x-x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{x-x^2}{1-x^2} = \frac{x}{1+x}$ 。

（2）$\frac{1}{n} \in \mathcal{X}$，$\forall n \in \mathbb{N}$

由性質 2 的例子我們知道 $\frac{1}{2} \in \mathcal{X}$，若 $\frac{1}{k}(k \in \mathbb{N}) \in \mathcal{X}$，由上述知 $\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} = \frac{1}{k+1} \in \mathcal{X}$，

所以由數學歸納法得知 $\frac{1}{n} \in \mathcal{X}$，$\forall n \in \mathbb{N}$

（3）$\frac{n-1}{n} \in \mathcal{X}$，$\forall n \in \mathbb{N}$

用（2）作出弧長 a，$\cos a = \frac{1}{2n}$，再用性質 4 的方法作出弧長 b 使得$\cos b = \frac{1}{\sqrt{2n}}$

且$b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$。作出弧長 2b，則 $\cos 2b = 2\cos^2 b - 1 = \frac{1-n}{n}$。由性質 1 得到

$\frac{n-1}{n} \in \mathcal{X}$，$\forall n \in \mathbb{N}$。

（4）$\frac{m}{n} \in \mathcal{X}$，$\forall m, n \in \mathbb{N}$，$0 < m < n$

其作法是先做出 n－m 段弧長，其 cos 值分別為 $\frac{n-1}{n}$、$\frac{n-2}{n-1}$、$\frac{n-3}{n-2}$、……、$\frac{m}{m+1}$，

再透過 n－m－1 次性質 2 的做法（即 cos 值相乘）得到一段弧長其 cos 值為 $\frac{m}{n}$。

（5）$\frac{m}{n} \in \mathcal{X}$，$\forall m, n \in \mathbb{Z}$

由性質 1 可知。

所以，只要一弧長其 cos 值為有理數，就可以在球面上作出來。

引入　體（Field）

由前述知道，球面可作的 cos 值頂多是「已知能夠作的弧長的 cos 值」（以下簡稱已知量）的加減乘除開根號，跟體（Field）的性質很像，接下來將用體來完成證明。

體（Field）是一種可進行加、減、乘、除（除了除以零之外）運算皆封閉的集合；而在我們的研究中，球面上可作弧長的 cos 值的集合$\mathcal{X}$則是「一個對於加減乘除開根號皆封閉的集合」與「$[-1,1]$」的交集。所以，要想辦法把有「$\sqrt{\ }$」的東西放到體裡面，讓體擴張。

由性質 6，已知 $Q \cap [-1,1] \subseteq \mathcal{X}$，且 Q 是一個體。

可以設 F 是一個體，$F \cap [-1,1] \subseteq \mathcal{X}$。

希望 $F(\sqrt{d}) \cap [-1,1] \subseteq \mathcal{X}$，$d \in F$，$0 \le d \le 1$（可以推得$d \in \mathcal{X}$），其中

$$F(\sqrt{d}) = \{ r + s\sqrt{d} \mid r, s \in F \}$$

所以，要證明的是：一旦把 $\sqrt{d}$ 放進 F 裡面，任取 $F(\sqrt{d}) \cap [-1,1]$ 裡面的一個元素，可以用球面尺規作圖畫出一段弧長，其 cos 值為那個元素。

（1）$r、s \ge 0$，$r + s\sqrt{d} \in [-1,1]$

$$r + s\sqrt{d} = (r+s) \times \left(\frac{r}{r+s} + \left(1 - \frac{r}{r+s}\right)\sqrt{d} \right)$$

由體的性質和$\left|\frac{r}{r+s}\right| \leq 1$知道$\frac{r}{r+s} \in \mathcal{X}$，而$\frac{r}{r+s} \geq 0$，由性質 4 知道$\sqrt{\frac{r}{r+s}} \in \mathcal{X}$。

由$d \in \mathcal{X}$及性質 4 知道$\sqrt{d} \in \mathcal{X}$，再由性質 5 得知$\frac{r}{r+s} + \left(1 - \frac{r}{r+s}\right)\sqrt{d} \in \mathcal{X}$

1.如果$r + s \leq 1$，由體的性質知道$r + s \in \mathcal{X}$，再由性質 2 得到

$(r+s) \times \left(\frac{r}{r+s} + \left(1 - \frac{r}{r+s}\right)\sqrt{d}\right) \in \mathcal{X}$，所以$r + s\sqrt{d} \in \mathcal{X}$。

2.如果$r + s > 1$，由體的性質知道$\frac{1}{r+s} \in \mathcal{X}$，再由性質 3 得到

$\left(\frac{r}{r+s} + \left(1 - \frac{r}{r+s}\right)\sqrt{d}\right) \div \left(\frac{1}{r+s}\right) \in \mathcal{X}$，所以$r + s\sqrt{d} \in \mathcal{X}$。

（2）$r > 0 > s$，$r + s\sqrt{d} \in [-1,1]$

$$r + s\sqrt{d} = (r-s) \times \left(\frac{r}{r-s} + \left(1 - \frac{r}{r-s}\right)(-\sqrt{d})\right)$$

由體的性質和$\left|\frac{r}{r-s}\right| < 1$知道$\frac{r}{r-s} \in \mathcal{X}$，而$\frac{r}{r-s} \geq 0$，由性質 4 知道$\sqrt{\frac{r}{r-s}} \in \mathcal{X}$。

由$d \in \mathcal{X}$、性質 4 及性質 1 知道$-\sqrt{d} \in \mathcal{X}$，

再由性質 5 得知 $\frac{r}{r-s} + \left(1 - \frac{r}{r-s}\right)(-\sqrt{d}) \in \mathcal{X}$

1.如果$r - s \leq 1$，由體的性質知道$r - s \in \mathcal{X}$，再由性質 2 得到

$(r-s) \times \left(\frac{r}{r-s} + \left(1 - \frac{r}{r-s}\right)(-\sqrt{d})\right) \in \mathcal{X}$，所以$r + s\sqrt{d} \in \mathcal{X}$。

2.如果$r - s > 1$，由體的性質知道$\frac{1}{r-s} \in \mathcal{X}$，再由性質 3 得到

$\left(\frac{r}{r-s} + \left(1 - \frac{r}{r-s}\right)(-\sqrt{d})\right) \div \left(\frac{1}{r-s}\right) \in \mathcal{X}$，所以$r + s\sqrt{d} \in \mathcal{X}$。

（3）$s > 0 > r$ 或 $r、s < 0，r + s\sqrt{d} \in [-1,1]$

利用性質 1 和上面的（1）和（2），得知（3）成立。

分為（1）、（2）、（3）我們已經討論了r、s的全部情形，所以

$F(\sqrt{d}) \cap [-1,1] \subseteq \mathcal{X}，d \in F，0 \leq d \leq 1$。所以除了已知量加、減、乘、除後與 $[-1,1]$ 的交集是我們可以做出來的 cos 值外，我們還可以把根號放進去，已知量的加、減、乘、除、開根號後與$[-1,1]$的交集裡面的元素是皆是我們可以做出來的 cos 值。所以我們有$P \subseteq S$。

由前面所證明的 $S \subseteq P$ 和 $P \subseteq S$，得到一個重要的結果：

定理 1： P：平面尺規作圖可以做的角度的集合

S：球面尺規作圖可以做的角度（弧長）的集合

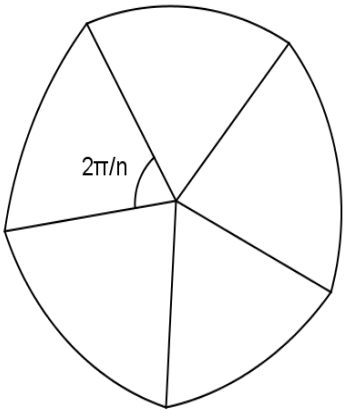
$P = S$

三、 球面尺規作圖作正多邊形的方法和實際做出 cos 值

在這個主題中，我們要解決的問題是：球面上給定一弧長 a（$a < \frac{2\pi}{n}$），請作出邊長為 a 的正 n 邊形（$n \in \mathbb{N}，n \geq 3$）。

（一） 共同步驟

對於這個問題，我們有一些作任意可作的 n 和 a（$a < \frac{2\pi}{n}$）的共同步驟。一個正 n 邊形（如圖 3-1）可以由 n 個如圖 3-2 的等腰三角形（$\widehat{AB} = \widehat{AC}$）組成。



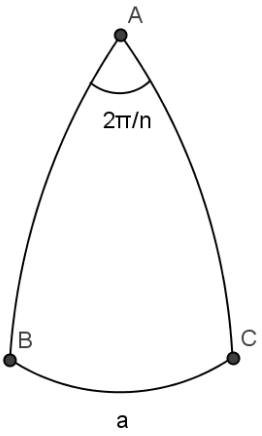
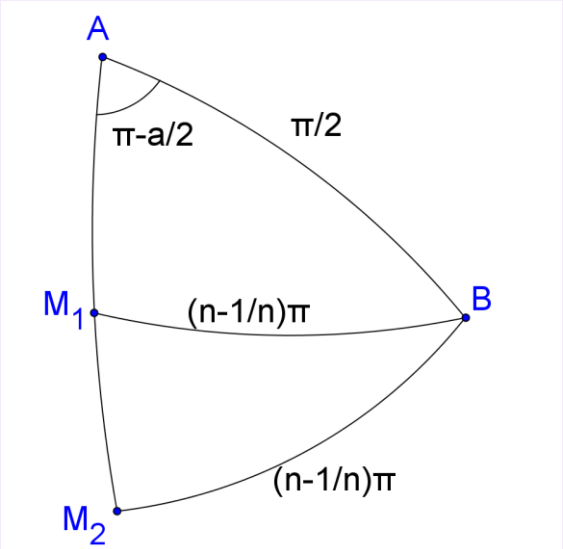
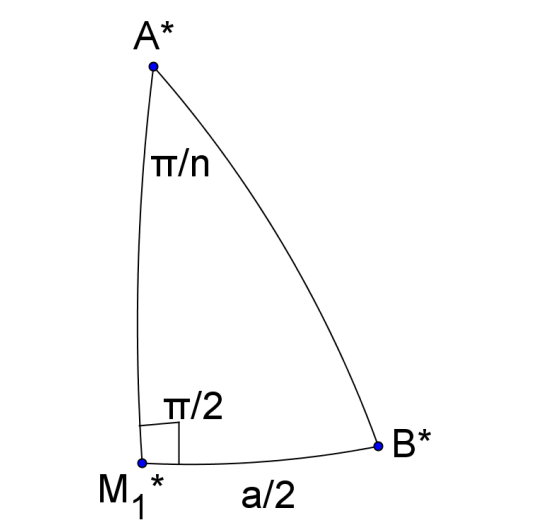
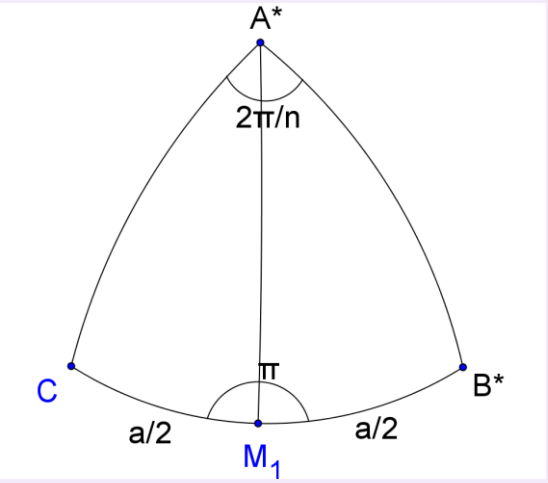
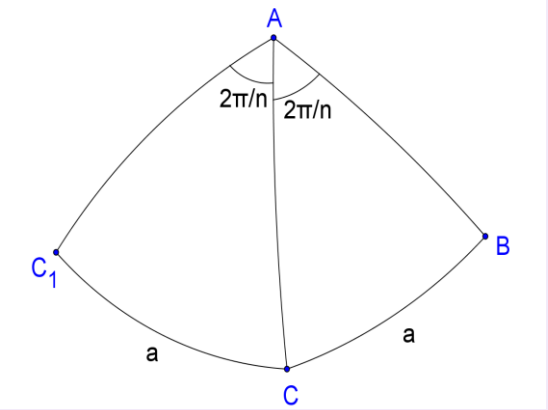


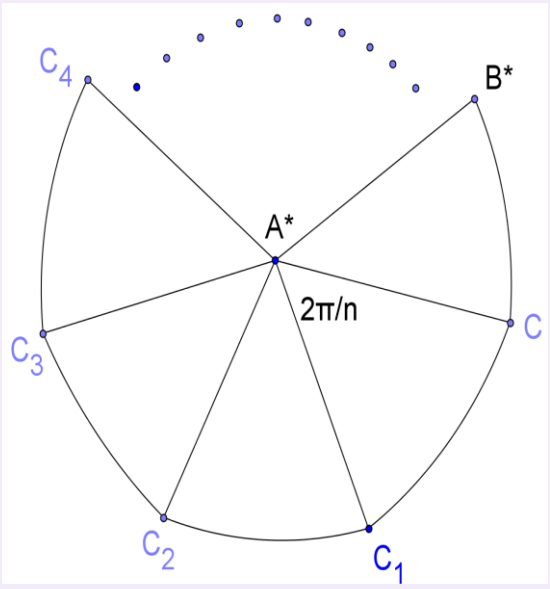
圖 3-1　　圖 3-2

因此我們只要作出圖 3-2 的等腰三角形，再把 n 個這樣的三角形組起來就可以了。但是，這樣的三角形不容易直接做出來，還是要經過一次對稱分割和一次對偶才找到可以直接作的三角形。

作圖流程：

作一個 $\pi-\frac{a}{2}$ 的角度，其頂點為 A，做其一夾邊長為 $\frac{\pi}{2}$，這個夾邊的另一個頂點為 B。 以 B 為圓心，$\frac{n-1}{n}\pi$ 為半徑作小圓交 A 的另一夾邊於兩點 M_1、M_2	 圖 3-3

作△ ABM$_1$ 的對偶三角形 A*B*M$_1$*	 圖 3-4
以 A*為圓心 $\overset{\frown}{A^*B^*}$為半徑畫圓，以 M$_1$*為圓心 $\overset{\frown}{M_1^*B^*}$為半徑畫圓，兩圓交於兩點，記異於 B*的那點為 C	 圖 3-5
從上一個步驟我們得到了一個新的△ A*B*C，現在以 A*為圓心 $\overset{\frown}{A^*C}$為半徑畫圓，以 C 為圓心 $\overset{\frown}{CB^*}$為半徑畫圓，兩圓交於兩點，記異於 B*的那點為 C$_1$，於是產生了一個新的△ A*C C$_1$	 圖 3-6

重複上述步驟 n-1 次，每一次用的都是新產生的三角形，就可以組成一個正 n 邊形了。	 圖 3-7

有了共同步驟，決定正 n 邊形的關鍵便是在共同步驟的第一步中能否作出 $\frac{2\pi}{n}$ 這個角了。也就是說：「$\frac{2\pi}{n}$ 是否 $\in S$」是能否解決這個問題的關鍵。

而平面上可做正 n 邊形 $\Leftrightarrow$ 可作$\frac{2\pi}{n}$

從：

【Gauss–Wantzel 定理】：平面上一個正 n 邊形可以用圓規直尺作出的充分必要條件是 n 的尤拉函數值 $\phi(n)$為 2 之乘冪 。

我們知道平面上的角度 $\frac{2\pi}{n}$ 可以作 $\Leftrightarrow$ n 的尤拉函數值 $\phi(n)$為 2 之乘冪。從前面證出來的 $P = S$，我們知道球面上的角度也是如此。所以如果 n 的尤拉函數值$\phi(n)$是2的乘冪，此問題是可以解的。

定理 2：

球面正 n 邊形可作 $\Leftrightarrow$ n 的尤拉函數值 $\phi(n)$為 2 之乘冪。

接下來我們就要實際作作看幾個正多邊形。

（二） 實際作圖

在這裡我們的目的是湊出這兩個 cos 值：

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ ;$$

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$$

（1）正五邊形

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=(\frac{1}{\sqrt[4]{5}})^2+\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^2\right)(-\frac{1}{4})$$

根據性質 6 有$-\frac{1}{4}\in\mathcal{X}$，所以根據性質 5，我們只需要證明 $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\in\mathcal{X}$就可以了。而由性質 6 得知 $\frac{1}{5}\in\mathcal{X}$，又由性質 4 得知 $\frac{1}{\sqrt{5}}\in\mathcal{X}$ 和 $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\in\mathcal{X}$ 。所以我們湊出$\cos\frac{2\pi}{5}$了。

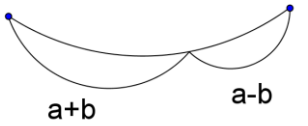
（2）正十七邊形

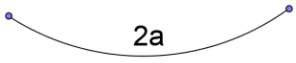
$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$$

現在為了簡化做出 $\cos\frac{2\pi}{17}$ 這個值的過程，將引進幾個新的性質，其中的 M1 和 M3 在下面將很常用到，有一些是想出 M1 和 M3 時一併想出來的，也有一些是之前因為湊錯而幸運想出的方法。

以下先說明幾個性質：

性質 M1：$x、y、z\in\mathcal{X}$，則 $\left(\frac{1+z}{2}\right)x+\left(\frac{1-z}{2}\right)y\in\mathcal{X}$





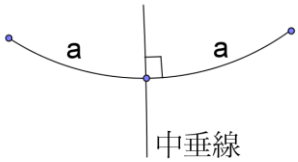
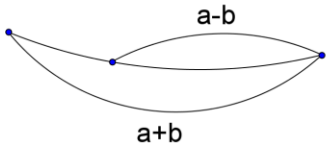
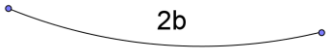


圖 3-8





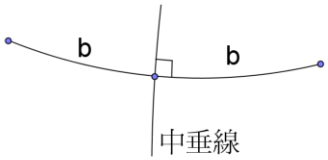


圖 3-9

設 $\cos(a+b)=y\in\mathcal{X}$，$\cos(a-b)=x\in\mathcal{X}$（取$a+b$、$a-b\in[0,\pi]$），$\cos C=z\in\mathcal{X}$，把 $a+b$ 和$a-b$ 兩段弧長在球面上加起來再做其中垂線就得到弧長 a (如圖 3-8)，把 $a+b$ 減掉 $a-b$ 再做其中垂線就得到弧長 b (如圖 3-9)，所以 $\cos a$ 、 $\cos b\in\mathcal{X}$

現在做一個三角形 (如圖 3-10)，a、b 是角 C 的兩夾邊。

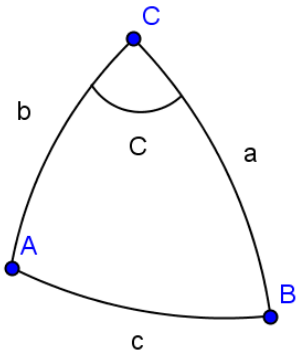


圖 3-10

由球面餘弦定理有$\cos c=\sin a\sin b\cos C+\cos a\cos b$

又由三角函數和角公式 $\begin{cases}\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\end{cases}$

得到 $\cos a\cos b=\frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}=\frac{x+y}{2}$；$\sin a\sin b=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}=\frac{x-y}{2}$

所以 $\cos c=\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos C+\frac{x+y}{2}=\left(\frac{1+\cos C}{2}\right)x+\left(\frac{1-\cos C}{2}\right)y=\left(\frac{1+z}{2}\right)x+\left(\frac{1-z}{2}\right)y\in\mathcal{X}$

性質 M2：$x \in \mathcal{X}$，則 $\frac{1+x}{2} \in \mathcal{X}$

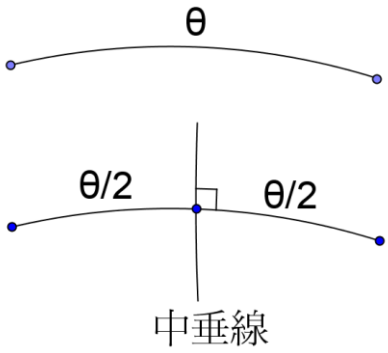


圖 3-11

設 θ 是球面上可做的一段弧長，$\cos\theta = x \in \mathcal{X}$，我們只要在球面上作 θ 的中垂線，就可以做出 $\frac{\theta}{2}$，因此 $\cos\frac{\theta}{2} \in \mathcal{X}$。又由性質 2 得知$\cos^2\frac{\theta}{2} \in \mathcal{X}$，所以

$$\frac{1+x}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \frac{1+(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2} \in \mathcal{X}$$

性質 M3：$x \in \mathcal{X}$，$x \geq 0$，則$2x-1$、$1-2x \in \mathcal{X}$

由性質 4 得知$\sqrt{x} \in \mathcal{X}$。設$\sqrt{x} = \cos\theta\ (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$，在球面上可以直接用尺規作圖作出$2\theta$，如圖，所以$\cos 2\theta \in \mathcal{X}$。因此$2x-1 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta \in \mathcal{X}$。

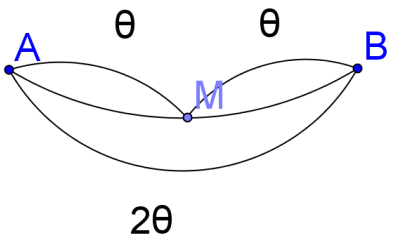


圖 3-12

再由性質 1 知$1-2x \in \mathcal{X}$

有了以上的小結果，可以來湊 $\cos\frac{2\pi}{17}$ 了。目標是湊出：

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$$

由於正 17 邊形的湊法有 38 個步驟，很複雜，所以我們做了流程圖（請見附錄）。

(i) 處理 $\cos\frac{2\pi}{17}$

利用性質 M1，在這裡取$z=0$，$x=\frac{-1.6+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}=a_1$，

$y=\frac{0.6+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{8}=a_2$，

$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_2$

由性質 6，顯然$z\in Q\cap[-1,1]\subseteq\mathcal{X}$，如果$a_1\in\mathcal{X}$且$a_2\in\mathcal{X}$那麼就會有$\cos\frac{2\pi}{17}\in\mathcal{X}$

(ii) 處理$a_1=\frac{-1.6+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$

利用性質 M1，在這裡取$z=0$，$x=\frac{-0.3+\sqrt{17}}{4}=b_1$，$y=\frac{-1.3+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}=b_2$

$a_1=\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2$

同(i)有$z\in\mathcal{X}$，如果$b_1\in\mathcal{X}$且$b_2\in\mathcal{X}$那麼就有$a_1\in\mathcal{X}$

(iii) 處理$b_1=\frac{-0.3+\sqrt{17}}{4}$

利用性質 M3，設$b_1=2c_1-1$，$c_1=\frac{3.7+\sqrt{17}}{8}$

如果$c_1\in\mathcal{X}$那麼就會有$b_1\in\mathcal{X}$

(iv) 處理$c_1=\frac{3.7+\sqrt{17}}{8}$

利用性質 M1，在這裡取$z=-\frac{1}{20}$，$x=\frac{37}{38}$，$y=\frac{5\sqrt{17}}{21}=d_1$

$c_1=\frac{19}{40}\times\frac{37}{38}+\frac{21}{40}\times\frac{5\sqrt{17}}{21}$

有$-\frac{1}{20}$、$\frac{37}{38}\in\mathcal{X}$，如果$d_1\in\mathcal{X}$那麼就有$c_1\in\mathcal{X}$

(v) 處理$d_1=\frac{5\sqrt{17}}{21}$

利用性質 2，設$d_1=\frac{5\sqrt{17}}{21}=\sqrt{e_1}$，如果$e_1\in\mathcal{X}$那麼就有$d_1\in\mathcal{X}$

(vi) 處理$e_1 = \left(\frac{5\sqrt{17}}{21}\right)^2$

由性質 6 知道$e_1 = \left(\frac{5\sqrt{17}}{21}\right)^2 = \frac{425}{441} \in \mathcal{X}$，所以$e_1 \in \mathcal{X} \to d_1 \in \mathcal{X} \to c_1 \in \mathcal{X} \to b_1 \in \mathcal{X}$

(vii) 處理$b_2 = \frac{-1.3+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$

利用性質 M3，設$b_2 = 2c_2 - 1$，$c_2 = \frac{2.7+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$

如果$c_2 \in \mathcal{X}$那麼就會有$b_2 \in \mathcal{X}$

(viii) 處理$c_2 = \frac{2.7+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$

利用性質 M1，在這裡取$z = -\frac{3}{10}$，$x = \frac{27}{28}$，$y = \frac{5\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{26} = d_2$

$$c_2 = \frac{7}{20} \times \frac{27}{28} + \frac{13}{20} \times \frac{5\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{26}$$

有$-\frac{3}{10}$、$\frac{27}{28} \in \mathcal{X}$，如果$d_2 \in \mathcal{X}$那麼就有$c_2 \in \mathcal{X}$

(ix) 處理$d_2 = \frac{5\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{26}$

利用性質 2，設$d_2 = \frac{5\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{26} = \sqrt{e_2}$，$e_2 = \frac{25(34-2\sqrt{17})}{676}$，如果$e_2 \in \mathcal{X}$那麼就有$d_2 \in \mathcal{X}$

(x) 處理$e_2 = \frac{25(34-2\sqrt{17})}{676}$

利用性質 M3，設$e_2 = 1 - 2f_1$，$f_1 = \frac{-87+25\sqrt{17}}{676}$

如果$f_1 \in \mathcal{X}$那麼就會有$e_2 \in \mathcal{X}$

(xi) 處理$f_1 = \frac{-87+25\sqrt{17}}{676}$

利用性質 M1，在這裡取$z = 0$，$x = \frac{-87}{338}$，$y = \frac{25\sqrt{17}}{338} = g_1$

$$f_1 = \frac{1}{2} \times \frac{-87}{338} + \frac{1}{2} \times \frac{25\sqrt{17}}{338}$$

有$\frac{1}{2}$、$\frac{-87}{338} \in \mathcal{X}$，如果$g_1 \in \mathcal{X}$那麼就有$f_1 \in \mathcal{X}$

(xii) 處理$g_1=\frac{25\sqrt{17}}{338}$

利用性質 1，設$g_1=\frac{25\sqrt{17}}{338}=\sqrt{h_1}$，如果$h_1\in\mathcal{X}$那麼就有$g_1\in\mathcal{X}$

(xiii) 處理$h_1=\left(\frac{25\sqrt{17}}{338}\right)^2$

由性質 6 知道$h_1=\left(\frac{25\sqrt{17}}{338}\right)^2=\frac{10625}{114244}\in\mathcal{X}$，所以

$h_1\in\mathcal{X}\to g_1\in\mathcal{X}\to f_1\in\mathcal{X}\to e_2\in\mathcal{X}\to d_2\in\mathcal{X}\to c_2\in\mathcal{X}\to b_2\in\mathcal{X}$

又由(vi)有$b_1\in\mathcal{X}$，所以$b_2\in\mathcal{X}$、$b_1\in\mathcal{X}\to a_1\in\mathcal{X}$

(xiv) 處理$a_2=\frac{0.6+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{8}$

利用性質 M1，在這裡取$z=\frac{-3}{4}$，$x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{7}=b_3$

$$a_2=\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}+\frac{7}{8}\times\frac{2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{7}$$

有$\frac{-3}{4}$、$\frac{3}{5}\in\mathcal{X}$，如果$b_3\in\mathcal{X}$那麼就有$a_2\in\mathcal{X}$

(xv) 處理$b_3=\frac{2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{7}$

利用性質 2，設$b_3=\frac{2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{7}=\sqrt{c_3}$，如果$c_3\in\mathcal{X}$那麼就有

$b_3\in\mathcal{X}$

(xvi) 處理$c_3=\frac{68+12\sqrt{17}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}-8\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{49}$

利用性質 M1，在這裡取$z=0$，$x=\frac{-14-8\sqrt{34-2\sqrt{17}}+24\sqrt{17}}{49}=d_3$，

$y=\frac{-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}+150}{49}=d_4$

$$c_3=\frac{1}{2}\times\frac{-14-8\sqrt{34-2\sqrt{17}}+24\sqrt{17}}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}+150}{49}$$

有 0$\in\mathcal{X}$，如果$d_3\in\mathcal{X}$且$d_4\in\mathcal{X}$那麼就有$c_3\in\mathcal{X}$

(xvii) 處理$d_3 = \frac{-14-8\sqrt{34-2\sqrt{17}}+24\sqrt{17}}{49}$

利用性質 M1，在這裡取$z = 0$，$x = \frac{-16\sqrt{34-2\sqrt{17}}+126}{49} = e_3$，$y = \frac{48\sqrt{17}-154}{49} = e_4$

$$d_3 = \frac{1}{2} \times \frac{-16\sqrt{34-2\sqrt{17}}+126}{49} + \frac{1}{2} \times \frac{48\sqrt{17}-154}{49}$$

有$0 \in \mathcal{X}$，如果$e_3 \in \mathcal{X}$且$e_4 \in \mathcal{X}$，那麼就有$d_3 \in \mathcal{X}$

(xviii) 處理$e_3 = \frac{-16\sqrt{34-2\sqrt{17}}+126}{49}$

利用性質 M3，設$e_3 = 1 - 2f_2$，$f_2 = \frac{-77+16\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{98}$

如果$f_2 \in \mathcal{X}$那麼就會有$e_3 \in \mathcal{X}$

(xix) 處理$f_2 = \frac{-77+16\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{98}$

利用性質 M3，設$f_2 = 2g_2 - 1$，$g_2 = \frac{21+8\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{196}$

如果$g_2 \in \mathcal{X}$那麼就會有$f_2 \in \mathcal{X}$

(xx) 處理$g_2 = \frac{21+8\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{196}$

利用性質 M1，在這裡取$z = \frac{1}{7}$，$x = \frac{3}{516}$，$y = \frac{4\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{21} = h_2$

$$g_2 = \frac{4}{7} \times \frac{3}{16} + \frac{3}{7} \times \frac{4\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{21}$$

有$\frac{1}{7}$、$\frac{3}{16} \in \mathcal{X}$，如果$h_2 \in \mathcal{X}$那麼就有$g_2 \in \mathcal{X}$

(xxi) 處理$h_2 = \frac{4\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{21}$

利用性質 2，設$h_2 = \frac{4\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{21} = \sqrt{i_1}$，$i_1 = \frac{544-32\sqrt{17}}{441}$，如果$i_1 \in \mathcal{X}$那麼就有$h_2 \in \mathcal{X}$

(xxii) 處理$i_1 = \frac{544-32\sqrt{17}}{441}$，

利用性質 M3，設$i_1 = 1 - 2j_1$，$j_1 = \frac{-103+32\sqrt{17}}{882}$

如果 $j_1 \in \mathcal{X}$那麼就會有$i_1 \in \mathcal{X}$

(xxiii) 處理$j_1 = \frac{-103+32\sqrt{17}}{882}$

利用性質 M1，在這裡取$z = \frac{2}{3}$，$x = \frac{-309}{2205}$，$y = \frac{32\sqrt{17}}{147} = k_1$

$$j_1 = \frac{5}{6} \times \frac{-309}{2205} + \frac{1}{6} \times \frac{32\sqrt{17}}{147}$$

有$\frac{2}{3}$、$\frac{-309}{2205} \in \mathcal{X}$，如果$k_1 \in \mathcal{X}$那麼就有$j_1 \in \mathcal{X}$

(xxiv) 處理$k_1 = \frac{32\sqrt{17}}{147}$

利用性質 2，設$k_1 = \frac{32\sqrt{17}}{147} = \sqrt{l_1}$，如果$l_1 \in \mathcal{X}$那麼就有$k_1 \in \mathcal{X}$

(xxv) 處理$l_1 = \left(\frac{32\sqrt{17}}{147}\right)^2$

由性質 6 知道$l_1 = \left(\frac{32\sqrt{17}}{147}\right)^2 = \frac{17408}{21609} \in \mathcal{X}$，所以

$$l_1 \in \mathcal{X} \to k_1 \in \mathcal{X} \to j_1 \in \mathcal{X} \to i_1 \in \mathcal{X} \to h_2 \in \mathcal{X} \to g_2 \in \mathcal{X} \to f_2 \in \mathcal{X} \to e_3 \in \mathcal{X}$$

(xxvi) 處理$e_4 = \frac{48\sqrt{17}-154}{49}$

利用性質 M3，設$e_4 = 2f_3 - 1$， $f_3 = \frac{48\sqrt{17}-105}{98}$

如果 $f_3 \in \mathcal{X}$那麼就會有$e_4 \in \mathcal{X}$

(xxvii) 處理$f_3 = \frac{48\sqrt{17}-105}{98}$

利用性質 M3，設$f_3 = 2g_3 - 1$， $g_3 = \frac{48\sqrt{17}-7}{196}$

如果 $g_3 \in \mathcal{X}$那麼就會有$f_3 \in \mathcal{X}$

(xxviii) 處理$g_3 = \frac{48\sqrt{17}-7}{196}$

利用性質 M3，設$g_3 = 2h_3 - 1$， $h_3 = \frac{189+48\sqrt{17}}{392}$

如果 $h_3 \in \mathcal{X}$那麼就會有$g_3 \in \mathcal{X}$

(xxix) 處理$h_3=\frac{189+48\sqrt{17}}{392}$

利用性質 M1，在這裡取$z=\frac{-1}{28}$，$x=\frac{189}{203}$，$y=\frac{48\sqrt{17}}{203}=i_2$

$$h_3=\frac{27}{56}\times\frac{189}{203}+\frac{29}{56}\times\frac{48\sqrt{17}}{203}$$

有$\frac{-1}{28}$、$\frac{189}{203}\in\mathcal{X}$，如果$i_2\in\mathcal{X}$那麼就有$h_3\in\mathcal{X}$

(xxx) 處理$i_2=\frac{48\sqrt{17}}{203}$

利用性質 2，設$i_2=\frac{48\sqrt{17}}{203}=\sqrt{j_2}$，如果$j_2\in\mathcal{X}$那麼就有$i_2\in\mathcal{X}$

(xxxi) 處理$j_2=\left(\frac{48\sqrt{17}}{203}\right)^2$

由性質 6 知道$j_2=\left(\frac{48\sqrt{17}}{203}\right)^2=\frac{39168}{41209}\in\mathcal{X}$，所以

$j_2\in\mathcal{X}\rightarrow i_2\in\mathcal{X}\rightarrow h_3\in\mathcal{X}\rightarrow g_3\in\mathcal{X}\rightarrow f_3\in\mathcal{X}\rightarrow e_4\in\mathcal{X}$

又由(xxv)有$e_3\in\mathcal{X}$，所以$e_3\in\mathcal{X}$、$e_4\in\mathcal{X}\rightarrow d_3\in\mathcal{X}$

(xxxii)處理$d_4=\frac{-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}+150}{49}$

利用性質 M3，設$d_4=1-2e_5$，$e_5=\frac{-101+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{98}$

如果 $e_5\in\mathcal{X}$那麼就會有$d_4\in\mathcal{X}$

(xxxiii)處理$e_5=\frac{-101+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{98}$

利用性質 M3，設$e_5=2f_4-1$，$f_4=\frac{-3+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{196}$

如果 $f_4\in\mathcal{X}$那麼就會有$e_5\in\mathcal{X}$

(xxxiv) 處理$f_4=\frac{-3+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{196}$

利用性質 M1，在這裡取$z=\frac{-1}{14}$，$x=\frac{-3}{91}$，$y=\frac{16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{105}=g_4$

$$f_4 = \frac{13}{28} \times \frac{-3}{91} + \frac{15}{28} \times \frac{16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{105}$$

有$\frac{-1}{14}$、$\frac{-3}{91} \in \mathcal{X}$，如果$g_4 \in \mathcal{X}$那麼就有$f_4 \in \mathcal{X}$

(xxxv) 處理$g_4 = \frac{16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{105}$

利用性質 2，設$g_4 = \frac{16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{105} = \sqrt{h_4}$，$h_4 = \frac{8704+512\sqrt{17}}{11025}$如果$h_4 \in \mathcal{X}$那麼就有$g_4 \in \mathcal{X}$

(xxxvi) 處理$h_4 = \frac{8704+512\sqrt{17}}{11025}$

利用性質 M1，在這裡取$z = \frac{3}{5}$，$x = \frac{2176}{2205}$，$y = \frac{512\sqrt{17}}{2205} = i_3$

$$h_4 = \frac{4}{5} \times \frac{2176}{2205} + \frac{1}{5} \times \frac{512\sqrt{17}}{2205}$$

有$\frac{3}{5}$、$\frac{2176}{2205} \in \mathcal{X}$，如果$i_3 \in \mathcal{X}$那麼就有$h_4 \in \mathcal{X}$

(xxxvii) 處理$i_3 = \frac{512\sqrt{17}}{2205}$

利用性質 2，設$i_3 = \frac{512\sqrt{17}}{2205} = \sqrt{j_3}$，如果$j_3 \in \mathcal{X}$那麼就有$i_3 \in \mathcal{X}$

(xxxviii) 處理$j_3 = \left(\frac{512\sqrt{17}}{2205}\right)^2$

由性質 6 知道 $j_3 = \left(\frac{512\sqrt{17}}{2205}\right)^2 = \frac{4456448}{4862025} \in \mathcal{X}$，所以

$j_3 \in \mathcal{X} \to i_3 \in \mathcal{X} \to h_4 \in \mathcal{X} \to g_4 \in \mathcal{X} \to f_4 \in \mathcal{X} \to d_4 \in \mathcal{X}$

又由(xxxi)有$d_3 \in \mathcal{X}$，所以$d_4 \in \mathcal{X}$、$d_3 \in \mathcal{X} \to c_3 \in \mathcal{X} \to b_3 \in \mathcal{X} \to a_2 \in \mathcal{X}$

又由(xiii)有$a_1 \in \mathcal{X}$，所以$a_2 \in \mathcal{X}$、$a_1 \in \mathcal{X} \to$ 我們湊出了 $\cos\frac{2\pi}{17}$

（3）正 4 邊形

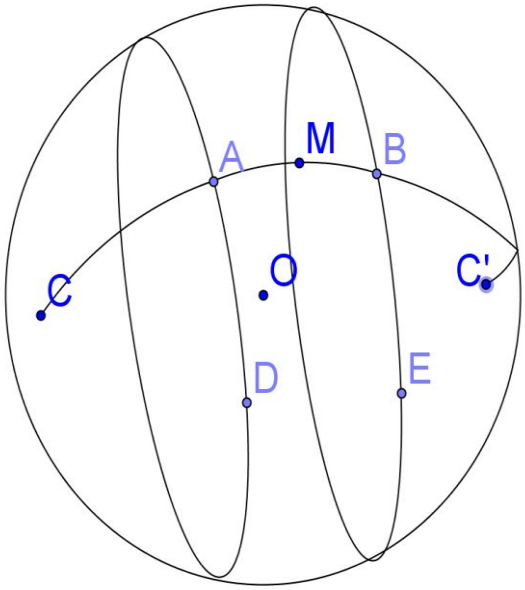


圖 3-13

最後提供一個不需要算 cos 值的漂亮作法，這是研究一開始，還沒有推導出性質 1 到性質 M3 的時候就找出來的方法。

(i)球面上 $\overset{\frown}{AB} = a$是給定的弧長，作中垂線找出 $\overset{\frown}{AB}$ 中點 M

(ii)用尺連接 $\overset{\frown}{AB}$ 並延長，以 M 為圓心，$\frac{\pi}{2}$ 為半徑畫圓交過 $\overset{\frown}{AB}$ 的大圓於 C、C'兩點

(iii)以 C 為圓心，$\overset{\frown}{CA}$ 為半徑畫圓，以 C'為圓心，$\overset{\frown}{C'A}$ 為半徑畫圓

(iv)以 A 為圓心，$\overset{\frown}{AB}$ 為半徑畫圓交圓 C 於兩點，以 B 為圓心，$\overset{\frown}{AB}$為半徑畫圓交圓 C' 於兩點，取在過 $\overset{\frown}{AB}$ 的大圓同側的兩點記為 D 和 E，ABED 就是所求的正 4 邊形。

參、 研究結果與討論

（一） 研究結果

（1）發現 $P = S$，也就是「球面尺規作圖可以做的角度（弧長）的集合」等於「平面尺規作圖可以做的角度的集合」。

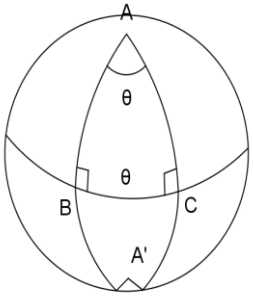
（2）作正多邊形方面： $P = S$ 在的基礎上，利用「Gauss–Wantzel 定理」得到球面正 n 邊形可作$\Leftrightarrow$ n 的尤拉函數值 $\phi(n)$為 2 之乘冪 。和平面正多邊形一樣。

（3）由 $P = S$ 知，只要分析圖形的邊長、角度，就能判斷是否能尺規作圖。

（4）實作方面：因為平面正 n 邊形可作和球面正 n 邊形可作的條件一樣，我們作出了看球面正 5 邊形和正 17 邊形；同時也對於設定的問題：「在球面上給定一弧長 a（$a < \frac{2\pi}{n}$），請作出邊長為 a 的正 n 邊形（$n \in \mathbb{N}, n \geq 3$）。」發展出一套規律的球面尺規作正 n 邊形的模式。

（二） 討論

（1）選用半徑為 1 的好處是：弧長和角度可以透過對偶三角形互換，三角形邊長和內角在球面上可以一視同仁，讓我們方便使用球面餘弦定理。



（2）在 $x^2 + (1 - x^2)y$ 中，視 x^2為 λ，則 $x^2 + (1 - x^2)y = \lambda + (1 - \lambda)y$ 是 1 和 y 的線性組合，如果想要湊出 $\lambda + (1 - \lambda)y = \cos\theta$，因為$\cos\theta \leq 1$，所以

只要取$y \le \cos\theta\,(y=-1$ 可以$)$，就可以找到對於一個固定的 y 唯一的一組 (y,λ) 了。但是在應用上（實際找出步驟）時則要考量處理 λ 和 y 是否比處理原本的 $\cos\theta$ 更為簡易，也就是看 $x^2+(1-x^2)y$ 有沒有達到化簡的效果，是要注意的地方。

（3）從我們的方法來看，球面尺規作圖與平面尺規作圖最大的不同－也是球面尺規相對於平面尺規最大的困難點，在於運算的值必須要介於 $[-1,1]$，這是因為我們使用的是 cos 的運算。尤其是在作正 17 邊形時，如果要使用我們導出的性質，就要把 x、y 湊在 $[-1,1]$，又要同時達到化簡最初的 $\cos\frac{2\pi}{17}$ 的功用，常常不容易在很少的步數內處理完。

但也因為是 cos 的運算，才有倍角公式幫了許多忙。正 17 邊形主要用到性質 2、性質 6、性質 M1 和性質 M3，其中性質 2 的角色主要是拿走根號，使原本的東西漸漸變成有理數；性質 6 是一個強大結果，我們只要把根號一一拆開成有理數就能交給性質 6 來解決。性質 M1 的角色主要是把幾團根號的東西一直拆開，是處理好幾團複雜根號加起來的有利工具；而性質 M3（其實就是倍角公式）是用來把數字處理成性質 M1 能用的型式。例如有一個數字可以表式成 $a+b$，其中 a 是一個有理數，b 是一個無理數，b 的最外面一層是根號，我們想要用性質 M1 湊出 $\lambda a+(1-\lambda)b$，從而我們只需要處理 λ、a、b 就好了，但是顯然要用性質 M1 的式子必須要 $a、b\in[-1,1]$，而結果常常不是這樣的，這時借助性質 M3 總可以讓我們找到一組（a_1，b_1）符合要求。有時需要使用性質 M3 很多次，但總能成功。這是因為有理數部分 a 可以選擇「減 1 再除以 2」或「加 1 再除以 2」，而無理數部分 b 可以一直除以 2，操作有限次就可以讓他們都介於 $[-1,1]$。

肆、　結論與應用

（一）結論

1.本研究藉由向量方程式、從球面三角學公式衍生的方法、體和引用平面尺規作圖的結論，得到 P＝S，也就是「球面尺規作圖可以做的角度（弧長）的集合」等於「平面尺規作圖可以做的角度的集合」。

2.由 P＝S 和 Gauss–Wantzel 定理我們推論出「球面正 n 邊形可以尺規作圖 ⇔ n 的尤拉函數值 $\phi(n)$為 2 之乘冪」，並在這樣的基礎上我們提供了球面正 4 邊形、正 5 邊形、正 17 邊形的作法。

（二）應用

對於一個想要在球面上尺規作圖作出的圖形，只要分析其邊長、角度，就能判斷是否能尺規作圖。並且可以利用性質 1 到性質 M3 的方法，使得尺規作圖時可以遵循一套比較固定的步驟及方向。

伍、　未來展望

尺規作圖是很有趣也很廣泛的題目，想要繼續研究！對接下來的研究方向，大概想到這些：

（1）限制某些情況下的尺規作圖

有圓規作圖、直尺作圖、生鏽圓規（即半徑固定的圓規）作圖、二刻尺作圖等諸多方向可以挑戰。

（2）找尋其它幾何性質，並探討如何作圖

可以找找看球面尺規作圖有沒有其它有趣的幾何性質。

（3）改用不同曲面

在曲面上可以定義直線為任兩點之間的最短曲線。既然平面與球面有 P＝S，那其它曲面呢？ 不過曲面好像頗為複雜，較難掌握。

（4）作圖的最有效率模式探討

作正 17 邊形時，常常為了湊一個有理數，要將 $\frac{n-1}{n}$、$\frac{n-2}{n-1}$、$\frac{n-3}{n-2}$、……、$\frac{m}{m+1}$ 全部乘起來才能得到 $\frac{m}{n}$，有時是好幾萬步（之前做時有個地方就 10 萬多步了）。目前我們已經證明有限步內可以做出跟平面完全相同的正 n 邊形，但是還不一定是最有效率（步驟最少）的作圖方式，可以想看看。

陸、 參考資料

（一）網路資料

1. 球面三角學 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/ar/ar_wy_geo_07/
2. 球面三角學 http://mathworld.wolfram.com/SphericalTrigonometry.html
3. 高斯眼中的球面三角形 http://www.guokr.com/article/98934/
4. 對偶三角形 http://media.openonline.com.cn/media_file/rm/dongshi2006/zhongxuesxztyj/pian2/chap4/n3.htm
5. $\cos\frac{2\pi}{17}$ 的值 http://www.mathsgreat.com/const_003.html
6. http://www.math.niu.edu/~richard/Math302/ch8.pdf

（二）書籍文獻

1. 初等幾何研究。左銓如/季素月。九章出版社。
2. 基礎幾何學。項武義。五南出版社。

柒、 附錄及引理

內容引自：http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/ar/ar_wy_geo_07/

（1）球面餘弦定理：

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c$$

$$\sin c \sin a \cos B = \cos b - \cos c \cos a$$

$$\sin a \sin b \cos C = \cos c - \cos a \cos b$$

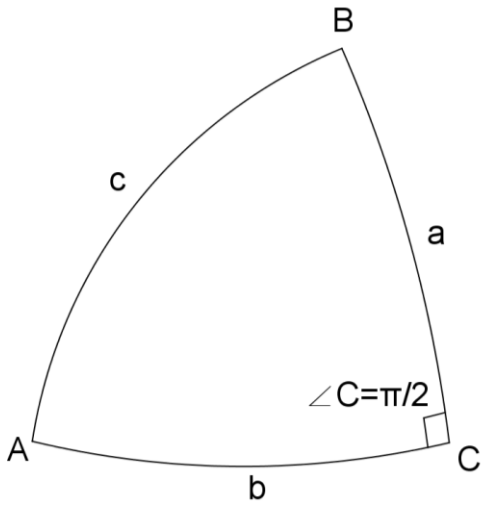
【證明】：

$$\sin c \sin b \cos A = b' \cdot c'$$

$$= (b-(b \cdot a)a) \cdot (c-(c \cdot a)a)$$

$$= b \cdot c-(b \cdot a)(c \cdot a)-(c \cdot a)(b \cdot a)+(b \cdot a)(c \cdot a) \cdot 1$$

$$= \cos a - \cos b \cos c$$



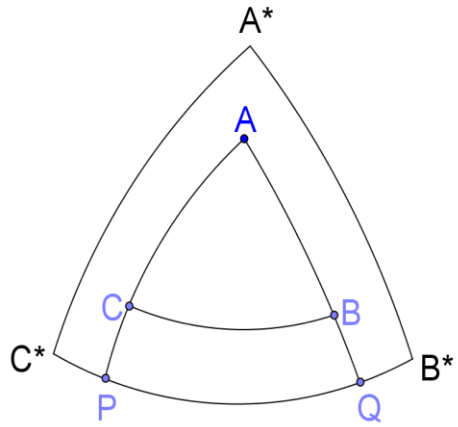
在 $C = \frac{\pi}{2}$ 時（亦即直角球面三角形）時，則有：$\cos c = \cos a \cos b$

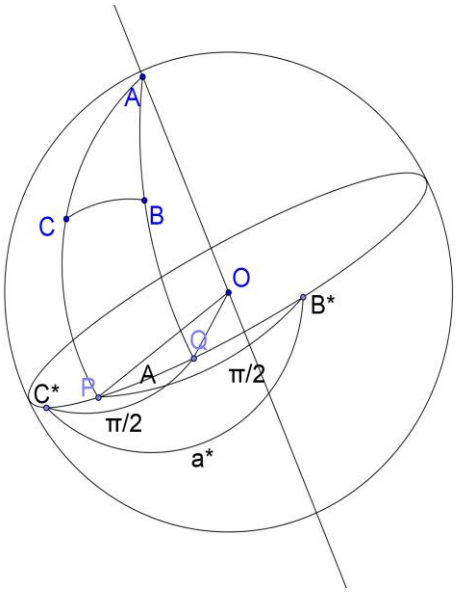
稱為球面畢氏定理

（2）對偶三角形：

$a^* = \pi - A$，$b^* = \pi - B$，$c^* = \pi - C$

$a = \pi - A^*$，$b = \pi - B^*$，$c = \pi - C^*$





【證明】：我們只需要證明其中之一，其餘各式皆可同理類推。由圖所示，在大圓 O_1 上$\widehat{B^*P} = \widehat{C^*Q} = \frac{\pi}{2}$，$\widehat{PQ} = A$，故有

$$a^* = \widehat{B^*P} + \widehat{C^*Q} - \widehat{PQ} = \pi - A$$

評語

本研究運用球面三角學的知識，以討論如何在球面上進行尺規作圖，並探討平面上能作出的角度是否亦能在球面上作出，以及探討是否能在球面上作出正 5 邊形與正 17 邊形。雖然目前高中課程並未包含球面幾何的主題，但由於有不少國家的高中課程內容有納入球面幾何，因此，本研究的方向值得鼓勵，研究的方法亦有其創意。至於改進方面，本研究的說明可以更清楚，例如有些名詞及符號應定義清楚，引用文獻中的定義時應標明其出處，另外在討論正 5 邊形的作圖時，宜以實作的方式在球面上作出正 5 邊形，藉以增加研究的可讀性，本研究的撰寫若能更清楚，將可增加其貢獻。