

2013 臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

作品編號 010002

參展科別 數學科

作品名稱 勻稱分割

得獎獎項 四等獎

就讀學校 新竹市立光華國民中學

國立科學工業園區實驗高級中學

指導教師 蕭慶利

作者姓名 李承穎、林宇軒

關 鍵 字 全分割、頂點組態、勻稱分割

作者簡介



我的名字是林宇軒，今年十六歲，目前就讀國立科學工業園區實驗高級中學的科學班，家中一共有四個人，除了爸爸、媽媽，還有一位妹妹。

我對科學非常有興趣，一直期望自己將來能成為世界上最偉大的科學家，可以發掘出各種新鮮有趣的科學原理，並樂在其中。平時，我最常做的事情就是閱讀課外讀物，不論是科普書籍、物理或是數學...等，都是我喜愛看的書。因為我對於吸取新知識有強烈的慾望，而閱讀正好可以滿足我的需求，我也總是能在書中找到很大的樂趣。

在數學方面，我發現光靠閱讀與算題目是滿足不了我的求知慾望，因此數學方面的研究也成了我經常做的事情，只要一枝筆和一張紙，再加上豐富的想像力，我便能開心的遨遊在研究數學的世界裡。

課業之餘，我本身也是校內田徑隊的隊員。參加田徑隊除了能訓練我的體能外，還能舒緩我在課業上的壓力，並增強我的學習耐力，雖然訓練很辛苦，但是我卻是甘之如飴。

「成功是留給有準備的人」，希望在不斷地學習下，我能一步一步實現我的夢

想，成為世界上最偉大的科學家。



我是李承穎，一位就讀新竹市立光華國中，在水深火熱的考試中仍努力充實自己內涵的國三生。熱愛數學，對於探索數學中幾何代數的詞藻，情有獨鍾；在面對數學更深層的領域時，會以熱忱持續接觸，樂此不疲。

對我而言，數學是文學，也是藝術，將它拼湊、重組，再解讀它，能發現理性外，不失感性的一面。研究數學，使我更明白它、貼近它、體會它存於人生的生活美學。

摘要

本研究主要透過不同的向度與規則，延續之前的研究。我們證明了頂點組態僅含有單一種秩數的 (n, m, n) 勻稱分割共有 5 種；頂點組態中含有兩種不同秩數的 (n, m, n) 勻稱分割，其 n 的最大值為 5，共有 13 種；頂點組態中含有三種不同秩數的 (n, m, n) 勻稱分割，其 n 的最大值為 4，共有 3 種；而頂點組態中含有 k 種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割在 $k > 3$ 時無解；最後，我們透過 GSP 軟體將所有解的圖形繪製出。

Abstract

With different rules and direction, this study continued a former study. In this study, we've proved that there are five solutions exist in the (n,m,n) regular partition of the vertex group with one degree. Thirteen solutions exist in the (n,m,n) regular partition of the vertex group with two different degrees (The maximum of n is 5). Three solutions exist in the (n,m,n) regular partition of the vertex group with three different degrees (The maximum of n is 4). And moreover there is none when the degree number is more than 3. Lastly, we draw out all solutions by GSP.

壹、 研究動機

在之前的研究[1]中，探討了多邊形內部分割的相關性質，而在研究中只探討有關所有點秩數均為單一種秩數之分割情形。因此我們思考是否存在一個全分割，其有多種秩數之分割情形？我們決定朝這個方向研究。

貳、 研究目的

1. 探討 (n, m, n) 勻稱分割在各種不同秩數狀態下其解的情形。
2. 探討 (n, m, n) 勻稱分割在 k 種不同秩數狀態下 ($k > 3$)，其解的存在性與否。
3. 運用數學軟體 GSP 將所有 (n, m, n) 勻稱分割其解的圖形繪出。

參、 研究設備與器材

紙、鉛筆、GSP

肆、 研究過程

一、定義：

(一) 分割：

將一多邊形內部切割為數個多邊形的集合(邊數可不同)，並滿足下列兩條件：**(1)三角形內部不能有任何孤立點** **(2)線段與線段間交點僅能在所有給定點上**，我們就稱這是一種多邊形的「分割」。如下圖 1 中 (a)、(b)、(c) 三圖所示，由於在圖一(a)中 $\overline{AF}$ 、 $\overline{BE}$ 互相跨越、在圖 1(b) 中 E 點為孤立點，故兩者皆不是一個分割，而圖 1(c) 中皆滿足分割的定義，故圖 1(c) 為一種分割。

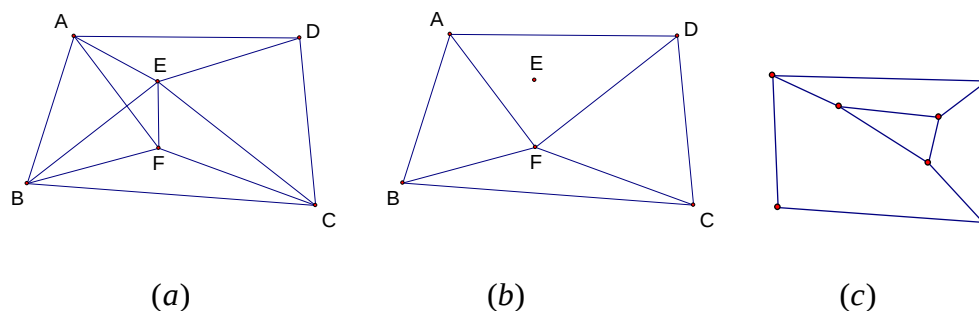


圖 1 多邊形的分割與非分割例圖

(二) 全分割：

當多邊形作內部分割時，若所切割出的多邊形邊數皆相同時，我們稱此分割為「全分割」¹。如下圖 2 所示，在圖 2(b) 的分割中，切出之多邊形邊數不全相同，故不是一個全分割；而圖 2(a) 的分割中，由於符合切割出來多邊形邊數皆相同的條件，故為全分割。而我們將 n 邊形，內部 m 個點，全部分割為 r 邊形時的全分割以符號 (n, m, r) 表示。

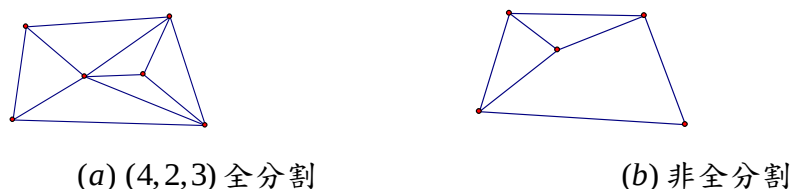


圖 2 全分割與非全分割例圖

(三) 多邊形頂點組態：

該點所連出去的邊數我們稱為該點的「秩」(degree)，我們以符號表示；而邊形中每個頂點所構成的秩數列，我們稱此秩數列為該邊形的「頂點組態」，以符號來表示，而當邊形進行內部分割，若所分割出來的所有多邊形均與原邊形的頂點組態相同時，我們稱這樣的分割為「勻稱分割」¹。如下圖 3 所示，該圖中有兩種不同秩數的頂點。

¹由於勻稱分割其若所分割出來的所有多邊形均與原 n 邊形的頂點組態均需相同的限制，故我們可知其 $n = r$

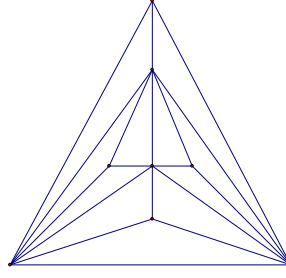


圖 3 勻稱的分割例圖(頂點組態 $[3,6,6]$)²

首先，先回顧之前研究所證明的全分割性質。

給定一任意 n 邊形，內部 m 個點，進行 (n,m,r) 全分割：

(1) r 邊形的個數總數部份：

令 (n,m,r) 全分割後 r 邊形的個數總數為 α 個，透過兩種不同的多邊形

內角和計算方式可求得：

$$\alpha \cdot (r-2) \cdot 180^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ + m \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{n+2m-2}{r-2} \quad (\text{其中 } r-2 \mid n+2m-2)$$

(2) 全分割之總邊數部份：

透過平面的尤拉公式 $V+F-E=1$ ：

初始條件： $V=n+m$ ， $F=\alpha=\frac{n+2m-2}{r-2}$ ， E 則為所求的總邊數。代

入後得：

$$V+F-E=1 \Rightarrow E=V+F-1 \Rightarrow E=(n+m)+\frac{n+2m-2}{r-2}-1=(n+m-1)+\frac{n+2m-2}{r-2}$$

(3) 所有點的秩數和部份：

假設 A 、 B 為 (n,m,r) 全分割圖形中的兩點，而 $\overline{AB}$ 為全分割圖形中的一邊。(如圖 3)由於 $\overline{AB}$ 在計算 A 點秩數時計算了一次，在計算 B 點秩數時又計算了一次，故我們可以得知：在 (n,m,r) 之全分割圖形中，所有點的秩數總和為總邊數的兩倍。

²由於勻稱分割其若所分割出來的所有多邊形均與原 n 邊形的頂點組態均需相同的限制，故我們可知其 $n=r$

亦即 $\sum_{i=1}^{n+m} D_i = 2E = 2(n+m-1) + \frac{2(n+2m-2)}{r-2}$ (其中 D_i 為 i 點的價數)

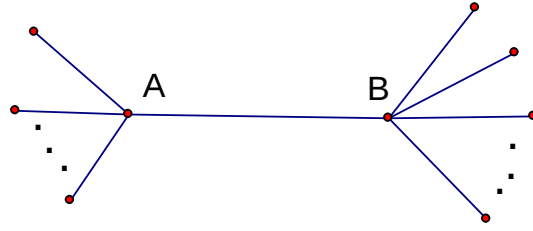


圖 3

接下來，我們先從單一秩數的勻稱分割開始探討：

二、單一秩數之勻稱分割

我們知道 (n, m, r) 之全分割其秩數總和為 $\sum_{i=1}^{n+m} D_i = 2(n+m-1) + \frac{2(n+2m-2)}{r-2}$ 。

由於秩數僅有單一種的關係(亦即所有點的秩數均相同)，故每個點的秩

數為： $D = (\sum_{i=1}^{n+m} D_i) \div (n+m) = 2 - \frac{2}{n+m} + \frac{2(n+2m-2)}{(n+m)(r-2)} = 2 + \frac{2(n+2m-r)}{(n+m)(r-2)}$ ，又

因為勻稱分割，故 $r=n$ 代入可得： $D = 2 + \frac{4m}{(n-2)(n+m)}$ 。底下我們分四

種情況討論：

Case1：當 $n=r=3$ 時

$$D = 2 + \frac{4m}{1(3+m)} = 6 - \frac{12}{m+3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{12}{m+3} \in \mathbb{N} \quad \therefore m+3 \mid 12 \quad \therefore m=1, 3, 9$$

(i) 當 $m=1$ 時， $D=3 \Rightarrow (3,1,3)$ 勻稱分割，此時總邊數 $E=6$ 、頂點組態 $[3,3,3]$

(ii) 當 $m=3$ 時， $D=4 \Rightarrow (3,3,3)$ 勻稱分割，此時總邊數 $E=12$ 、頂點組態 $[4,4,4]$

(iii) 當 $m=9$ 時， $D=5 \Rightarrow (3,9,3)$ 勻稱分割，此時總邊數 $E=30$ 、頂點組態 $[5,5,5]$

Case 2：當 $n=r=4$ 時

$$D = 2 + \frac{4m}{2(4+m)} = 4 - \frac{8}{m+4} \in N \Rightarrow \frac{8}{m+4} \in N \quad \therefore m+4 \mid 8 \quad \therefore m=4$$

故當 $m=4$ 時， $D=3 \Rightarrow (4,4,4)$ 勻稱分割，此時總邊數 $E=12$ 、頂點組態 $[3,3,3,3]$

Case 3：當 $n=r=5$ 時

$$D = 2 + \frac{4m}{3(5+m)} = 3 + \frac{m-15}{3m+15} \in N \Rightarrow \frac{m-15}{3m+15} \in Z, \text{ 且 } D \geq 3$$

$$\therefore 3m+15 > m-15, \frac{m-15}{3m+15} > 0 (\rightarrow \leftarrow) \therefore \frac{m-15}{3m+15} = 0, m-15=0, \therefore m=15$$

故當 $m=15$ 時， $D=3 \Rightarrow (5,15,5)$ 勻稱分割，此時總邊數 $E=30$ 、頂點組態 $[3,3,3,3,3]$

Case 4：當 $n=r \geq 6$ 時

$D = 2 + \frac{4m}{(n-2)(n+m)} \leq 2 + \frac{4m}{(6-2)(6+m)} = 2 + \frac{m}{m+6} < 3$ 。故當 $n=r \geq 6$ 時， m 將無解。

我們可以得知單一秩數之勻稱分割共有五種。我們將其繪出，如表 1 所示：

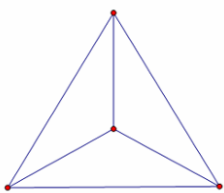
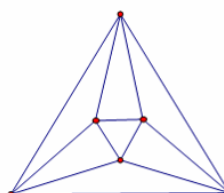
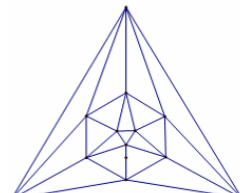
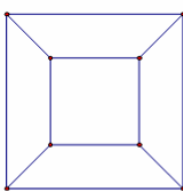
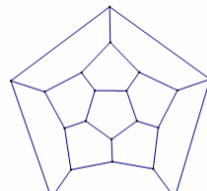
		
(3,1,3) 勻稱分割 頂點組態 $[3,3,3]$	(3,3,3) 勻稱分割 頂點組態 $[4,4,4]$	(3,9,3) 勻稱分割 頂點組態 $[5,5,5]$
		
(4,4,4) 勻稱分割 頂點組態 $[3,3,3,3]$	(5,15,5) 勻稱分割 頂點組態 $[3,3,3,3,3]$	

表 1 單一秩數之勻稱分割之圖形

定理一：頂點組態中僅含有單一秩數的 (n, m, n) 勻稱分割共有 5 種，分別為
 $(3, 1, 3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3, 3, 3]$)、 $(3, 3, 3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[4, 4, 4]$)、
 $(3, 9, 3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[5, 5, 5]$)、 $(4, 4, 4)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3, 3, 3, 3]$)
 及 $(5, 15, 5)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3, 3, 3, 3, 3]$)

再來，我們要探討具有兩種不同秩數的勻稱分割。

三、2 種不同秩數之勻稱分割

設分割出秩數為 D_1 的有 m_1 個點、秩數為 D_2 的有 m_2 個點(不失一般性，

令 $D_2 > D_1$)，此時總點數 $n + m = m_1 + m_2$ ，而所有點的秩數總和為

$$D_1 m_1 + D_2 m_2 = 2(m_1 + m_2) + \frac{4m}{n-2}$$

$$\begin{cases} (D_1 - 2)m_1 + (D_2 - 2)m_2 = \frac{4m}{n-2} \dots\dots\dots(1) \\ m_1 + m_2 = n + m \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \times (D_1 - 2): (D_1 - 2)m_1 + (D_1 - 2)m_2 = (n + m)(D_1 - 2) \Rightarrow m_2 = \frac{\frac{4m}{n-2} - (n + m)(D_1 - 2)}{D_2 - D_1}$$

$$\textcircled{2} \times (D_2 - 2) \Rightarrow m_1 = \frac{\frac{4m}{n-2} - (n + m)(D_2 - 2)}{D_1 - D_2}$$

$$\because m_2 > 0 \Rightarrow \frac{4m}{n-2} - (n + m)(D_1 - 2) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{4m}{(n-2)(n+m)} + 2 > D_1 \geq 3 \quad \Rightarrow \frac{4m}{(n-2)(n+m)} + 2 > 3$$

當 $n - 2 \geq 4$ (即 $n \geq 6$) 時

$$\Rightarrow \frac{4m}{(n-2)(n+m)} \leq \frac{4m}{4(6+m)} = \frac{4m}{4m+24} < 1$$

$$\text{此時 } \frac{4m}{(n-2)(n+m)} + 2 < 3 \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

故 n 最大值為 5

定理二：頂點組態中含有兩種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割，其 n 最大值為 5。(亦即 n 只能為 3、4、5 三種情形)

$$\begin{aligned} m_1 > 0 &\Rightarrow \frac{4m}{n-2} - (n+m)(D_2-2) < 0 \\ &\Rightarrow \frac{4m}{(n-2)(n+m)} + 2 < D_2 \\ &\Rightarrow D_2 > \frac{4m}{(n-2)(n+m)} + 2 > D_1 \end{aligned}$$

由於 n 最大值為 5，故底下我們分 $n=3$ 、 $n=4$ 、 $n=5$ 三種 case 討論。

Case 1： $n=3$ 時

$$\frac{4m}{(n-2)(n+m)} + 2 = \frac{4m}{3+m} + 2 = 6 - \frac{12}{m+3} > D_1$$

可知 D_1 最大值為 5

$$\begin{cases} (D_1-2)m_1 + (D_2-2)m_2 = \frac{4m}{n-2} \dots\dots\dots(I) \\ m_1 + m_2 = n+m \dots\dots\dots(II) \end{cases}$$

(1) $D_1=3$ 時

頂點組態可能為 $[3, 3, D_2]$ 或 $[3, D_2, D_2]$

[1] 當頂點組態為 $[3, 3, D_2]$ 時：

$$\text{由分割的多邊形總數算法可得：} \frac{3m_1}{2} - 1 = D_2 m_2 - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1$$

將 $n=3$ 代入可得：

$$\begin{aligned} \frac{3m_1}{2} &= 2m+2, \quad m_1 = \frac{4m+4}{3} \in N \\ \text{又 } m_1 + m_2 &= m+3 \Rightarrow m_2 = \frac{5-m}{3} \in N \\ &\Rightarrow m=2, \quad m_1=4, \quad m_2=1 \\ &\Rightarrow D_2=6 > n+m-1=4 \quad (\rightarrow \leftarrow) \end{aligned}$$

[2] 當頂點組態為 $[3, D_2, D_2]$ 時：

由分割的多邊形總數算法可得： $3m_1 - 1 = \frac{D_2 m_2}{2} - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1$

將 $n=3$ 代入可得：

$$3m_1 = 2m + 2, \quad m_1 = \frac{2m+2}{3} \in N$$

$$\text{由 } m_1 + m_2 = m + 3 \Rightarrow m_2 = \frac{m+7}{3} \in N$$

將 m_1, m_2 代入(I)

$$\Rightarrow m_1 + (D_2 - 2)m_2 = 4m \Rightarrow \frac{2m+2}{3} + (D_2 - 2)m_2 = 4m$$

$$\Rightarrow (D_2 - 2)\frac{m+7}{3} = \frac{10m-2}{3} \Rightarrow D_2 - 2 = \frac{10m-2}{m+7} = 10 - \frac{72}{m+7}$$

$$\Rightarrow D_2 = 12 - \frac{72}{m+7} \in N \Rightarrow m+7 \mid 72, \quad m \in N$$

$m+7$ 可能為 8、9、12、18、24、36、72

$$\Rightarrow m = 1、2、5、11、17、29、65$$

此時 D_2 值分別為 3、4、6、8、9、10、11

(i) 當 $m=1$ 時， $m_1, m_2 \notin N$ ($\rightarrow \leftarrow$)

(ii) 當 $(D_2, m) = (9, 17)$

不失一般性，我們可令 A, C 兩點秩數均為 9

$\Rightarrow B$ 點秩數為 3、 D 點秩數為 9

透過 D 點的鄰居秩數探討，

必可找出一條由 C 至 A 的路徑，

其路徑上的各點均與 D 點作連接，

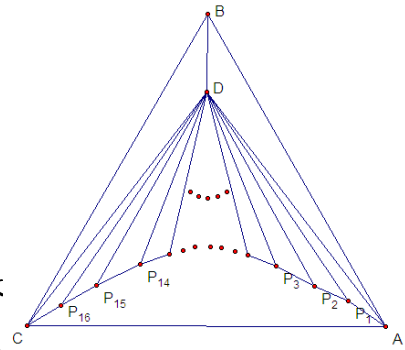
由於分割的頂點組態為 $[3, 9, 9]$ 的緣故

故由 C 至 A 路徑上的所有頂點秩數必須

為 3、9、3、9.... 依序出現下去，

$\Rightarrow P_{16}$ 秩數=9

則在 $\triangle P_{16}DC$ 中，三頂點秩數均為 9 ($\rightarrow \leftarrow$)，故無解



由上面的探討我們亦可推論當 D_2 為奇數時，分割圖形將不存在。

故 $m=17$ 或 65 時無解

$\therefore m=2$ 或 5 或 11 或 29

故存在之勻稱分割有 $(3,2,3)$ 分割、 $(3,5,3)$ 分割、 $(3,11,3)$ 分割、 $(3,29,3)$ 分割。

將 $n=3$ ， $D_1=3$ 之所有解情形整理如下：

分割符號	D_1	D_2	頂點組態
$(3,2,3)$	3	4	$[3,4,4]$
$(3,5,3)$	3	6	$[3,6,6]$
$(3,11,3)$	3	8	$[3,8,8]$
$(3,29,3)$	3	10	$[3,10,10]$

(2) $D_1=4$ 時

頂點組態可能為 $[4,4,D_2]$ 或 $[4,D_2,D_2]$

$$\begin{cases} (D_1-2)m_1 + (D_2-2)m_2 = \frac{4m}{n-2} \dots\dots\dots(I) \\ m_1 + m_2 = n+m \dots\dots\dots(II) \end{cases}$$

[1] 當頂點組態為 $[4,4,D_2]$ ：

由分割的多邊形總數算法可得： $\frac{4m_1}{2}-1 = D_2m_2-1 = \alpha = \frac{2m}{n-2}+1$

將 $n=3$ 代入可得： $m_1 = m+1$ 又 $m_1 + m_2 = m+3 \Rightarrow m_2 = 2$

將 m_1 、 m_2 代入(I)可得 $D_2 = m+1$

此時存在之勻稱分割為 $(3,m,3)$ 分割，頂點組態為 $[4,4,m+1]$

[2] 當頂點組態為 $[4,D_2,D_2]$ ：

由分割的多邊形總數算法可得： $4m_1-1 = \frac{D_2m_2}{2}-1 = \alpha = \frac{2m}{n-2}+1$

將 $n=3$ 代入可得： $m_1 = \frac{m+1}{2}$ 由 $m_1 + m_2 = m+3 \Rightarrow m_2 = \frac{m+5}{2}$

將 m_1 、 m_2 代入(I)

$$\Rightarrow 2m_1 + (D_2 - 2)m_2 = 4m \Rightarrow (m+1) + (D_2 - 2)m_2 = 4m$$

$$\Rightarrow (D_2 - 2)\frac{m+5}{2} = 3m - 1 \Rightarrow D_2 - 2 = \frac{6m-2}{m+5} = 6 - \frac{32}{m+5}$$

$$\Rightarrow D_2 = 8 - \frac{32}{m+5} \in N \Rightarrow m+5 | 32, m \in N$$

$m+5$ 可能為 16、32

$$\Rightarrow m = 11、27, \text{ 此時 } D_2 \text{ 值分別為 } 6、7$$

由 $[3, D_2, D_2]$ 的探討我們亦可推論當 D_2 為奇數時，分割圖形將不存在。

$$\Rightarrow D_2 = 7 \text{ 無解 } \therefore D_2 = 6$$

故存在之勻稱分割有 $(3, m, 3)$ 分割、 $(3, 11, 3)$ 分割。

我們將 $n=3$ ， $D_1=4$ 之所有解情形整理如下：

分割符號	D_1	D_2	頂點組態
$(3, m, 3)$	4	$m+1$	$[4, 4, m+1]$
$(3, 11, 3)$	4	6	$[4, 6, 6]$

(3) $D_1 = 5$

頂點組態可能為 $[5, 5, D_2]$ 或 $[5, D_2, D_2]$

$$\begin{cases} (D_1 - 2)m_1 + (D_2 - 2)m_2 = \frac{4m}{n-2} \dots\dots\dots(I) \\ m_1 + m_2 = n + m \dots\dots\dots(II) \end{cases}$$

[1] 當頂點組態為 $[5, 5, D_2]$ ：

$$\text{由分割的多邊形總數算法可得：} \frac{5m_1}{2} - 1 = D_2 m_2 - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1$$

$$\text{將 } n=3 \text{ 代入可得：} m_1 = \frac{4m+4}{5} \quad \text{由 } m_1 + m_2 = m+3 \Rightarrow m_2 = \frac{m+11}{2}$$

將 m_1 、 m_2 代入(I)

$$\Rightarrow 3m_1 + (D_2 - 2)m_2 = 4m \Rightarrow \frac{12m+12}{5} + (D_2 - 2)m_2 = 4m$$

$$\Rightarrow (D_2 - 2)\frac{m+11}{5} = \frac{8m-12}{5} \Rightarrow D_2 - 2 = \frac{8m-12}{m+11} = 8 - \frac{100}{m+11}$$

$$\Rightarrow D_2 = 10 - \frac{100}{m+11} \in N \quad \Rightarrow m+11 | 100, \quad m \in N$$

$m+11$ 可能為 20、25、50、100

$$\Rightarrow m = 9、14、39、89$$

此時 D_2 值分別為 5、6、8、9

(i) 當 $D_2 = 5$ 時，頂點組態將變成單一種秩數情形 ($\rightarrow \leftarrow$)

(ii) 當 $(D_2, m) = (6, 14)$ 時

不失一般性，我們可令 B, C 兩點秩數均為 5

$\Rightarrow A$ 點秩數為 6、 D 點秩數為 6

透過 A 點的鄰居秩數探討，

必可找出一條由 B 至 C 的路徑，

其路徑上的各點均與 A 點作連接，

由於分割的頂點組態為 $[5, 5, 6]$ 的緣故，

故由 B 至 C 路徑上的所有頂點秩數必須

均為 5、5、5、5 依序出現下去，

$\Rightarrow E, F$ 秩數 = 6

則在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 中，三頂點秩數均為 $[5, 6, 6]$ ($\rightarrow \leftarrow$)，故無解

同理在 $D_2 > 5$ 時， $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 中，三頂點秩數均為

$[5, D_2, D_2]$ ($\rightarrow \leftarrow$)

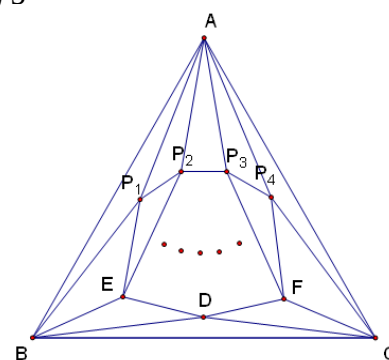
故頂點組態為 $[5, 5, D_2]$ 時無解

[2] s 當頂點組態為 $[5, D_2, D_2]$ ：

由分割的多邊形總數算法可得： $5m_1 - 1 = \frac{D_2 m_2}{2} - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1$

將 $n = 3$ 代入可得： $m_1 = \frac{2m+2}{5}$ 將 $m_1 + m_2 = m + 3 \Rightarrow m_2 = \frac{3m+13}{5}$

將 m_1 、 m_2 代入 (I)



$$\begin{aligned} \Rightarrow 3m_1 + (D_2 - 2)m_2 &= 4m \Rightarrow \frac{3(2m+2)}{5} + (D_2 - 2)\frac{3m+13}{5} = 4m \\ \Rightarrow (D_2 - 2)\frac{3m+13}{5} &= \frac{14m-6}{5} \Rightarrow D_2 - 2 = \frac{14m-6}{3m+13} = 4 + \frac{2m-58}{3m+13} \\ \Rightarrow D_2 &= 6 + \frac{2m-58}{3m+13} \in N \Rightarrow 3m+13 \mid 2m-58, m \in N \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{2m-58}{3m+13} = t \in Z \Rightarrow \begin{cases} 3m+13 \mid 2m-58 \\ 3m+13 \mid 3m+13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3m+13 \mid 2(3m+13) - 3(2m-58) \Rightarrow 3m+13 \mid 200, m \in N$$

$3m+13$ 可能為 20、25、40、50、100、200

排除 m 為分數的部份可得 $m=4, 29 \Rightarrow D_2$ 值分別為

4、6 ($\because D_2 > D_1 \therefore D_2=4$ 不合)

故存在之勻稱分割有 (3, 29, 3) 分割

將 $n=3$ ， $D_1=5$ 之所有解情形整理如下：

分割符號	D_1	D_2	頂點組態
(3, 29, 3)	5	6	[5, 6, 6]

(4) 我們進一步將 $n=3$ 時存在之所有分割情形整理如下表：

分割符號	D_1	D_2	頂點組態	m_1	m_2
(3, 2, 3)	3	4	[3, 4, 4]	2	3
(3, 5, 3)	3	6	[3, 6, 6]	4	4
(3, 11, 3)	3	8	[3, 8, 8]	8	6
(3, 29, 3)	3	10	[3, 10, 10]	20	12
(3, m , 3) $m \in N$	4	$m+1$	[4, 4, $m+1$]	$m+1$	2
(3, 11, 3)	4	6	[4, 6, 6]	6	8
(3, 29, 3)	5	6	[5, 6, 6]	12	20

我們可以得知 $n=3$ 之勻稱分割共有七種，並進一步將其繪出，如下表 2 所示：

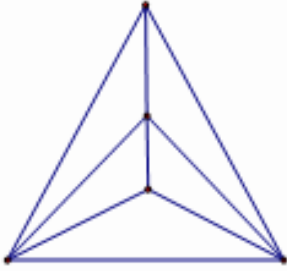
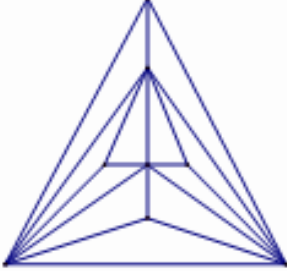
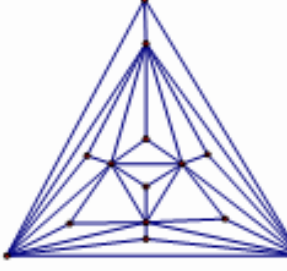
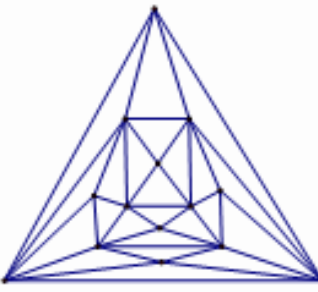
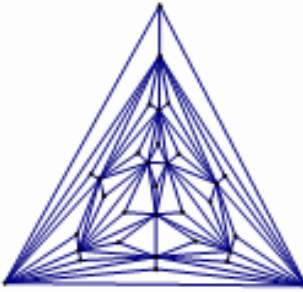
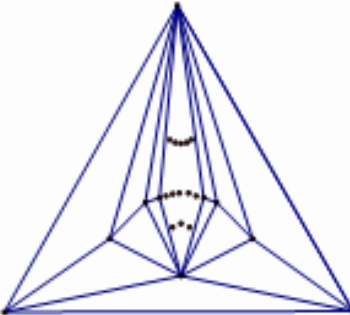
		
(3,2,3) 勻稱分割 頂點組態 [3,4,4]	(3,5,3) 勻稱分割 頂點組態 [3,6,6]	(3,11,3) 勻稱分割 頂點組態 [3,8,8]
		
(3,11,3) 勻稱分割 頂點組態 [4,6,6]	(3,29,3) 勻稱分割 頂點組態 [3,10,10]	(3,29,3) 勻稱分割 頂點組態 [5,6,6]
		
(3,m,3) 勻稱分割 頂點組態 [4,4,m+1]		

表 2 $n=3$ 之勻稱分割之圖形

定理三：頂點組態中含有兩種不同的秩數的 (n,m,n) 勻稱分割，在 $n=3$ 時共有七種；分別為 $(3,2,3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3,4,4]$)、 $(3,5,3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3,6,6]$)、 $(3,11,3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3,8,8]$)、 $(3,11,3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[4,6,6]$)、 $(3,29,3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3,10,10]$)、 $(3,29,3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[5,6,6]$)、 $(3,m,3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[4,4,m+1]$)

Case 2 : $n=4$ 時

$$\frac{4m}{(n-2)(n+m)} + 2 = \frac{2m}{m+4} + 2 = \frac{4m+8}{m+4} = 4 - \frac{8}{m+4} > D_1$$

可知 D_1 最大值為 3

$$\begin{cases} (D_1 - 2)m_1 + (D_2 - 2)m_2 = \frac{4m}{n-2} \dots\dots\dots(I) \\ m_1 + m_2 = n + m \dots\dots\dots(II) \end{cases}$$

(1) $D_1 = 3$

$\Rightarrow$ 頂點組態可能為 $[3, D_2, D_2, D_2]$ 或 $[3, D_2, 3, D_2]$ 或 $[3, 3, D_2, D_2]$ 或 $[3, 3, 3, D_2]$

Φ 當頂點組態為 $[3, D_2, D_2, D_2]$ 時：

由分割的多邊形總數算法可得： $3m_1 - 1 = \frac{D_2 m_2}{3} - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1$

將 $n=4$ 代入可得： $m_1 = \frac{m+2}{3}$ 由 $m_1 + m_2 = m+4 \Rightarrow m_2 = \frac{2m+10}{3}$

將 m_1 、 m_2 代入(I) $m_2 = \frac{2m+10}{3}$

$\Rightarrow m_1 + (D_2 - 2)m_2 = 2m \Rightarrow \frac{m+2}{3} + (D_2 - 2)m_2 = 2m$

$\Rightarrow (D_2 - 2)\frac{2m+10}{3} = \frac{5m-2}{3} \Rightarrow D_2 - 2 = \frac{5m-2}{2m+10} = 2 + \frac{m-22}{2m+10}$

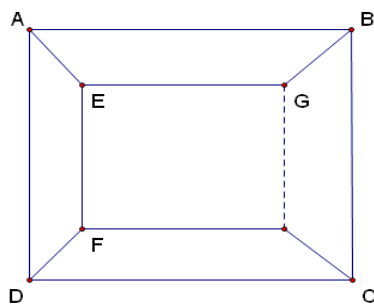
$\Rightarrow D_2 = 4 + \frac{m-22}{2m+10} \in N \Rightarrow D_2 \leq 4 \Rightarrow D_2 = 3$ 或 4

($D_2 = 3$ 不合，因為此時頂點組態將變成單一種秩數情形 $\rightarrow \leftarrow$)

故存在之勻稱分割有 $(4, 22, 4)$ 分割

[1] 當頂點組態為 $[3, D_2, 3, D_2]$ 或 $[3, 3, D_2, D_2]$ ：

(i) 當頂點組態為 $[3, 3, D_2, D_2]$ 時



先從外圍四邊形 $ABCD$ 看起，不失一般性，我們可令 $D_{(A)} = D_{(D)} = 3$

$$\Rightarrow D_{(B)} = D_{(A)} = D$$

由於四邊形 $ADFE$ 其頂點組態亦需滿足 $[3, 3, D_2, D_2]$ 之情形

$$\Rightarrow D_{(E)} = D_{(F)} = D_2$$

此時我們留意到四邊形 $ABGE$ 各頂點秩數：

$$D_{(A)} = D_{(G)} = 3, \quad D_{(B)} = D_{(E)} = D_2$$

四邊形 $ABGE$ 頂點組態將變為 $[3, D_2, 3, D_2] (\rightarrow \leftarrow)$

故頂點組態為 $[3, 3, D_2, D_2]$ 時無解

(ii) 當頂點組態為 $[3, D_2, 3, D_2]$ 時

$$\text{由分割的多邊形總數算法可得：} \frac{3m_1}{2} - 1 = \frac{D_2 m_2}{2} - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1$$

$$\text{將 } n=4 \text{ 代入可得 } m_1 = \frac{2m+4}{3} \quad \text{由 } m_1 + m_2 = m+4 \Rightarrow m_2 = \frac{m+8}{3}$$

將 m_1 、 m_2 代入(I)

$$\Rightarrow m_1 + (D_2 - 2)m_2 = 2m \Rightarrow \frac{2m+4}{3} + (D_2 - 2)m_2 = 2m$$

$$\Rightarrow (D_2 - 2)\frac{m+8}{3} = \frac{4m-4}{3} \Rightarrow D_2 - 2 = \frac{4m-4}{m+8} = 4 - \frac{36}{m+8}$$

$$\Rightarrow D_2 = 6 - \frac{36}{m+8} \in N \Rightarrow 3 < D_2 < 6 \Rightarrow D_2 = 4 \text{ 或 } 5, \text{ 此時 } m \text{ 值分別為}$$

10、28

故存在之勻稱分割分別為 $(4, 10, 4)$ 分割、 $(4, 28, 4)$ 分割

[2] 當頂點組態為 $[3, 3, 3, D_2]$ ：

$$\text{由分割的多邊形總數算法可得：} \frac{3m_1}{3} - 1 = D_2 m_2 - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1$$

$$\text{將 } n=4 \text{ 代入可得：} m_1 = m+2 \quad \text{由 } m_1 + m_2 = m+4 \Rightarrow m_2 = 2$$

$$\text{將 } m_1、m_2 \text{ 代入(I)可得 } D_2 = \frac{m+2}{2}$$

此時存在之勻稱分割為 $(4, m, 4)$ 分割，頂點組態為 $[3, 3, 3, \frac{m+2}{2}]$

(2) 我們進一步將 $n=4$ 時存在之所有分割情形整理如下表：

分割符號	D_1	D_2	m_1	m_2	頂點組態
$(4, 22, 4)$	3	4	8	18	$[3, 4, 4, 4]$
$(4, 10, 4)$	3	4	8	6	$[3, 4, 3, 4]$
$(4, 28, 4)$	3	5	20	12	$[3, 5, 3, 5]$
$(4, m, 4) \ m \in \mathbb{N}$ (且 $2 \mid m$)	3	$\frac{m+2}{2}$	$m+2$	2	$[3, 3, 3, \frac{m+2}{2}]$

我們可以得知 $n=4$ 之勻稱分割共有四種。將其繪出，如下表 3 所示：

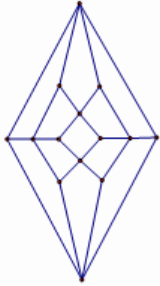
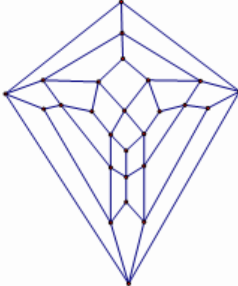
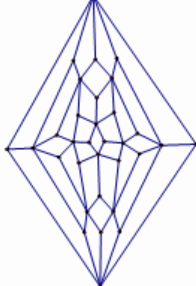
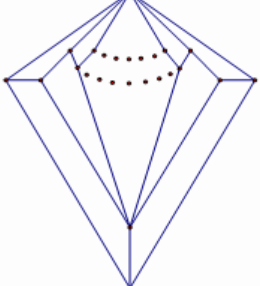
			
$(4, 10, 4)$ 勻稱分割 頂點組態 $[3, 4, 3, 4]$	$(4, 22, 4)$ 勻稱分割 頂點組態 $[3, 4, 4, 4]$	$(4, 28, 4)$ 勻稱分割 頂點組態 $[3, 5, 3, 5]$	$(4, m, 4)$ 勻稱分割 ($m \in \mathbb{N}$ 且 $2 \mid m$) 頂點組態 $[3, 3, 3, \frac{m+2}{2}]$

表 3 $n=4$ 之勻稱分割之圖形

定理四：頂點組態中含有兩種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割，在 $n=4$ 時共有 4 種；分別為 $(4, 10, 4)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3, 4, 3, 4]$)、 $(4, 22, 4)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3, 4, 4, 4]$)、 $(4, 28, 4)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3, 5, 3, 5]$)、 $(4, m, 4)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3, 3, 3, \frac{m+2}{2}]$)

Case 3： $n=5$ 時

$$\frac{4m}{(n-2)(n+m)} + 2 = \frac{4m}{3m+15} + 2 = 4 - \frac{2m+30}{3m+15} > D_1$$

可知 D_1 最大值為 3

$$\begin{cases} (D_1 - 2)m_1 + (D_2 - 2)m_2 = \frac{4m}{n-2} \dots\dots\dots(I) \\ m_1 + m_2 = n + m \dots\dots\dots(II) \end{cases}$$

(1) $D_1 = 3$

$\Rightarrow$ 頂點組態可能為 $[3, D_2, D_2, D_2, D_2]$ 或 $[3, 3, D_2, D_2, D_2]$ 或 $[3, D_2, 3, D_2, D_2]$

或 $[3, 3, 3, D_2, D_2]$ 或 $[3, 3, D_2, 3, D_2]$ 或 $[3, 3, 3, 3, D_2]$

[1] 當頂點組態為 $[3, D_2, D_2, D_2, D_2]$ 時：

由分割的多邊形總數算法可得： $3m_1 - 1 = \frac{D_2 m_2}{4} - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1$

將 $n=5$ 代入可得： $m_1 = \frac{2m+6}{9}$ 由 $m_1 + m_2 = m+5 \Rightarrow m_2 = \frac{7m+39}{9}$

將 m_1 、 m_2 代入(I)

$$\Rightarrow m_1 + (D_2 - 2)m_2 = \frac{4}{3}m \Rightarrow \frac{4m+12}{9} + (D_2 - 2)m_2 = \frac{4}{3}m$$

$$\Rightarrow (D_2 - 2)\frac{5m+33}{9} = \frac{8m-12}{9} \Rightarrow D_2 - 2 = \frac{8m-12}{5m+33} = 1 + \frac{3m-45}{5m+33}$$

$$\Rightarrow D_2 = 3 + \frac{3m-45}{5m+33} \in N \text{ 由 } \frac{3m-45}{5m+33} < 1 (m > 0) \Rightarrow D_2 = 3$$

(頂點組態將變成單一種秩數情形 $\rightarrow \leftarrow$)

故此種情形亦無解。

[2] 當頂點組態為 $[3, 3, D_2, D_2, D_2]$ 或 $[3, D_2, 3, D_2, D_2]$ ：

由分割的多邊形總數算法可得： $\frac{3m_1}{2} - 1 = \frac{D_2 m_2}{3} - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1$

將 $n=5$ 代入可得： $m_1 = \frac{4m+12}{9}$ 由 $m_1 + m_2 = m+5 \Rightarrow m_2 = \frac{5m+33}{9}$

將 m_1 、 m_2 代入(I)

$$\Rightarrow m_1 + (D_2 - 2)m_2 = \frac{4}{3}m \Rightarrow \frac{4m+12}{9} + (D_2 - 2)m_2 = \frac{4}{3}m$$

$$\Rightarrow (D_2 - 2)\frac{5m+33}{9} = \frac{8m-12}{9} \Rightarrow D_2 - 2 = \frac{8m-12}{5m+33} = 1 + \frac{3m-45}{5m+33}$$

$$\Rightarrow D_2 = 3 + \frac{3m-45}{5m+33} \in N \text{ 由 } \frac{3m-45}{5m+33} < 1 (m > 0) \Rightarrow D_2 = 3$$

(頂點組態將變成單一種秩數情形 $\rightarrow \leftarrow$)

故此種情形亦無解。

[3] 當頂點組態為 $[3, 3, 3, D_2, D_2]$ 或 $[3, 3, D_2, 3, D_2]$ ：

由分割的多邊形總數算法可得： $\frac{3m_1}{3}-1=\frac{D_2m_2}{2}-1=\alpha=\frac{2m}{n-2}+1$

將 $n=5$ 代入可得： $m_1=\frac{2m+6}{3}$ 由 $m_1+m_2=m+5 \Rightarrow m_2=\frac{m+9}{3}$

將 m_1 、 m_2 代入(I)

$$\Rightarrow m_1+(D_2-2)m_2=\frac{4}{3}m \Rightarrow \frac{2m+6}{3}+(D_2-2)m_2=\frac{4}{3}m$$

$$\Rightarrow (D_2-2)\frac{m+9}{3}=\frac{2m-6}{3} \Rightarrow D_2-2=\frac{2m-16}{m+9}=2-\frac{24}{m+9}$$

$$\Rightarrow D_2=4-\frac{24}{m+9} \in N \Rightarrow D_2=3$$

(頂點組態將變成單一種秩數情形 $\rightarrow \leftarrow$)

故此種情形亦無解。

[4] 當頂點組態為 $[3,3,3,3,D_2]$ ：

由分割的多邊形總數算法可得： $\frac{3m_1}{4}-1=D_2m_2-1=\alpha=\frac{2m}{n-2}+1$

將 $n=5$ 代入可得： $m_1=\frac{8m+24}{9}$ 由 $m_1+m_2=m+5 \Rightarrow m_2=\frac{m+21}{9}$

將 m_1 、 m_2 代入(I)

$$\Rightarrow m_1+(D_2-2)m_2=\frac{4}{3}m \Rightarrow \frac{8m+24}{9}+(D_2-2)m_2=\frac{4}{3}m$$

$$\Rightarrow (D_2-2)\frac{m+21}{9}=\frac{4m-24}{9} \Rightarrow D_2-2=\frac{4m-24}{m+21}=4-\frac{108}{m+21}$$

$$\Rightarrow D_2=6-\frac{108}{m+21} \in N \text{ 且 } 3 < D_2 \Rightarrow D_2=4 \text{ 或 } 5 \Rightarrow (m,D)=(33,4) \text{ 或 } (87,5)$$

故此時存在之勻稱分割有 $(5,33,5)$ 分割、 $(5,87,5)$ 分割

(2) 我們進一步將 $n=5$ 時存在之所有分割情形整理如下表：

分割符號	D_1	D_2	m_1	m_2	頂點組態
$(5,33,5)$	3	4	32	6	$[3,3,3,3,4]$
$(5,87,5)$	3	5	80	12	$[3,3,3,3,5]$

我們可以得知 $n=5$ 之勻稱分割共有兩種。我們將其繪出，如下表 4 所示：

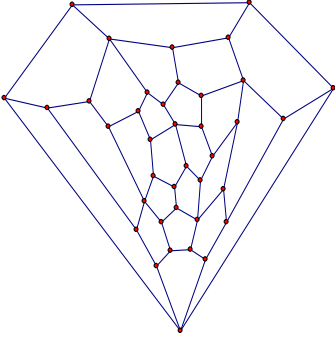
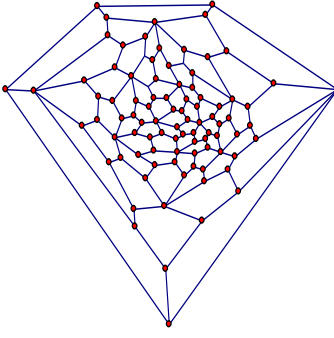
	
(5,33,5) 勻稱分割 頂點組態 [3,3,3,3,4]	(5,87,5) 勻稱分割 頂點組態 [3,3,3,3,5]

表 4 $n=5$ 之勻稱分割之圖形

定理五：頂點組態中含有兩種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割，在 $n=5$ 時共有 2 種；分別為 $(5, 33, 5)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3, 3, 3, 3, 4]$)、 $(5, 87, 5)$ 勻稱分割(頂點組態 $[3, 3, 3, 3, 5]$)

接著，我們要探討具有三種不同秩數的勻稱分割。

四、3 種不同秩數之勻稱分割：

設分割出秩數為 D_1 的有 m_1 個點、秩數為 D_2 的有 m_2 個點、秩數為 D_3 的有 m_3 個點（不失一般性，令 $D_3 > D_2 > D_1$ ）此時總點數 $m_1 + m_2 + m_3 = n + m$ ，所有點的秩數總和為

$$\begin{aligned}
 D_1 m_1 + D_2 m_2 + D_3 m_3 &= 2(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{4m}{n-2} \\
 \Rightarrow \begin{cases} (D_1 - 2)m_1 + (D_2 - 2)m_2 = \frac{4m}{n-2} - (D_3 - 2)m_3 \\ m_1 + m_2 = n + m - m_3 \end{cases} &\quad \text{由行列式解 } m_1, m_2 \\
 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{\frac{4m}{n-2} - (n+m)(D_2 - 2) - m_3(D_3 - D_2)}{D_1 - D_2} \\ m_2 = \frac{\frac{4m}{n-2} - (n+m)(D_1 - 2) - m_3(D_3 - D_1)}{D_2 - D_1} \end{cases} &\quad \text{由 } m_2 > 0, D_3 > D_2 > D_1 \\
 \Rightarrow \frac{4m}{n-2} - (n+m)(D_2 - 2) - m_3(D_3 - D_2) > 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{n+m} + 2 > D_1 \geq 3 \Rightarrow \frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{n+m} > 1$$

當 $n \geq 6$ 時

$$\Rightarrow \frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{n+m} \leq \frac{4m}{4m+24} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{m+6} < 1 \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

故 $n \leq 5$

由於 n 最大值為 5，故分為 $n=3$ 、 $n=4$ 、 $n=5$ 三種 case 討論。

Case 1： $n=3$ 時

頂點組態必為 $[D_1, D_2, D_3]$

$$\begin{aligned} \frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{n+m} + 2 &= \frac{4m}{m+3} + 2 - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{m+3} = \frac{6m+6}{m+3} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{m+3} \\ &= 6 - \frac{12 + m_3(D_3 - D_1)}{m+3} > D_1 \end{aligned}$$

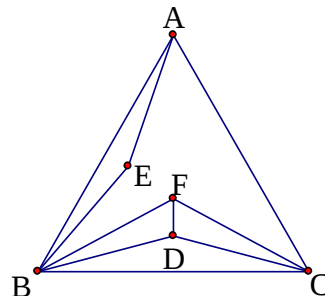
$\Rightarrow D_1$ 最大值為 5

(1) $D_1 = 3$ 時：

頂點組態必為 $[3, D_2, D_3]$ 不失一般性，

令 A 點秩數為 3、 C 點秩數為 D_2 、

B 點秩數為 $D_3 \Rightarrow D$ 點秩數為 3、 E 點秩數為 D_2



由 $D_1 = 3 \Rightarrow D_3 \geq 5 \Rightarrow B$ 點至少要再連出一條邊 $\Rightarrow$ 連 $\overline{BF}$ 、 $\overline{FD}$

$\Rightarrow F$ 點秩數為 D_2 ，由於此時 D 點已連 3 條線 $\Rightarrow$ 連 $\overline{CF}$

$\Rightarrow$ 在 $\triangle CFD$ 中，其頂點組態為 $[3, D_2, D_2]$ $(\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow$ 無解

(2) $D_1 = 4$ 時：

頂點組態必為 $[4, D_2, D_3]$

$$\Rightarrow 4m_1 - 1 = D_2 m_2 - 1 = D_3 m_3 - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = 2m + 1$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{m+1}{2}, m_2 = \frac{2m+2}{D_2}, m_3 = \frac{2m+2}{D_3}, \text{ 由 } m_1 + m_2 + m_3 = n + m = m + 3$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{2m+2}{D_2} + \frac{2m+2}{D_3} = m+3 \Rightarrow \frac{2m+2}{D_2} + \frac{2m+2}{D_3} = \frac{m+5}{2}$$

$$\Rightarrow (4m+4)D_3 + (4m+4)D_2 = (m+5)D_2D_3 \Rightarrow m = \frac{4D_2 + 4D_3 - 5D_2D_3}{D_2D_3 - 4D_2 - 4D_3} > 0$$

若

$$D_2D_3 - 4D_2 - 4D_3 > 0 \Rightarrow 4D_2 + 4D_3 - 5D_2D_3 > 0 \Rightarrow 5D_2D_3 < 4D_2 + 4D_3 < D_2D_3 (\rightarrow \leftarrow)$$

$$\text{故 } D_2D_3 - 4D_2 - 4D_3 < 0$$

$$\Rightarrow (D_2 - 4)(D_3 - 4) < 16, \text{ 由 } D_1 = 4 \Rightarrow D_2 > 4$$

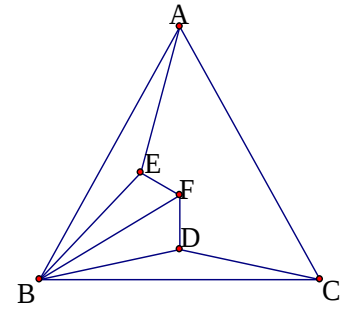
[1] 當 $D_2 = 5$ 時：

不失一般性，令 A 點秩數為 4、

B 點秩數為 5、 C 點秩數為 D_3

$\Rightarrow D$ 點秩數為 4、 E 點秩數為 D_3 ，

此時 B 點已連 4 條線



$\Rightarrow B$ 點只能再接 1 條線 $\Rightarrow$ 連 $\overline{BF}$ 、 $\overline{DF}$ 、 $\overline{DE}$

$\Rightarrow$ 在 $\triangle BFD$ 中， B 點秩數為 5、 D 點秩數為 4 $\Rightarrow F$ 點秩數為 D_3

$\Rightarrow$ 在 $\triangle BEF$ 中，其頂點組態為 $[5, D_3, D_3]$ （不合） $\Rightarrow$ 無解

同理可證 D_1 、 D_2 、 D_3 中至少有一奇數時，對於 $n=3$ 的勻稱分割無解

$$\Rightarrow D_1 \equiv D_2 \equiv D_3 \equiv 0(\text{mod } 2)$$

[2] 當 $D_2 = 6$ 時：

$$2(D_3 - 4) < 16 \text{ 且 } D_3 \equiv 0(\text{mod } 2) \Rightarrow D_3 = 8 \text{ 或 } 10 \text{ 代入 } m = \frac{4D_2 + 4D_3 - 5D_2D_3}{D_2D_3 - 4D_2 - 4D_3}$$

$$\Rightarrow (D_3, m) = (8, 23) \text{ 或 } (10, 59) \mid$$

[3] 當 $D_2 > 6$ 時：

由 $D_2 \equiv D_3 \equiv 0(\text{mod } 2)$

$\Rightarrow (D_2 - 4)(D_3 - 4) \geq (8 - 4)(10 - 4) = 24$ 與 $(D_2 - 4)(D_3 - 4) < 16$ 矛盾

$\Rightarrow$ 無解

將 $n=3$ ， $D_1=4$ 之所有解情形整理如下：

分割符號	D_1	D_2	D_3	頂點組態
(3, 23, 3)	4	6	8	[4, 6, 8]
(3, 59, 3)	4	6	10	[4, 6, 10]

(3) $D_1=5$ 時：

由(2)討論可知 $D_1 \equiv D_2 \equiv D_3 \equiv 0(\text{mod } 2)$ ，但 $D_1=5 \equiv 1(\text{mod } 2)$ $(\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow$ 無解

(4)我們進一步將 $n=3$ 時存在之所有分割情形整理如下表：

分割符號	D_1	D_2	D_3	頂點組態	m_1	m_2	m_3
(3, 23, 3)	4	6	8	[4, 6, 8]	12	8	6
(3, 59, 3)	4	6	10	[4, 6, 10]	30	20	12

我們可以得知 $n=3$ 、存在三種不同秩數的勻稱分割共有 2 種，並進一步將其繪出，如下表 5：

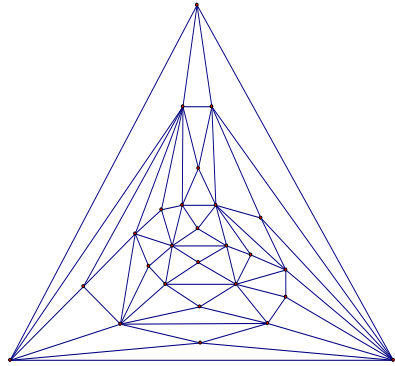
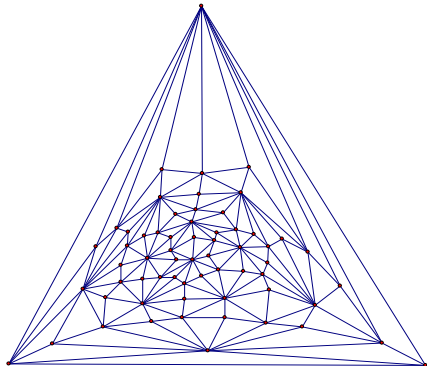
	
(3, 23, 3) 勻稱分割 頂點組態 [4, 6, 8]	(3, 59, 3) 勻稱分割 頂點組態 [4, 6, 10]

表 5 $n=3$ 之存在三種不同秩數的勻稱分割之圖形

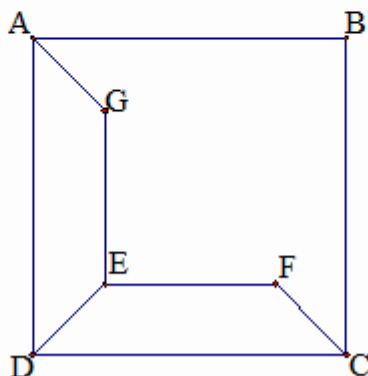
定理六：頂點組態中含有三種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割，在 $n=3$ 時共有 2 種；分別為 $(3, 23, 3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[4, 6, 8]$)、 $(3, 59, 3)$ 勻稱分割(頂點組態 $[4, 6, 10]$)。

Case 2： $n=4$ 時

由窮舉法可知頂點組態有下列 6 種，共可分為 3 類：

$$\left\{ \begin{matrix} [D_1, D_1, D_2, D_3] \\ [D_1, D_2, D_1, D_3] \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} [D_2, D_2, D_3, D_1] \\ [D_2, D_3, D_2, D_1] \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} [D_3, D_3, D_1, D_2] \\ [D_3, D_1, D_3, D_2] \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{n+m} + 2 &= \frac{2m}{m+4} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{m+4} + 2 = \frac{4m+8}{m+4} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{m+4} \\ &= 4 - \frac{8}{m+4} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{m+4} > D_1 \quad \text{且 } D_1 \geq 3 \Rightarrow D_1 = 3 \end{aligned}$$



(1) $D_1 = 3$ ，頂點組態為 $[3, 3, D_2, D_3]$ 或 $[3, D_2, 3, D_3]$

[1] 頂點組態為 $[3, 3, D_2, D_3]$ 時：

不失一般性，令 A 點秩數為 3、 B 點秩數為 3、

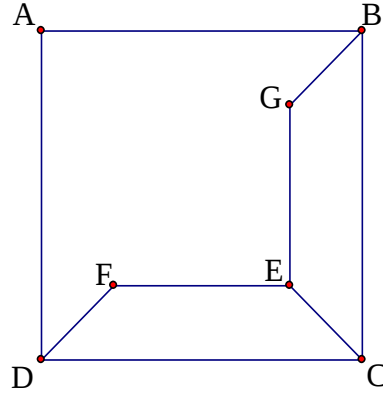
C 點秩數為 D_2 、 D 點秩數為 D_3

$\Rightarrow$ 在四邊形 $CDEF$ 中， E 點、 F 點秩數為 3

令 G 點秩數為 $D_G \Rightarrow$ 四邊形 $CDEF$ 的頂點組態為 $[3, D_3, 3, D_G]$

不論 D_G 為何，其頂點組態皆不合 $\Rightarrow$ 無解

同理可證頂點組態為 $[D_2, D_2, D_3, D_1]$ 或 $[D_3, D_3, D_1, D_2]$ 時無解。



[2] 頂點組態為 $[3, D_2, 3, D_3]$ 時：

不失一般性，令 A 點秩數為 3 、 B 點秩數為 D_2 、

C 點秩數為 3 、 D 點秩數為 D_3 ，

令 G 點秩數為 $D_G \Rightarrow$ 四邊形 $CEGB$ 的頂點組態

為 $[3, D_2, D_G, D_2]$ 不論 D_G 為何，其頂點組態皆不合 $\Rightarrow$ 無解

(2) $D_1 = 3$ ，頂點組態為 $[D_2, D_3, D_2, 3]$

$$3m_1 - 1 = \frac{D_2 m_2}{2} - 1 = D_3 m_3 - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = m + 1$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{m+2}{3} \text{、} m_2 = \frac{2m+4}{D_2} \text{、} m_3 = \frac{m+2}{D_3} \text{，由 } m_1 + m_2 + m_3 = n + m = m + 4$$

$$\Rightarrow \frac{m+2}{3} + \frac{2m+4}{D_2} + \frac{m+2}{D_3} = m + 4 \Rightarrow \frac{2m+4}{D_2} + \frac{m+2}{D_3} = \frac{2m+10}{3}$$

$$\Rightarrow (6m+12)D_3 + (3m+6)D_2 = (2m+10)D_2 D_3 \Rightarrow m = \frac{6D_2 + 12D_3 - 10D_2 D_3}{2D_2 D_3 - 3D_2 - 6D_3} > 0$$

$$\text{若 } 2D_2 D_3 - 3D_2 - 6D_3 > 0 \Rightarrow 6D_2 + 12D_3 - 10D_2 D_3 > 0$$

$$\Rightarrow 5D_2 D_3 < 3D_2 + 6D_3 < 2D_2 D_3 \text{ (} \rightarrow \leftarrow \text{)} \text{ 故 } 2D_2 D_3 - 3D_2 - 6D_3 < 0$$

$$\Rightarrow (D_2 - 3)(2D_3 - 3) < 9 \text{ 由 } D_1 = 3 \Rightarrow D_2 \geq 4 \text{、} D_3 \geq 5$$

[1] $D_2 = 4$ 時 $\Rightarrow 2D_3 - 3 < 9$ 且 $D_3 \geq 5 \Rightarrow D_3 = 5$ ，代入

$$m = \frac{6D_2 + 12D_3 - 10D_2D_3}{2D_2D_3 - 3D_2 - 6D_3} \Rightarrow m = 58$$

$\Rightarrow$ 存在的勻稱分割為 (4, 58, 4) 分割

[2] $D_2 > 4$ 時 $\Rightarrow (D_2 - 3)(2D_3 - 3) \geq (5 - 3)(2 \times 6 - 3) = 18$ ，與

$$(D_2 - 3)(2D_3 - 3) < 9 \text{ 矛盾}$$

$\Rightarrow$ 無解

(3) $D_1 = 3$ ，頂點組態為 $[D_3, 3, D_3, D_2]$

$$3m_1 - 1 = D_2m_2 - 1 = \frac{D_3m_3}{2} - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = m + 1$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{m+2}{3}, m_2 = \frac{m+2}{D_2}, m_3 = \frac{2m+4}{D_3}, \text{ 由 } m_1 + m_2 + m_3 = n + m = m + 4$$

$$\Rightarrow \frac{m+2}{3} + \frac{m+2}{D_2} + \frac{2m+4}{D_3} = m + 4 \Rightarrow \frac{m+2}{D_2} + \frac{2m+4}{D_3} = \frac{2m+10}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{2}{D_3} = \frac{2m+10}{3m+6} = \frac{2}{3} + \frac{2}{m+2} > \frac{2}{3}, \text{ 由 } D_1 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{2}{D_3} \leq \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{13}{20} < \frac{2}{3} \quad (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \text{無解}$$

(4) 們進一步將 $n = 4$ 時存在之三種不同秩數的勻稱分割整理如下表：

分割符號	D_1	D_2	D_3	頂點組態	m_1	m_2	m_3
(4, 58, 4)	3	4	5	[3, 4, 5, 4]	20	30	12

我們可以得知 $n = 4$ 、存在三種不同秩數的勻稱分割共有 1 種，並進一步將其繪出，如下表 6：

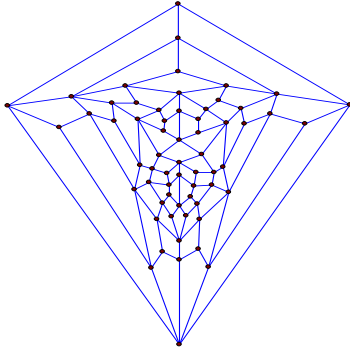

(4,58,4) 勻稱分割 頂點組態 [3,4,5,4]

表 6 $n=4$ 之存在三種不同秩數的勻稱分割之圖形

定理七：頂點組態中含有三種不同的秩數的 (n,m,n) 勻稱分割，在 $n=4$ 時只有 $(4,58,4)$ 勻稱分割(頂點組態 [3,4,5,4])一組解。

Case 3： $n=5$ 時

$$\frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{n+m} + 2 = \frac{4m}{3m+15} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{m+5} + 2 = \frac{10m+30}{3m+15} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{m+5}$$

$$= 3 + \frac{m-15}{m+4} - \frac{m_3(D_3 - D_1)}{m+5} > D_1 \quad \text{且} \quad \frac{m-15}{m+4} < 1, \quad D_1 \geq 3 \Rightarrow D_1 = 3$$

利用窮舉法可知， $n=5$ 時共有 15 種頂點組態，共可分為 6 類

(1) $D_1 = 3$ ，頂點組態為 $[3, 3, 3, D_2, D_3]$ 或 $[3, D_2, 3, 3, D_3]$ ：

$$\frac{3m_1}{3} - 1 = D_2 m_2 - 1 = D_3 m_3 - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = \frac{2m+3}{3}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{2m+6}{3}, \quad m_2 = \frac{2m+6}{3D_2}, \quad m_3 = \frac{2m+6}{3D_3}, \quad \text{由 } m_1 + m_2 + m_3 = n+m = m+5$$

$$\Rightarrow \frac{2m+6}{3} + \frac{2m+6}{3D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} = m+5 \Rightarrow \frac{2m+6}{3D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} = \frac{m+9}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} = \frac{m+9}{2m+6} = \frac{1}{2} + \frac{3}{m+3} > \frac{1}{2}, \quad \text{由 } D_1 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{3}{20} < \frac{1}{2} \quad (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \text{無解}$$

(2) $D_1 = 3$ ，頂點組態為 $[D_2, D_2, D_2, D_3, 3]$ 或 $[D_2, D_3, D_2, D_2, 3]$ ：

$$\begin{aligned}
 3m_1 - 1 &= \frac{D_2 m_2}{3} - 1 = D_3 m_3 - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = \frac{2m+3}{3} \\
 \Rightarrow m_1 &= \frac{2m+6}{9} \text{、} m_2 = \frac{2m+6}{D_2} \text{、} m_3 = \frac{2m+6}{3D_3} \text{，由 } m_1 + m_2 + m_3 = n + m = m + 5 \\
 \Rightarrow \frac{2m+6}{9} + \frac{2m+6}{D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} &= m + 5 \Rightarrow \frac{2m+6}{D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} = \frac{7m+39}{9} \\
 \Rightarrow \frac{3}{D_2} + \frac{1}{D_3} &= \frac{7m+39}{6m+18} = \frac{7}{6} + \frac{3}{m+3} > \frac{7}{6} \text{，由 } D_1 = 3 \\
 \Rightarrow \frac{3}{D_2} + \frac{1}{D_2} &\leq \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < \frac{7}{6} \text{ (} \rightarrow \leftarrow \text{)} \Rightarrow \text{無解}
 \end{aligned}$$

(3) $D_1 = 3$ ，頂點組態為 $[D_3, D_3, D_3, 3, D_2]$ 或 $[D_3, 3, D_3, D_3, D_2]$ ：

$$\begin{aligned}
 3m_1 - 1 &= D_2 m_2 - 1 = \frac{D_3 m_3}{3} - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = \frac{2m+3}{3} \\
 \Rightarrow m_1 &= \frac{2m+6}{9} \text{、} m_2 = \frac{2m+6}{3D_2} \text{、} m_3 = \frac{2m+6}{D_3} \text{，由 } m_1 + m_2 + m_3 = n + m = m + 5 \\
 \Rightarrow \frac{2m+6}{9} + \frac{2m+6}{3D_2} + \frac{2m+6}{D_3} &= m + 5 \Rightarrow \frac{2m+6}{3D_2} + \frac{2m+6}{D_3} = \frac{7m+39}{9} \\
 \Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{3}{D_3} &= \frac{7m+39}{6m+18} = \frac{7}{6} + \frac{3}{m+3} > \frac{7}{6} \text{，由 } D_1 = 3 \\
 \Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{3}{D_3} &\leq \frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{17}{20} < \frac{7}{6} \text{ (} \rightarrow \leftarrow \text{)} \Rightarrow \text{無解}
 \end{aligned}$$

(4) $D_1 = 3$ ，頂點組態為 $[3, D_2, D_3, D_2, D_3]$ 或 $[3, D_3, D_2, D_2, D_3]$ 或

$[3, D_2, D_2, D_3, D_3]$ ：

$$\begin{aligned}
 3m_1 - 1 &= \frac{D_2 m_2}{2} - 1 = \frac{D_3 m_3}{2} - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = \frac{2m+3}{3} \\
 \Rightarrow m_1 &= \frac{2m+6}{9} \text{、} m_2 = \frac{4m+12}{3D_2} \text{、} m_3 = \frac{4m+12}{3D_3} \text{，由 } m_1 + m_2 + m_3 = n + m = m + 5
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{2m+6}{9} + \frac{4m+12}{3D_2} + \frac{4m+12}{3D_3} = m+5 \Rightarrow \frac{4m+12}{3D_2} + \frac{4m+12}{3D_3} = \frac{7m+39}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} = \frac{7m+39}{12m+36} = \frac{7}{12} + \frac{3}{2m+6} > \frac{7}{12}, \text{ 由 } D_1=3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{3}{20} < \frac{7}{12} \quad (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \text{無解}$$

(5) $D_1=3$ ，頂點組態為 $[D_2, D_3, 3, D_3, 3]$ 或 $[D_2, 3, D_3, D_3, 3]$ 或 $[D_2, D_3, D_3, 3, 3]$ ：

$$\frac{3m_1}{2} - 1 = D_2 m_2 - 1 = \frac{D_3 m_3}{2} - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = \frac{2m+3}{3}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{4m+12}{9}, m_2 = \frac{2m+6}{3D_2}, m_3 = \frac{4m+12}{3D_3}, \text{ 由 } m_1 + m_2 + m_3 = n+m = m+5$$

$$\Rightarrow \frac{4m+12}{9} + \frac{2m+6}{3D_2} + \frac{4m+12}{3D_3} = m+5 \Rightarrow \frac{2m+6}{3D_2} + \frac{4m+12}{3D_3} = \frac{5m+33}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{2}{D_3} = \frac{5m+33}{6m+18} = \frac{5}{6} + \frac{3}{m+3} > \frac{5}{6}, \text{ 由 } D_1=3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{2}{D_3} \leq \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{13}{20} < \frac{5}{6} \quad (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \text{無解}$$

(6) $D_1=3$ ，頂點組態為 $[D_3, 3, D_2, 3, D_2]$ 或 $[D_3, D_2, 3, 3, D_2]$ 或 $[D_3, 3, 3, D_2, D_2]$ ：

$$\frac{3m_1}{2} - 1 = \frac{D_2 m_2}{2} - 1 = D_3 m_3 - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = \frac{2m+3}{3}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{4m+12}{9}, m_2 = \frac{4m+12}{3D_2}, m_3 = \frac{2m+6}{3D_3}, \text{ 由 } m_1 + m_2 + m_3 = n+m = m+5$$

$$\Rightarrow \frac{4m+12}{9} + \frac{4m+12}{3D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} = m+5 \Rightarrow \frac{4m+12}{3D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} = \frac{5m+33}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{D_2} + \frac{1}{D_3} = \frac{5m+33}{6m+18} = \frac{5}{6} + \frac{3}{m+3} > \frac{5}{6}, \text{ 由 } D_1=3$$

$$\Rightarrow \frac{2}{D_2} + \frac{1}{D_3} \leq \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} < \frac{5}{6} \quad (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \text{無解}$$

故 $n=5$ 時，不存在頂點組態含有 3 種不同秩數的勻稱分割。

定理八：頂點組態中含有三種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割，在 $n=5$ 時無解，即 n 最大值為 4。

五、多於 3 種不同秩數的勻稱分割：

設分割出秩數為 D_1 的有 m_1 個點、秩數為 D_2 的有 m_2 個點、秩數為 D_3 的有 m_3 個點……秩數 D_k 的有 m_k 個點（不失一般性，令 $D_1 < D_2 < D_3 < \dots < D_k$ ），此時總點數

$n+m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ ，所有點的秩數總和為

$$D_1 m_1 + D_2 m_2 + \dots + D_k m_k = 2(m_1 + m_2 + \dots + m_k) + \frac{4m}{n-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (D_1 - 2)m_1 + (D_2 - 2)m_2 = \frac{4m}{n-2} - [(D_3 - 2)m_3 + (D_4 - 2)m_4 + \dots + (D_k - 2)m_k] \\ m_1 + m_2 = n + m - (m_3 + m_4 + \dots + m_k) \end{cases}$$

$$\text{令 } x = \sum_{i=3}^k D_i m_i, y = \sum_{i=3}^k m_i \Rightarrow \begin{cases} (D_1 - 2)m_1 + (D_2 - 2)m_2 = \frac{4m}{n-2} - (x - 2y) \\ m_1 + m_2 = n + m - y \end{cases}$$

利用行列式

$$\Rightarrow m_1 = \frac{\frac{4m}{n-2} - (n+m)(D_2 - 2) - x + yD_2}{D_1 - D_2}, m_2 = \frac{\frac{4m}{n-2} - (n+m)(D_1 - 2) - x + yD_1}{D_2 - D_1}$$

由

$$m_2 > 0 \Rightarrow \frac{4m}{n-2} - (n+m)(D_1 - 2) - x + yD_1 > 0 \Rightarrow \frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{x - yD_1}{n+m} + 2 > D_1 \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{x - yD_1}{n+m} > 1$$

$$\text{當 } n \geq 6 \Rightarrow \frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{x - yD_1}{n+m} \leq \frac{4m}{4(m+4)} - \frac{x - yD_1}{m+4} = 1 - \frac{4}{m+4} - \frac{x - yD_1}{m+4} < 1 \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

故 $n \leq 5$(A)

Case 1：4 種不同秩數的勻稱分割

四種不同的秩數為 D_1, D_2, D_3, D_4 ($D_1 < D_2 < D_3 < D_4$) $\Rightarrow n \geq 4$ ，由 (A)

可知 $n \leq 5 \Rightarrow n = 4$ 或 5

(1) 當 $n = 4$ 時：

$$\frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{x-yD_1}{n+m} + 2 = \frac{2m}{m+4} + 2 - \frac{x-yD_1}{m+4} = 4 - \frac{8}{m+4} - \frac{x-yD_1}{m+4} > D_1$$

$\Rightarrow D_1 = 3 \Rightarrow$ 頂點組態中必有 3、 D_2 、 D_3 、 D_4 各 1 個

$$\Rightarrow 3m_1 - 1 = D_2m_2 - 1 = D_3m_3 - 1 = D_4m_4 - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = m+1$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{m+2}{3}, m_2 = \frac{m+2}{D_2}, m_3 = \frac{m+2}{D_3}, m_4 = \frac{m+2}{D_4}, \text{ 由}$$

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = n + m = m + 4$$

$$\Rightarrow \frac{m+2}{3} + \frac{m+2}{D_2} + \frac{m+2}{D_3} + \frac{m+2}{D_4} = m + 4 \Rightarrow \frac{m+2}{D_2} + \frac{m+2}{D_3} + \frac{m+2}{D_4} = \frac{2m+10}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4} = \frac{2m+10}{3m+6} = \frac{2}{3} + \frac{2}{m+2} > \frac{2}{3}, \text{ 由 } D_1 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} < \frac{2}{3} \quad (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow n = 4 \text{ 時無解}$$

(2) 當 $n = 5$ 時：

$$\frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{x-yD_1}{n+m} + 2 = \frac{4m}{3m+15} + 2 - \frac{x-yD_1}{m+5} = 3 + \frac{m-15}{3m+15} - \frac{x-yD_1}{m+5} > D_1$$

$$\text{且 } \frac{m-15}{3m+15} < 1 \Rightarrow D_1 = 3$$

[1] $D_1 = 3$ ，頂點組態中含有 2 個 3、1 個 D_2 、1 個 D_3 、1 個 D_4 ：

$$\frac{3m_1}{2} - 1 = D_2m_2 - 1 = D_3m_3 - 1 = D_4m_4 - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = \frac{2m+3}{3}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{4m+12}{9}, m_2 = \frac{2m+6}{3D_2}, m_3 = \frac{2m+6}{3D_3}, m_4 = \frac{2m+6}{3D_4}$$

$$\text{由 } m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = n + m = m + 5$$

$$\Rightarrow \frac{4m+12}{9} + \frac{2m+6}{3D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} + \frac{2m+6}{3D_4} = m + 5$$

$$\Rightarrow \frac{2m+6}{3D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} + \frac{2m+6}{3D_4} = \frac{5m+33}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4} = \frac{5m+33}{6m+18} = \frac{5}{6} + \frac{3}{m+3} > \frac{5}{6}, \text{ 由 } D_1=3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} < \frac{2}{3} \quad (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \text{無解}$$

[1] $D_1=3$ ，頂點組態中含有 1 個 3、2 個 D_2 、1 個 D_3 、1 個 D_4 ：

$$\begin{aligned} 3m_1 - 1 &= \frac{D_2 m_2}{2} - 1 = D_3 m_3 - 1 = D_4 m_4 - 1 = \alpha = \frac{2m}{n-2} + 1 = \frac{2m+3}{3} \\ \Rightarrow m_1 &= \frac{2m+6}{9}, m_2 = \frac{4m+12}{3D_2}, m_3 = \frac{2m+6}{3D_3}, m_4 = \frac{2m+6}{3D_4} \\ &\text{由 } m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = n + m = m + 5 \\ \Rightarrow \frac{2m+6}{9} + \frac{4m+12}{3D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} + \frac{2m+6}{3D_4} &= m + 5 \Rightarrow \frac{4m+12}{3D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} + \frac{2m+6}{3D_4} = \frac{7m+39}{9} \\ \Rightarrow \frac{2}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4} &= \frac{7m+39}{6m+18} = 1 + \frac{m+21}{6m+18} > 1, \text{ 由 } D_1=3 \\ \Rightarrow \frac{2}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4} &\leq \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{13}{15} < 1 \quad (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \text{無解} \end{aligned}$$

同理當頂點組態中含有 1 個 3、1 個 D_2 、2 個 D_3 、1 個 D_4 時

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{2}{D_3} + \frac{1}{D_4} = \frac{7m+39}{6m+18} = 1 + \frac{m+21}{6m+18} > 1, \text{ 由 } D_1=3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{2}{D_3} + \frac{1}{D_4} \leq \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{49}{60} < 1 \quad (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \text{無解}$$

當頂點組態中含有 1 個 3、1 個 D_2 、1 個 D_3 、2 個 D_4 時

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{2}{D_4} = \frac{7m+39}{6m+18} = 1 + \frac{m+21}{6m+18} > 1, \text{ 由 } D_1=3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{2}{D_4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} = \frac{47}{60} < 1 \quad (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \text{無解} \Rightarrow n=5 \text{ 時無解}$$

故不存在 4 種不同秩數的勻稱分割。

Case 2：5 種不同秩數的勻稱分割

五種不同的秩數為 $D_1、D_2、D_3、D_4、D_5$ ($D_1 < D_2 < D_3 < D_4 < D_5$) $\Rightarrow n \geq 5$ ，

由 (A) 可知 $n \leq 5 \Rightarrow n = 5$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{4m}{(n-2)(n+m)} - \frac{x-yD_1}{n+m} + 2 &= \frac{4m}{3m+15} + 2 - \frac{x-yD_1}{m+5} = 3 + \frac{m-15}{3m+15} - \frac{x-yD_1}{m+5} > D_1 \\ \text{且 } \frac{m-15}{3m+15} < 1 &\Rightarrow D_1 = 3, \text{ 且頂點組態中必有 } 3、D_2、D_3、D_4、D_5 \text{ 各 } 1 \text{ 個} \\ \Rightarrow 3m_1 - 1 = D_2m_2 - 1 = D_3m_3 - 1 = D_4m_4 - 1 = D_5m_5 - 1 = \alpha &= \frac{2m}{n-2} + 1 = \frac{2m+3}{3} \\ \Rightarrow m_1 = \frac{2m+6}{9}, m_2 = \frac{2m+6}{3D_2}, m_3 = \frac{2m+6}{3D_3}, m_4 = \frac{2m+6}{3D_4}, m_5 = \frac{2m+6}{3D_5} \\ \text{由 } m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = n + m = m + 5 \\ \Rightarrow \frac{2m+6}{9} + \frac{2m+6}{3D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} + \frac{2m+6}{3D_4} + \frac{2m+6}{3D_5} &= m + 5 \\ \Rightarrow \frac{2m+6}{3D_2} + \frac{2m+6}{3D_3} + \frac{2m+6}{3D_4} + \frac{2m+6}{3D_5} &= \frac{7m+39}{9} \\ \Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4} + \frac{1}{D_5} = \frac{7m+39}{6m+18} &= 1 + \frac{m+21}{6m+18} > 1, \text{ 由 } D_1 = 3 \\ \Rightarrow \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4} + \frac{1}{D_5} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{319}{420} < 1 &(\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \text{無解} \end{aligned}$$

故不存在 5 種不同秩數的勻稱分割。

Case 3：k 種不同秩數的勻稱分割 ($k > 6$)

$k > 6 \Rightarrow n \geq 6$ ，但由 (A) 可知 $n \leq 5$ ($\rightarrow \leftarrow$) $\Rightarrow k$ 種不同秩數的勻稱分割在 $k > 6$ 時無解。

綜合 **Case 1**、**Case 2**、**Case 3** 可知 k 種不同秩數的勻稱分割在 $k > 3$ 時無解。

定理九：頂點組態中含有 k 種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割在 $k > 3$ 時無解。

伍、 結論

- 一、頂點組態中僅含有單一種秩數的 (n, m, n) 勻稱分割共有 5 種。
- 二、頂點組態中含有兩種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割，其 n 最大值為 5。
(亦即 n 只能為 3、4、5 三種情形)
- 三、頂點組態中含有兩種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割共有 13 種。
- 四、頂點組態中含有三種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割，其 n 最大值為 4。
(亦即 n 只能為 3、4 兩種情形)
- 五、頂點組態中含有三種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割共有 3 種。
- 六、頂點組態中含有 k 種不同的秩數的 (n, m, n) 勻稱分割在 $k > 3$ 時無解。

陸、 參考資料

1. 林宇軒、詹承軒（民100），完美 k 分割，第51屆全國中小學科展作品。
2. 平面尤拉公式：
<http://www3.cns.hk.edu.tw/~math/geo/geo-down/%20geo-down2-1-all.pdf>
3. 陳冒海主編(民99)。國民中學數學課本第4冊。臺南市：南一。

評語

本作品是研究如何在平面上畫出有預定組態的勻稱圖，利用 GSP 軟體也順利地把這些圖畫出來，作品具有一定的研究水準。

這作品的主要工具是尤拉公式，內涵則是在作圖學的研究，因此，如何更有效地利用公式在秩(Degree)的表達，以及在如何判斷所畫出圖形是否“唯一”的方向多做努力，單憑軟體協助作圖，缺乏數學的完整性。