2013 臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號 **010021**

參展科別 **數學科**

作品名稱 **NICE 數-正方形與正立方體的切割**

得獎獎項 **四等獎**

就讀學校 國立彰化高級商業職業學校

指導教師 翁瑞檡、林俊男

作者姓名 劉苡芊

關 鍵 字 正方形切割、正立方體切割

作者簡介

我從國中一年級開始接觸科展後便一直對科展抱持著高度的興趣，後來開始接觸幾何課程後更是覺得幾何的世界真是變化萬千，除了上學的時間外，假期中，老師也建議我可以閱讀相關書籍，並從當中學習更多課本外的知識。高中後，我仍決定繼續做科展，並延續了國三的題目，補足並加新了不足的部份，於是展開了我這趟幾何研究之旅。

摘要

源自於 *Thinking Mathematically* 這本書的一道題目，關於正方形的切割問題：將一個正方形切成不重疊的正方形， 所得的個數就可被稱作 NICE(好的)， 問有哪些數是 NICE 數？

在平面的正方形切割的問題，透過分割技巧，我們得出了重要的結果：除了 2、3、5 以外的自然數都是 NICE 數，並推導出：

若 k 為 NICE 數, m 為自然數，則 $k+3m$ 為 NICE 數。

我們將問題推廣至立方體：將一個正方體切成不重疊的正方體，所得的個數就可被稱作 very NICE(非常好的)， 問有哪些數是 very NICE 數？我們也得出重要的結果：大於 47 的自然數皆為 very NICE 數，並推導出：

若 k 是 very NICE 數，且 m 是自然數，則 $k+7m$ 為 very NICE 數。

Abstract

This study is developed from one question in Thinking Mathematically, which discusses about square-dissection problem. The problem tries to find out which numbers NICE number are. NICE number is a term which is used to name the total number when a square is cut into non-overlapped squares. We have an important result that nature numbers are NICE numbers except 2, 3, and 5. Besides, we obtain the result:

If k is NICE number and m is nature number, then k+3m is NICE number.

We also develop the question to cubes. If a cube can be cut into several non-overlapped cubes, the total number is called very NICE number. Which numbers are very NICE numbers? We obtain the other important result:

The nature numbers more then 47 are called very NICE number. Therefore, here is the conclusion:

If k is very NICE number and m is nature number, then k+7m is very NICE number.

壹、　前言

一、　研究動機：

在「數學思考」這本書 P90 提到「正方形的分割」

原題目

正方形的分割
將一個正方形切成不重疊的正方形，所得的個數就可被稱作 NICE(好的)，問有哪些數是 NICE 數？

另外，書上還更進一步介紹三維的狀況「合乎條件的被稱為 very NICE」，我們把書上的定義再寫的更清楚一點，請看底下呈現：

立方體的分割
將一個正方體切成不重疊的正方體，所得的個數就可被稱作 very NICE(非常好的)，問有哪些數是 very NICE 數？

「數學思考」這本書上對於 very NICE 的部份敘述的比較少，書上提到：人們猜想只要比 47 大的自然數就都是 very NICE 數，但目前對這幾乎沒什麼了解，讓我感覺蠻有挑戰性的，於是便著手進行研究。

二、　研究目的：

1. 找出哪些數是 NICE 數，並找出其切割法。
2. 找出哪些數是 very NICE 數，並找出其切割法。

貳、　研究方法與過程

研究 1.

若 n 為自然數，則 n^2 為 NICE 數。

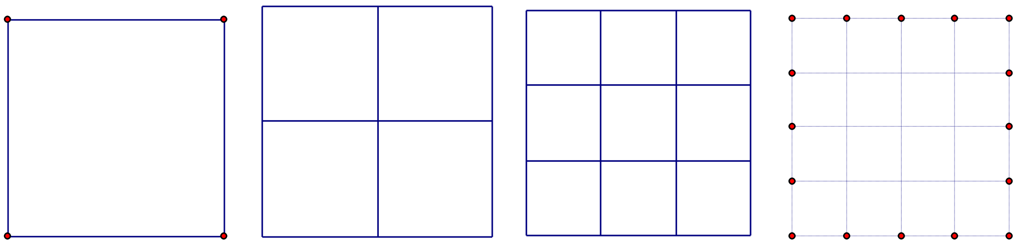
證明：

當 n=1，$n^2=1$(切割成 1 個正方形), 1 為 NICE 數。(圖 1-1)

當 n=2，$n^2=4$ (切割成 4 個正方形), 4 為 NICE 數。(圖 1-2)

當 n=3，$n^2=9$ (切割成 9 個正方形), 9 為 NICE 數。(圖 1-3)

當邊長以 $\frac{1}{n}$ 做切割時，則切割成個 n^2 正方形，n^2 為 NICE 數。(圖 1-4)



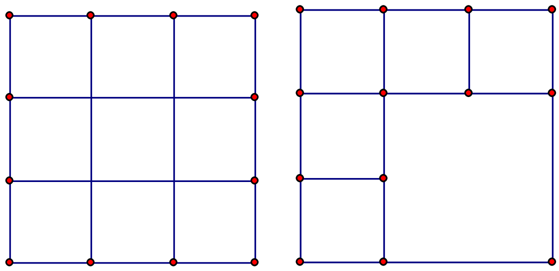
(圖 1-1)　(圖 1-2)　(圖 1-3)　(圖 1-4)

研究 2.

若 n 為大於 2 的自然數，則 $2n$ 是 NICE 數。

以此種切割法會得到不同大小的正方形，以此作圖方式先用研究 1 的切割法將正方形以 $\frac{1}{n}$ 為單位常做切割，得正方形塊數 n^2 (圖 2-1)

再將 $(1-\frac{1}{n})^2$ 合併，得正方形塊數 $n^2-(n-1)^2+1$(圖 2-2)



(圖 2-1)　(圖 2-2)

證明：

當 n=2, $n^2-(n-1)^2+1$

$$=n^2-n^2+2n-1+1$$

$$=2n$$

2n=4, 4 為 NICE 數，成立。(圖 2-3)

若 n=k, $k^2-(k-1)^2+1=2k$ (圖 2-4)

則 n=k+1 時

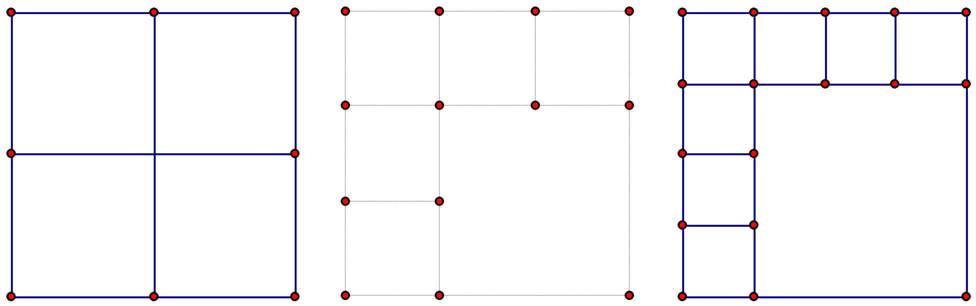
$$(k+1)^2-[(k+1)-1]^2+1$$

$$=k^2+2k+1-k^2+1$$

$$=2k+2$$

$$=2(k+1)$$

成立(圖 2-5)



(圖 2-3) (圖 2-4) (圖 2-5)

研究 3.
若 m 為自然數, 3m+1 為 NICE 數。

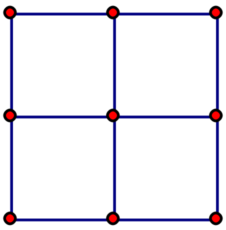
證明：

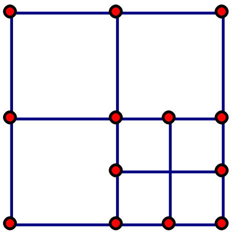
當 m=1 時，以 $\frac{1}{2}$ 為邊長做切割，得 4 個正方形，則 4 為 NICE 數。(圖 3-1)

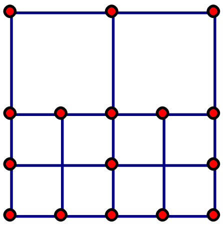
再將其中一塊以 $\frac{1}{4}$ 為邊長做切割，得到 $4-1+4=7$ 塊正方形，則 7 為 NICE 數，此時 m=2。(圖 3-2)

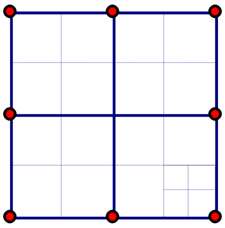
再將其中一塊以 $\frac{1}{4}$ 為邊長做切割，得到 $4+(-1+4)+(-1+4)=10$ 塊正方形，則 10 為 NICE 數，此時 m=3。(圖 3-3)

可知每做一次切割皆可多得到 $(-1+4)$ 塊，而第一次切割(m=1)則是 4 塊，所以 m=1 時是 3+1 塊，故 3m+1 為 NICE 數。(圖 3-4)


(圖 3-1)


(圖 3-2)


(圖 3-3)


(圖 3-4)

研究 4. 若 m 為自然數，則 8m+1 為 NICE 數。

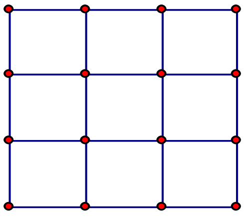
證明：

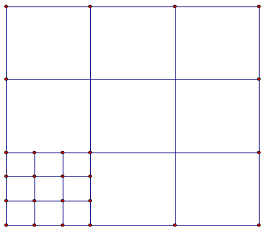
當 m=1 時，以 $\frac{1}{3}$ 為邊長做切割，得 9 個正方形，則 9 為 NICE 數。(圖 4-1)

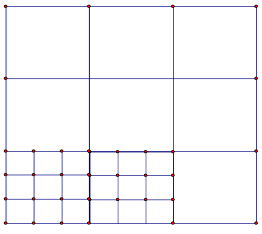
再將其中一塊以 $\frac{1}{9}$ 為邊長做切割，得到 $9-1+9=17$ 塊正方形，則 17 為 NICE 數，此時 m=2。(圖 4-2)

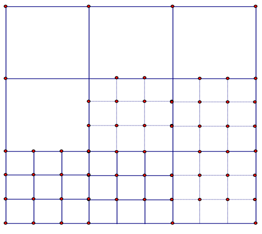
再將其中一塊以 $\frac{1}{9}$ 為邊長做切割，得到 $9+(-1+9)+(-1+9)=25$ 塊正方形，則 25 為 NICE 數，此時 m=3。(圖 4-3)

可知每做一次切割皆可多得到 $(-1+9)$ 塊，而第一次切割(m=1)則是 9 塊，所以 m=1 時是 8+1 塊，故 3m+1 為 NICE 數。(圖 4-4)


(圖 4-1)


(圖 4-2)


(圖 4-3)


(圖 4-4)

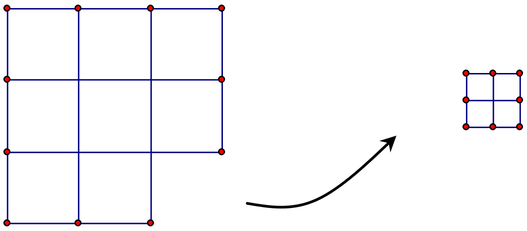
研究 5

若 k 為 NICE 數，則 k+3 為 NICE 數。

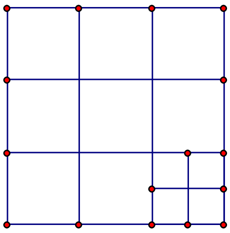
證明：

舉例：將原數 9 的其中一塊抽出並分割成 4 塊(以該正方形的 $\frac{1}{2}$ 做切割)(圖 5-1)

可得 9-1+4=12 塊正方形，可知若 k 為 NICE 數，則 k+3 為 NICE 數。(圖 5-2)



(圖 5-1)



(圖 5-2)

定理 1.

若 k 為 NICE 數, m 為自然數，則 $k+3m$ 為 NICE 數。

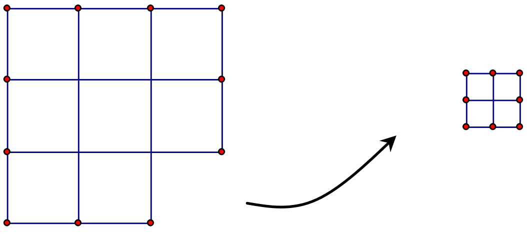
m 為切割次數

證明：

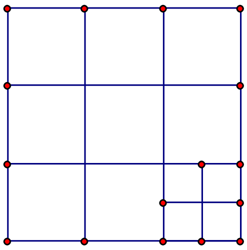
當 m=1 時，將原數 9 的其中一塊抽出並分割成 4 塊(以該正方形的 $\frac{1}{2}$ 做切割)(圖 6-1)

得 9-1+4=12(圖 6-2)

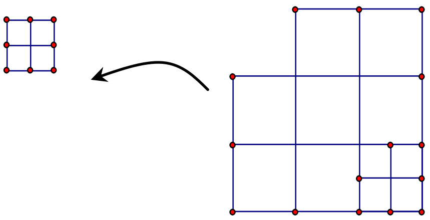
當 m=2 時，再將原數 9+3 的其中一塊抽出分割成 4 塊(以該正方形的 $\frac{1}{2}$ 做切割)(圖 6-3)得 9-1+4-1+4=9+3×2，可知若 k 為 NICE 數, m 為切割次數，則 $k+3m$ 為 NICE 數。(圖 6-4)



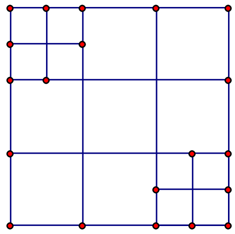
(圖 6-1)



(圖 6-2)



(圖 6-3)



(圖 6-4)

故 $k+3m$ 為 NICE 數。

若我們能找到 3 個連續自然數($n,n+1,n+2$)皆為 NICE 數，那即可利用定理 1，證明出 n 以上的自然數都是 NICE 數。

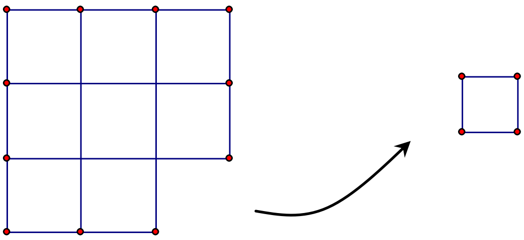
定理 2. 當 k_1 、 k_2 為 NICE 數，則 k_1+k_2-1 為 NICE 數。

證明：

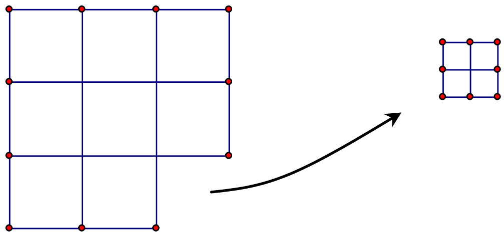
將 k_1 的其中一塊正方形抽出(k_1-1)(圖 7-1)

將抽出的正方形切割成 k_2 (圖 7-2)

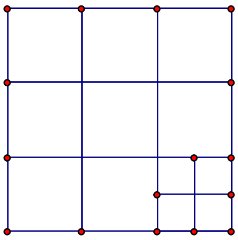
得 k_1-1+k_2，故 k_1+k_2-1 為 NICE 數(圖 7-3)



(圖 7-1)



(圖 7-2)



(圖 7-3)

結論 1.大於 5 的自然數皆為 NICE 數。

證明：

可以找到連續 3 個整數為 NICE 數：6、7、8。

6 與 8 是 NICE 數是根據研究 2.所有大於 2 的偶數皆為 NICE 數。

7 是 NICE 是根據研究 5.在 k=4 時 k+3=4+3=7。

再根據定理 1.便證明出大於 5 的所有自然數皆為 NICE 數。

研究 6.

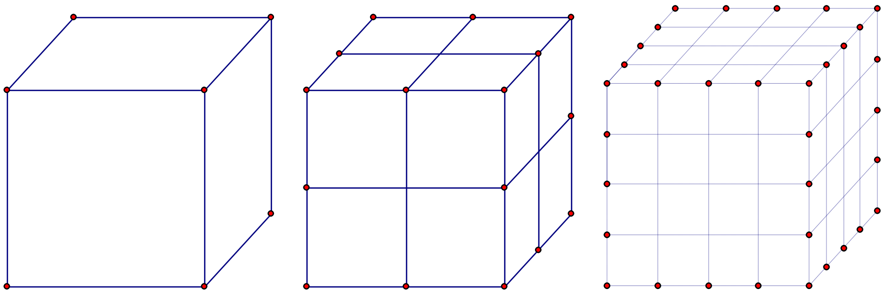
若 n 為自然數，則 n^3 為 very NICE 數。

證明：

當 n=1，$n^3=1$(切割成 1 個正方形), 1 為 very NICE 數。(圖 8-1)

當 n=2，$n^3=8$ (切割成 8 個正方形), 8 為 very NICE 數。(圖 8-2)

當邊長以 $\frac{1}{n}$ 做切割時，則切割成個 n^3 正方形，n^3 為 very NICE 數。(圖 8-3)



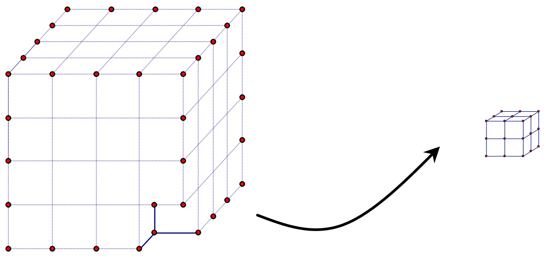
(圖 8-1) (圖 8-2) (圖 8-3)

研究 7

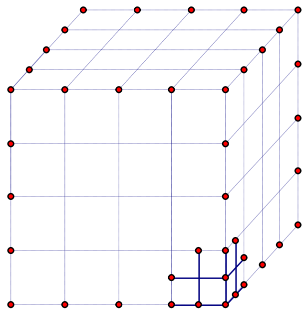
若 k 為 very NICE 數，則 k+7 為 very NICE 數。

證明：

將原數 k 的其中一塊抽出並分割成 8 塊(以該正方形的 $\frac{1}{2}$ 做切割)(圖 9-1)



(圖 9-1)



(圖 9-2)

可得 k-1+8=k+7 塊正方形，故 k+7 為 very NICE 數(圖 9-2)

定理 3.

若 k 為 very NICE 數, m 為自然數，則 k+7m 為 very NICE 數。

m 為切割次數

證明：

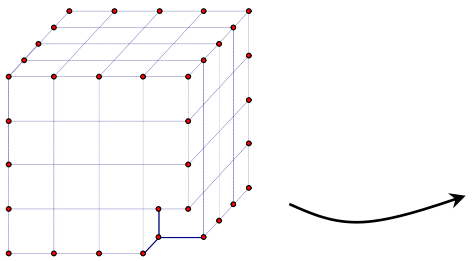
當 m=1 時，將原數 k 的其中一塊抽出(k-1)(圖 10-1)

並分割成 8 塊(以該正方形的 $\frac{1}{2}$ 為邊長做切割)(圖 10-2)得 k-1+8=k+7(圖 10-3)

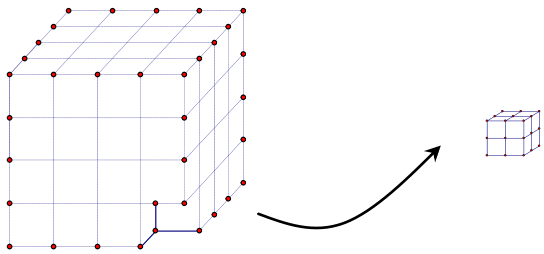
當 m=2 時，再將原數 k 的其中一塊抽出(k-1)(圖 10-4)

並分割成 8 塊(以該正方形的 $\frac{1}{2}$ 為邊長做切割)(圖 10-5)

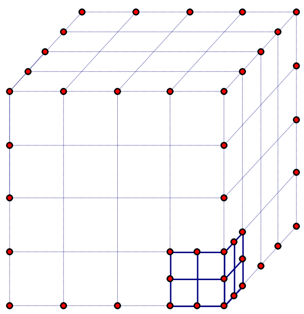
得 $k-1+8-1+8=k+7\times 2$(圖 10-6)



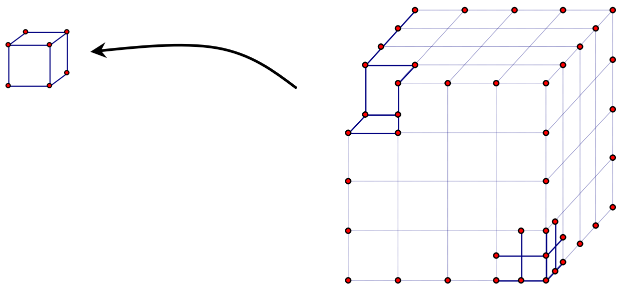
(圖 10-1)



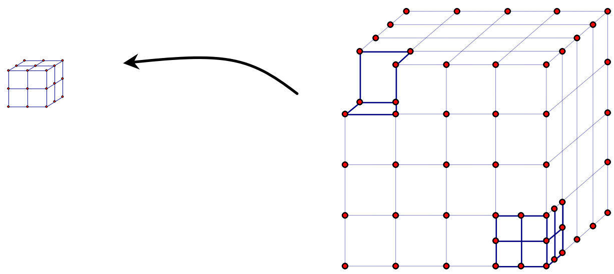
(圖 10-2)



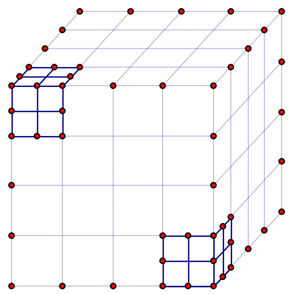
(圖 10-3)



(圖 10-4)



(圖 10-5)



(10-6)

故 k+7m 為 NICE 數。

與平面相同，因為 2^3 會切割成 8 塊(共計+7)，所以若我們能找到 7 個連續整數($n,n+1,n+2,n+3,n+4n+5,n+6,$)皆為 very NICE 數，那即可利用定理 2 的切割法證明出 n 以上的自然數都是 very NICE 數。

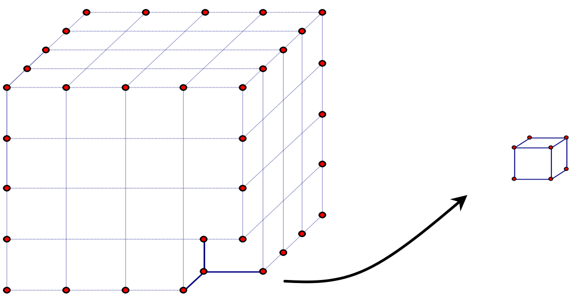
定理 4.
當 k_1 、 k_2 為 very NICE 數，則 k_1+k_2-1 為 very NICE 數。

證明：

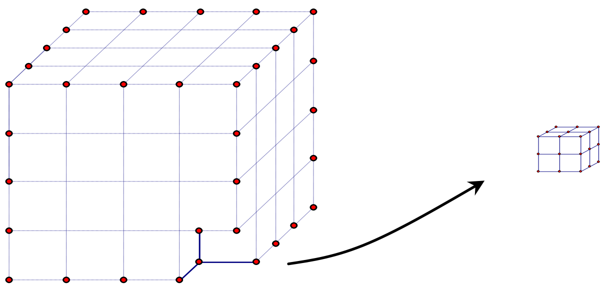
將 k_1 的其中一塊正方形抽出(k_1-1)(圖 11-1)

將抽出的正方形切割成 k_2 (圖 11-2)

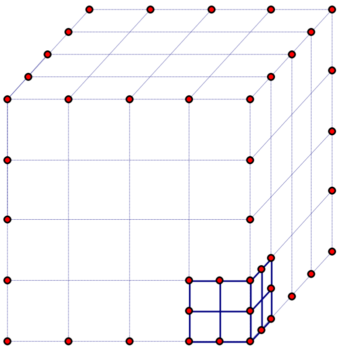
得 k_1-1+k_2，故 k_1+k_2-1 為 NICE 數(圖 11-3)



(圖 11-1)



(圖 11-2)



(圖 11-3)

研究 8. 若 n 為 ≥ 2 的自然數，$3n^2-3n+2$ 為 very NICE 數。

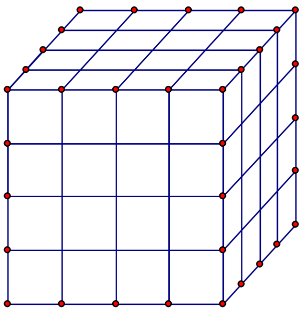
以此種切割法會得到不同大小的正方體，以此作圖方式先用研究 7 的切割法將正方體以 $\frac{1}{n}$ 為單位常做切割，得正方體塊數 n^3(圖 12-1)

再將當中的 $(n-1)^3$ 塊合併，得到一塊邊長為 $1-\frac{1}{n}$ 的正方體

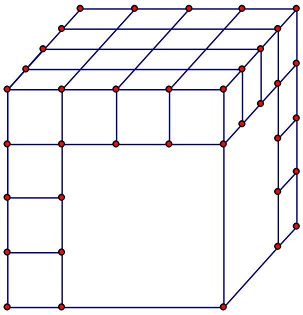
$$n^3-(n-1)^3+1$$

$$=3n^2-3n+2$$

得正方體塊數 $3n^2-3n+2$(圖 12-2)



(圖 12-1)



(圖 12-2)

證明：

當 $n=2$, $n^3-(n-1)^3+1=8$, 8 為 very NICE 數。(圖 12-3)

當 $n=k$, $k^3-(k-1)^3+1=3k^2-3k+2$ 。 (圖 12-4)

當 $n=k+1$, $(k+1)^3-[(k+1)-1]^3+1$

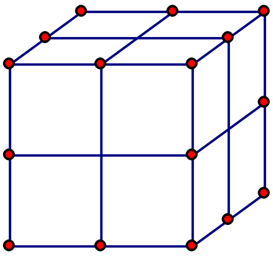
$$=k^3+3k^2+3k+1-k^3+1$$

$$=3k^2+3k+2$$

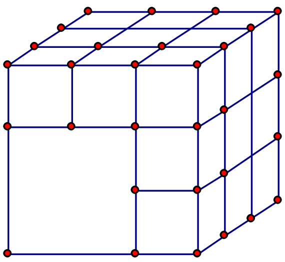
$$=3k^2+6k+3-3k-3+2$$

$$=3(k+1)^2-3(k+1)+2$$ 成立。(圖 12-5)

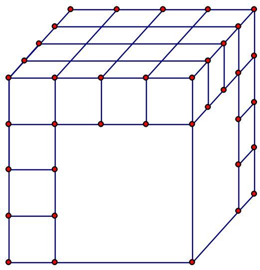
故 $n^3-(n-1)^3+1$ 為 very NICE 數。



(圖 12-3)



(圖 12-4)



(圖 12-5)

底下利用表格呈現出「$3n^2-3n+2$」$n=2\sim6$ 做出來的 very NICE 數：

$3n^2-3n+2$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
very NICE 數	8	20	38	62	92

研究 9.

在研究 8.所我得到的 very NICE 數，利用定理 3 的切割法可以得到底下 very NICE 數列。

由定理 3.可知：只要 k 為 very NICE 數，則 $k+7m$ 為 very NICE 數。我們在研究 8.得到數列 8、20、38、62…，若將此數列利用定理 3.的切割法持續加 $7m$，是否能包含 47 以上所有 very NICE 數？

內容：

8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78	85	92	99	106	113	…
20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	97	104	111	118	125	…
38	45	52	59	66	73	80	87	94	101	108	115	122	129	136	143	…
62	69	76	83	90	97	104	111	118	125	132	139	146	153	160	167	…
92	99	106	113	120	127	134	141	148	155	162	169	176	183	190	197	…

從上表可以看出來，利用研究 9.做出來的 very NICE 數列有些會重複！

若要包含 47 以上所有數，我們需要得到一組數列除以 7 之後餘數含 0、1、2、3、4、5、6，但將研究 8.製做出的 very NICE 數 8、20、38、62、92 除以 7 時會得到：

$8\equiv 1(\bmod 7)$；$20\equiv 6(\bmod 7)$；$38\equiv 3(\bmod 7)$；$62\equiv 6(\bmod 7)$；$92\equiv 1(\bmod 7)$

以 8 開頭的 very NICE 數列來看，8 到 15 是加 7，15 到 22 也是加 7，所以數列除以 7 皆是餘 1，以此類推，8 跟 92 除以 7 皆是餘 1，因此 8 開頭與 92 開頭的 very NICE 數列將會重複，20 與 62 數列除 7 皆於 6，則 20 開頭與 62 開頭的 very NICE 數列就會重複。

研究 10.

利用研究 8.「$3n^2-3n+2$」的切割方法求出 very NICE 數列。

在研究 9.得到的 5 個數 8、20、38、62、92 除 7 得到 1、6、3、6、1，猜想若將 n 加大，會得到何數列？

我的想法是，如果把這一組 very NICE 數當成開頭，每一個 very NICE 數再做切割

(如定理 2 的證明)，將得到幾組數列，如此一來可否證明出大於 47 的自然數皆為 very NICE 數？

「$3n^2-3n+2$」切割法	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13	n=14	n=15	
very NICE 數	8	20	38	62	92	128	170	218	272	332	398	470	548	632	
「$3n^2-3n+2$」切割法	n=16	n=17	n=18	n=19	n=20	n=21	n=22	n=23	n=24	n=25	n=26	n=27	n=28	n=29	…
very NICE 數	722	818	920	1028	1142	1262	1388	1520	1658	1802	1952	2108	2270	2438	…

答案是否定的，我只要把這組 very NICE 數列除以 7，就能清楚的看出來，請看下表：

very NICE 數	8	20	38	62	92	128	170	218	272	332	398	470	548	632
mod 7	1	6	3	6	1	2	2	1	6	3	6	1	2	2

延續上表

very NICE 數	722	818	920	1028	1142	1262	1388	1520	1658	1802	1952	2108	2270	2438	…
mod 7	1	6	3	6	1	2	2	1	6	3	6	1	2	2	…

可以清楚看到循環出現 $1(\bmod 7)$ 、 $6(\bmod 7)$ 、 $3(\bmod 7)$ 、 $6(\bmod 7)$ 、 $1(\bmod 7)$ 、 $2(\bmod 7)$ 、 $2(\bmod 7)\ldots$，而 $0(\bmod 7)$ 、 $4(\bmod 7)$ 與 $5(\bmod 7)$ 則沒有出現，所此方法無法證明出所有大於 47 的自然數皆為 very NICE 數。

研究 11.

重複利用 $3n^2-3n+2$ 的方法，試著找出 very NICE 數。

說明：

在原數列中 $20\equiv 6(\bmod 7)$ ，但若是以 k_1+k_2-1 的方法相加呢？ 20+20-1=39 $\equiv 4(\bmod 7)$，20+39-1=58 $\equiv 2(\bmod 7)\ldots$我們將其整理成表格以尋規律。

$n=2$ very NICE 數	8	15	22	29	36	43	50
$n=3$ very NICE 數	20	39	58	77	96	115	134
$n=4$ very NICE 數	38	75	112	149	186	223	260
$n=5$	62	123	184	245	306	367	428

very NICE 數							
$n=6$ very NICE 數	92	183	274	365	456	547	638
$n=7$ very NICE 數	128	255	382	509	636	763	890
$n=8$ very NICE 數	170	339	508	677	846	1015	1184

研究 12.

所有 71 以上的自然數都是 very NICE 數。

$n=2$ Very NICE 數	8 $\equiv 1 \pmod 7$	15 $\equiv 1 \pmod 7$	22 $\equiv 1 \pmod 7$	29 $\equiv 1 \pmod 7$	36 $\equiv 1 \pmod 7$	43 $\equiv 1 \pmod 7$	50 $\equiv 1 \pmod 7$
$n=3$ Very NICE 數	20 $\equiv 6 \pmod 7$	39 $\equiv 4 \pmod 7$	58 $\equiv 2 \pmod 7$	77 $\equiv 0 \pmod 7$	96 $\equiv 5 \pmod 7$	115 $\equiv 3 \pmod 7$	134 $\equiv 1 \pmod 7$
$n=4$ Very NICE 數	38 $\equiv 3 \pmod 7$	75 $\equiv 5 \pmod 7$	112 $\equiv 0 \pmod 7$	149 $\equiv 2 \pmod 7$	186 $\equiv 4 \pmod 7$	223 $\equiv 6 \pmod 7$	260 $\equiv 1 \pmod 7$
$n=5$ Very NICE 數	62 $\equiv 6 \pmod 7$	123 $\equiv 4 \pmod 7$	184 $\equiv 2 \pmod 7$	245 $\equiv 0 \pmod 7$	306 $\equiv 5 \pmod 7$	367 $\equiv 3 \pmod 7$	428 $\equiv 1 \pmod 7$
$n=6$ Very NICE 數	92 $\equiv 1 \pmod 7$	183 $\equiv 1 \pmod 7$	274 $\equiv 1 \pmod 7$	365 $\equiv 1 \pmod 7$	456 $\equiv 1 \pmod 7$	547 $\equiv 1 \pmod 7$	638 $\equiv 1 \pmod 7$
$n=7$ Very NICE 數	128 $\equiv 2 \pmod 7$	255 $\equiv 3 \pmod 7$	382 $\equiv 4 \pmod 7$	509 $\equiv 5 \pmod 7$	636 $\equiv 6 \pmod 7$	763 $\equiv 0 \pmod 7$	890 $\equiv 1 \pmod 7$
$n=8$ Very NICE 數	170 $\equiv 2 \pmod 7$	339 $\equiv 3 \pmod 7$	508 $\equiv 4 \pmod 7$	677 $\equiv 5 \pmod 7$	846 $\equiv 6 \pmod 7$	1015 $\equiv 0 \pmod 7$	1184 $\equiv 1 \pmod 7$

上方表格中，標註顏色的方格為採用數字，呈現如下：

8 $\equiv 1 \pmod 7$	58 $\equiv 2 \pmod 7$	38 $\equiv 3 \pmod 7$	39 $\equiv 4 \pmod 7$	75 $\equiv 5 \pmod 7$	20 $\equiv 6 \pmod 7$	77 $\equiv 0 \pmod 7$

從定理 3.可知， 只要 k 是 very NICE 數，$k+7m$ 也是 very NICE 數，所以 8 是 very NICE 數，可以推得 71 也是 very NICE 數；58 是 very NICE 數，72 也是 very NICE 數；38 是 very NICE 數，73 也是 very NICE 數；39 是 very NICE 數，74 也是 very NICE 數；20 是 very NICE 數，76 也是 very NICE 數。

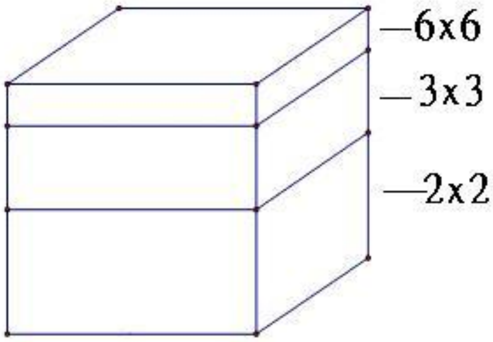
研究 13.

49 為 very NICE 數。

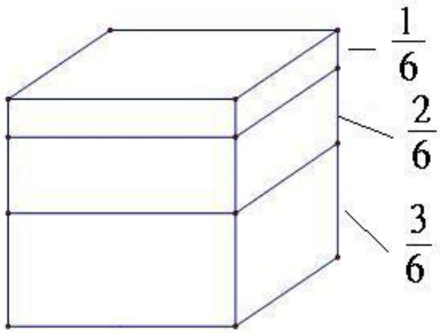
將邊長以$\frac{1}{6}$為單位做切割，得邊長$\frac{1}{6}$、$\frac{2}{6}$、$\frac{3}{6}$(圖 13-1)

從分層可知，每邊塊數為其相對 6 的因數(圖 13-2)

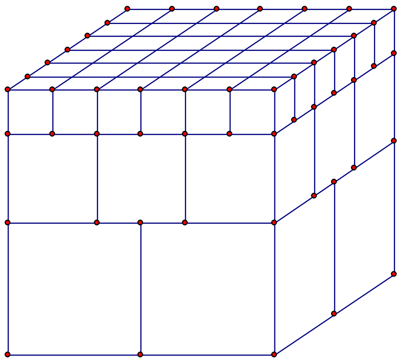
分解則得到塊數$2^2+3^2+6^2=49$(圖 13-3)



(圖 13-1)

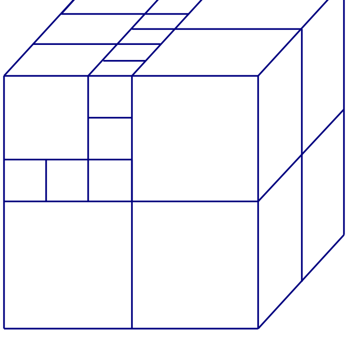


(圖 13-2)

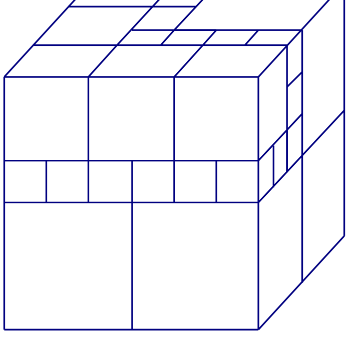


(圖 13-3)

此種切割法稱為 3 種塊數的分割(我們定義為 Size3)，以此方法可切割成許多數，下以 39、51 為例(圖 13-4) (圖 13-5)：



(圖 13-4)



(圖 13-5)

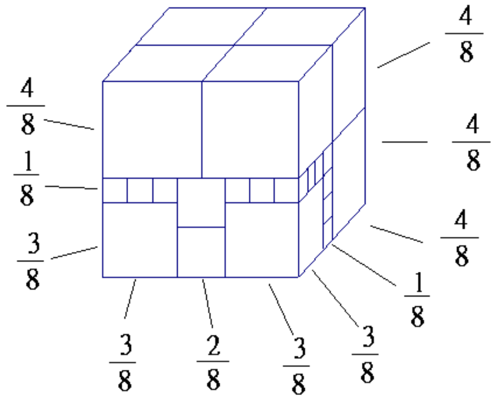
研究 14.

54 為 very NICE 數。

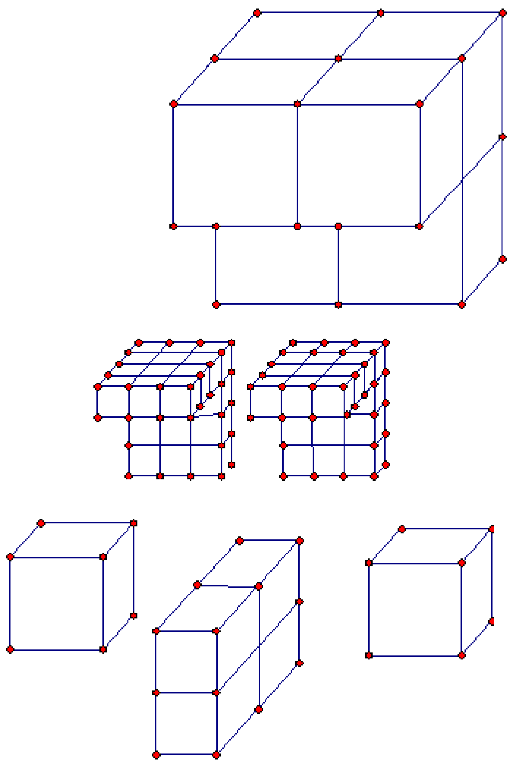
將邊長以 $\frac{1}{8}$ 為單位做切割，得邊長 $\frac{1}{8}$ 、$\frac{2}{8}$ 、$\frac{3}{8}$ 、$\frac{4}{8}$ (圖 14-1)

從分層可知，每邊塊數相加皆為 8

分解則得到塊數 $6+2+4+42=54$ (圖 14-2)



(圖 14-1)



(圖 14-2)

39 是 very NICE 數，透過$\boxed{定理 2.}$ 只要 k 是 very NICE 數，$k+7m$ 也是 very NICE 數，所以 46、53、60、67 也是 very NICE 數。

49 為 very NICE 數，再透過$\boxed{定理 2.}$ 只要 k 是 very NICE 數，$k+7m$ 也是 very NICE 數，所以 56、63、70 也是 very NICE 數。

54 為 very NICE 數。再透過$\boxed{定理 2.}$ 只要 k 是 very NICE 數，$k+7m$ 也是 very NICE 數，所以 61、68 也是 very NICE 數。

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77

參、 研究結果與討論

一、 研究結果

1. 正方形切割的推導結果

(1) 若 n 為自然數， 則 n^2 為 NICE 數。

(2) 若 n 為 ≥ 2 的自然數， 則 $2n$ 是 NICE 數。

(3) 若 m 為自然數, $3m+1$ 為 NICE 數。

(4) 若 m 為自然數, $8m+1$ 為 NICE 數。

(5) 若 k 為 NICE 數，則 $k+3$ 為 NICE 數

(6) 若 k 為 NICE 數，則 $k+3m$ 為 NICE 數

(7) 當 k_1 、k_2 為 NICE 數，則 k_1+k_2-1 為 NICE 數

(8) 除了 2、3、5 的自然數都是 very NICE 數。

2. 立方體切割的推導結果

(1) 若 n 為自然數，則 n^2 為 very NICE 數。

(2) 若 k 為 very NICE 數，則 k+7 為 very NICE 數。

(3) 若 k 為 very NICE 數，則 k+7m 為 very NICE 數。

(4) 若 k_1 、k_2 為 very NICE 數，則 k_1+k_2-1 為 very NICE 數。

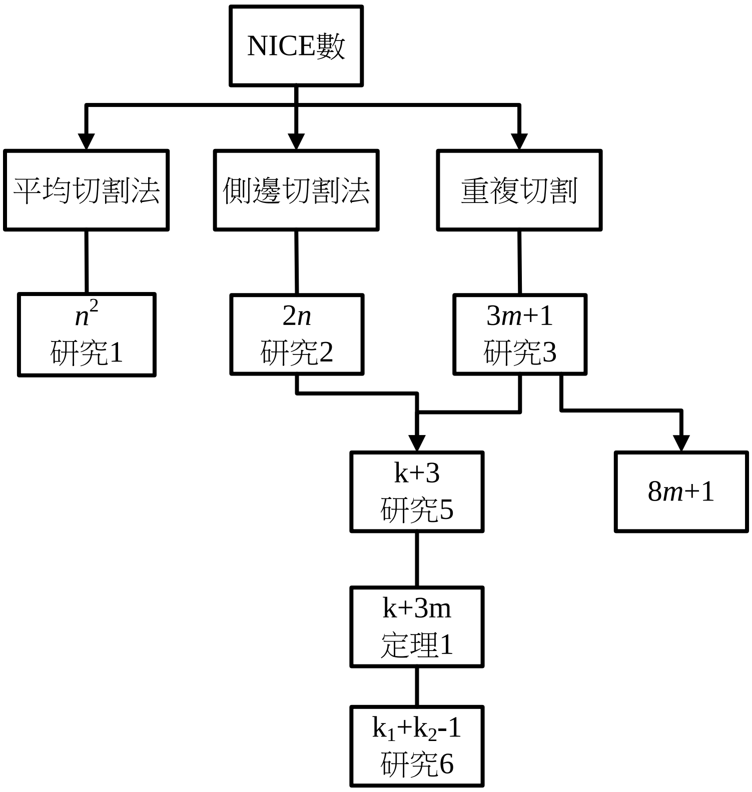
(5) 若 n 為 ≥ 2 的自然數，$3n^2-3n+2$ 為 very NICE 數。

(6) 49 為 very NICE 數。

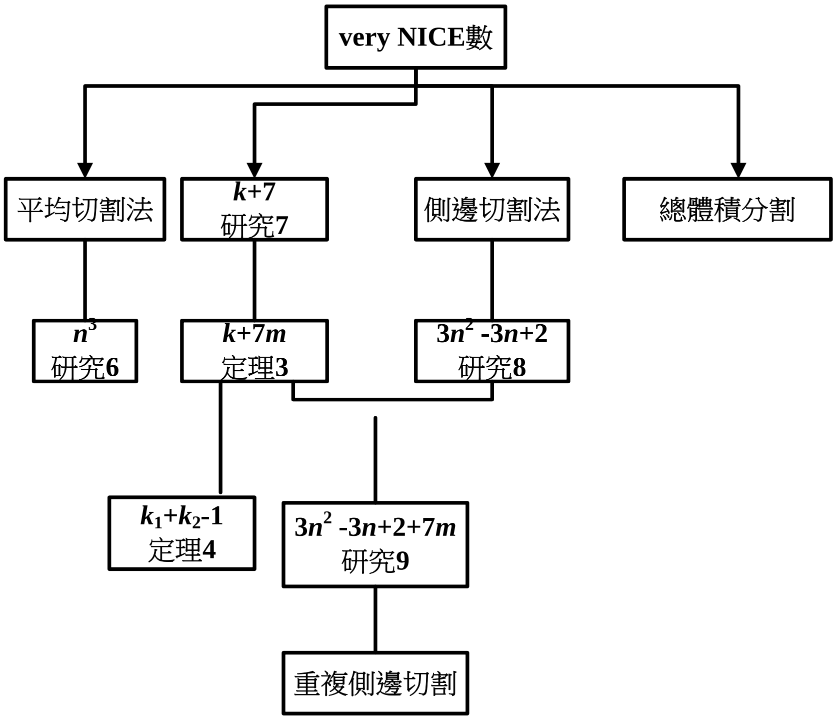
(7) 54 為 very NICE 數。

(8) 大於 47 以上的自然數都是 very NICE 數。

3. 平面正方形的切割討論，我們將 NICE 數的一般化結果的關係，列出下圖來表示：

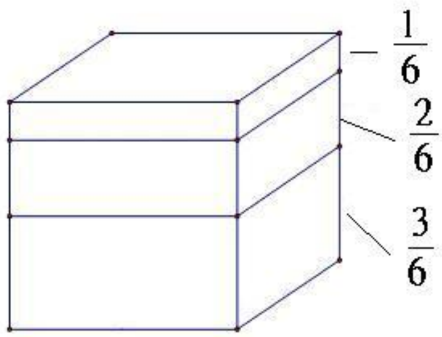


4. 正立方體的切割討論，我們將 very NICE 數的一般化結果的關係，列出下圖來表示：

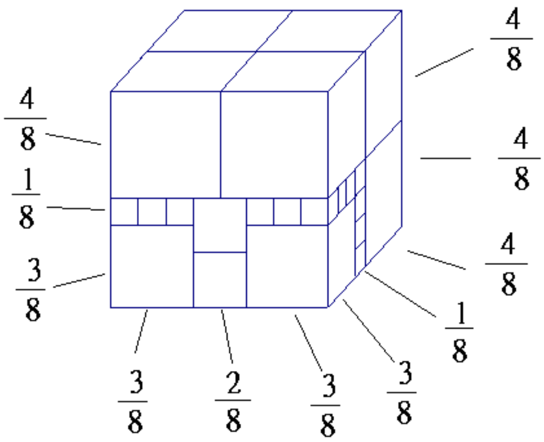


二、 討論

在 $3n^2-3n+2$ 與 k+7m 切割法的相關應用中，便能證明出 71 以上的數皆為 very NICE 數，而 49 與 54 兩數的作法，則是討論的重點。(圖 15-1) (圖 15-2)



(圖 15-1)



(圖 15-2)

若將(圖 15-1)與(圖 15-2)的邊長作為 6 與 8 來看，則可知道在(圖 15-1)中，1^3 共

有 36 塊，而 2^3 有 4 塊，3^3 則是 4 塊，加總起來剛好等於 $6^3=216$ 塊。

可列式出：

$4\times3^3+9\times2^3+36\times1^3=63$, $36+9+4=49$

若是將數字以代數帶入，則可得

$$x\times3^3+y\times2^3+z\times1^3=216$$

$$\begin{cases} x\times27+y\times8+z\times1=216 \\ x+y+z=49 \end{cases}$$

$$26x+7y=167$$

得整數解 $x=4$, $y=9$, $z=36$

當 $x+y+z=k$ 呢?

作了這個猜想後，我將 k 以自然數代入，竟也得到了許多組整數解：

$$x\times3^3+y\times2^3+z\times1^3=216$$

$k=39$, $x+y+z=39$, $x=6$ $y=3$, $z=30$

$k=47$, $x+y+z=47$, $x=3$, $y=13$, $z=31$

$k=51$, $x+y+z=51$, $x=5$ $y=5$, $z=41$

$k=54$, $x+y+z=54$, $x=3$ $y=12$, $z=39$

$k=58$, $x+y+z=58$, $x=5$ $y=4$, $z=49$

$k=59$, $x+y+z=59$, $x=2$, $y=15$, $z=42$

$k=61$, $x+y+z=61$, $x=3$ $y=11$, $z=47$

$k=63$, $x+y+z=63$, $x=4$ $y=7$, $z=52$

以這些整數解為例，找出 x、y、z 之間的關係。

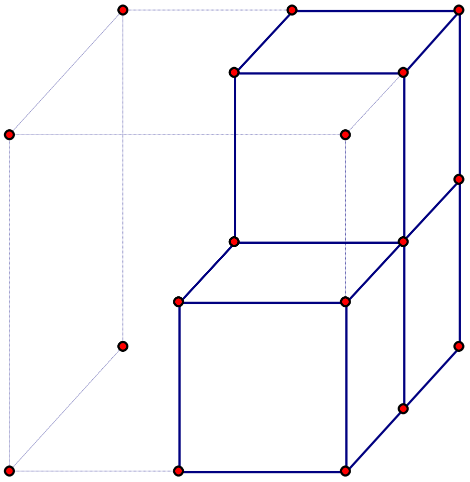
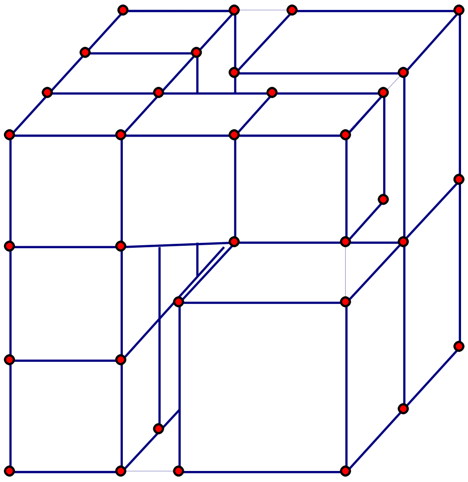
雖然找到了許多整數解，但在作圖時卻有一些是無法做出的：

$x+y+z=47$, $x=3$, $y=13$, $z=31$

$x+y+z=54$, $x=3$ $y=12$, $z=39$

先給定 $x=3$(圖 15-3)

當 $x=3$ 時，$y\leq11$(圖 15-4)

(圖 15-3) (圖 15-4)

所以可以給定一些條件：

x=1 時, $y\leq 19$

x=2 時, $y\leq 15$

x=3 時, $y\leq 11$

x=4 時, $y\leq 9$

x=5 時, $y\leq 5$

x=6 時, $y\leq 3$

x=7 時, $y\leq 1$

因為當 x=8 時, 總數 k=8, 故 $x\leq 7$

$x+y+z=47$, x=31, y=13, z=3

因為 $y>11$, 所以是無法做出的。

在此再定義 Size1、Size2、Size3, 如下：

Size1：在立方體切割時只能夠切出一種大小。

Size2：在立方體切割時只能夠切出兩種大小。

Size3：在立方體切割時只能夠切出三種大小。

依此類推。

在立方數的部份, 可分為 Size1 所呈的數, Size2 所呈的數, Size3 所呈的數…

Size1 所呈的數：

因為只有 1 種大小的正方體，故每塊正方體大小皆相同，所以為 n^3。

Size2 所呈的數：

共有 2 種大小的正方體，可分為大與小的正方體，為 $3n^2-3n+2$。

Size3 所呈的數：

$$26x+7y+z=216,$$

$$x+y+z=k,$$

$$x\le 216,\ y\le 11,\ z\le 7$$

而在上述中 54 即為 Size4 所呈現的數。在 Size 3 中的數以 1^3、2^3、3^3 為單位做切割時, 1＋2＋3＝6, 總數則為 216。但 54 雖然是以 1^3、2^3、3^3、4^3 為單位做切割，但總數卻是 $8^3=512$，因此討論的時候，便做了 2 種總數的例子。

因為 47 為原題目設想無法切割成的數，因此拿 47 為例，希冀有所突破。

總數=512, k=47：

列式：

$$\begin{cases}64x+27y+8z+w=512\\ x+y+z+w=47\end{cases}$$

$$63x+26y+7z=465$$

$$x=1,\ 26y+7z=402,\ x=1,\ y=14,\ z=4,\ w=28$$

$$x=2,\ 26y+7z=339,\ x=2,\ y=2,\ z=41,\ w=2$$

$$x=3,\ 26y+7z=276$$

$$x=4,\ 26y+7z=213,\ x=4,\ y=2,\ z=23,\ w=18$$

$$x=5,\ 26y+7z=150,\ x=5,\ y=2,\ z=14,\ w=26$$

$$x=6,\ 26y+7z=97$$

$$x=7,\ 26y+7z=34$$

但與 Size3 的數相同, Size4 的數也有一些限制，因為是以正方體做切割，因此邊長為一定值：

$$\begin{cases} x < 8 \\ y < 27 \\ z < 125 \\ w < 1000 \\ x, y, z, w < k \end{cases}$$

舉例來說, S=1000, k=47 時，我們列式如下：

$$\begin{cases} 64x + 27y + 8z + w = 1000 \\ x + y + z + w = 47 \end{cases}$$ ，其中 x, y, z, w 均為正整數。

因此，符合聯立方程式，以及切割的限制下，我們得到

$$x = 4,\ 26y + 7z = 701,\ x = 4,\ y = 26,\ z = 6,\ w = 11$$

$$x = 5,\ 26y + 7z = 638,\ x = 5,\ y = 23,\ z = 10,\ w = 9$$

$$x = 6,\ 26y + 7z = 575,\ x = 6,\ y = 17,\ z = 19,\ w = 7$$

$$x = 7,\ 26y + 7z = 512,\ x = 7,\ y = 17,\ z = 10,\ w = 13$$

雖有在結果中發現了許多整數解，但都不能符合分割的限制條件，因此 47 在 Size3 與 Size4 的討論中，無法符合 very NICE 的條件。

在討論立方體的部份，若正方體的大小個數為分類依據，目前得出以下的結果：

(a) 符合只能切出 1 種大小的情形下：very NICE 數必為 n^3。

(b) 符合只能切出 2 種大小的情形下：very NICE 數必為 $3n^2-3n+2$。

(c) 符合只能切出 3 種大小的情形下：

$$\begin{cases} xa^3 + yb^3 + zc^3 = S \\ x + y + z = k \end{cases}$$

其中 x, y, z 為正整數, k 為 very NICE 數, a, b, c 為 3 種大小的整數比,

S 為立方體體積。

(d) 符合只能切出 4 種大小的情形下：

$$\begin{cases} xa^3 + yb^3 + zc^3 + wd^3 = S \\ x + y + z + w = k \end{cases}$$

其中 x, y, z, w 為正整數, k 為 very NICE 數，a, b, c, d 為 3 種大小的整數比, S 為立方體體積。

而且我們發現，只要 k 是 very NICE 數，$k+7m$ 為 very NICE 數，在加 $7m$ 時所增加的 Size 數，須要再另外計算。

肆、 結論與應用

（一） 在平面的正方形切割的問題，透過分割技巧，我們得出了重要的結果：除了 2、3、5 以外的自然數都是 NICE 數，並推導出：若 k 為 NICE 數，m 為自然數，則 $k+3m$ 為 NICE 數。

（二） 在立方體的切割，我們也得出重要的結果：大於 47 的自然數皆為 very NICE 數，並推導出：若 k 是 very NICE 數，且 m 是自然數，則 $k+7m$ 為 very NICE 數。

（三） 在正方形切割與正方體切割，我們皆可實際找出切割方式。

伍、 參考文獻

1. John Mason with Leone & Kaye Stacey 。Thinking Mathematically。(1998)
2. 林怡君、葉姝昀、劉欣瑜。(2005)。完美正方形。中華民國第四十五屆中小學科學展覽會作品說明書。
3. 建中 49 屆。數學思考。台北市：九章出版社。(1998)
4. 吳振奎、吳旻。塔爾塔利亞（109-110 頁）。九章出版社。（2002）
5. 黃敏晃。（2011）。切成幾個小正方形。科學教育期刊 50 卷第 10 期。

評語

本研究定義如果一個正方形能夠被切割成 N 個不重疊的正方形(大小可以不同)。則稱 N 為 Nice 數。此外，如果一正立方體能夠被切割成 N 個不重疊的正立方體，則稱 N 為 Very Nice 數。本研究提出切割法，並討論何種情形下可為 Nice 數或 Very Nice 數。本研究相當平穩，而且有配合積木協助思維與說明。

至於本研究可以改進的地方，可以朝增加研究內容的豐富性著手，例如拍攝相關積木的照片以協助說明，另外可以考慮研究成果的應用，以及將問題作有意義的延伸，另外建議徹底研究方程組$x_1a_1^3+\cdots+x_ka_k^3=S,\ x_1+\cdots+x_k=n$的各種性質。