

# 2012 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

編號：140014

## 作品名稱

與波共舞的飄浮水滴

## 得獎獎項

大會獎：三等獎

作者姓名：蔣儀宣、朱鳳華、徐悅聲

就讀學校：高雄市立高雄女子高級中學、  
                  高雄市立高雄高級中學

指導教師：徐德耀、呂台華

關鍵字：漂浮水滴、法拉第波、表面張力

## 作者簡介



我是蔣儀宣(左)，目前就讀高雄女中二年級，物理和英文是我最喜歡的科目，平日愛好閱讀，尤其對科普文學有著濃厚的興趣，想到一些奇怪問題的答案時會莫名的感動，希望未來能對於科技有所貢獻。

我叫朱鳳華(右)，現在就讀於高雄女中二年級，喜歡動手做實驗，從小被父親養成不死記公式的習慣，讓我在自然科領域的學習上又多了些趣味，很高興能和同學一同參與科展，得到許多寶貴的經驗！



我是徐悅聲，目前就讀於高雄中學二年級。我自小即對大自然的事物與現象充滿好奇，享受探索的樂趣。對我來說，世界充滿了驚奇與奧妙，有時看似不相干的兩回事，可能存在著絕妙的聯結，看似混亂無章，卻又可化繁為簡成普遍的通則，這樣神性的美麗，不禁讓人對造物主的巧思望洋興嘆。研究者的工作，便是追尋宇宙每一個角落被賦予的道理，歸納資訊，洞察萬物，文明便由此而生，這樣的工作，是科學，也是藝術，讓人著迷，也使人欽佩。

即便沒有過人的天賦，我對宇宙的規律性依然懷著一份熱情，對萬物有求知的渴望。這次的國際科展，是我跨入科學窄門的第一步，我希望從中學到如何有效設計實驗，團隊合作，汲取資訊，並合理推斷，從繁雜之中得出結果，而最重要的，是使用言語表達出腦中的想法。此次比賽經驗，期望能從中磨練自己的能力，並讓自己的求知慾，能得到更進一步的昇華。

## 摘要

一顆純水水滴落在水面上通常會立刻與水面結合，但當液滴以固定高度朝向有界面活性劑的液面釋放時，這顆水滴會較在沒有添加界面活性劑的水面上時生存更久。根據統計結果，不同釋放高度和界面活性劑的有無及水滴大小均會影響水滴的生存期。

當液面垂直振動或是被風吹動時，因為水滴和液面之間的氣墊會不斷地被更新，結合的時間可以被延長。當液面垂直振動時，可觀察到漂浮水滴在液面上產生上下振動、在 2 點間來回運動(束縛)、行進、跳動等運動行為，在運動期間水滴本身也會伴隨著振盪變形。當水滴在振動液面產生行進所對應的加速度門檻值，在特定頻率下會出現極小值，此時水滴與水浴會形成共振現象。

當兩顆漂浮液滴在垂直振動的液面互相靠近時，除了會有結合、彈開的現象外，兩者間也會產生互繞質心轉動及排斥的現象。漂浮水滴在振動液面上的多種運動現象很類似 Couder's 團隊針對在油面上跳動油滴(walker)所做的研究，但兩者間仍然存在著差異。

## **Floating Droplets Dancing with Wave**

### **Abstract**

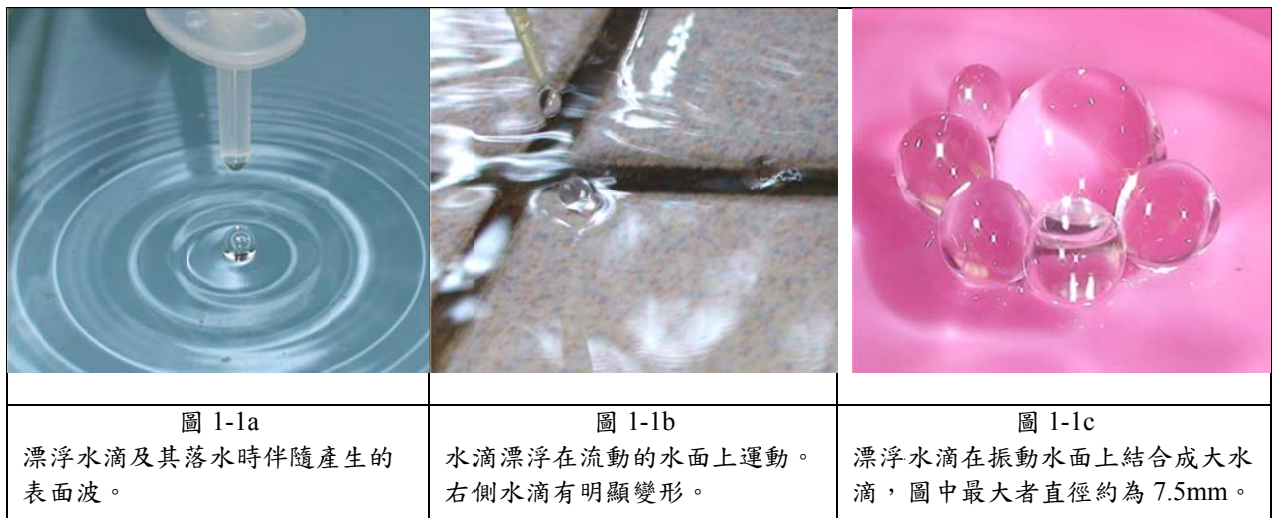
A pure water drop coalesces almost immediately with a pure water surface. When a water drop is released, from a certain height, upon the liquid surface with surfactant solution, the water drop sustains longer than on the water surface without surfactant. Research statistics indicated that the duration of the water drop varied by the height it was released from, by the existence of the surfactant in water bath and by the size of the droplet.

Coalescence of the droplet and the liquid surface would be prolonged due to the continual renewal of the air cushion by wind or vibrating the liquid surface vertically. When the surface vibrated vertically, the droplet was observed to vibrate up and down, move back and forth, travel, and bounce. The droplet also transformed along with the movement. The threshold acceleration of drop corresponding to travel on the vibrating liquid surface is minima for a particular frequency when droplet and bath motions are in resonance.

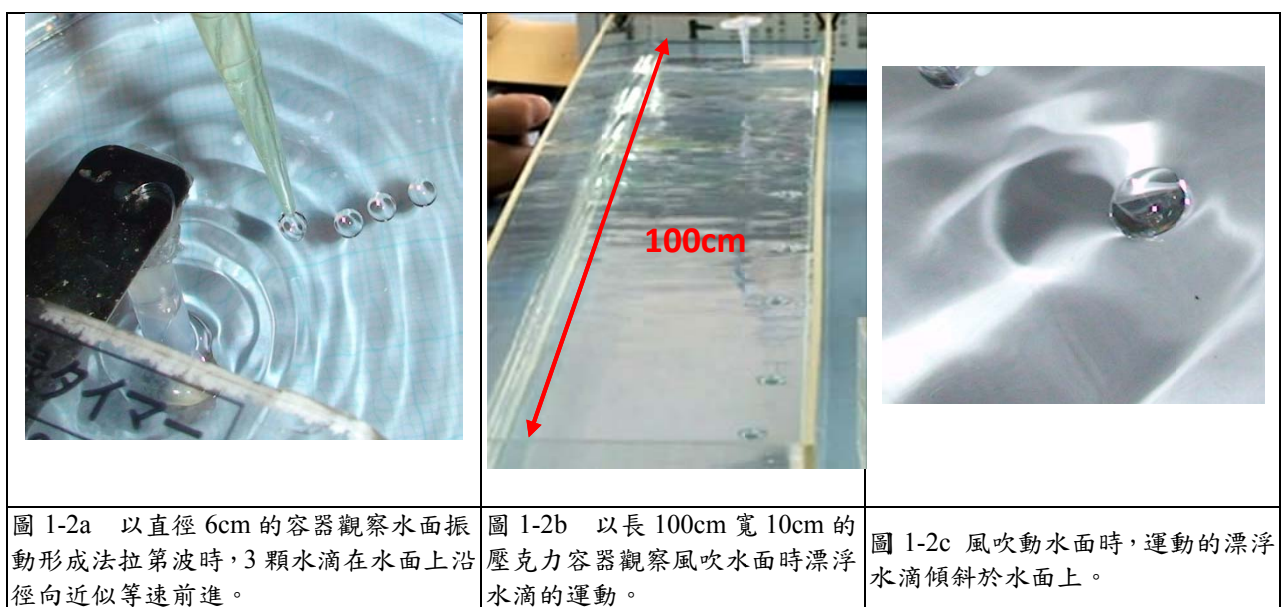
When two floating droplets get closer to each other on a vertically-vibrating surface, they would demonstrate orbiting around or repulsing to each other, in addition to coalescence and bouncing. As observed in this study, the phenomena of the floating droplets moving on the vibrating liquid surface was analogous to what Couder's group had found in their "walker" study, though distinctions were still detected.

## 一、研究動機

曾注意到下雨時落下的雨滴大部份會立刻沒入水中，但有時會漂浮於水面，且流動的水面似乎可讓漂浮的水滴存在較久的時間。心中感到奇怪，為什麼水滴能浮在水面上呢(圖1-1a)? 為什麼流動的水可讓漂浮時間延長呢(圖1-1b)? 有方法可以形成大顆的漂浮水滴嗎(圖1-1c)?



為了觀察漂浮水滴，我們使用大尺寸的容器去觀察了解水滴為何能漂浮在水面以及如何有效延長水滴在水面的存在時間；並分析漂浮水滴在水面上與波動間的各种交互作用。(圖1-2)



## 二、研究目的

- 1、改變水滴的大小、高度及水面溶液濃度等變因去尋找在水面形成漂浮水滴的較佳條件並分析水滴可在水面漂浮的機制。
- 2、利用風吹動水面觀察對漂浮水滴的生存期影響，並分析漂浮水滴在不同風速下的運動。
- 3、利用水面產生垂直振動後觀察對漂浮水滴的生存期影響，並分析漂浮水滴於液面上在不同驅動頻率、不同加速度下的運動情形。

## 三、實驗器材

以下是我們所使用的實驗器材。

器材名稱	規格	數量
自製及市售點滴管裝置		數組
不同規格的容器 (用來盛裝液體觀察落在水面上的液滴行為)		數個
洗潔精	內含非離子性介面活性劑	1 瓶
數位攝影機	20 倍放大 SONY	1 台
高速攝影機(CASIO)	(FH-100 最高 1200fps) (Exilim 最高 420fps)	2 台
功率放大器		1 台
聲頻產生器		1 台
變頻器	110V, 1-400Hz	1 台
加速度測量計(25g 大加速度值)	Vernier 自動讀取裝置	1 套
表面張力計		1 台
電風扇	35W	1 台
直尺	30、60、100 公分	數支
交流安培計	最大 5A	1 台
可變電阻		1 個

## 四、研究方法

### (一)、實驗方法

前置實驗：參考之前的科展作品[1-2]，改變相關的變因如水滴大小、水滴下降高度、水面添加洗潔精濃度，並找出漂浮水滴的漂浮機制與合適的生存條件。

觀察發現水面的擾動與否似乎與漂浮水滴的生存期有密切關聯。我們查詢相關文獻[3-5]發現大多數的研究都是利用垂直振動方式補充油滴與油面間的氣墊，藉以維持油滴存在於油面上。也有論文利用平穩流動的水流去維持漂浮水滴，並做過詳細討論[6]。我們決定採用風吹水面及垂直振動水面的方式來進行下列相關實驗。

1. 探討風吹液面對漂浮水滴生存期及水滴運動的影響。

(1) 統計不同大小的水滴在不同風速作用下，漂浮在水面上的生存期。

(2) 統計不同大小的水滴在不同風速作用下，在水面上不同區段的移動速率。

2. 探討液面垂直振動下，對漂浮水滴生存期的影響及液面上水滴的各種運動。

(1) 觀察不同的驅動頻率、加速度下，液面產生的變化。

(2) 觀察不同的驅動頻率、加速度下，漂浮水滴在液面上的各種運動現象。

(3) 觀察不同的驅動頻率、加速度下，液面上漂浮水滴間的交互作用。

3. 根據實驗結果探討水滴漂浮水面的機制，並分析水滴在水面上的各種運動。下面是我們用風吹水面及振動水面的實驗裝置介紹。

(1) 觀察漂浮水滴在風吹水面上的實驗裝置圖

一開始我們直接用風扇吹動水面，但吹出的風造成水面的波動較紊亂。所以後來使用自製的風箱，讓吹出的風較為平穩，便於觀察波形量測水面波速並以風速計測量出風口的風速。實驗裝置圖如圖 4-1 所示。



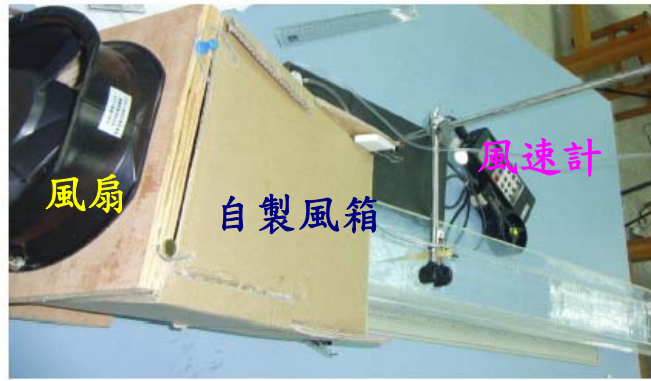


圖 4-1 風吹動水面之實驗裝置圖

(2)觀察漂浮水滴在垂直振動水面的實驗裝置圖：

查閱資料發現大部分做垂直振動的研究都是利用一種特殊的儀器去控制。我們並沒有此種設備，只能就地取材。另外有些人是利用聲波去振動水面。而以下是我們在垂直振動水面的實驗設備演進(如圖 4-2)。


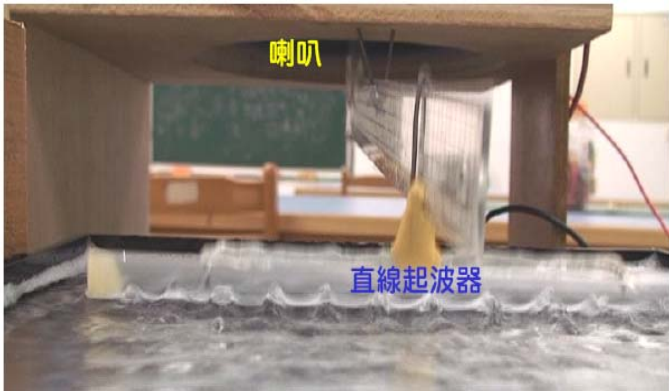
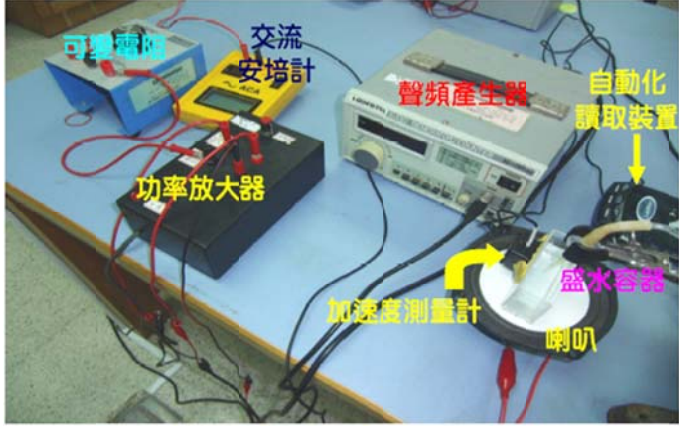
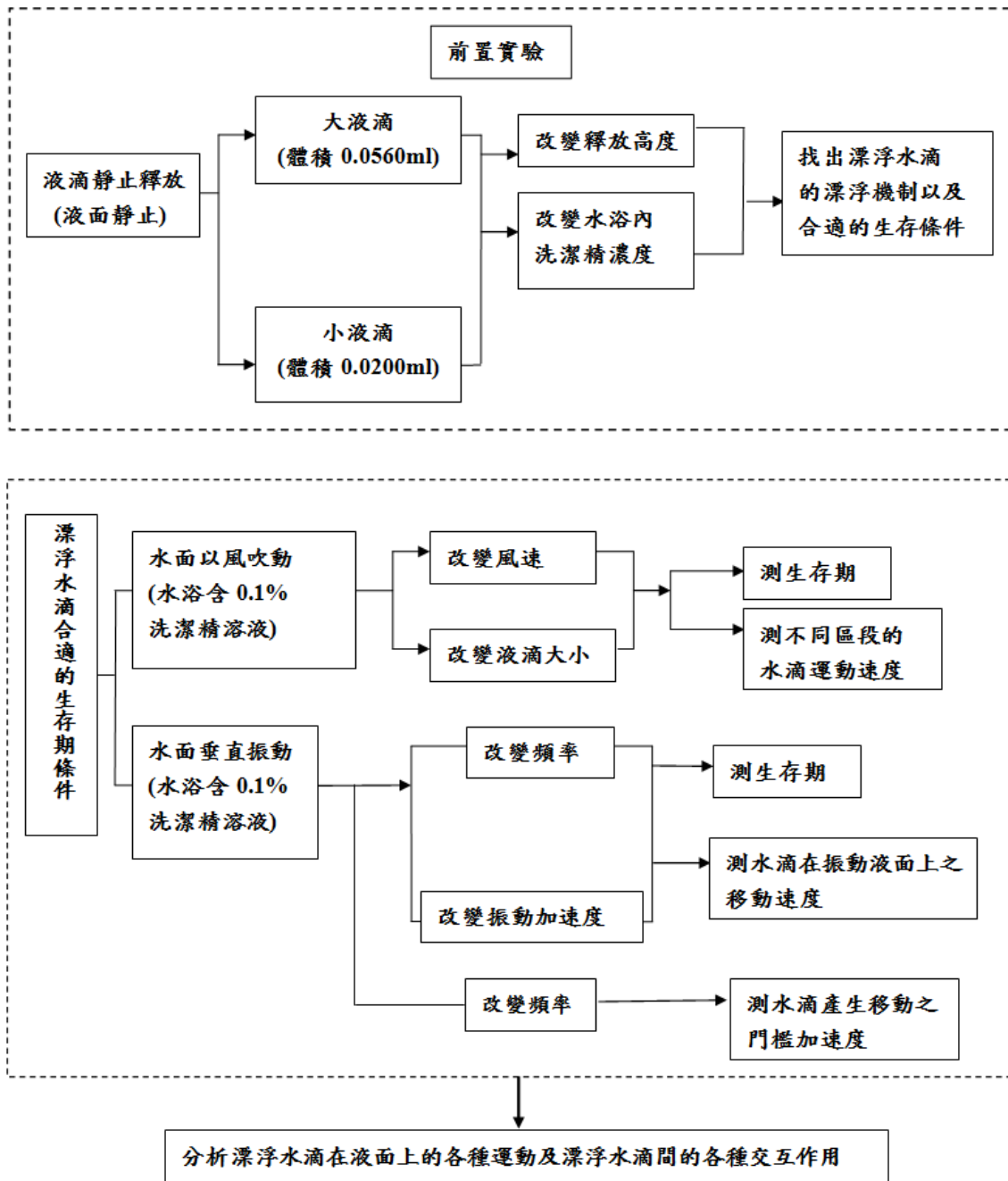
	實驗設備設置圖	裝設方式與缺點改進
第 1 代		<p>先利用實驗室中的打點計時器去改裝成起波器，上下振動水面。因變頻器只能調頻率，無法有效控制水面的振幅，所以得找出更好的方法去振動水面。</p>
第 2 代		<p>以喇叭上黏著直桿改裝成起波器後，再以功率放大器將聲頻產生器的交流訊號經放大後驅動喇叭振動，使直桿形成垂直振動。</p> <p>此時可控制水面的振幅與頻率，但因起波器產生的水波會隨著傳遞的距離而衰減，所以還要找尋其他的振動方式。</p>
第 3 代		<p>將合適的容器置於喇叭上固定，並確保容器底部水平後裝水，再以交流訊號經放大後驅動喇叭振動，此時會讓水面形成較均勻穩定的振動。</p> <p>但此時因喇叭尺寸固定，需用特定大小容器，而水面產生的法拉第波會因容器的大小及形狀、振動頻率、水深等因素，產生各式各樣的圖案。</p>

圖 4-2 3 種垂直振動液面之實驗裝置圖

以下是我們整個實驗的流程簡圖。



## (二)、原理分析

### 1、為何水滴可以漂浮在水面

當液滴向下接近同種液面時，撞擊的結果可能是液滴沒入液面形成渦流環 (vortex)；液面飛濺(splash)，液滴由液面再度彈起(rebound)，因為液滴與液面的氣墊存在使液滴可在液面作短暫的停留，使結合(coalescence)暫緩發生。但在有限的時間過去後，氣墊會消散，當氣墊層太薄時，液滴與液面便會結合了。

研究顯示液滴半徑 $R$ 、液體的表面張力 $\sigma$ 、黏滯係數 $\mu$ 、密度 $\rho$ 和撞擊時的速度 $v_i$ 等，都是對上述現象產生影響的重要參數。在探討液滴撞擊液面的問題時，一些無因次的參數常用來分析此現象，這些無因次的參數[7-8]常被使用

的為： Ohnesorge number  $Oh = \frac{\mu}{\sqrt{\rho\sigma R}}$ ，與 Weber number  $We = \frac{\rho v_i^2 R}{\sigma}$ 。

這些無因次參數的數值的不同，會導致液滴下降到液面時形成液面飛濺、液滴再度彈起，液滴沒入液面形成渦流環或與液面結合。

其中由 Ohnesorge number ( $Oh = \frac{\mu}{\sqrt{\rho\sigma R}}$ ) 可看出液滴黏滯性對液滴本身形變所造成的影響。當  $Oh > 1$  時，液滴的形變很容易因黏滯效應而減弱，故液滴的形變可忽略；但當  $Oh \ll 1$  時，液滴的形變就很明顯，不能加以忽視了。

水滴掉落水面後，浮在水面的情況不常發生。當 Weber number 甚小時，水滴接觸水面時，會有一些氣體被擠壓在水滴與水面間形成空氣膜，就是因為這層氣膜(如圖 4-3)的存在才會使水滴及水面各自形成它們的表面張力。

而當速度不快的水滴落在水面上時，下降到液面的衝力只要不破壞氣膜，水面的表面張力便會使水面出現像彈性膜的作用。實驗中我們有觀察到浮在水面上的水滴，因這層氣膜存在而形成的干涉現象。

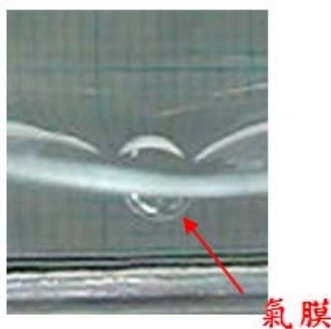


圖 4-3 水滴掉於水面上形成氣膜

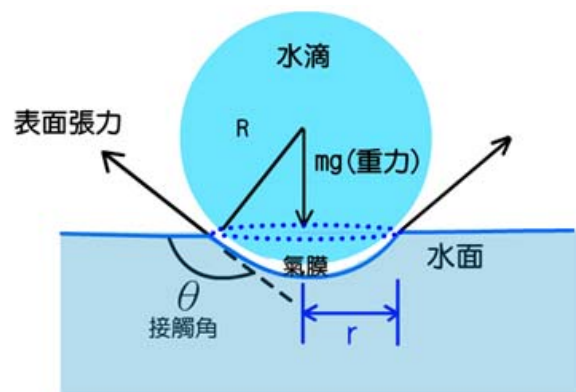


圖 4-4 水滴浮於水面上受力示意圖

我們認為就是因為這層氣膜的存在，方可使小水滴漂浮在水面上。而在水面的表面張力可支撐水滴重力的情況下，水滴便可浮於水面上達到平衡，如圖 4-4。由

教科書中[9]得知，若水的表面張力為  $T$ ，液滴與水面接觸角為  $\theta$ ，液滴若為球狀，半徑為  $R$  密度為  $\rho$ ， $r$  為圖 4-4 中所示的水面凹陷後投影在水平面的圓半徑，則當液滴浮於水面上達到靜力平衡時，

$$T \times 2\pi r \sin(\pi - \theta) = \rho \times \frac{4\pi}{3} R^3 g \quad (4-1)$$

當水滴下落至水面最低點位置時，水面形變最大，若水滴此時尚未與水面產生結合，且表面張力向上的合力大於重力，便會將水滴往上彈起，造成水滴在水面上產生上下振動後趨於靜止，最後與水面結合。

若一顆液滴掉落液面時，它的  $We \sim 1$  且其對應的  $Oh < 1$ ，它與液面結合的過程，是產生部分結合，剩下小體積的子液滴。而部分結合過程會持續進行直到最後一顆子液滴的半徑夠小時結束，此時液滴的  $Oh \gg 1$ 。

## 2. 法拉第波[10]

要讓一個液體系統注入能量，有 2 種取得方式。第 1 種是直接的施力，若  $f(t)$  為驅動力，且  $f(t) = f \cos \omega t$ ，系統沿  $z$  軸方向振動，則典型的方程式為  $\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = f(t)$ 。當阻尼係數  $\gamma$  較小時，系統會在  $\omega \approx \omega_0$  時引起共振。

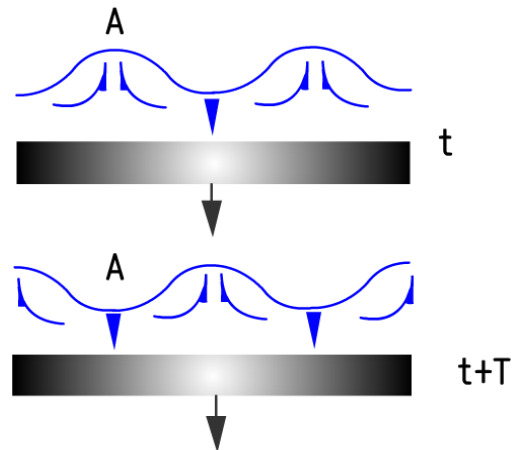


圖 4-5 法拉第波週期為振動週期 2 倍的示意圖

第 2 種方式為參數化的作用力，典型的方程式為 Mathieu equation [11]

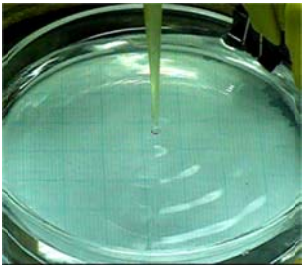




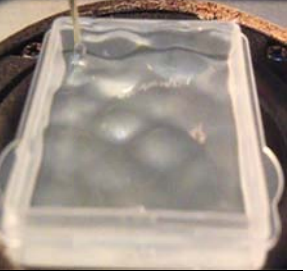
$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 [1 + f(t)]z = 0 \quad (4-2)$$

若  $f(t)$  仍是正弦形式，而(4-2)式因為有與時間相關的項目，所以無法得到解析解。

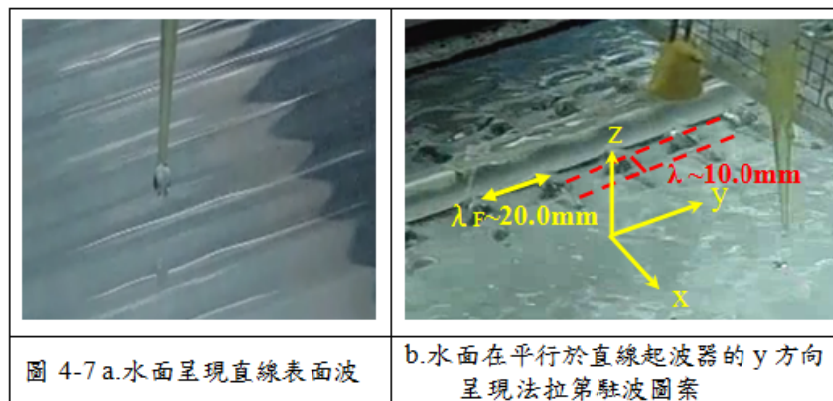
而法拉第波是由參數化的作用力引起。在重力加速度  $g$  的環境下，若有一種黏滯性的液體，密度為  $\rho$ ，表面張力為  $\sigma$ ，液體深度  $h$ ，當液面以一個垂直方向的加速度  $a = a_{\max} \cos 2\pi f t = \Gamma g \cos 2\pi f t$  加以上下振動，此處  $\Gamma$  為減縮加速度 (reduced acceleration)。當  $\Gamma$  超出一個門檻值  $\Gamma^F$  時，便會形成頻率為  $f/2$  的表面駐波(如圖 4-5)，稱為法拉第駐波，又稱為法拉第不穩定性(instability)。




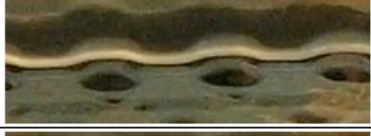



法拉第駐波的圖案會因容器的幾何形狀、液體深度、振動頻率產生各式的變化，圖 4-6 是我們在實驗中拍攝到不同狀況下的容器液面振動時，對應小振幅下的表面張力波與大振幅下的法拉第波圖案。

表面張力波			
法拉第波			
頻率(Hz)	30Hz	60Hz	30Hz
圖 4-6. 不同幾何形狀容器與振動頻率下出現的表面張力波與法拉第波圖案。 上方為小振幅的表面張力波；下方為大振幅的法拉第波。			

實驗中使用線狀起波器在水面垂直振動時，製造出直線波(如圖 4-7a)，在振幅漸增下會在水面 2 個互相垂直的方向上分別製造出法拉第波與週期性的行進波(如圖 4-7b)，結果在平行於直線起波器的方向(y 方向)產生頻率為 15Hz 的法拉第波，其對應的法拉第波長  $\lambda_F \cong 20.0\text{mm}$ (如圖 4-7 b)，而在垂直於直線起波器的方向(x 方向)產生頻率為 30Hz 的行進波，其對應的波長  $\lambda \cong 10.0\text{mm}$ ，若在此時液面傳遞的波速為  $v_\phi$ ，則  $v_\phi = 15 \times 2 = 30 \times 1 = 30(\text{cm/s})$ 。代表液面傳遞的波速大小是均向性的。



t(s)	法拉第對應波形
0	
$\frac{T}{4} = \frac{1}{60}$	
$\frac{T}{2} = \frac{1}{30}$	
$\frac{3T}{4} = \frac{1}{20}$	
$T = \frac{1}{15}$	

而用 600fps 高速攝影拍出線狀起波器在液面垂直振動時，不同時刻下的法拉第波圖案如圖 4-8，由圖 4-8 可明顯看出法拉第波頻率為驅動頻率的一半。

圖 4-8 頻率 30Hz 之直線起波器在水面上產生頻率為 15Hz 的法拉第駐波於不同時刻之波形

法拉第波的主要原理討論如後：

下述討論中  $\rho$  表液體密度， $\sigma$  為表面張力。若液面振幅為  $\Delta$ ， $a_{\max} = \Delta\omega^2 = \Gamma g$ 。

而伴隨表面波的形變  $z(x,y,t)$  可用容器的本徵態  $S_m(x,y)$  的線性組合表示為

$$z(x,y,t) = \sum_m z_m(t) S_m(x,y) \quad (4-3)$$

$z_m(t)$  為本徵態  $m$  時對應的振幅。Benjamin 和 Ursell[11]證明出係數  $z_m(t)$  滿足下列關係式：

$$\ddot{z}_m + \omega_m^2(1-2\gamma \cos \omega_0 t)z_m = 0 \quad (4-4)$$

法拉第波的頻率與波長的關係式為： $\omega_m^2 = (gk_m + \frac{\sigma}{\rho} k_m^3) \tanh(k_m h)$  (4-5)

(4-4)式中  $\gamma = \frac{\Gamma g}{2g(1+B_0^{-1})}$  而  $B_0 = \frac{\rho g}{\sigma k_m^2}$  稱為 Bond Number； $k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}$  是第  $m$  模態

下對應的波數， $\lambda_m$  是對應的波長。

當沒有垂直作用力時， $\Gamma = 0$ ，此時(4-4)式描述的是液體之自由表面振動下所對應的簡諧運動。當 $\Gamma > 0$ ，(4-4)式描述的是與時間相關的參數化施力振動。此時所形成的法拉第波既不是表面張力波(capillary wave)也不是重力波(gravity wave)，而是2種混合的結果。在 $B_0 \ll 1$ 下為表面張力波(capillary wave)；當 $B_0 \gg 1$ 為重力波(gravity wave)。

(4-4)式的 Mathieu equation，Floquet theory[11]證明了此時會在

$$\omega = 2\omega_0, \omega_0, \frac{2\omega_0}{3}, \dots, \frac{2\omega_0}{n} \quad (n \in Z) \text{ 一連串的頻率處形成共振。所以在法拉第波產生時，頻率在 } \omega_0 = \omega_F = \frac{\omega}{2} \text{ 會使非黏滯性的液體變得不穩定。若考慮液體的黏滯性影響，(4-4)式可再加入與速度成正比的阻尼項。則(4-4)式可寫為}$$

生時，頻率在 $\omega_0 = \omega_F = \frac{\omega}{2}$ 會使非黏滯性的液體變得不穩定。若考慮液體的黏滯性影響，(4-4)式可再加入與速度成正比的阻尼項。則(4-4)式可寫為

$$\ddot{z}_m + 2\beta \dot{z}_m + \omega_m^2(1-2\gamma \cos \omega t)z_m = 0 \quad (4-6)$$

此處 $\beta$ 為阻尼係數。此阻尼項造成了產生法拉波出現時必須對應的減縮加速度門檻值 $\Gamma^F$  (threshold value)。

法拉第波形成時，會在液面下形成穩定的液體流動 (steady streaming flow)，如圖 4-9 所示。由圖 4-9 可看出在節點部份的液體往下流動，而振動位移最大之點的液體往上流動。

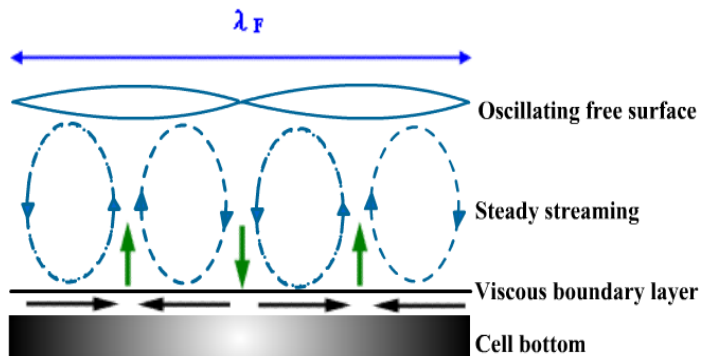


圖 4-9 法拉第波在液面下形成穩定的液體流動示意圖(圖片參考[10])

當法拉第波振幅更進一步增加時，會形成混亂 (chaotic) 狀態。此時法拉第波崩解，液面會飛濺出液滴。因為液滴是由法拉第波波峰處噴出，液滴直徑尺寸若為 $d$ ，可預期在水滴飛濺出來的情況下，其直徑大小與法拉第波波長 $\lambda_F$ 成正比，也就是 $d \propto \lambda_F$  (4-7)。實驗中也觀察到圓形容器的液面在



圖 4-10 水面噴射出水滴呈現混亂態且沿徑向前進



混亂情形下噴發出液滴的現象，如圖 4-10 所示，且噴出的液滴大小接近，且幾乎都沿徑向運動。

### 3. 水滴在振動液面上伴隨振盪變形並產生移動

因實驗中我們觀察到在垂直振動的液面上，當液面產生法拉第波後，水滴在水面上行進並伴隨著振盪變形，所以我們想建立一個模型去探討水滴為何會在水面上產生移動現象。

在水滴振盪為小振幅的限制下，若  $T$  為表面張力，水滴質量  $m$ ，而水滴形變為  $\zeta$  時，表面張力形成水滴恢復力的受力方程式為

$$m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -T \zeta \quad (4-7)$$

此時對應的自然振盪頻率為  $\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{m}} = \sqrt{\frac{3T}{4\pi\rho r^3}}$ ， $\rho$  為水滴密度，此頻率又

稱為 capillary frequency。我們參考[12]發現球狀水滴，在受到表面張力作用產生振盪變形的過程，若以球座標分析半徑為  $R$  的水滴(如圖 4-11)，當本身因振盪產生的形變  $\zeta = r - R$ ， $r = r(\theta, \varphi)$ ，因為水滴不可壓縮，須滿足連續方程式，則水滴表面的流速位(velocity potential)  $f$  可由稍微偏離球面之表面所對應的 Laplace 方程式推導而得。也就是

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (4-8)$$

要滿足(4-8) Laplace 方程式的解，球面的本徵態(eigenmodes)最常使用球諧函數  $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$  來加以表示。 $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$  是 Legendre 球諧函數，且  $Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = N_{\ell,m} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ ， $\ell \geq 0$  且為整數； $m$  是介於  $[-\ell, \ell]$  間的整數。而

$N_{\ell,m} = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-|m|)!}{4\pi(\ell+|m|)!}}$  是一個歸一化係數， $P_{\ell}^m(\cos \theta)$  為 Legendre 多項式。而水滴

的流速位及形變可用各種球諧函數的線性組合去呈現。

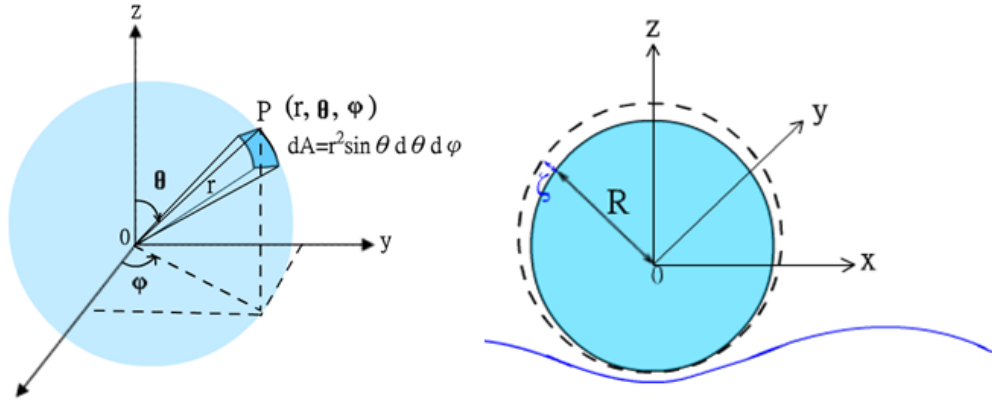


圖 4-11 (a)球座標表示圖 (b) 振動液面上的水滴示意圖

根據 Rayleigh[13] 計算出水滴在大氣中振盪的自然頻率因和其對應的本徵態  $Y_\ell^m$  有關，而  $\ell$  狀態下的自然頻率  $\omega_\ell$  須修正為  $\omega_\ell = \left[ \frac{T}{\rho r^3} \ell(\ell-1)(\ell+2) \right]^{1/2}$ ， $\ell \geq 2$  且  $\ell$  為整數，而  $T$  為表面張力， $\rho$  為水滴密度， $r$  為水滴半徑。在水滴振盪為小振幅的限制下，振盪時水滴表面上任一點的偏離  $\zeta$  滿足[11]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (4-9)$$

$f$  要同時滿足(4-8)與(4-9)二式及邊界條件  $\nabla f = 0|_{r=R}$ ；而  $\zeta$  須滿足水滴體積守恆的條件。此時可設  $f$  之特別解為  $f = \sum f_{\ell,m} = \sum a_{\ell,m} r^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) e^{-i\omega_\ell t}$ ，而  $f_{\ell,m}$  對應的形變為  $\zeta_{\ell,m}$ ，則水滴表面上任一點到原來球心  $O$  點的距離  $r = R + \zeta = R + \sum \zeta_{\ell,m}$ ， $\zeta_{\ell,m}$  表示在  $Y_\ell^m$  的狀態下偏離原來球體產生的形變，而

$$\zeta_{\ell,m} = \frac{\ell a_{\ell,m}}{-i\omega_\ell} r^{\ell-1} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) e^{-i\omega_\ell t} = A_{\ell,m} r^{\ell-1} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) e^{-i\omega_\ell t} \quad (4-10)$$

， $\omega_\ell$  為對應此本徵態的特性頻率，而  $A_{\ell,m} = \frac{i\ell a_{\ell,m}}{\omega_\ell}$ ，為  $Y_\ell^m$  的狀態所對應的振幅。

此顆水滴(如圖 4-11b)其中屬於  $Y_\ell^m$  狀態表面上任一質點到原來球心  $O$  點的距離若用  $r_{\ell,m} = R + A_{\ell,m} r_{\ell,m}^{\ell-1} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) e^{-i\omega_\ell t}$  來表示，此質點對應的小面積  $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  (如圖 4-11a)，此質點對應的  $x$  軸的座標為  $x_{\ell,m} = r_{\ell,m} \sin \theta \cos \phi$ ，則此時密度均勻的水滴質心於  $Y_\ell^m$  狀態下之  $x$  軸座標為

$$\overline{x_{\ell,m}} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_{\ell,m} \sin \theta \cos \phi r_{\ell,m}^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_{\ell,m}^3 \sin^2 \theta \cos \phi d\theta d\phi \quad (4-11)$$

當  $\overline{x_{\ell,m}} = 0$ ，表水滴在此  $Y_{\ell}^m$  狀態下，質心停留在原處，水滴沒有產生移動；

當  $\overline{x_{\ell,m}}$  會隨時變化，水滴產生移動。我們以下就幾個  $Y_{\ell}^m$  的本徵態去討論其相對應的  $\overline{x_{\ell,m}}$  大小，藉以判斷水滴在何種本徵態下會產生移動。

(1) 當本徵態為  $Y_{\ell}^0$ ，此時球諧函數為軸對稱(axisymmetry)，不含  $\phi$  項目。

則(4-11)式中  $\phi$  項目的積分值  $\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \sin \phi \Big|_0^{2\pi} = 0$ ，此時  $\overline{x_{\ell,m}} = 0$ ，水滴並不會移動。

(2) 當本徵態為  $Y_{\ell}^m$  且  $m \neq 0$ ，此時球諧函數為非軸對稱(non-axisymmetry)。

在此我們先考慮本徵態為  $Y_1^1$ ， $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$ ，因之前 Rayleigh[13]曾計算

出水滴因表面張力振盪的自然頻率為  $\omega_{\ell} = [\frac{T}{\rho r^3} \ell(\ell-1)(\ell+2)]^{1/2}$ ， $\ell \geq 2$ 。其中  $\ell = 1$  的

本徵態並不是一個振盪的狀態，也就是  $\omega_1 = 0$ ，由(4-9)式  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial r}$ ，而

$f_{1,1} = a_{1,1} r Y_{1,1}(\theta, \phi)$ ，可得  $\zeta_{1,1} = a_{1,1} Y_{1,1}(\theta, \phi) t + \text{const}$ ，若取  $\text{const} = 0$ ，

$$\overline{x_{1,1}} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_{1,1}^3 \sin \theta \cos \phi \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (R - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} a_{1,1} t \sin \theta e^{i\phi})^3 \sin^2 \theta \cos \phi d\theta d\phi \quad (4-12)$$

而(4-18)中的項目

$$\begin{aligned} & (R - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} a_{1,1} t \sin \theta e^{i\phi})^3 \\ &= R^3 - 3\sqrt{\frac{3}{8\pi}} a_{1,1} t R^2 \sin \theta e^{i\phi} + \frac{9}{8\pi} a_{1,1}^2 R \sin^2 \theta e^{i2\phi} t^2 - (\sqrt{\frac{3}{8\pi}} a_{1,1} \sin \theta e^{i\phi} t)^3 \end{aligned} \quad (4-13)$$

由於  $a_{1,1}^2$ 、 $a_{1,1}^3$  甚小可忽略不計，且  $\int_0^{2\pi} R^3 \cos \phi d\phi = 0$ ，故(4-13)式中只需考慮第 2

項，而(4-12)式可近似為

$$\begin{aligned}
\overline{x_{1,1}} &\cong \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -3\sqrt{\frac{3}{8\pi}} a_{1,1} t R^2 \sin \theta e^{i\varphi} \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi \\
&= -3\sqrt{\frac{3}{8\pi}} a_{1,1} t R^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + i \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \\
&= -3\sqrt{\frac{3\pi}{8}} a_{1,1} t R^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\
&= -\sqrt{6\pi} a_{1,1} t R^2 \quad (4-14)
\end{aligned}$$

$\overline{x_{1,1}} \cong \sqrt{6\pi} a_{1,1} t R^2$ ，水滴質心速度  $v_{c,x} = \frac{dx_{1,1}}{dt} \cong -\sqrt{6\pi} a_{1,1} R^2$ ，其中  $a_{1,1}$  為振幅， $R$  為水滴半徑。表  $Y_1^1$  狀態下之水滴質心沿  $x$  方向產生運動，且近似等速前進。根據 Rayleigh[13]的推導  $\ell = 1$  此時是具有位移的狀態，所以當水滴被垂直振動水面激發時，若出現了  $Y_1^1$  的本徵態，的確會讓水滴質心形成一個沿  $x$  方向近似等速前進的運動，且此速度  $v_{c,x} \propto a_{1,1} R^2$  (4-15)。

此部分的推導會在後面與實驗結果互相配合討論。

若本徵態為  $Y_2^1$ ， $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}$ ，則由前(4-10)式可得

$$r_{2,1} = R + A_{2,1} r_{2,1} Y_2^1(\theta, \varphi) e^{-i\omega_2 t}，整理可得 r_{2,1} = \frac{R}{1 - A_{2,1} Y_2^1 e^{-i\omega_2 t}}，而 A_{2,1} = \frac{i2a_{2,1}}{\omega_2} \equiv A$$

$$\overline{x_{2,1}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_{2,1}^3 \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{R}{1 - A Y_2^1 e^{-i\omega_2 t}} \right)^3 \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi \quad (4-16)$$

而(4-16)中我們利用泰勒展開式的近似關係及忽略  $A^2$  以上的高次項，可得到

$$\left( \frac{R}{1 - A Y_2^1 e^{-i\omega_2 t}} \right)^3 \cong R^3 (1 + A Y_2^1 e^{-i\omega_2 t})^3 \cong R^3 + 3AR^3 Y_2^1 e^{-i\omega_2 t}，且 \int_0^{2\pi} R^3 \cos \varphi d\varphi = 0，故$$

(4-16)式可近似為：

$$\begin{aligned}
\overline{x_{2,1}} &\cong \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -3\sqrt{\frac{15}{8\pi}} AR^3 \sin\theta \cos\theta e^{i\varphi} e^{-i\omega_2 t} \sin^2\theta \cos\varphi d\theta d\varphi \\
&= -3\sqrt{\frac{15}{8\pi}} AR^3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \cos\theta e^{-i\omega_2 t} d\theta (\cos\varphi + i\sin\varphi) \cos\varphi d\varphi \\
&= -3\sqrt{\frac{15\pi}{8}} AR^3 e^{-i\omega_2 t} \int_0^\pi \sin^3\theta d(\sin\theta) = 0 \quad (4-17)
\end{aligned}$$

$\overline{x_{2,1}} \cong 0$ ，表水滴質心幾乎停留在原處，水滴並沒有產生移動。

因本實驗中所使用的驅動頻率範圍不高，所以實驗中觀察到水滴的振盪狀態主要為  $Y_2^0$  與  $Y_2^1$ ，在此我們只對與實驗相關的狀態做出討論。由上述討論可看出，無論是  $Y_2^0$  或  $Y_2^1$  的振盪狀態，應當都不會使水滴產生移動。而非振盪狀態下的本徵態  $Y_0^0$ 、 $Y_1^0$  是軸對稱，也不會使水滴產生移動。唯一會使水滴產生移動的就只有  $Y_1^1$  的狀態了，關於此部分我們在後面的結果與討論中會詳加比較。

## 五、研究結果與討論

### (一) 漂浮水滴的形成機制及較佳的生存條件

當水滴滴到水面上時，會夾擠住空氣在水滴與水面間，但此氣墊存在時間甚短(~數十 ms)，所以在靜止水面上不易觀察到漂浮的水滴。所以我們使用加了少許洗潔精的水，減少液面的表面張力後，增加水滴的漂浮時間與機率，藉以觀察氣膜是否存在與其對應之厚度。我們在白光下拍照，嘗試可否拍出類似 2 片載玻片間的氣墊干涉圖案。結果拍出自光分別經由氣墊上下表面的 2 種反射光產生的干涉圖案(如圖 5-1)，由此可證明氣墊的確存在於漂浮水滴與水面間。本來我們接著想用單色光做拍攝，但因氣墊厚度隨時間快速變動，較無法拍出穩定完整的干涉圖案。所以氣墊厚度我們無法由現有的結果加以判斷。

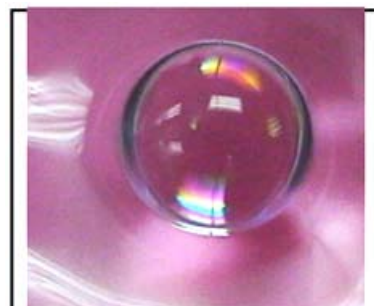


圖 5-1 水滴在白光下呈現的彩色干涉條紋。

以下我們用高速攝影機(300 fps)拍攝直徑 6.0mm 水滴掉落在水面後，於不同時刻的變化圖形如圖 5-2。

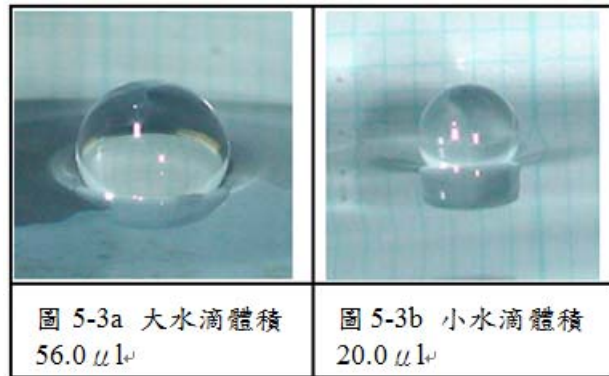
水滴圖形						
t(ms)	0	60	120	180	220	240

圖 5-2 水滴滴落水面後接連的變化情形

由圖 5-2 中可看出水滴垂直掉落在水面後首先會讓水面形成凹陷，而水面下凹後因表面張力不欲水面的表面積增加，會往上振動使得水滴往上抬高。水面振動後，會因擾動產生表面波。在振動過程中其實水滴也會有形狀的改變，水滴本身也會生成表面波。當漂浮水滴要消失前一瞬間，水滴的圖像會變得較模糊，表示水滴內部分子劇烈運動，很容易和水面結合後消失。有時水滴會與水面部分結合 (partial coalescence) 後剩下更小的子液滴(如圖 5-2 最後一張圖)。水滴與水面的碰撞

是種非彈性碰撞，水滴在碰撞水面的瞬間，主要的動能會轉換成水面形成凹陷所增加之表面位能。水滴在接觸水面後，於往下的過程中速度漸減，而在最低點時速度為0。接著凹陷的水面開始往上彈起，帶動水滴往上運動。水面往上恢復的過程中，一部分轉變為水滴彈升的動能，另一部分會形成表面波的能量向外傳遞出去，而表面波的能量最後會被黏滯力給耗損掉。上述的過程可持續直到水滴靜止於水面，最後與水面結合。

當不同直徑的水滴落到水面形成漂浮水滴時，大水滴因其重量較大，水面要產生較多之表面張力的合力來支撐，故下方水面凹陷部分較多，且其形狀為扁球體；小水滴因其重量較小，水面凹陷部份較少且其形狀較接近球體，如圖 5-3 a、



b 所示。圖 5-3 中大水滴直徑約為 6.0mm，與液面之接觸角約為  $142^{\circ}$ ；小水滴直徑約為 3.2mm，與液面之接觸角約為  $123^{\circ}$ 。有關漂浮液滴掉落在靜止液面，各種情況下的生存期比較，因有數篇作品[1,2]或論文[14]已有詳細探討，所以我們將水滴掉落在靜止液面，各種變因下漂浮水滴之生存期結果與比較置於附錄中，並由相關統計結果找出漂浮水滴較合適的存在條件。

## (二) 風吹動水面下對漂浮水滴生存期及運動影響

我們為討論風吹的影響，參考附錄中掉落靜止液面的漂浮水滴的較佳生存條件，在水中加入0.1%之洗碗精，分別用0.056ml、0.020ml之大、小水滴各50顆以高度1cm釋放，調整風扇出風口的風速分別為2.5m/s、2.0m/s、1.5 m/s來探討風吹水面對漂浮水滴生存期的影響。

### 1. 不同風速吹動與靜止狀態下大小水滴的生存期比較

比較圖5-4與附錄內圖A-1、A-3可發現風吹動液面下，不論大小水滴的生存期均較靜止液面高出數十倍之多，可見風吹水面可大幅提升漂浮水滴的生存期。風吹水面為何可提高生存期呢？從圖1-2c中可看出在風吹水面下，因為風壓的影響造成水面高低起伏的變化，可使漂浮水滴在水面上傾斜並稍為抬高，帶動水滴的

運動，並可提供漂浮水滴和水面間的氣墊適時的補充，所以能延長漂浮水滴的生存期。而被風吹動的情況下，水滴可在液面上前進可達到70公分左右的長度才與液面結合。

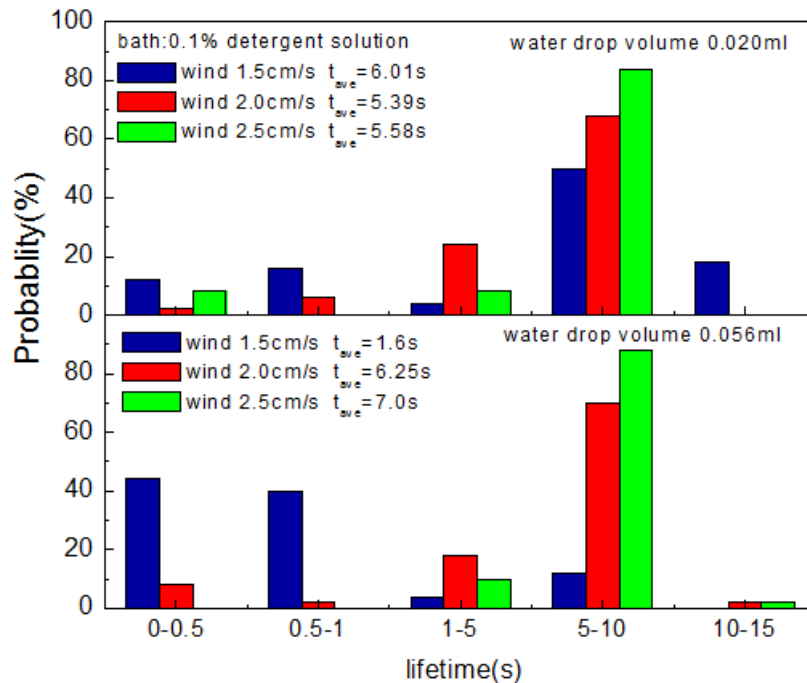


圖 5-4 大小 2 種水滴在其他條件相同，於 3 種不同風速下落於液面的

整體而言，大小水滴均在風速為 2.5m/s 時有較長的生存期，此時風力最強，能使水滴移動較遠，且在運動過程中能有效地補充氣墊。除了風速為 1.5m/s 的情形外，大水滴的平均生存期均較小水滴長，我們推測只要風壓大到足夠驅動大水滴產生持續運動，便能持續補充大水滴的氣墊，使其生存期延長。而小水滴因為接觸面積較小，氣墊較少，造成小水滴的氣墊容易散失，故其生存期較短。

在風速為 1.5m/s 大水滴時其平均生存時間有 1.6s，而小水滴的平均生存時間卻有 6.01s，有可能是因風速 1.5m/s 稍弱，強度不足以使大水滴在水面上產生持續的運動來有效補充氣墊，所以無法維持在水面較久的時間，故此時大水滴平均生存期會低於小水滴的數值。

## 2. 為何風吹動可大幅增加漂浮水滴生存期

在流體動力學(fluid dynamics)裡，風波是指在海面、湖面、甚至是小池塘等水面，由風產生的波動[15]。因為風為一種亂流 (turbulent flow)，風速及壓力均為隨



機變化，各種程度的壓力變化隨著氣流而移動，因而在水的表面產生的表面波 (surface waves)。發生表面波的原因，因為風中氣流的隨機壓力變化導致強制振動而產生波浪，而水面可視為以重力或表面張力為回復力的振動系統。表面波除了會往前傳送能量外，事實上传送表面波的水分子也有些微往前運動(forward motion)的情況。

圖5-5是我們拍攝風吹水面時漂浮水滴運動的連續畫面，上下畫面間隔時間約0.1秒。在風吹時很多漂浮水滴可在上下起伏的水面前進，因為風吹時不但空氣有壓力變化，也會造成水面產生高低變化，這些壓力差會驅動水滴在水面上形成運動。而在觀測中我們發現風吹水面，產生水波之相速度  $V_\phi$  (phase velocity) 都是比漂浮水滴的運動速度  $V$  來得快(如圖5-5)。

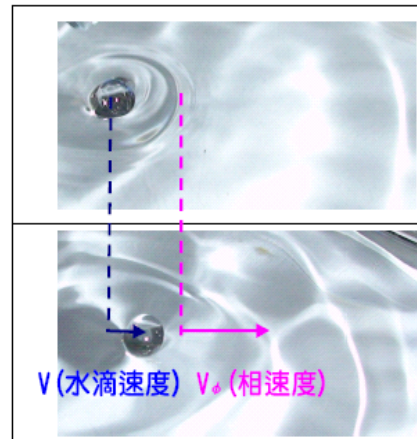


圖 5-5 風吹水面時的水滴運動的連續

我們後來將裝置調整成較平穩的出風口(如圖4-2)，當水滴由滴管落下時，因受風吹影響，會造成水滴落水時獲得一個水平方向的初速度，所以會造成它在水面上有一前進的初速。

實驗中我們調整出風口的風速，以風速計測得風速分別為2.5m/s、2.0m/s、1.5m/s，而測量其某一波峰在行經20cm距離內所花的時間，計算出3種風速在水面上產生的平均波速(相速度)分別對應30.1cm/s、26.8cm/s、23.5cm/s。(20公分以外的距離因為不能明顯看出波峰的突起，所以我們選取20cm測量平均波速)。圖5-6 a、b是我們分別測量在不同風速下，大、小水滴(0.056ml和 0.02ml)各20顆在3種長度範圍(0-10cm、10-20cm、20-30cm)及全程30cm內的平均速度分布情況，原點為水滴掉落水面的位置。

由圖5-6 a、b可看出無論在何種長度範圍內，風速越大，水滴的平均速度越快。因為出風口風速越大，風壓作用對水滴產生之作用越強，會使水滴獲得較大的加速度。在風速1.5m/s的弱風情形下，無論在何種長度範圍內，大小相同的20顆水滴其平均速度分布範圍較為廣泛；在風速2.5m/s的強風情形下，無論在何種長度範圍內，大小相同的20顆水滴其平均速度大小呈現較集中的分布。代表弱風下水滴的

速度大小較易呈現不規則分布；強風下水滴的速度大小易呈現較集中的分布。我們推測是因為風速較強下，水滴運動主要受到風壓的影響，所以大小相同的20顆水滴雖然於不同時段內運動，但是大家的運動情形都較類似。反之在弱風下，同樣大小的20顆水滴在各自運動過程中受到的影響不盡相同，所以速度分布範圍較廣泛。

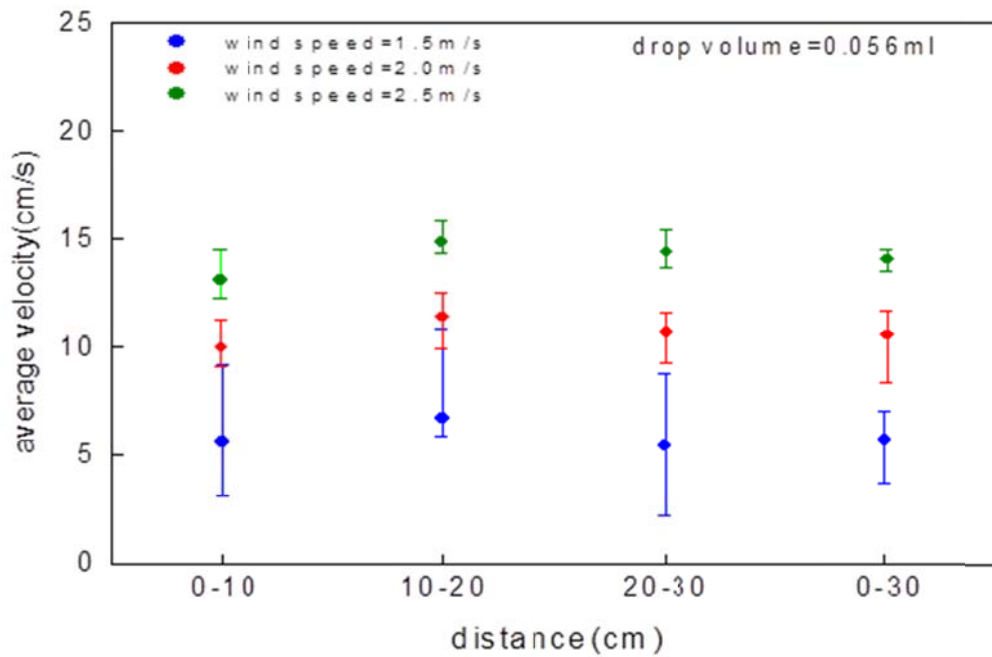


圖 5-6a 不同風速下 20 顆大水滴 (0.056ml)在 3 種長度範圍及全程 30cm 內的平均速度分布

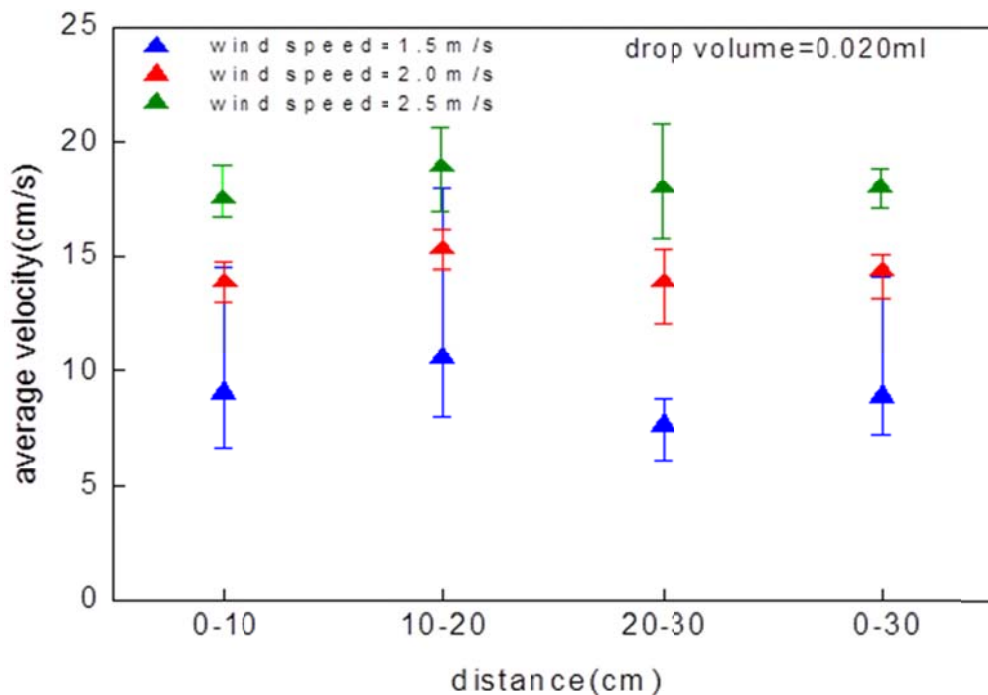


圖 5-6b 不同風速下 20 顆小水滴 (0.020ml)在 3 種長度範圍及全程 30cm 內的平均速度分布

整體而言無論在何種風速，何種長度範圍內，小水滴的平均速度較大水滴快，因小水滴的質量較小，受到相同的風力下，小水滴的加速度較大，而大水滴則反之。整體趨勢而言，3段區間的運動中，以0-10 cm區間平均速度最小，接著在10-20cm平均速度最大，而20-30 cm間的平均速度次之。以此推之，一開始在0-10cm區間內時水滴受到風壓作用，在水面運動並受到加速度作用，並在10-20cm區間會加速到最大值。但距離遠至一定程度時，風漸微弱而無法對水滴產生明顯作用力，而水滴與氣墊間的黏滯力會降低水滴的速度，故20-30cm間的平均速度會較10-20cm間減少，且在風速為1.5m/s下減少的狀況較明顯。

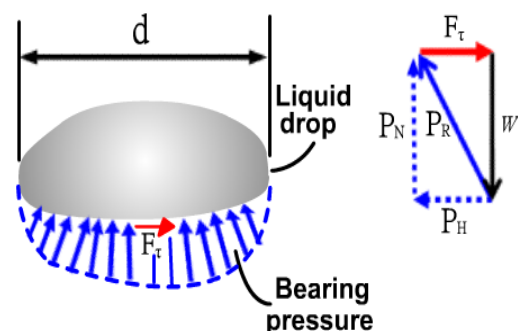


圖 5-7 漂浮水滴在風吹水面上的之受力示意圖

因為風是一種亂流，較無法做定量的分析。我們試著用一簡單的模型討論在風吹水面時，水滴的受力與運動情形。如圖 5-7 所示，若水滴在風吹的水面上向左行進，漂浮水滴受到下方氣墊及周圍氣體壓力所形成的合力為  $P_R$ ，其鉛直分量為  $P_N$ ，水平分量為  $P_H$ ，水滴與氣墊間的黏滯力為  $F_\tau$ 。鉛直分量  $P_N$  與水滴的重力在力平衡時應互相抵消。

被風吹落的水滴接觸水面時即有一水平速度，此時若  $P_H > F_\tau$ ，會使水滴產生水平方向的加速度，使水滴水平方向的速度持續增加。行進間若  $P_H$  與黏滯力  $F_\tau$  大小相等，則此水滴所受合力為 0，即能保持等速行進。若  $P_H < F_\tau$ ，則水滴速度會慢下來，並有較大機率與水面結合。

#### 小結論：

1. 風吹動水面下，因為風壓提供漂浮水滴和水面間的氣墊適時的補充，所以能大幅延長漂浮水滴的生存期。
2. 無論在何種風速吹拂下，小水滴的平均速度較大水滴快。
3. 強風下相同大小的水滴速度分布較集中，且對應的速度較快；弱風則反之。

### (三) 垂直振動水面下對漂浮水滴生存期及運動影響

#### 1. 對漂浮水滴生存期影響

##### (1). 不同頻率，不同振動加速度( $a_{max}$ )的水面，水滴對應的生存期比較。

實驗中使用直徑9cm之培養皿當容器，其內水浴深度0.8cm並加入0.1%之洗碗精，以固定體積的小水滴(0.02ml)各10顆以相同高度1cm釋放，在不同頻率，不同振動加速度( $a_{max}$ )去測量水滴的生存期。

此處我們定義一個無因次的物理量：減縮加速度(reduced acceleration) $\Gamma$ ， $\Gamma = \frac{a_{max}}{g}$ ， $g$ 為重力加速度。而表5-1 是在不同頻率，3種不同 $\Gamma$ 值下，10顆小水滴的生存期分布範圍及對應平均生存期之一覽表。以我們現有的設備要改變頻率且要控制加速度為定值，實在有困難，所以只能用表呈現小水滴的生存期分布範圍而非用圖呈現。

表 5-1 在不同頻率，3 種不同  $\Gamma$  值下，10 顆小水滴的生存期分布範圍及平均生存期一覽表

頻率(Hz)	$\Gamma$ 值		生存期(s)	
			10 顆水滴生存期分布範圍(s)	10 顆水滴平均生存期(s)
20	$\Gamma_1$	<b>0.21</b>	0.075-0.325	<b>0.18</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.42</b>	0.083-0.180	<b>0.11</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.61</b>	0.92-5.10	<b>0.97</b>
30	$\Gamma_1$	<b>0.22</b>	0.075-3.22	<b>0.15</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.45</b>	0.062-6.25	<b>1.17</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.62</b>	0.067-4.37	<b>1.87</b>
40	$\Gamma_1$	<b>0.26</b>	0.170-8.92	<b>1.69</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.41</b>	0.029-9.33	<b>2.21</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.63</b>	0.062-1.62	<b>6.00</b>
50	$\Gamma_1$	<b>0.25</b>	2.21-20.61	<b>8.54</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.41</b>	0.52-18.80	<b>3.46</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.58</b>	0.87-21.36	<b>9.12</b>
60	$\Gamma_1$	<b>0.24</b>	0.03-0.45	<b>0.21</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.41</b>	0.23-2.11	<b>0.78</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.59</b>	0.76-3.53	<b>1.61</b>

比較表5-1與附錄中圖A-3的統計結果，可看出在其他條件固定下，液面振動時的漂浮水滴生存期，較液面靜止的情況下要高出許多。表5-1顯示出漂浮水滴平均生存期與振動頻率或液面振動的加速度似乎沒有規律性的變化關係。因為漂浮水滴落在振動液面時，若直接接觸在波峰位置，此時氣墊容易散失，所以很快便與

液面結合；但若直接接觸波谷的位置，氣墊容易維持，便可延長漂浮水滴的生存期。水滴降液面瞬間，接觸到波峰或波谷的位置是隨機的，所以生存期的分布就較凌亂而沒有什麼規律性可言。

## (2).為何振動液面能有效延長漂浮水滴生存期

液面往上振動時，氣墊被夾擠在水滴和液面間，但液面振動往下時，水滴與液面會有些許的分離，提供漂浮水滴和液面間的氣墊適時的補充，所以能延長漂浮水滴的生存期。但有時水滴下落到液面時，恰好打到波峰位置時，因為氣墊此時容易散失，漂浮水滴就不易維持。漂浮水滴在振動液面上有許多奇特的物理現象，我們針對此部分有較仔細的討論如後。

### 小結論：

1. 液面振動時漂浮水滴的生存期，較液面靜止的情況下高出許多。
2. 漂浮水滴降落在振動水面的波峰或波谷位置是隨機的，故平均生存期與振動頻率或液面振動加速度較沒有規則變化的關係。

## 2.垂直掉落之水滴在振動水面的各種運動現象

垂直振動水面，因其能有效補充水滴與水面間的氣墊，大部分情況下，的確可以延長漂浮水滴的生存期。但實驗中我們發現了一些更有趣的物理現象。

實驗中我們使用點滴器產生的水滴垂直落於水面，起初以點波源的起波器振動液面，造成漂浮水滴在水面振幅較大時，水滴似乎都沿著波傳遞(半徑)方向運動(如圖 4-11)。為了確認此點，我們改用線狀起波器觀察垂直落下的漂浮水滴是否也是沿波傳遞方向運動。而直線起波器造成液面振動後，在振幅漸增下，垂直落下的水滴似乎也是沿行進波傳遞的方向(x 方向)運動(如圖 5-8)。圖 5-8 為何沿 z 軸落下的水滴會產生 x 方向運動呢？根據觀察應當是由於直線起波器在振動水面時，沿 x 方向傳遞的行進波其振幅有衰減的現象，這會造成水面在沿 x 方向形成一壓力梯度，

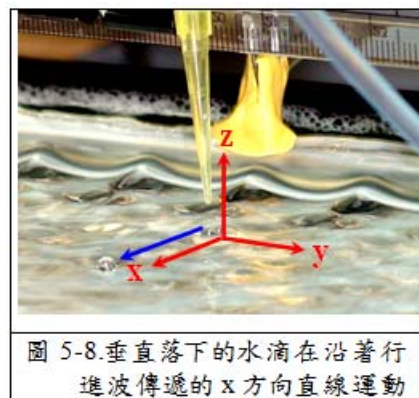


圖 5-8.垂直落下的水滴在沿著行進波傳遞的 x 方向直線運動

圖 5-8 為何沿 z 軸落下的水滴會產生 x 方向運動呢？根據觀察應當是由於直線起波器在振動水面時，沿 x 方向傳遞的行進波其振幅有衰減的現象，這會造成水面在沿 x 方向形成一壓力梯度，



水面的壓力變化會對水滴形成作用力，驅使水滴朝 x 方向產生運動。

因為點波源或線形起波器無法讓容器內整個液面均勻振動，所以後來的實驗均將容器固定在喇叭上，以聲頻產生器與功率放大器驅動喇叭振動，帶動整個容器中的液面上下振動。當振幅小時容器的水面會形成彎面波(meniscus wave)的駐波，這時主要為表面張力波(capillary wave)；振幅增加到某種程度時，液面呈現穩定的法拉第駐波(Farady wave) (如前圖 4-6)，從肉眼便可看出 2 種波動的差別。接著我們將觀察到垂直落下之漂浮水滴在均勻振動液面的各種運動情形陳列如後。本系列實驗中均依合適的生存條件，在水中加入 0.1% 之洗潔精形成水浴，用體積 0.020ml 之小水滴以高度 1cm 釋放，從事下列實驗。

### (1) 水滴在液面上上下振動

當容器內水面上下振動振幅較小時，此時將水滴垂直掉落在水面，若有形成漂浮水滴，水滴會停留在水面上下振動，直到消失。這和我們一般看到樹葉在水面上，當波通過時它只會上下振動，而不隨波前進的現象是類似的。如圖 5-9，上下圖片均間隔 1/10 秒。

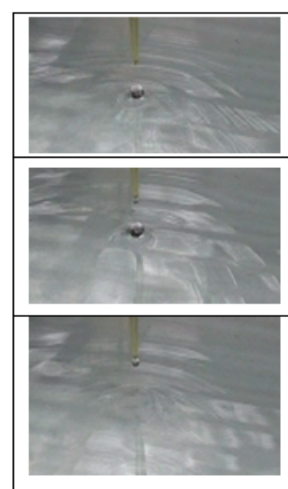


圖 5-9 小振幅的振動下，水滴由掉落至消失

### (2) 水滴被束縛(trap)在液面上來回運動

若水滴在法拉第波上運動之動能若無法克服相鄰波峰隆起處的位能障礙，水滴便會在凹陷處來回地運動，且運動過程中水滴的形狀會在扁圓形(oblate) 與長圓形(prolate)間週期性地變化。此種運動很類似像一顆球被束縛在簡諧運動的位能井間來回的運動，如圖 5-10 所示。

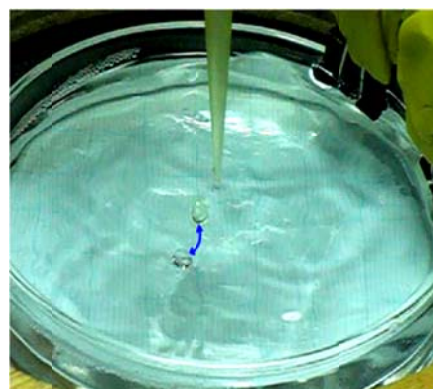


圖 5-10 水滴被束縛在法拉第波的位能障礙內來回運動示意圖  
(2 顆水滴相隔時間為  $1/20$  秒  
 $=T_F/2$ ， $T_F$  為法拉第週期)

圖 5-10 中聲頻產生器的驅動頻率為 20Hz，水浴內含 0.1% 之洗潔精，水深 0.50 公分，水滴體積為 0.020ml，圖 5-10 中合成 2 個間隔時距為  $1/20$  秒的水滴。

### (3)水滴在振動液面上行進(travelling)

在圓形容器中以珠針當起波器製造出圓形法拉第波，垂直落下的漂浮水滴在近似圓形法拉第波中沿徑向運動。我們利用第1代實驗裝置測得在60Hz振動的水面(含0.1%洗潔精)，同體積的小水滴(0.020ml)在法拉第波上移動的平均速度約在27.0 mm/s到41.0 mm/s之間。因水滴與水面間的氣墊在水面振動下獲得適時的補充，使水滴不易與水面結合。實驗中觀察到在小振幅的表面波時，垂直落下的漂浮水滴並不會運動，只有在振幅大到水面產生法拉第波後，水滴才会有行進的現象。我們接著嘗試使用長方形容器來觀察漂浮水滴的運動，容器為5.5cm\*1.9cm\*0.5cm，其內水浴深度為4.0mm，在驅動頻率30Hz下，用240fps的高速攝影觀察到漂浮水滴(0.020ml)在振動液面產生法拉第波時，水滴伴隨連續的變形在液面上形成近似等速移動，如圖5-11。此時水滴伴隨振盪變形的直線運動，類似水滴在振動的固體表面上運動。

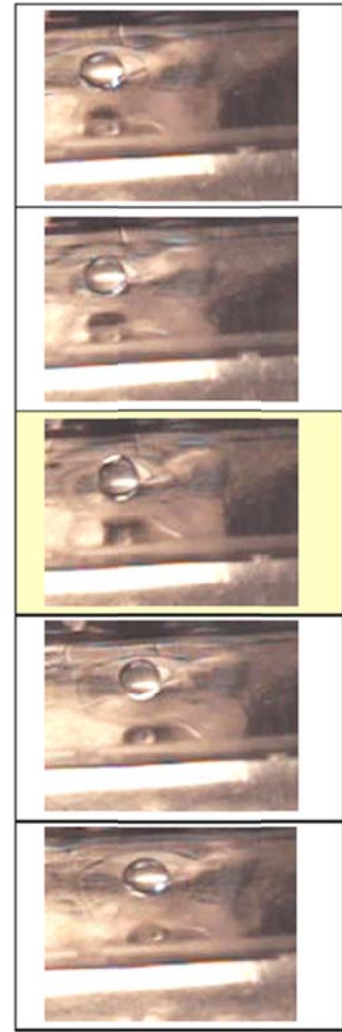


圖 5-11 水滴在法拉第波上直線前進及變形關係圖(上下畫面相隔1/240秒)

圖5-11中，上下畫面相隔1/240秒，也就是水滴振動變形的週期約為1/60秒。水滴振動變形的頻率60 Hz 應當是水滴本身振盪變形的自然頻率。

由前面原理討論可知，水滴振盪變形的自然頻率在 $Y_l^m$ 的本徵態下其對應的自然頻率為 $\omega_l = \left[ \frac{T}{\rho r^3} l(l-1)(l+2) \right]^{1/2}$  [13]，其中T為表面張力，r為水滴半徑， $\rho$ 為密度， $l$ 為整數，且 $l \geq 2$ 。我們代入水的表面張力  $T=71.5\text{mN/m}$ ，水滴半徑r約為1.6mm，水密度  $\rho=1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ， $l=2$ ，代入計算得到 $f_0 = 59.7\text{Hz}$ ，與實驗結果60Hz幾乎是一樣的，證明本實驗中的水滴在垂直振動的水面上行進時，會伴隨著自然頻率的振盪變形。

由圖 5-11 可看出在水滴扁圓狀(oblake)時幾乎不太會移動，只有變成像黃色部份中稍傾斜的扁長狀(prolate)時才會產生明顯的移動，且水滴花在扁圓狀(oblake)的時間要較扁長狀(prolate)時來得長。圖 5-11 中水滴在 1 秒內直線運動的平均速度大小約為 21.2 mm/s，而水滴在振動水面造成移動的本徵態，我們在後面會有詳細的討論。

水滴在振動水面上行進的奇特現象，讓我們感到驚訝與疑惑。我們由參考資料[4-5]獲得一些啟發。參考資料[4-5]是用矽油的油滴在矽油面上垂直振動，當振動加速度接近臨界門檻值(critical threshold value)時，此時油面尚不會產生波紋，但油滴會在振動油面週期性跳動並形成自己的法拉第波，並有機會在自己形成的波動上形成等速緩慢移動，Couder 團隊[4-5]稱這種伴隨自己的波動而產生移動的油滴為行走者(walker)。實驗中的漂浮水滴此時雖然沒有像 walker 去跳動(bouncing)並且由自己跳動產生的法拉第波「踢打」(kicking)造成本身等速緩慢移動，但漂浮水滴在振動水面上，也會被驅動產生直線移動，並伴隨著本身的振盪變形。實驗中使用的水滴為低黏滯係數，故其  $Oh \ll 1$ ，所以在實驗中可明顯觀察到水滴產生明顯的變形。但 Couder 團隊[4-5]研究的油滴是高黏滯性，其對應的  $Oh > 1$  所以油滴的變形是可忽略的。

我們後來又搜尋到一篇論文，發現 Dorbolo 團隊[16]利用低黏滯性油滴在高黏滯性的油面上垂直振動時，油滴也會形成直線前進。但 Dorbolo 團隊的油面黏滯性很高，所以油滴和油面一起振動時，只有油滴會變形，但油面不會生成波紋，所以造成  $Y_2^1$  狀態的油滴在油面形成滾動，Dorbolo 團隊稱之為 roller。本實驗中近似直線行進的漂浮水滴我們也想給它一個名稱，叫 mover。

為了觀測較穩定行進的漂浮水滴，並能量測容器的振動加速度，我們後來訂製了長 7.5cm、寬 2.5cm、高 3.5cm 的方形容器固定在喇叭上。實驗時容器內的水浴含 0.1%之洗潔精，深度 1cm，實驗時均由 1cm 高度釋放小水滴(體積=0.02ml)來做觀測，因為大水滴不易在水波上產生直線前進的現象。此時在振動液面上長邊方向上會產生法拉第波，而短邊方向的法拉第波較會被抑制，所以產生帶狀(stripe)的法拉第波形，而圖 5-12 即為漂浮水滴在帶狀的法拉第波上直線前進的狀況，此顆水滴前進的平均速度約為 20.8mm/s。圖 5-12 上下畫面相隔 1/40 秒，驅動頻率



40Hz，法拉第駐波頻率 20Hz。

在實驗過程中我們發現在固定頻率下，若振幅為  $A$ ，由簡諧運動  $a_{\max} = A(2\pi f)^2$ ，可由振幅、頻率去推知加速度。但因振幅有時甚小 ( $< 1\text{mm}$ )，不易觀察振幅去獲知  $a_{\max}$ ，所以我們接了一個加速度感應器在容器上，以電腦讀取容器上下振動的最大加速度  $a_{\max}$ ，經實驗校準後去測出漂浮水滴開始行進的門檻加速度  $a_{\max}^c$  及法拉第波形成時的門檻值  $a_{\max}^F$ 。實驗時我們觀測到漂浮水滴在可以穩定行進後再緩慢的減少容器的振動加速度大小，去找出產生行進時的門檻加速度  $a_{\max}^c$ 。觀察中發現在液面振動加速度需大到產生法拉第波後，但水面尚未進入混亂狀況時，水滴在液面才會產生行進的現象，也就是本實驗中  $a_{\max}^c > a_{\max}^F$ 。

在觀測時也發現液面在不同頻率振動下， $a_{\max}^F$  及  $a_{\max}^c$  也會隨頻率變化。因為我們主要想探討水滴開始行進時的物理現象，所以我們主要測量  $a_{\max}^c$  隨驅動頻率  $f$  變化的關係。在此定義水滴開始移動的減縮加速度門檻值  $\Gamma_c$ ， $\Gamma_c = a_{\max}^c / g$ 。我們將不同頻率 ( $f$ ) 下對應的門檻值  $\Gamma_c$  作圖，得到圖 5-13 的  $\Gamma_c - f$  的關係圖。

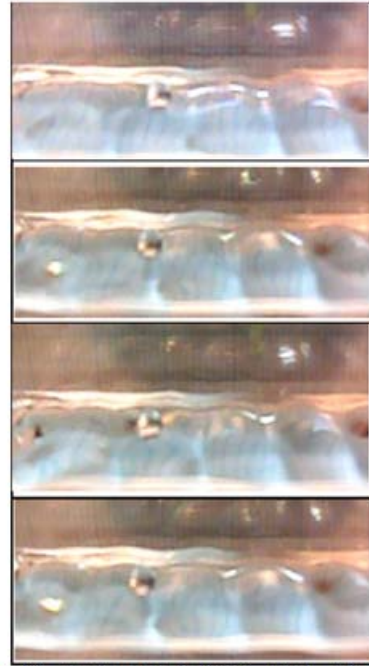


圖 5-12 水滴在驅動頻率 40Hz 帶狀法拉第波上向左行進連續圖(上下圖片間隔 1/40 秒)

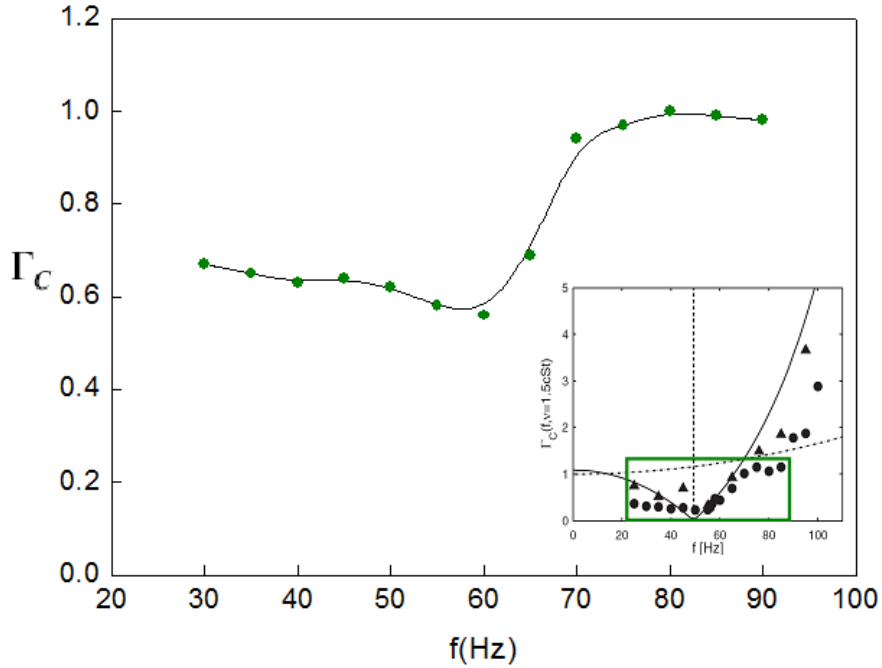


圖 5-13 0.020ml 之水滴開始行進的減縮加速度門檻值  $\Gamma_c$  與驅動頻率  $f$  之關係圖。  
 下方插圖為參考期刊[17]對低黏滯性的油滴測量其開始跳動的減縮加速度門檻值  $\Gamma_c$  與驅動頻率  $f$  關係圖，插圖中  $\blacktriangle$  表示加速度漸增過程； $\bullet$  表示加速度漸減過程。

由圖 5-13 可看出我們對低黏滯性水滴得到的  $\Gamma_c$ - $f$  之關係圖，與 Dorbolo 團隊 [17] 測量低黏滯性油滴開始跳動的減縮加速度門檻值  $\Gamma_c$ - $f$  之關係圖(圖 5-13 中插圖) 非常類似。但 Couder 團隊對高黏滯油滴[5]量測其跳動的減縮加速度門檻值  $\Gamma_c$  都是大於 1 與本實驗中  $\Gamma_c$  大都小於 1 有所不同，那是因為本實驗的水滴與液面都是低黏滯性的。

由圖 5-13 可看出本實驗的漂浮水滴在 30-60Hz 間， $\Gamma_c$  均小於 1 且  $\Gamma_c$  隨頻率增加而緩步下降，並在 60Hz 出現了一個極小值。為何在 60Hz 出現了一個極小值呢？由前面原理討論可得， $\ell \geq 2$  的  $Y_\ell^m$  是振盪狀態， $\omega_\ell$  為此時的自然頻率，當外加一個正弦形式的強制振動力  $F = F_0 \cos \omega t$ ，則此狀態下水滴的振動方程式為

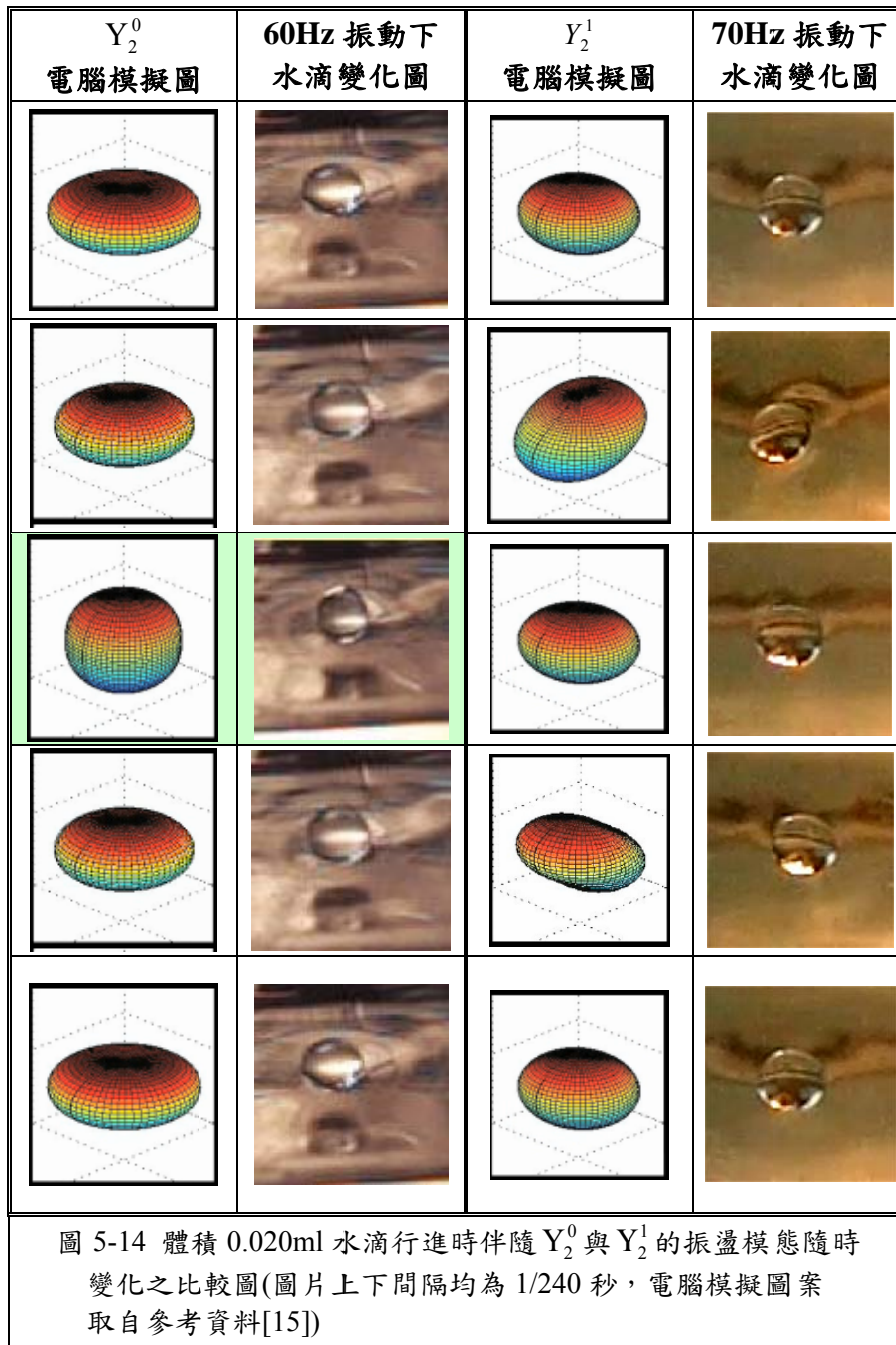
$$\sum_{\ell,m} \left( \frac{d^2 \zeta_{\ell,m}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\zeta_{\ell,m}}{dt} + \omega_\ell^2 \zeta_{\ell,m} \right) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (5-1)$$

(5-1) 式中  $\zeta_{\ell,m}$  表示在  $Y_\ell^m$  的狀態下偏離原來球體產生的形變， $\beta$  為阻尼項， $m$  是水滴質量， $\omega$  是驅動頻率。而由力學的推導得知，若阻尼項  $\beta$  甚小，則當  $\omega \cong \omega_\ell$  時會產生共振現象。由前面的討論得知實驗中水滴在  $\ell = 2$  的自然振盪頻率 60 Hz 產生

共振的現象，也就是在此頻率下振動的水面可以用較小的加速度即可驅動水滴行進，此共振結果與 Dorbolo[16]測量油滴跳動的減縮加速度情形也是類似的。

從圖 5-13 可看出當振動頻率由 60Hz 到 70 Hz,  $\Gamma_c$  出現一個陡增的狀況, 而且  $\Gamma_c$  的數值像是從一個區間進入另一個區間, 我們推測應當是水滴振盪變形的模態產生變化。實驗中拍攝到在 30-60Hz 間水滴的振盪模態變化如圖 5-14 中左側系列所示, 我們查資料得到此時水滴的振盪模態主要應為球諧函數中的  $Y_2^0$  [16]。但是水滴在 30-60Hz 的狀態似乎不只含有  $Y_2^0$  模態, 比較左側系列的綠底部分可以發現, 用電腦模擬計算的  $Y_2^0$  模態為軸對稱, 所以圖形上端區域為左右對稱; 但實驗拍到的綠底部分照片水滴上端區域很明顯是左右不對稱的。所以代表水滴在驅動頻率 60Hz 時, 除了  $Y_2^0$  模態外還混合著別的模態。而由前面原理討論可知  $Y_l^0$  因是軸對稱, 不會造成水滴質心移動, 所以我們推論此時另一個模態應為  $Y_1^1$ , 因為  $Y_1^1$  才有機會造成水滴質心產生近似等速移動。而我們觀察中水滴在法拉第波的液面上穩定行進時, 也是近似等速前進, 所以圖 5-14 中左側系列水滴應是  $Y_1^1$  與  $Y_2^0$  混合的狀態, 且此時  $Y_1^1$  模態對應的振幅較為顯著。

我們接著用 1200 fps 拍攝 70 Hz 下的水滴在行進時伴隨的振盪變形, 結果得到圖 5-14 中右側的一系列圖片, 查資料得到此時的主要模態應為球諧函數中的  $Y_2^1$  [16]。前面原理也分析過  $Y_2^1$  幾乎不會造成水滴移動, 所以右側的一系列圖片的水滴也應含有  $Y_1^1$  的模態, 此時水滴應是  $Y_1^1$  與  $Y_2^1$  混合的結果。只是右側系列水滴圖片與模擬計算結果看起來沒有明顯的差異, 所以代表此時  $Y_1^1$  模態在此時所對應的振幅明顯小得多。



為何在頻率高出 70Hz 時會形成  $Y_2^1$  的振盪模態而不是  $Y_2^0$  呢？根據觀察大顆水滴(體積 0.056ml)在驅動頻率 40Hz 就會出現  $Y_2^1$  的振盪模態。若法拉第波波長  $\lambda_F$ ，水滴的直徑為  $d$ ，驅動頻率  $f$  越高時， $\lambda_F$  越短。以  $\lambda_F/d$  之比值加以比較，我們發現  $\lambda_F/d$  比值超出 1 較多時(如圖 5-12)，水滴較易形成  $Y_2^0$  的振盪模態； $\lambda_F/d$  比值接近 1 時，水滴較易形成  $Y_2^1$  的振盪模態。所以在頻率超過 70Hz 後， $\lambda_F$  變短， $\lambda_F/d$

比值接近 1，水滴便容易形成  $Y_2^1$  的振盪模態(如圖 5-14 右側系列)。為何  $d \approx \lambda_F$  時會容易形成  $Y_2^1$  的振盪模態呢？因為由圖 5-14  $Y_2^0$  系列可看出水滴在振盪過程中，會變成扁球狀，此時水滴的直徑若與下方水面的法拉第波波長接近時，水滴不容易在赤道方向上造成的形變，所以  $Y_2^0$  模態受到抑制，而激發出了  $Y_2^1$  的振盪模態。

強制振動的水浴會給水滴提供能量，一部分的能量會形成水滴前進的移動動能，另一部分能量會轉換成水滴內部振盪的動能，而水滴內部的動能會經由黏滯力產生逸散的現象。而振動水浴給水滴提供的能量，轉換成水滴前進的移動動能與水滴內部振盪的動能比，會隨著驅動頻率不同而有所改變。比較  $Y_2^0$  與  $Y_2^1$  的振盪模態(如圖 5-14)， $Y_2^1$  模態被激發時， $Y_2^1$  會產生較劇烈的振盪，也就是較大的振幅。所以要較大的能量才能激發出水滴內部  $Y_2^1$  的振盪，並同時讓水滴產生行進，所以當頻率超過 70Hz 時需用更大的加速度才能驅動水滴產生行進。我們想由前面的原理分析出為何水滴形成  $Y_2^1$  模態會較  $Y_2^0$  模態需要更多的能量才能在液面行進。因為水滴振盪時表面積越大，則振動所需增加的表面位能越多，故初步推測可能是因為  $Y_2^1$  模態的表面積會較  $Y_2^0$  模態來得大，所以想比較 2 種模態下水滴的表面積。現考慮  $Y_2^0$  與  $Y_2^1$  模態下的水滴對應之表面積大小分別為  $S_2^0$  與  $S_2^1$ 。

在  $Y_2^0$  模態下， $Y_{2,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$ ，由前原理探討可知其對應的形變

$$\zeta_{2,0} = A_{2,0} r_{2,0} Y_{2,0}(\theta, \phi) e^{-i\omega_2 t}, \quad r_{2,0} = R + A_{2,0} r_{2,0} Y_2^0(\theta, \phi) e^{-i\omega_2 t}, \quad \text{整理可得}$$

$$r_{2,0} = \frac{R}{1 - A_{2,0} Y_2^0 e^{-i\omega_2 t}} \quad (5-2), \quad \text{而 } A_{2,0} = \frac{i2a_{2,0}}{\omega_2} \equiv A_0.$$

則將其整個表面做積分可得

$$S_2^0 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r_{2,0}^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{R}{1 - A_0 Y_2^0 e^{-i\omega_2 t}} \right)^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (5-3)$$

(5-3)式中利用泰勒展開式的近似關係可得到，

$$\left( \frac{R}{1 - A_0 Y_2^0 e^{-i\omega_2 t}} \right)^2 \cong R^2 (1 + A_0 Y_2^0 e^{-i\omega_2 t})^2 \cong R^2 (1 + 2A_0 Y_2^0 e^{-i\omega_2 t} + A_0^2 (Y_2^0)^2 e^{-i2\omega_2 t})$$

且  $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 2A_0 Y_2^0 e^{-i\omega_2 t} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 0$ ，忽略  $A_0^2$  以上的高次項，故(5-3)式可近似為：

$$\begin{aligned} S_2^0 &\cong 4\pi R^2 + 2\pi A_0^2 R^2 e^{-i2\omega_2 t} \int_0^{\pi} \frac{5}{16\pi} (3\cos^2\theta - 1)^2 \sin\theta \, d\theta \\ &= 4\pi R^2 + A_0^2 R^2 e^{-i2\omega_2 t} \quad (5-4) \end{aligned}$$

而對  $Y_2^1$  模態， $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi}$ ，其對應的形變

$$\zeta_{2,1} = A r_{2,1} Y_{2,1}(\theta, \phi) e^{-i\omega_2 t}, \quad r_{2,1} = R + A_{2,1} r_{2,1} Y_{2,1}(\theta, \phi) e^{-i\omega_2 t}$$

$$\text{而 } A_{2,1} = \frac{i2a_{2,1}}{\omega_2} \equiv A_1, \text{ 整理可得 } r_{2,1} = \frac{R}{1 - A_1 Y_2^1 e^{-i\omega_2 t}}。$$

則將其整個表面做積分可得

$$S_2^0 = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_{2,1}^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{R}{1 - A_1 Y_2^1 e^{-i\omega_2 t}} \right)^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (5-5)$$

與(5-3)式類似的近似關係推導可得(5-5)式近似為：

$$\begin{aligned} S_2^1 &\cong 4\pi R^2 + 2\pi A_1^2 R^2 e^{-i2\omega_2 t} \int_0^{\pi} \frac{15}{8\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \sin\theta \, d\theta \\ &= 4\pi R^2 + A_1^2 R^2 e^{-i2\omega_2 t} \quad (5-6) \end{aligned}$$

比較(5-4)與(5-6)式，可看出在  $Y_2^1$  模態的表面積  $S_2^1$  與  $Y_2^0$  模態表面積  $S_2^0$  的大小分別取決於其對應的振幅  $A_1$  及  $A_0$ 。實驗中發現當水滴出現  $Y_2^1$  模態其振幅明顯較  $Y_2^0$  模態為大，所以當頻率高出 70Hz，水面需要更大的振動加速度才能提供足夠的能量保持水滴在  $Y_2^1$  的振盪模態於水面上產生行進。

我們後續測量了在不同頻率(f)、3種不同的  $\Gamma$  值(均大於門檻值  $\Gamma_c$ )，在相同條件振動下對產生穩定移動的 5 顆漂浮水滴，分別測量水滴在 1 公分內的平均速度，並求 5 顆水滴的平均值，得到表 5-2 的結果。同樣在實驗中要改變頻率又要控制加速度為固定值，實有難處，所以我們只能做表 5-2 將不同頻率下但加速度接近的情形用同樣顏色的字型加以呈現比較。

由表 5-2 可看出在 30-60Hz 區間內，水面振動頻率越高，振動加速度越大，水滴行進的速度越快。由前面原理討論中(4-15)式可知當水滴出現  $Y_1^1$  模態時，水滴質心會產生近似等速運動，且其移動速度  $v_{c,x} \propto a_{1,1}R^2$ 。故對同樣半徑為 R 的水滴在水面移動時，驅動頻率越高或振動加速度越大時，水滴  $Y_1^1$  模態對應的振幅  $a_{1,1}$  也應越大，所以對應水滴行進的速度大都是越快的，此點與前述的模型分析結果完全吻合。

表 5-2 在不同驅動頻率(f)、3 種不同的  $\Gamma$  值下 5 顆水滴運動速度實驗結果

頻率(Hz)	$\Gamma$ 值		平均速度(mm/s)					5 顆水滴平均值
			1	2	3	4	5	
30	$\Gamma_1$	<b>0.57</b>	13.4	15.1	10.5	12.3	11.0	<b>12.5</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.76</b>	23.6	20.8	18.2	19.6	16.9	<b>19.8</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.82</b>	43.0	40.5	36.0	41.2	42.8	<b>40.7</b>
40	$\Gamma_1$	<b>0.57</b>	14.6	21.2	20.8	19.6	16.2	<b>18.5</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.77</b>	26.1	30.3	32.0	29.6	28.9	<b>29.4</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.86</b>	44.5	44.2	38.6	35.2	44.5	<b>41.4</b>
50	$\Gamma_1$	<b>0.60</b>	31.3	22.4	25.8	28.0	22.1	<b>25.9</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.78</b>	50.0	30.4	55.2	33.8	46.7	<b>43.2</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.85</b>	53.3	52.1	58.2	51.0	57.1	<b>54.3</b>
60	$\Gamma_1$	<b>0.58</b>	26.9	24.0	25.5	34.4	26.7	<b>27.5</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.79</b>	42.3	44.4	42.3	55.9	47.9	<b>46.6</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.87</b>	62.7	50.0	65.1	49.2	61.5	<b>57.7</b>
70	$\Gamma_1$	<b>0.94</b>	16.8	19.2	18.7	21.5	19.6	<b>19.2</b>
	$\Gamma_2$	<b>1.04</b>	23.6	20.5	19.3	20.2	19.0	<b>20.5</b>
	$\Gamma_3$	<b>1.17</b>	25.9	23.1	21.8	26.7	27.8	<b>25.1</b>
80	$\Gamma_1$	<b>1.00</b>	22.0	21.1	18.7	26.2	19.0	<b>21.4</b>
	$\Gamma_2$	<b>1.12</b>	14.8	16.8	25.2	36.9	15.9	<b>21.9</b>
	$\Gamma_3$	<b>1.26</b>	31.3	43.5	31.9	40.8	30.3	<b>35.6</b>
90	$\Gamma_1$	<b>0.98</b>	22.6	21.8	20.0	26.2	19.3	<b>22.0</b>
	$\Gamma_2$	<b>1.28</b>	35.6	29.8	31.9	37.8	30.3	<b>33.1</b>
	$\Gamma_3$	<b>1.39</b>	41.9	37.5	36.8	43.2	45.2	<b>40.9</b>

但是當頻率為 70Hz-90Hz 時，水面振動頻率變高，法拉第波長變短，水滴直徑此時接近法拉第波長，水滴變得容易被水面的法拉第波困住無法直線前進。即使水滴產生直線前進，其速率也較之前 50-60Hz 區間的運動來得慢。

為何水滴在 70Hz 時的速率反而會較 50-60Hz 區間的運動來得慢呢？那是由於水滴在 70Hz 的振動水面會由之前的  $Y_2^0$  轉換成  $Y_2^1$  的振盪模態，由前面討論可知，70Hz 時的  $Y_2^1$  模態在液面上運動時會較 50-60Hz 的  $Y_2^0$  模態，形成較劇烈的振幅，



所以剩下可以前進的動能顯得較少，故當頻率為 70Hz 以上時要用更大的加速度才能驅動水滴產生行進，並且行進速率也較 50-60Hz 區間的速率來的慢些。此點亦可由圖 5-14 右側系列照片看出，在振盪模態為  $Y_2^1$  下的水滴，其  $Y_1^1$  的模態所對應的振幅  $a_{1,1}$  明顯變小，而質心速度  $v_{c,x} \propto a_{1,1}$ ，故水滴質心的移動速率會變慢。此處的實驗結果與參考資料[16]十分類似，[16]中提到  $Y_l^m (m \neq 0)$  的狀態會使油滴的跳動能力減弱，就如同此處  $Y_2^1 (m \neq 0)$  的狀態會使水滴的移動能力減弱。

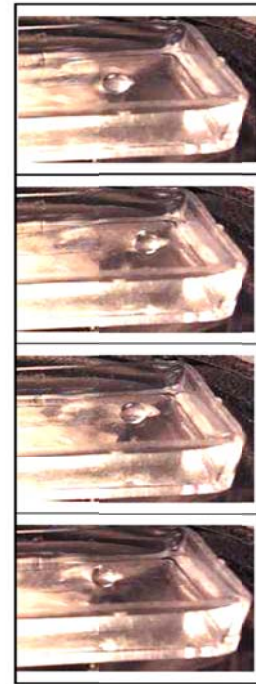


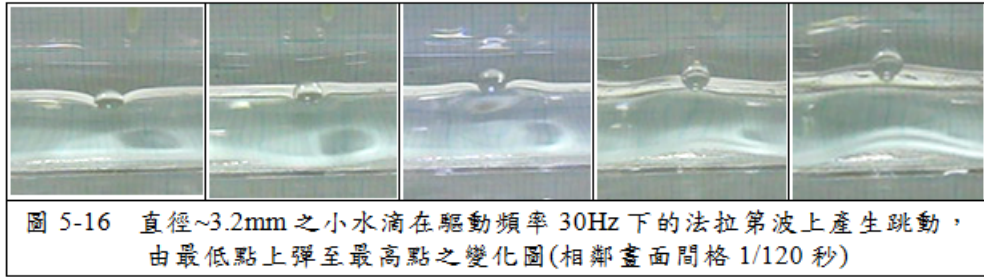
圖 5-15 直徑~3.2mm 之水滴在法拉第波上行進被器壁反射之連續動作圖

在實驗中我們同時觀察到部份水滴在行進到器壁附近時，水滴在尚未接觸器壁便離開了。我們推測是由於水滴在振動的水面上會建立自己的波場(wave field)，當水滴朝向器壁移動時，只要波場夠強便會使水滴尚未接觸器壁前即被波場反射，造成水滴不會接觸到器壁便離開了，如圖 5-15 所示(上下畫面間隔 1/20 秒)。

#### (4)水滴在液面上跳動(bouncing)

實驗中使用 8cm\*4.5cm 方形容器內盛有 2.5cm 深的水浴(其內含 0.1%洗潔精)，發現液面振幅必須比水滴行進下的振幅更大時，才可使直徑約 3.2mm 水滴跳動。水滴跳動的能力來自於 2 種作用：(1)水滴變形時儲存之位能 (2)水滴與液面間的氣墊被擠壓時形成的垂直作用力。我們觀察到直徑約 3.2mm 水滴在跳動過程中也會產生形變。圖 5-16 顯示直徑約 3.2mm 水滴在驅動頻率 30Hz 振動水面形成大振幅的法拉第波時，可以在水面跳動，圖中每格畫面間隔 1/120 秒，水滴跳動頻率與法拉第駐波頻率相等，為驅動頻率 30Hz 的一半，即 15Hz。





實驗觀察跳動的水滴大都固定在原處上下跳動，但少數情形會有不規則移動的現象。我們推測此時因液面接近混亂狀態，液面有時會有不穩定的擾動，才會導致跳動的水滴產生不規則的移動現象。我們在實驗中也觀察到，直徑約 3.2mm 水滴與水面部份結合後剩下的子水滴(直徑~1mm)，在水面振幅剛形成法拉第波時便可以在水面跳動，子水滴跳動頻率也與法拉第駐波頻率相等。所以可知在水滴較小時，只要較小的振動加速度便可使其跳動；而較大顆的水滴要使其跳動，有時振動水面幾乎要形成混亂狀態，不易觀察水滴跳動。

我們本想利用細型注射針筒去穩定製造較細微的水滴去觀察其跳動，但細型注射針筒用手控制，要持續穩定地產生細微水滴是困難且不便的，所以我們對跳動部份無法做太多的觀察討論。期待將來能找到較簡便穩定的方法產生細微水滴並觀察跳動現象。

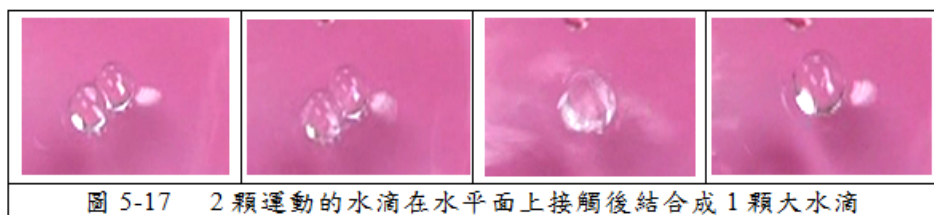
### 3.振動水面上漂浮水滴間的交互作用

我們在振動水面上發現了水滴間的交互作用主要有 2 種：結合、彈開；

較少的有 2 種：互繞共同質心轉動及近似排斥的現象。其討論如後：

#### (1)結合(coalescence)

這是 2 顆水滴間最常看到的交互作用，當 2 顆水滴接近時因為水面表面張力影響更會使水滴靠得更近，當它們接近到某種程度，水分子間氫鍵的吸引力會使 2 顆水滴結合成 1 顆較大水滴。如圖 5-17。



## (2)彈開(bouncing)

2 顆水滴靠近時，在 2 顆水滴間的氣體受到擠壓且被夾住，被夾住的氣體體積變小壓力增大，及水滴的球膜受到擠壓變形，會產生類似彈性膜的恢復力，上述的作用讓 2 顆水滴彈開(如圖 5-18)，產生像 2 顆撞球碰撞後的情形。彈開現象較常發生在垂直落下的水滴與水面上的水滴碰撞後，因為垂直落下的水滴具有較大的機率與水面上的水滴間夾住氣體，而水滴的球膜也易受到較大擠壓的變形，產生彈開現象。



圖 5-18 2 顆運動的水滴在水平面上碰撞後彈開

## (3)互繞質心轉動(orbit)

我們觀察到以 6 公分直徑圓形容器盛裝含 0.1%洗潔精的水浴在 40Hz 振動下，2 顆大小水滴接觸後會互繞質心轉動，並拍攝到它們互繞質心轉動了 16 圈，且其週期約為 1.86 秒(如圖 5-19 a)。另外以 4.5cm\*2cm 之方形容器盛裝 0.1%洗潔精的水浴在 30Hz 振動下，2 顆相同水滴會也會互繞質心轉動，此時週期約為 0.6 秒(如圖 5-19 b)。由實驗中互繞質心轉動的情形看來，2 水滴的中心間距越遠，週期越長。而圖 5-19 b.中水滴圓周運動的切線速率約為 16.7mm/s，略小於水滴在水波上直線行進的平均速度大小 21.2 mm/s，那是因為 2 顆水滴接觸後有部分動能會轉換成水面或水滴增加的表面位能。



圖 5-19a 大小 2 顆水滴互繞質心逆時針轉動的現象，週期為 1.86 秒。

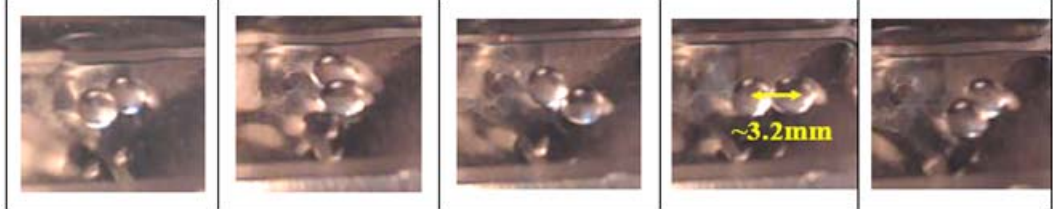


圖 5-19b. 2 顆大小相同水滴互繞質心逆時針轉動的現象，週期為 0.6 秒。

其實在觀測時可經常看到 2 顆水滴在接近時會有互繞質心轉動的現象，只是有時在沒有形成完整的 1 圈圓周運動前 2 顆水滴便結合了。2 顆水滴互繞質心轉動，必須要有向心力，而此種向心力來源應是表面張力及另顆水滴的接觸力所形成的合力，如圖 5-20 所示。圖中 A 水滴受到表面張力  $T$  在接觸長度上形成向右的力減掉 B 水滴給 A 水滴的接觸力  $F_{B \rightarrow A}$  所形成之合力，即為 A 水滴的向心力來源。

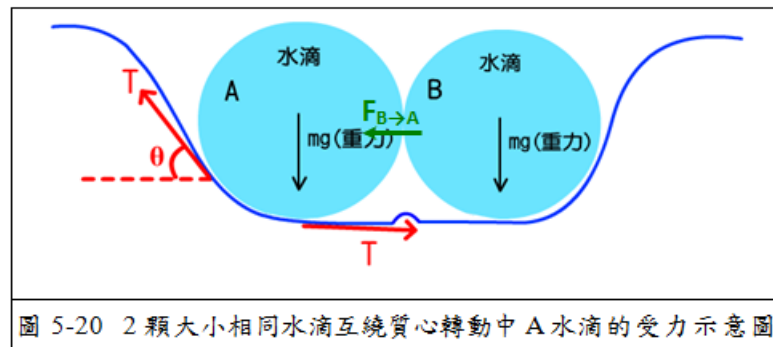


圖 5-20 2 顆大小相同水滴互繞質心轉動中 A 水滴的受力示意圖

而多顆水滴形成的團簇(cluster)也有自轉的現象，如圖 5-21，4 顆水滴形成之團簇自轉之週期約為 4.5 秒。

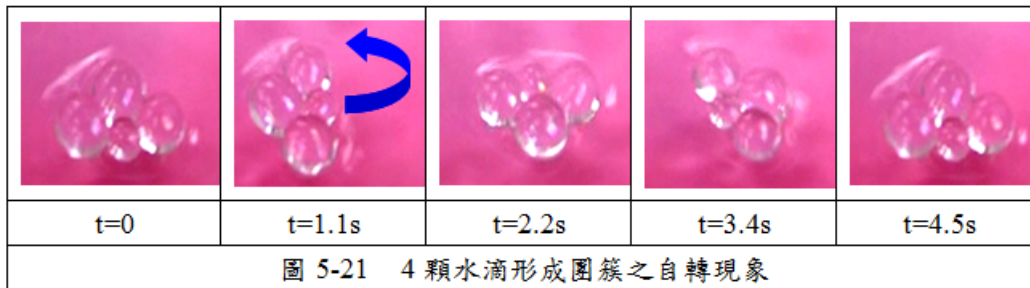


圖 5-21 4 顆水滴形成團簇之自轉現象

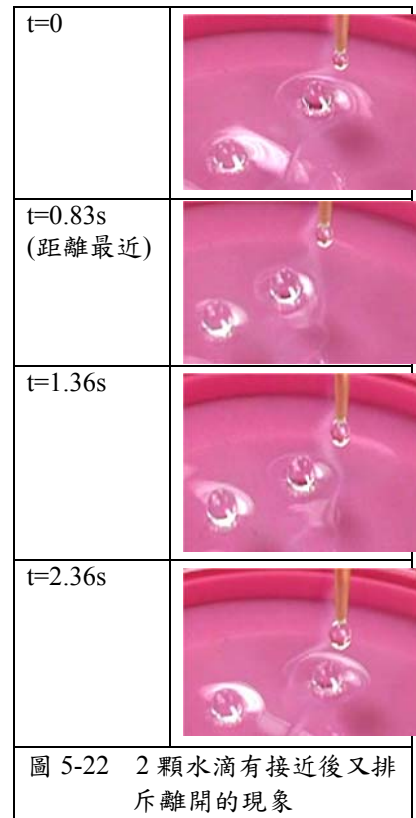
#### (4) 近似排斥的作用(repulsion)

我們觀察到水面在 20Hz 振動下，2 顆水滴有互相接近但沒有接觸後便離開的排斥現象，這種現象是少有的，如圖 5-19。2 顆水滴在振動水面上類似排斥與互繞質心轉動的奇特現象，讓我們感到驚訝與疑惑。不過我們也由參考資料[4]獲得一些啟發。參考資料[4]提到當 2 個行走者靠近時，會產生排斥及吸引後互繞質心轉動的現象。這是因為 2 個行走者的法拉第波以不同相位靠近時，會因波的疊加影響會形成排斥或吸引後互繞質心轉動的現象。此種行走者同時會呈現巨觀世界的量子效應，如繞射、干涉[5]、穿隧效應[18]等。

實驗中的漂浮水滴雖然沒有像 walker 可以自行產生法拉第波造成等速緩慢移動，但漂浮水滴在振動水面上時，會在水滴周圍建立出自己的影響，形成水滴自己的波場(wave field)。水滴的波場與振動水面的波動交互影響下，也會使水滴沿著特定方向產生近似等速移動。

而在波場交互作用下，就如同行走者(walker)的表現，2 顆漂浮水滴接近時也會產生排斥及吸引後互繞質心轉動的現象；而多顆水滴形成的團簇(cluster)也有產生自轉的現象，非常類似網站影片中 walker 的行為[19]。其中的差別為我們的漂浮水滴要接觸後才能形成互繞質心轉動的現象，但 2 個 walker 在分開一段距離下便可互繞質心轉動。我們推測是因為實驗中的漂浮水滴質量較大，直到要接

觸時，2 顆水滴波場間的交互作用才足以大到讓 2 顆水滴產生互繞質心轉動的現象。若我們能同時維持 2 顆直徑 $<1\text{mm}$ 的水滴漂浮於振動水面，並使其在水面行進，我們預期它們應當也可以在分開一段距離下產生互繞質心轉動的現象。Couder 研究團隊[5]發現 2 個 walker 互繞質心轉動的週期大約與軌道直徑成正比；而我們看到 2 水滴的中心間距越遠，週期也越長。Couder 的研究團隊[5]同時指出 2 個相同大小的 walker 被束縛在一起形成軌道運動，它的切線速率是接近但略小於 walker 直



線前進的速度。而圖 5-19 b 中 2 顆相同水滴形成軌道運動的切線速率約為 16.7mm/s，也是接近但略小於水滴在法拉第波上直線行進的平均速度 21.2 mm/s。

我們本來也想嘗試 mover 是否可像 walker 般出現繞射、干涉的現象，但實驗中的漂浮水滴在靠近障礙物的狹縫邊緣時，很容易與水面結合消失，便無法觀察水滴通過狹縫後的行為，所以此部分嘗試是不成功的。或許用更小體積的水滴在法拉第波上產生移動後有機會看到水滴形成的繞射、干涉的現象，這部份還有待後續的努力。

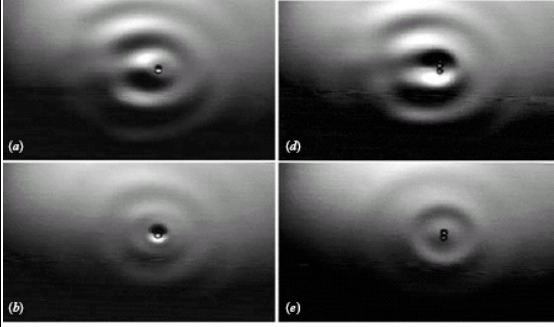
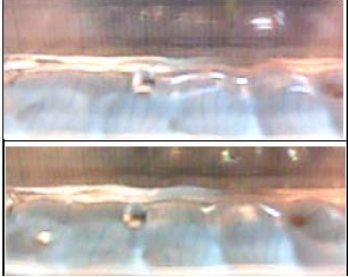
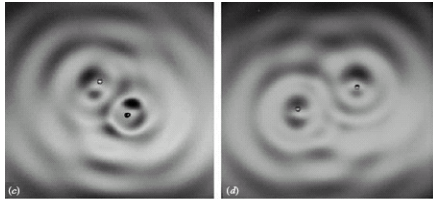

#### 小結論：

1. 漂浮水滴在振動水面上的運動情形有上下振動、束縛在 2 點間來回運動、行進及跳動。
2. 漂浮水滴在振動水面的加速度需超過臨界門檻值，但尚未形成混亂時，可在面上產生行進；且在水面振動頻率為水滴振盪之自然頻率時，臨界門檻值會對應極小值。
3. 漂浮水滴在振動水面行進時，在不同的驅動頻率範圍，水滴被激發出之振盪模態會有所不同，而  $Y_2^1(m \neq 0)$  的狀態會使水滴的移動能力減弱。
4. 振動水面上的 2 顆水滴互相靠近時，會有結合、彈開、互繞質心的軌道運動及排斥現象。

最後我們將漂浮水滴的各種觀察到的現象與 Couder 研究團隊[5]發現的 walker 作一比較分析如表 5-3。



表 5-3 本實驗漂浮水滴 mover 與 Couder 實驗[5]中油滴形成的 walker 比較表

比較	Couder 團隊[5]觀察的油滴 walker	本實驗漂浮水滴 mover
相似處	<p>1. 當油面振幅小於但接近法拉第波門檻值時，矽油滴會在矽油面上跳動，並在油面上形成等速直線運動。</p> 	<p>當水面振動加速度超過移動門檻值，且液面尚未進入混亂狀態，此時水滴可在液面上伴隨著振盪變形產生直線行進。</p> 
	<p>2. 2 個 walker 相互靠近時，會形成互繞質心轉動或排斥現象。</p>	<p>2 個水滴在振動水面上相互靠近時，也會有形成互繞質心轉動或排斥現象。</p>
	<p>3. 多顆跳動油滴形成的團簇(cluster)有自轉的現象。</p>	<p>多顆水滴形成的團簇(cluster)也有自轉的現象。</p>
	<p>4. 油滴互繞時，週期大約與軌道半徑成正比。</p>	<p>水滴互繞時，2 水滴中心間距越大週期越長。</p>
不同處	<p>1. 矽油油滴會在高黏滯性的矽油油面上跳動，油面此時波紋甚小。Ohnesorge number <math>Oh &gt; 1</math>，油滴變形可忽略。</p>	<p>本實驗中水滴因質量較大，有時液面振動要大到幾乎呈混亂撞態才會產生跳動。<math>Oh \ll 1</math>，水滴有明顯變形</p>
	<p>2. 互繞質心轉動時，2 油滴會分開一段距離。形成軌道運動的 2 油滴其跳動狀態可為同相或反相。</p> 	<p>互繞質心轉動時，2 水滴彼此接觸，不會相隔一段距離。形成軌道運動的 2 水滴只有觀察到同相的振盪狀態。</p> 
	<p>3. 可觀察到干涉、繞射及軌道量子化的現象。</p>	<p>無法觀察到干涉、繞射及軌道量子化的現象。</p>

## 六、結論與應用

### (一)、靜止液面之漂浮水滴的機制及變因對生存期的影響

1. 水滴可漂浮在水面的機制為水滴與水面間存有氣墊。
2. 對水滴而言在不同變因下對實驗結果加以統計，會對應出較佳的生存條件。

### (二)、風吹動液面對漂浮水滴的影響

1. 風吹水面下，因為風壓提供漂浮水滴和水面間的氣墊適時的補充，所以能大幅延長漂浮水滴的生存期。
2. 無論在何種風速吹拂下，小水滴的平均速度較大水滴快。
3. 強風下相同大小的水滴速度分布較集中，且對應的速度較快；弱風則反之。

### (三)、垂直振動液面與漂浮水滴的相關物理現象

1. 當水面之振幅漸增時，我們發現水面的波動會由小振幅的表面波→法拉第波(Farady wave)→混亂狀態(chaos)。而在混亂狀態下，水面噴射出的水滴大小相當接近。
2. 液面振動時的漂浮水滴生存期，較液面靜止的情況下要長得多。
3. 漂浮水滴降落在振動水面的波峰或波谷位置是隨機的，故平均生存期與液面振動頻率或振動加速度間較沒有規律變化的關係。
4. 漂浮水滴在振動水面上的運動情形有上下振動、束縛在2點間來回運動、行進及跳動。
5. 漂浮水滴在振動水面的加速度需超過臨界門檻值，但尚未形成混亂時，可在面上產生行進；且在水面振動頻率為水滴振盪之自然頻率時，臨界門檻值會對應極小值。
6. 漂浮水滴在振動水面行進時，在不同的驅動頻率範圍，漂浮水滴被激發出之振盪模態會有所不同，而  $Y_2^1(m \neq 0)$  的狀態會使水滴的移動能力減弱。

7.振動水面上的2顆水滴互相靠近時，會有結合、彈開、互繞質心的軌道運動及排斥現象。

#### (四)相關應用

漂浮水滴可應用在微流體、生物、化學、製藥等多方面的研究。有研究團隊指出，可將彈跳液滴與包含試劑的液滴相碰撞，觀察其反應。在處理微小樣本時，通常會使用刻有小凹槽的薄片，但薄片的清理工作甚為繁瑣，同時也很難確保樣本不會混合在一起，而彈跳液滴就提供了一種解決問題的方法，將來在處理大量微細液滴時，此種技術就會發揮其作用。在生物實驗中，液體出現沾染的問題也可用此種技術加以解決。但我們認為除了利用液面振動，也可利用風力去傳送液滴。在實驗室或工廠振動液面的液滴傳送方式較適合；但在大規模的海洋中，風力傳送似乎是較佳的選擇，未來這種液滴傳送技術會在科學中有更廣泛的應用。



## 七、參考資料

[1] 科展作品—神奇的水珠。

<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/senior/040111.pdf>

[2] 科展作品—會漂浮的水滴。<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/49/pdf/030117.pdf>

[3] D. Terwagne and J.W. M. Bush, *Nonlinearity* 24 R51–R66 (2011).

[4] Y. Couder, S. Protière, E. Fort, and A. Boudaoud, *Nature (London)* **437**, 208 (2005).

[5] S. Protière, A. Boudaoud and Y. Couder, *J. Fluid Mech.* **554**, 85 (2006).

[6] K. R. Sreenivas, P. K. De, and J.H. Arakeri, *J. Fluid Mech.* **380**, 297 (1999).

[7] M. Hsiao, S. Lichter, and L. G. Quintero, *J. Fluid Mech.* **31**, 3560 (1988).

[8] E. M. Honey and H. P. Kavehpour, *Phys.Rev. E* **73**, 027301 (2006).

[9] 高中物理第2冊第11章，南一書局。林明瑞等編著。

[10] S. Douady, *J. Fluid Mech.* **221**, 383 (1990).

[11] T. B. Benjamin and F. Ursell, *Proc. R. Soc. Lond., A* **255**, 505 (1954).

[12] S. Courty, G. Lagubeau, and T. Tixier, *Phys.Rev. E* **73**, 045301(R) (2006).

[13] L. Rayleigh, *Proc. R. Soc. London* **29**, 71 (1879).

[14] Y. Amarouchene, G. Cristobal, and H. Kellay, *Phys.Rev. Lett.* **87**, 206104 (2001).

[15] <http://140.112.68.243/chap7/chap7.htm>

[16] S. Dorbolo, D. Terwagne, N. Vandewalle and T. Gilet, *New J. of Phys.* **10**, 113021 (2008).

[17] T. Gilet, D. Terwagne, N. Vandewalle, and S. Dorbolo *Phys.Rev. Lett.* **100**, 167802 (2008).

[18] A. Eddi, E. Fort, F. Moisy, and Y. Couder, *Phys.Rev. Lett.* **102**, 240401 (2009).

[19] <http://www.youtube.com/watch?v=W9yWv5dqSKk&feature=related>

[20] 劉劍波、劉志國、蘇文輝，自然科學進展，第 19 卷，第 12 期 2009 年 12 月

## 附錄：漂浮液滴在靜止液面掉落時，各種情況下的生存期比較探討

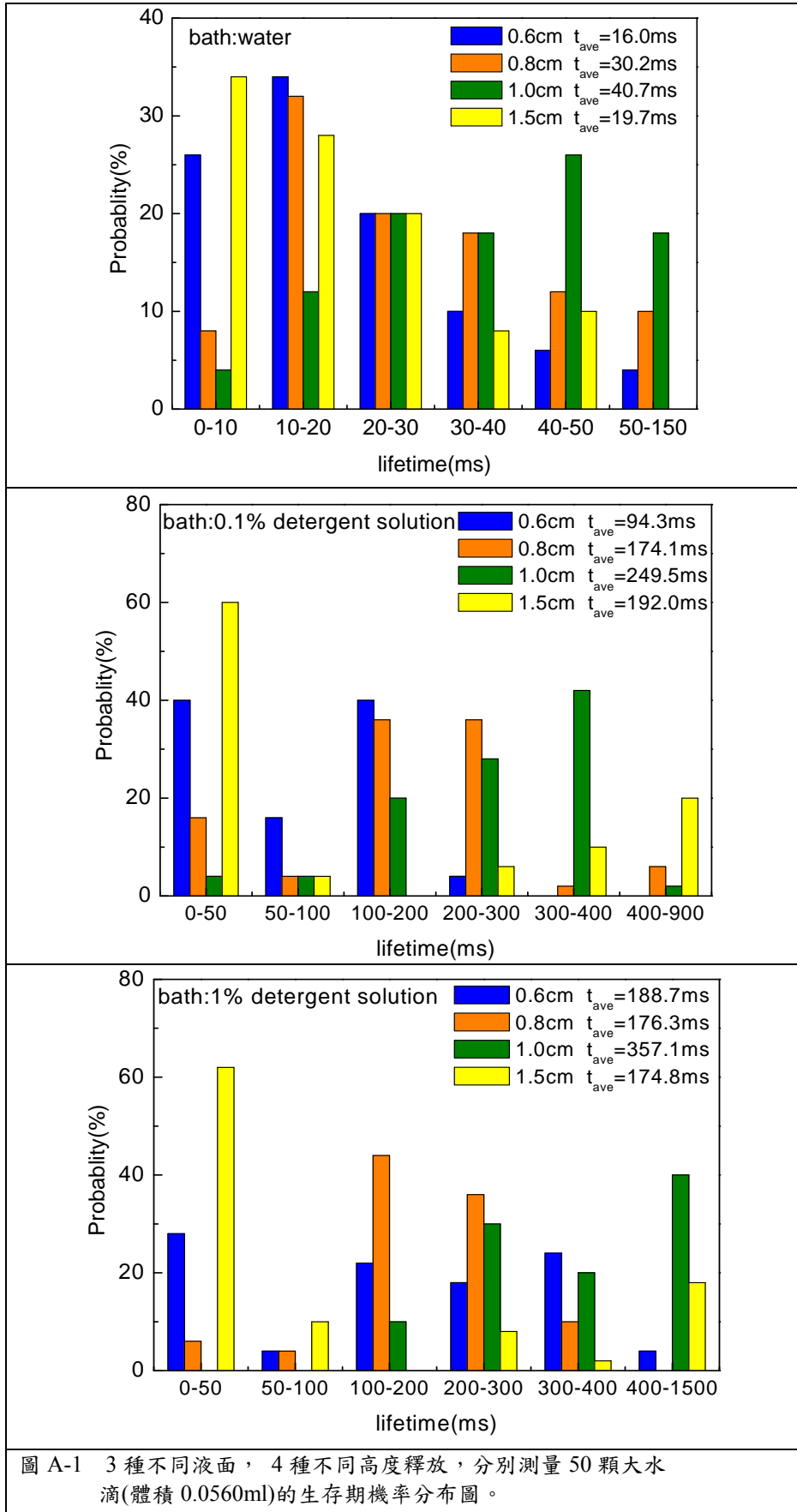
實驗過程中，溫度約在  $29 \pm 1.0^{\circ}\text{C}$ 。我們分別針對靜止釋放高度、含不同濃度洗碗精水溶液、不同種類液滴及液滴大小以及在水面振動、風吹動水面等不同狀況下，對上述的變因如何影響漂浮液滴的生存期作以下的討論。

### 1、其他條件固定，不同釋放高度對其生存期影響

#### I. 釋放高度對大水滴生存期影響

我們取相同體積的大水滴(體積=0.056ml)落在3種(不含洗潔精、0.1%洗潔精、1%洗潔精)液面，分別由4種不同高度釋放，分別測量各種情況下50顆大水滴的生存期，並加以統計比較，得到圖5-4的生存期機率分布圖。分析圖5-4後可發現，對各種濃度的液面來說，都以0.8cm與1.0cm呈現的存活時間最佳。以其中不含洗潔精的純水液面觀察，高度0.6cm及1.5cm的機率趨勢都集中於20ms以下，代表成功漂浮機率及維持時間都較不理想。而從高度0.8cm及1.0cm釋放之水滴，其存活時間分布於10ms以下的機率都相當小，代表此種高度落下的水滴有較高機率對應較長生存期，而其中又以1.0cm高度釋放的水滴平均存活時間 ( $t_{ave}$ )40.7ms為最長。

濃度 0.1%的洗潔精水溶液較無洗潔精之純水，其上漂浮水滴的生存期均明顯提升。其中 0.8cm 高度釋放之水滴存活時間集中於 100~300ms 之間，1.0cm 的數據分布更集中在 300~400ms，兩者總平均存活時間 174.1ms 及 249.5ms 均較無洗潔精之資料組大大提升。而 1%濃度的生存期較 0.1%濃度表現已無明顯增長，只有 1.0cm 資料組生存時間集中的區段又再次提升，平均生存期高達 357.1ms。



從3種濃度的液面，不同釋放高度的生存期分布顯示，對大水滴而言高度1.0cm左右釋放的漂浮水滴具有較長的生存期。太低的釋放高度會造成水滴易與水面吸附結合；太高的釋放高度會造成水滴接觸水面時衝力太強，容易讓水面凹陷太劇烈，曲率太大因而包覆了水滴(如圖A-2)，也會造成水滴與水面結合。

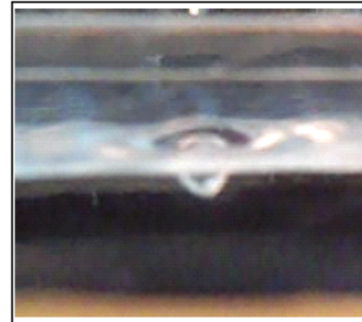


圖 A-2 水滴接觸水面時衝力太強，讓水面劇烈凹陷之圖片

## II. 釋放高度對小水滴生存期影響

我們取相同體積的小水滴(體積=0.020ml)落在3種(不含洗潔精、0.1%洗潔精、1%洗潔精)液面，分別由4種不同高度釋放，分別測量各種情況下50顆小水滴的生存期，並加以統計比較，得到圖5-5的生存期機率分布圖。

小水滴在無添加洗潔精的液面環境下，一落到液面便迅速與液面結合的機率極高，觀察到的存活時間相當短，幾乎都在10ms以下，只有在0.5cm的高度釋放時水滴生存時間才較為提高。但觀察0.1%濃度的液面，各種釋放高度的成功機率皆大大提高，以0.5cm及0.8cm表現最佳，主要集中於200~300ms，平均時間則在190ms上下。但觀察1%濃度結果，發現存活時間不僅沒有明顯提升，反而存活時間會有小幅度下滑，可能是因為溶液濃度過高，導致雜質較多，對小水滴的漂浮產生不利的影響。

小水滴的釋放高度對存活時間的重要影響因素，也有顯著影響。小水滴的最佳釋放高度值相對於大水滴也較低。對大水滴來說最佳釋放高度以1.0cm較佳；但小水滴以0.8cm之釋放高度效果最好，這是由於大小水滴2者的半徑大小相差約為1.4mm，與0.2cm相當接近。

小結論：對固定大小的水滴，會對應一個最佳釋放高度，可以讓漂浮水滴維持較久的生存期；小水滴的最佳釋放高度略低於大水滴的最佳釋放高度。

2、其他條件固定，水滴大小對漂浮水滴之生存期影響。

實驗中雖然大小水滴的生存期因其接觸水面瞬間的條件不同而有長短差別。但

我們由實驗統計結果發現上述各種情形下均是大水滴的生存期分布明顯較長，因為大水滴與水面間可夾住的空氣較多，氣墊可維持較久的時間才散失。其次，我們猜測小的水滴，因為質量及體積較小，在落下的過程中受到其他難以控制的變因影響可能會較大水滴顯著，因此能成功漂浮的機率便不甚穩定。此處的實驗結果與參考資料[14]類似。

小結論：水滴越大，與水面間可夾住的空氣較多，氣墊可維持較久的時間才散失，可以維持漂浮水滴較久的生存期。

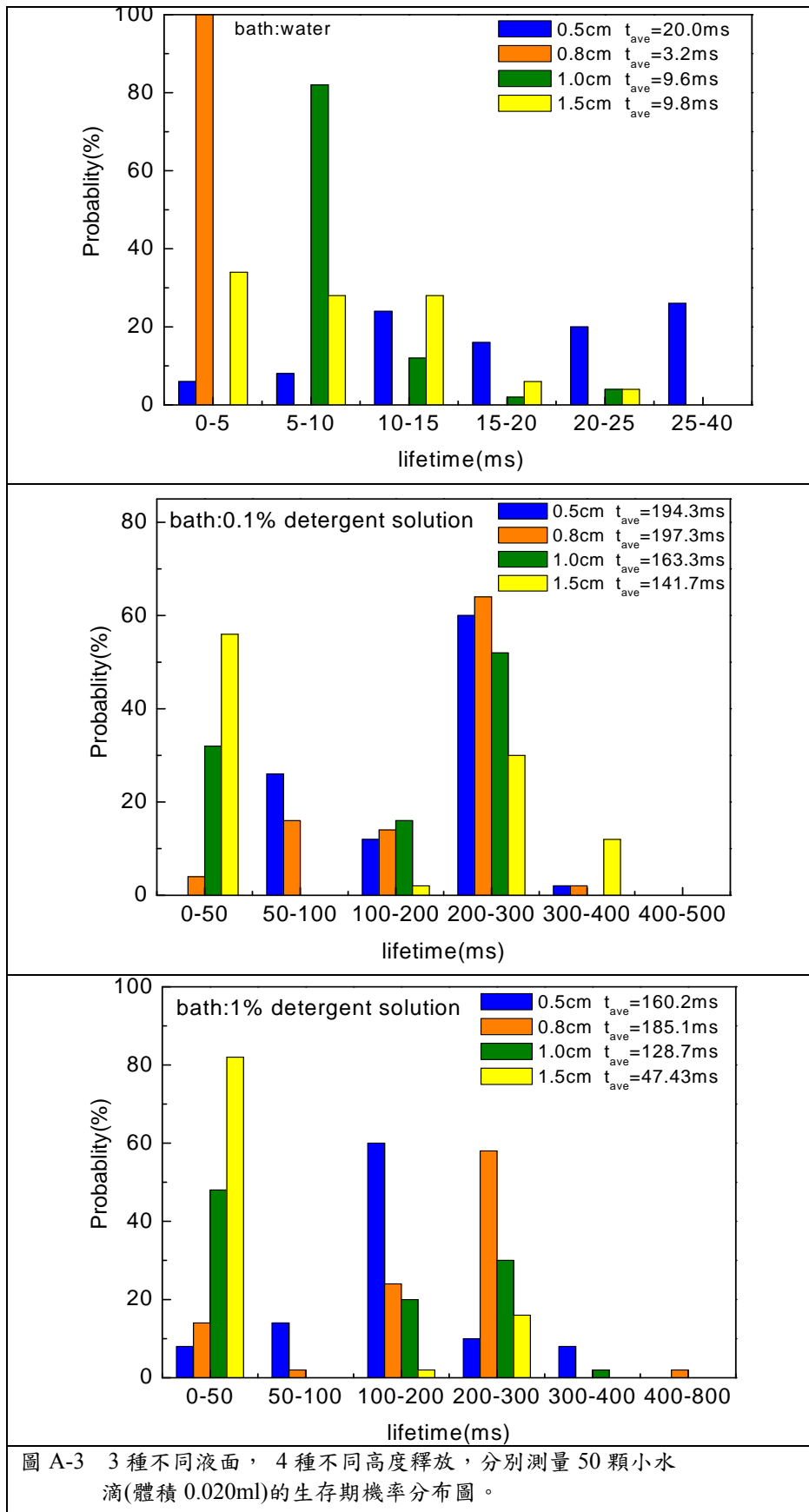


圖 A-3 3 種不同液面， 4 種不同高度釋放，分別測量 50 顆小水滴(體積 0.020ml)的生存期機率分布圖。

3、其他條件固定，含不同濃度洗潔精溶液表面對漂浮水滴之生存期影響。

#### I. 不同濃度之洗潔精水溶液表面，漂浮水滴之生存期比較

洗潔精添加與否及濃度高低，主要影響的是液面表面張力的大小。加入微量洗潔精後，立刻使液面的表面張力大幅降低，使液面變得較柔軟有彈性，所以水滴降落到液面時，讓水面形成較大的曲率，可以緩和衝擊的作用，使水滴能維持在液面上較久時間，得到如前A-1、A-3圖的實驗結果。為了分析洗潔精濃度對液面的表面張力影響，我們測量不同濃度洗潔精液面之表面張力，呈現如圖A-4的變化情形。

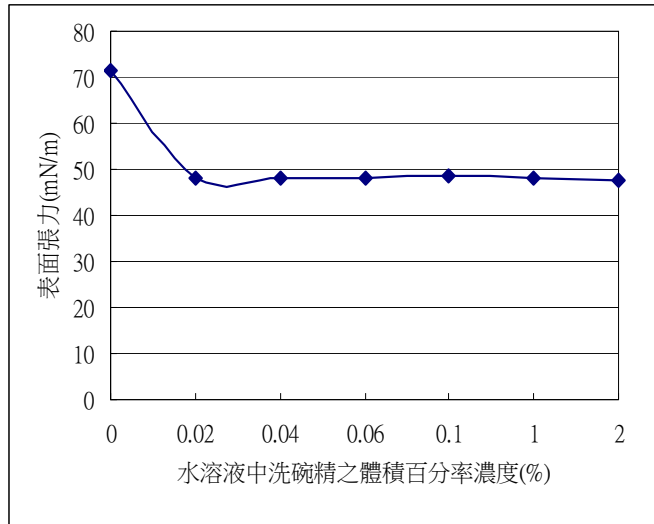


圖 A-4 水溶液表面張力隨洗碗精濃度變化示意圖

由圖A-4可看出隨著濃度增加，表面張力會降到某一特定值，在圖A-4中可以觀察到一個”平台”。我們從資料中得知可能與洗潔精內的界面活性劑改變溶液表面分子排列有關，後面會再詳述。

小結論：

1. 加了微量洗潔精的水溶液液面，因其表面張力下降，液面變得較有彈性，所以水滴降落水面時可讓水面形成較大的曲率，較能承接住水滴使其維持漂浮，故生存期較久。
2. 增加水中所含洗潔精濃度時，液面對應的表面張力只有些微變化，造成較高洗潔精濃度下的液面，漂浮水滴在其上的生存期並沒有特別顯著地提高。

#### II. 為何水面加入界面活性劑可以增加漂浮水滴生存時間



我們推測是由於界面活性劑的長鏈分子加入水中後，其疏水端會跑到水與空氣的界面上，在水面上形成單層分子(monolayer)排列(如圖 A-5)，從而使水分子間的凡得瓦力變弱，造成表面張力變小。在水滴掉落到液面時可使液面有較大的曲率，使表面張力向上的合力得以支撐落下水滴的衝力，接著讓液滴往上振動後再形成漂浮液滴。

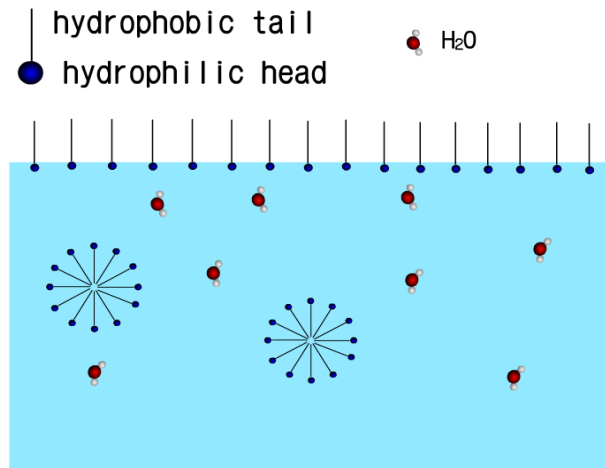


圖 A-5 界面活性劑加入水後之分子分佈示意圖

由實驗結果可看出，液面為了維持其表面 2 維有序的排列，並非任意添加進水中的雜質(如界面活性劑)都可以跑到水面上，所以造成我們測量到的表面張力隨洗碗精添加濃度變化會呈現飽和的狀態。也就是並非加越多界面活性劑，表面張力就越小，當表面張力小到某一程度後，就幾乎不隨濃度變化了(如圖 A-4)。這是因為界面活性劑分子除了形成單層分子外，多餘的界面活性劑分子會跑到水中形成疏水端互相吸引的膠體粒子(micelle)。(如圖 A-5)。

我們在網路上搜尋資料發現有人研究[20]離子型界面活性劑水溶液中，界面活性劑分子自發地在空氣與水的界面形成了一個電偶極層，不同液面之間的靜電排斥力，使得同種溶液形成的液滴能夠浮在液面上(如圖 A-6)。不同於空氣層表面張力模型，他們提出表面活性劑誘發的靜電排斥力模型。

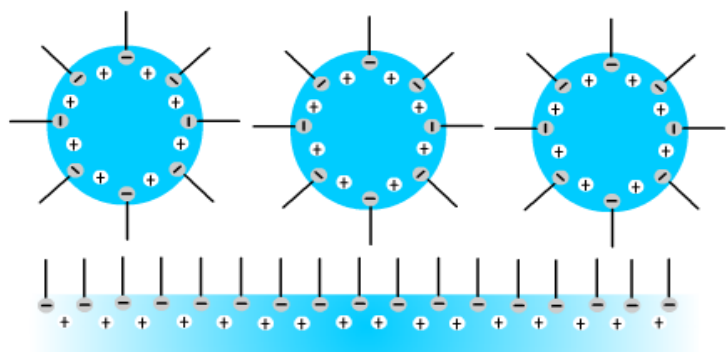


圖 A-6 離子型界面活性劑水溶液液面與液滴形成之電偶極層[13]

他們以離子型界面活性劑水溶液為研究對象發現了表面濃度的量子化現象，這種現象可歸因於穩定的表面二維有序結構的形成。但電偶極之靜電排斥力此種說法似乎只適用於液滴與液面均是相同的離子型界面活性劑水溶液。因為我們將食

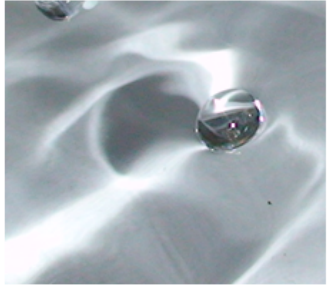

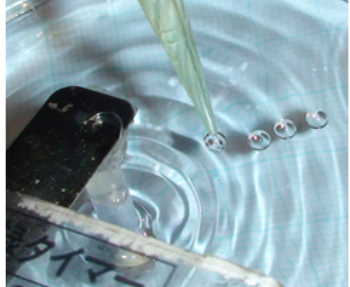
鹽水液滴及含非離子性界面活性劑的液滴滴到含非離子性界面活性劑的液面時，都會增加漂浮液滴存在的時間。食鹽水會解離出 $\text{Na}^+$ 與 $\text{Cl}^-$ ，它和非離子性界面活性劑這類溶質似乎無法在液滴表面形成規則排列的電偶極層，去達到靜電排斥的效果。所以我們認為本實驗中的漂浮水滴形成機制主要還是由於氣墊的存在。

綜合以上結果顯示，水滴越大、由最佳高度釋放、液面具有較佳彈性時，可維持在液面較久時間。

# Floating Droplets Dancing with Wave

## I. Motivation

A pure water drop coalesces almost immediately with a pure water surface, and the coalescing may be delayed by a surfactant solution. According to observations, floating droplets seemed to sustain longer on the disturbed water surface as given in Fig.1-1. Why did water droplets float on water surface? What kind of methods could maintain water droplets on the water surface instead of coalescing with a water bath immediately?

		
Fig. 1-1 a A floating droplet moved on wind blowing water surface.	Fig. 1-1 b. Floating droplets moved on flowing water surface.	Fig. 1-1 c. Three floating droplets proceeded on vertically vibrating liquid bath with constant velocity.

## II. Research Purposes

1. To identify the mechanism of a floating droplet and factors to affect its life time on a liquid surface, and to find out optimal conditions for the floating droplets.
2. To observe the phenomena of the floating droplets on wind blowing and vertically vibrating liquid surface under the optimal conditions and build models to explain corresponding behavior.

### III. Apparatus

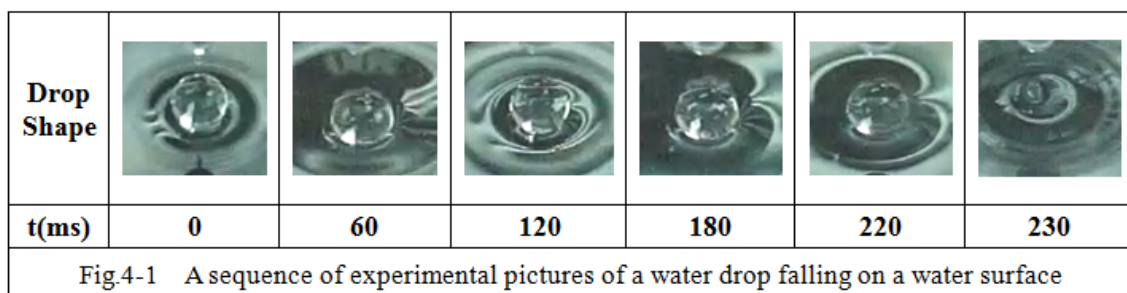
Main Equipments	Standards
High Speed Video Camera(CASIO)	FH-100,1200fp;Exilim 420fps
Power amplifier	
Sound Generator	
Variable Resistor	
Acceleration Meter (Maximum 25g)	Vernier production
Wind Speed Meter	
Electrical Fan	35W
A.C Amperemeter	Maximum 5A
Containers	$\ell$ 100cm*w10cm*h10cm $\ell$ 7.5cm*w2.5cm*h3.5cm Circle Radius 4.5cm* h3cm

### IV. Experimental Procedures

#### 1. To find out a mechanism and factors affecting the life time of a floating droplet.

To study the mechanism and the factors of the life time for floating droplets on the liquid surface, different variables include the height it is released from, the size of the droplet and detergent solution of different concentrations.

The optimal conditions for water drops to sustain on a quiescent liquid surface are concluded by the statistic results of drops. The drops were photographed at film speeds 300 frames/sec, as shown in Fig.4-1 for analyzing the mechanism of the floating droplets.



**2. To sustain the life time of floating droplets on liquid surface in order to study the related phenomena.**

The methods adopted to sustain water droplets on a liquid surface include to wind-blow and to vertically vibrate the liquid surface. According to the statistically optimal conditions, the experiment is proceeding at the water bath of 0.1% detergent solution and water drops released at a height of 1 cm. The corresponding phenomena of floating drops on wind blowing and on vertically vibrating liquid surfaces are recorded with a high speed video camera.

Experimental apparatus for studying floating droplets on blowing and on vertically vibrating liquid surfaces are given as Fig. 3 a and Fig. 3 b separately.

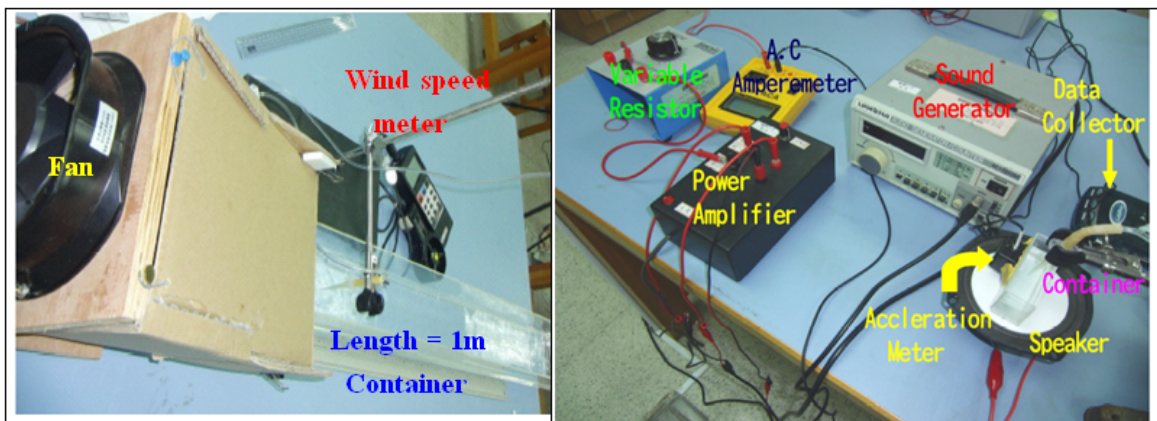


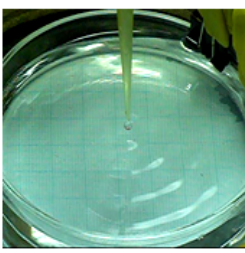



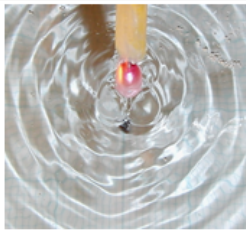
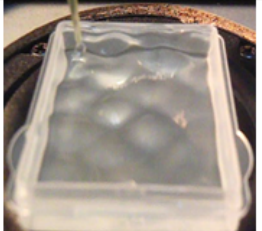
Fig. 4-2 a  
The experimental apparatus for studying the floating droplet on a blowing liquid surface.

Fig. 4-2 b  
Apparatus for studying the floating droplet on a vertically vibrating liquid surface.

## V. Theory Analysis

### 1. Faraday Wave [1]

Viscous fluid under the vertical sinusoidal vibration with a forcing frequency will form many kinds of standing wave patterns when forcing acceleration exceeded the threshold value. This surface wave first found by Faraday due to parametric resonance is called Faraday wave. Some specific patterns as shown in Figs.5-1 will vary by the geometry of the container, the depth of the liquid bath, and the forcing frequency.

Meniscus wave			
Faraday wave			
Forcing frequency (Hz)	30Hz	60Hz	30Hz
Figs.5-1. Observed patterns of meniscus wave and Faraday wave with different forcing frequencies and containers.			

Benjamin and Ursell [2] considered a harmonic oscillation of the free surface with damping items by parametric force and got typical Mathieu equation.

$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 [1 + f(t)]z = 0 \quad (5-1)$$

In the equation,  $f(t)$  refers to the driving force and  $f(t) = f \cos \omega t$  and the direction of vibration is along  $z$  axis (gravitational direction). Benjamin and Ursell [2] demonstrated there were infinite such series of resonances as  $\omega$ , which correspond to the following condition:

$$\omega = 2\omega_0, \omega_0, \frac{2\omega_0}{3}, \dots, \frac{2\omega_0}{n} \quad (n \in Z).$$



When the acceleration is over the threshold value of excitation, there is a formation of standing surface waves with half the frequency of forcing. The formation of the Faraday wave on a fluid layer undergoing a vertical oscillation is illustrated in Fig.5-2.

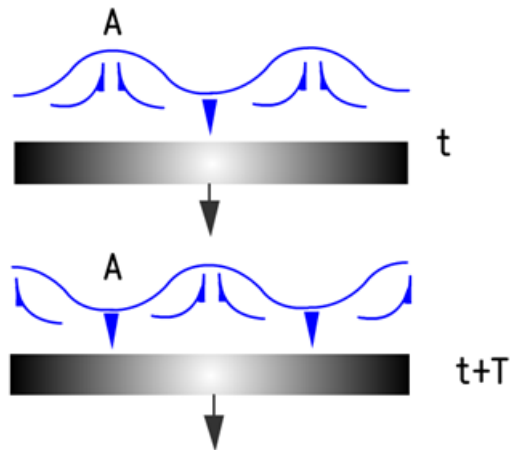


Fig.5-2 Formation of the Faraday wave on a fluid layer under vertical vibration.

When parametric standing waves formed, a steady flow generated by Faraday wave is given in Fig.5-3. The fluid rises at the maxima and goes down at the nodal lines.

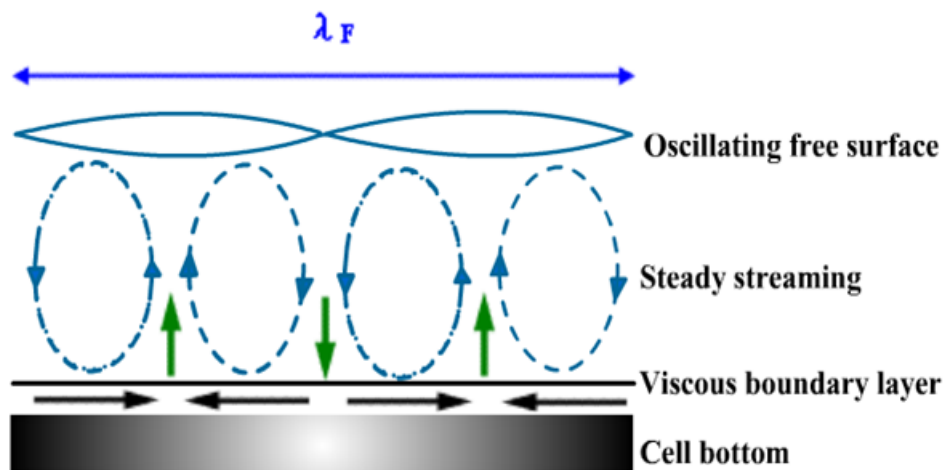


Fig.5-3. Illustration of the steady flow generated by the Faraday waves.

As the forcing amplitude is further increased, the Faraday wave amplitude increases progressively until the waves become chaotic. Ultimately, the waves break and droplets of the similar size are ejected from the wave crests as shown in Fig.5-4.

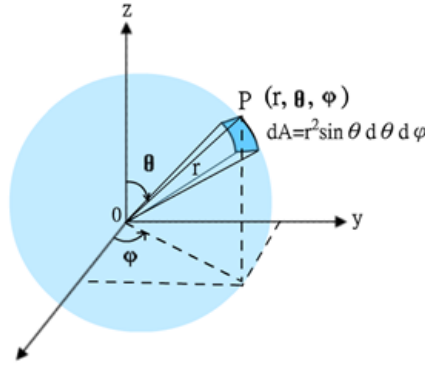


Fig.5-4 Droplets of the similar size were ejected from the wave crests on the breaking Faraday waves.

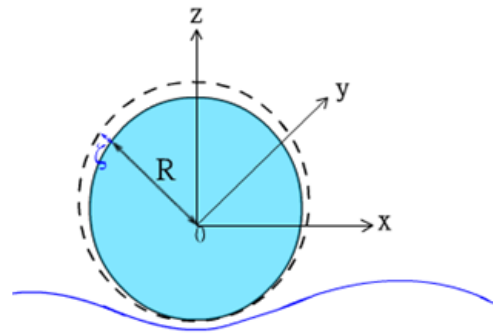
## 2. The proceeding of a droplet on the Faraday waves

We attempted to develop a model in order to further investigate the droplet moving on the liquid surface with the Faraday waves.

On the condition of small amplitudes, the capillary eigenmodes of a droplet with a radius  $R$  can be derived from the Laplace equation applied on a surface slightly different from a sphere. This surface, defined by a function  $r = r(\theta, \varphi)$ , is given by  $r = \zeta + R$ , with  $\zeta$  a small deviation, compared to  $r=R$  for a sphere (Fig. 5-5).



Figs. 5-5 (a) Spherical coordinates



Figs. 5-5 (b) The spherical droplet with small deviation.

According to the continuity of equation and water being incompressible, the velocity potential  $f$  should satisfy the following equation:

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5-2)$$

And  $f$  in the derivation of Eq. (5-2) with respect to time and with  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial r}$  (5-3),

Eq. (5-3) has been derived in [3], with the boundary condition  $\nabla f = 0|_{r=R}$ . Then we seek a particular solution to the problem in the form  $f_{\ell, m} = a_{\ell} r^{\ell} Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) e^{-i\omega_{\ell} t}$ ,

where  $Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)$  are the Legendre spherical harmonics, given by

$Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = N_{\ell, m} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ , where  $\ell \geq 0, m \in [-\ell, \ell]$  with  $\ell$  an integer.

$N_{\ell, m} = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - |m|)!}{4\pi(\ell + |m|)!}}$  is a normalized constant;  $P_{\ell}^m(\cos \theta)$  is the Legendre

polynomials.

The corresponding deviation  $\zeta_{\ell,m}$  for  $f_{\ell,m}$  is

$$\zeta_{\ell,m} = \frac{\ell a_{\ell}}{-i\omega_{\ell}} r^{\ell-1} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) e^{-i\omega_{\ell} t} = A_{\ell,m} r^{\ell-1} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) e^{-i\omega_{\ell} t}, \text{ where } A_{\ell,m} \text{ is the oscillation}$$

amplitude, and  $\omega_{\ell}$  is the oscillating frequency[3].

$$\omega_{\ell} = \left[ \frac{T}{\rho r^3} \ell(\ell-1)(\ell+2) \right]^{1/2} \quad \ell \geq 2 \quad (5-4)$$

The distance between P point on the surface in  $Y_{\ell}^m$  state and the zero point as

$$r_{\ell,m} = R + A_{\ell} r_{\ell,m}^{\ell-1} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) e^{-i\omega_{\ell} t}, \text{ the small area } dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \text{ (as given in Fig.5-5 a),}$$

the x coordinate of P point is  $x_{\ell,m} = r_{\ell,m} \sin \theta \cos \phi$ . The x coordinate of the mass center

of the droplet could be described as:

$$\overline{x_{\ell,m}} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_{\ell,m} \sin \theta \cos \phi r_{\ell,m}^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_{\ell,m}^3 \sin^2 \theta \cos \phi d\theta d\phi \quad (5-5)$$

If  $\overline{x_{\ell,m}} = 0$ , the droplet wouldn't move;  $\overline{x_{\ell,m}}$  changes with time, and the droplet would translate. The following discussion about  $\overline{x_{\ell,m}}$  of different eigenmodes revealed which mode contributes to the droplet translation.

1. Eigenmodes  $Y_{\ell}^0$ , the spherical harmonics function are axisymmetry:

$$\text{The term } \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \sin \phi \Big|_0^{2\pi} = 0, \overline{x_{\ell,m}} = 0 \text{ the droplet doesn't translate.}$$

2. Eigenmodes  $Y_{\ell}^m, m \neq 0$  the spherical harmonics function are non-axisymmetry:

(1)  $Y_1^1$  is a mode of translation.

$$\overline{x_{1,1}} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r_{1,1}^3 \sin \theta \cos \phi \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (R - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} a_{1,1} t \sin \theta e^{i\phi})^3 \sin^2 \theta \cos \phi d\theta d\phi \cong -\sqrt{6\pi} a_{1,1} t R^2$$

$$\text{The velocity of the mass centre for a droplet is } v_{c,x} = \frac{dx_{1,1}}{dt} \cong \sqrt{6\pi} a_{1,1} R^2 \quad (5-6)$$

(2)  $Y_2^1$  is not the mode of translation.

$$\begin{aligned}\overline{x_{2,1}} &\cong \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -3\sqrt{\frac{15}{8\pi}} AR^3 \sin\theta \cos\theta e^{i\varphi} e^{-i\omega_2 t} \sin^2\theta \cos\varphi d\theta d\varphi \\ &= -3\sqrt{\frac{15\pi}{8}} AR^3 e^{-i\omega_2 t} \int_0^\pi \sin^3\theta d(\sin\theta) = 0\end{aligned}$$

Because of  $\overline{x_{2,1}} \cong 0$ , the mass centre of the droplet doesn't move.

## VI. Results and Discussion

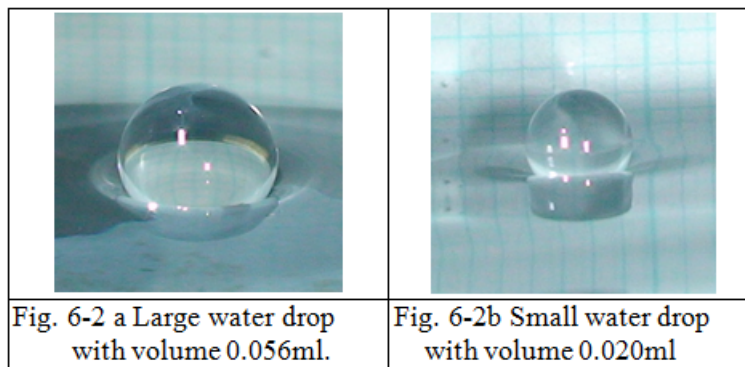
### 1. The mechanism of floating droplets and optimal conditions for noncoalescing.

A colorful interference pattern caused by the air cushion between a droplet and a water surface was shown in Fig. 6-1.



Fig. 6-1 The colorful interference pattern caused by the air cushion

According to the interference picture, the main mechanism of a floating droplet could be referred to the existence of the air cushion trapped between the opposing surfaces of a droplet and a water surface. The coalescence of a drop with the underlying surface is delayed by the air film. When the air film is thin enough, a water droplet coalesces with water surface immediately. During the experimental procedure, water droplets of two sizes were investigated as shown in Fig. 6-2, and the larger drop was more oblate than the smaller one.



The details about the optimal conditions for floating droplets were described in appendix.

### 2. Floating droplets on the wind blowing liquid surface

#### (1) The life time of the floating droplet on the wind blowing liquid surface

Wind wave is a type of surface wave due to the pressure difference induced by the turbulent flow of the air. When the droplets are set on their optimal condition of life time, being released at the height of 1cm and the solution was 0.1 % detergent in water, different wind speeds and different-sized floating droplets were used to discuss the

influence on wind disturbing on the life time of the floating droplets,

The life time of 50 drops of volumes 0.020ml and of 0.056ml under three values of wind speed were measured separately and the statistic results were illustrated in Fig. 6-3.

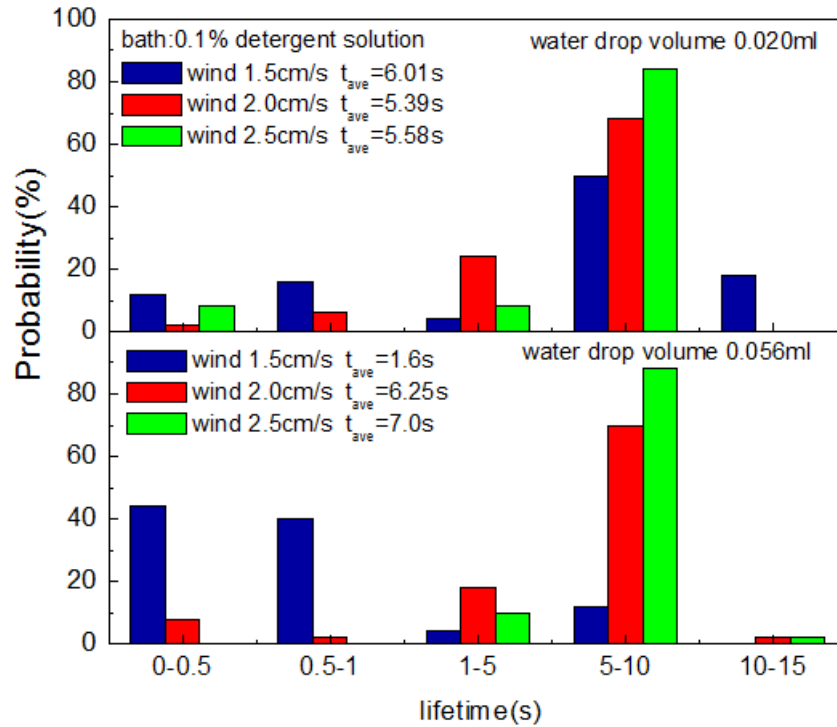


Fig. 6-3 Probability distributions of the life time of drops (volume 0.056ml and 0.020ml) under three different values of wind speed.

Comparing Fig. 6-3 and the statistic results on the quiescent liquid surface (as in Appendix), the life time of the floating droplet could be significantly lengthened by wind. How did wind help the droplets sustain on the surface? According to the picture given in Fig.1-1, the droplet on the wind blowing liquid surface was levitated slightly and the air cushion could be replenished by the wind, leading to a delayed coalescing process.

**(2)The motion of the floating droplets on the wind blowing liquid surface**

The motion of the floating droplet on the wind blowing liquid surface is slower than the

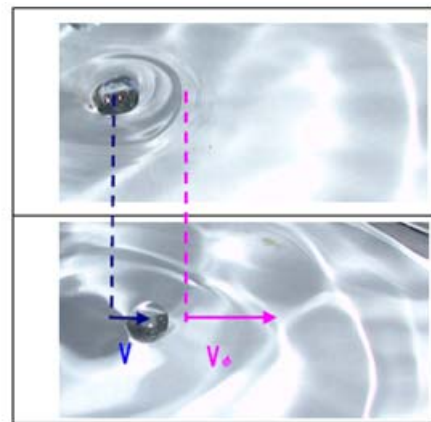
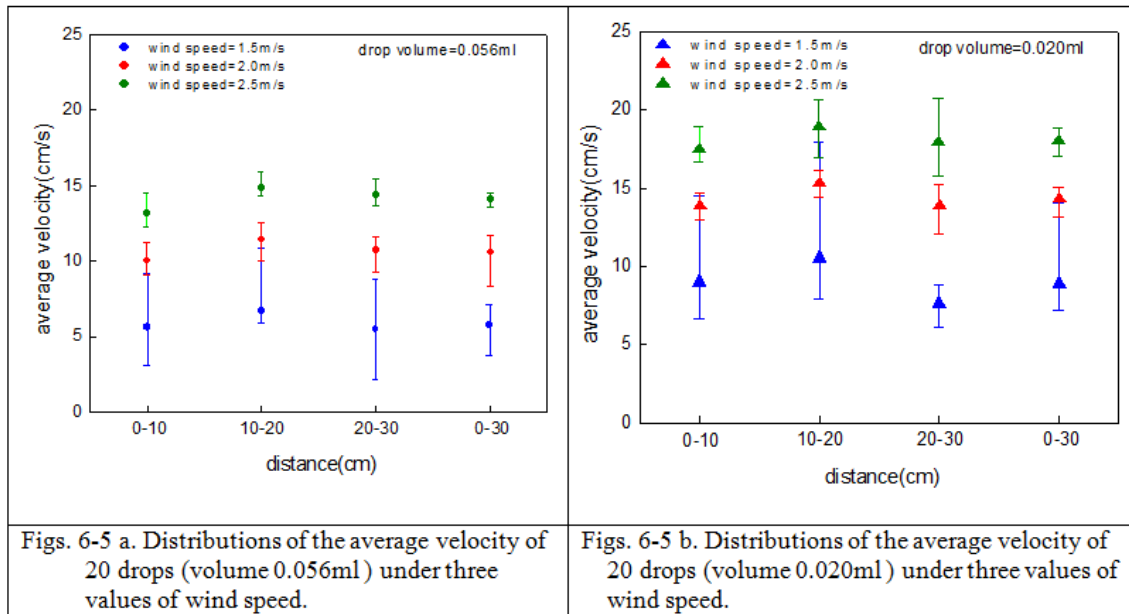


Fig. 6-4 Diagram of the floating droplet on the wind blowing liquid surface moves slower than the phase velocity of the wave.



phase velocity of the wave as given in Fig. 6-4.

The distributions of the average velocity of 20 drops for volumes 0.020ml and 0.056ml under three values of wind speed were measured separately and the statistic distributions were illustrated in Figs. 6-5 a and 6-5 b separately.



From Figs. 6-5 a and 6-5 b, the statements of the motion for the floating droplets could be referred as follows:

- (i) Under each value of wind speed, the average velocity of the smaller droplets is faster than the bigger ones.
- (ii) The distributions of the average velocity of the same-sized droplets are faster and more centralized at a higher wind speed.

Because the wind is a turbulent flow, it's difficult to give it a quantity analysis. Therefore, a qualitative picture showing the pressure variation in the air cushion is given as fig. 6-6.

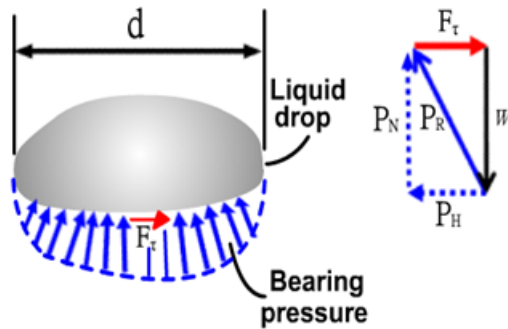


Fig.6-6 Illustration of the floating droplet on the wind blowing liquid surface.

As shown in Fig. 6-6, the weight ( $W$ ) of the drop is balanced by the vertical component ( $P_N$ ) of the resultant force ( $P_R$ ) due to bearing action. The horizontal component ( $P_H$ ) of  $P_R$  is caused by the surrounding air. And the shear force ( $F_r$ ) is exerted by the air motion.

When  $\omega < \omega_c$ , the droplet could be accelerated. When  $\omega = \omega_c$ , the drop would move in a constant speed; when  $\omega > \omega_c$ , the drop could be decelerated and would be coalesced with the liquid bath quickly.

### 3. Floating droplets on the vertically vibrating liquid surface

#### (1) The life time of the floating droplet on the vertically vibrated liquid surface

To understand the behavior of floating droplets on the vertically vibrated liquid surface, the droplets were again measured with the same optimal conditions.

Table 6-1 listed the life time distributions of 10 drops of volume 0.020ml corresponding to different forcing frequencies and accelerations, on the vertically vibrated liquid surface. When the distributions of life time on the vertically vibrated liquid surface and those on the quiescent liquid surface were compared, the coalescence could be delayed significantly when the bath was vertically vibrated. The droplet was vibrated periodically on the bath, and the air layer between the droplet and the bath was replenished at each vibration.

Table 6-1 Distributions of the life time of 10 drops (volume 0.020ml ) under different frequencies and accelerations on the vertically vibrated liquid surface.

Frequency(Hz)	$\Gamma$ (reduced accelerations)		Life time(s)	
			Data distribution of 10 drops (s)	Average(s)
20	$\Gamma_1$	0.21	0.075-0.325	0.18
	$\Gamma_2$	0.42	0.083-0.180	0.11
	$\Gamma_3$	0.61	0.92-5.10	0.97
30	$\Gamma_1$	0.22	0.075-3.22	0.15
	$\Gamma_2$	0.45	0.062-6.25	1.17
	$\Gamma_3$	0.62	0.067-4.37	1.87
40	$\Gamma_1$	0.26	0.170-8.92	1.69
	$\Gamma_2$	0.41	0.029-9.33	2.21
	$\Gamma_3$	0.63	0.062-1.62	6.00
50	$\Gamma_1$	0.25	2.21-20.61	8.54
	$\Gamma_2$	0.41	0.52-18.80	3.46
	$\Gamma_3$	0.58	0.87-21.36	9.12
60	$\Gamma_1$	0.24	0.03-0.45	0.21
	$\Gamma_2$	0.41	0.23-2.11	0.78
	$\Gamma_3$	0.59	0.76-3.53	1.61

According to Table 6-1, the life time of the droplets seemed to have no correlation with the forcing frequency and the acceleration. When the drop touched crests of the wave, it would repel the air, leading to the reduction of the life time; on the contrary, roughs of the wave would help the droplet sustain on the surface. The touching point of the droplet on the wave was random, so the life time of droplets didn't correlate with the forcing frequency and the acceleration.

**(2)The motion of the floating droplets on the vertically vibrated liquid surface**

During the experiments, four types of motion were observed as follows.

(i) Oscillation on the surface wave

When the amplitude of the wave is small, the droplet would oscillate vertically on the liquid surface till it coalescing with the liquid bath as shown in fig.6-6.

(ii) Trap on the Faraday waves

As the vibrating amplitude increased, the Faraday wave formed on the

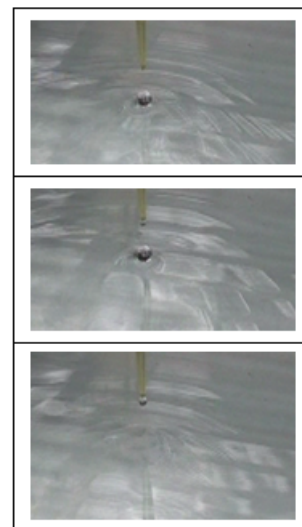


Fig.6-6 Droplet oscillates on the surface till coalescing with the water bath under the small amplitude of the wave

liquid surface. When the kinematics energy of the droplet on the Faraday wave couldn't overcome the potential barrier on the water surface, the droplet would move back and forth in a harmonic potential well, with a period of 1/10s oscillation, as in Fig.6-7.

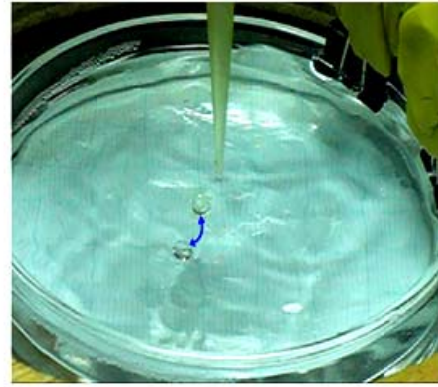


Fig.6-7 Droplet moving back and forth on the Faraday waves.

(iii) Traveling on the Faraday waves

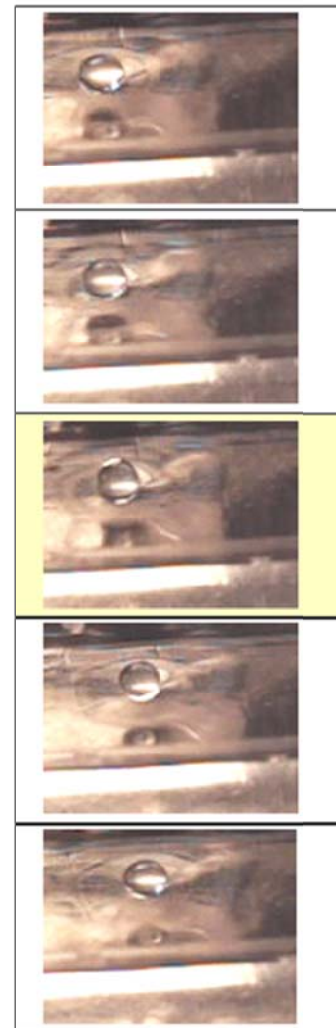
Amazingly, when the amplitude of the vibration was strong enough to form the Faraday waves on the liquid surface, a free falling droplet started to move horizontally at a near constant speed along the fluid surface. The spontaneous horizontal displacement resulted from the interaction of the droplet and the surface waves.

Steady traveling of the droplet (0.020ml) on the surface of a rectangular container (5.5cm\*1.9cm\*0.5cm), with a liquid depth of 4mm, was observed at forcing frequency 30 Hz and the Faraday waves formed on the liquid surface. Fig. 6-8 displays the snapshots, captured at 240 fps, of the droplet moving linearly on the Faraday waves.

From Fig. 6-8, the deformation of the droplet was due to the oscillation under natural frequency. According to the equation (5-4),

$$\omega_l = \left[ \frac{T}{\rho r^3} l(l-1)(l+2) \right]^{1/2} \quad l \geq 2, \text{ the natural}$$

frequency in  $l = 2$  mode is 59.7 Hz with surface tension  $T=71.5\text{mN/m}$ ,  $r$  (radius) of 1.6mm and



Figs. 6-8 Sequential images of the droplet traveling along the liquid surface with deformation on the Faraday wave.

density  $\rho=1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  for the water droplet. The calculation result (59.7Hz) of the natural frequency when  $\ell = 2$  is very close to the data (60Hz) of this study.

Traveling of the droplet was found to move obviously at the instant the droplet was slant and prolate in shape, as seen in the yellow frame of Fig. 6-8.

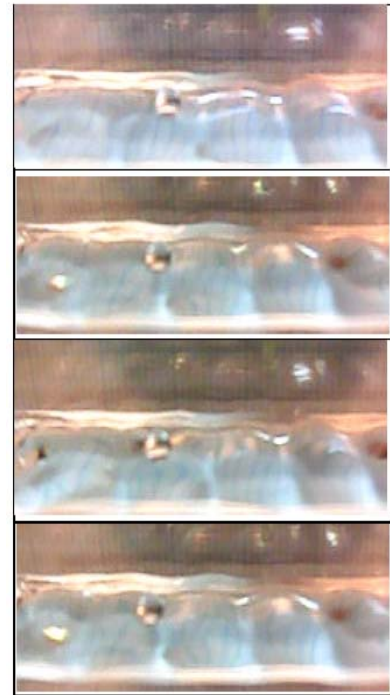
Interestingly, the experimental findings can be compared to those of the previous studies [4-5] on an oil drop bouncing on an oil surface. The bouncing oil droplet [4-5] can become coupled to the surface wave it generates and thus becomes a "walker" moving at constant velocity on the interface. On the other hand, the water droplet deforms in our experiment at low viscosity, while at high viscosity, oil drop's deformation could be neglected in the studies [4-5].

Another study about a bouncing oil drop "roller" with the oscillating mode was investigated by Dorbolo et al. [6]. Take them as an example. The traveling water drop in this experiment was called "mover".

In another experiment, the same-sized droplet (0.020ml) was put on a different-sized rectangular container (7.5cm\*2.5cm\*3.5cm). Another steady traveling mode was observed at a forcing frequency 40 Hz on the stripe Faraday waves illustrated in Fig.6-9.

During the procedure we measured the magnitude of the vibrating acceleration with a calibrated acceleration meter. The critical threshold values of acceleration for a droplet to start traveling on the surface waves ( $a_{\max}^c$ ) and the liquid surface began to form the Faraday waves ( $a_{\max}^F$ ) vary with the forcing frequency and  $a_{\max}^c$  is always larger than  $a_{\max}^F$  at each frequency. The threshold value of the

reduced acceleration for a traveling mode is  $\Gamma_c$ , where  $\Gamma_c = a_{\max}^c / g$ . The sustained traveling motion is achieved when the reduced forcing acceleration is higher than a



Figs. 6-9 Sequential images of a droplet moving on the stripe Faraday

threshold value  $\Gamma_c$ . The correlation between  $\Gamma_c$  and the forcing frequency is shown in Fig.6-10. This result is qualitatively consistent with T. Gilet's et al. work [7] (inset diagram in Fig.6-10) except the droplet of traveling state instead of bouncing state.

Most of the  $\Gamma_c$  values in Fig.6-10 are less than 1 because of the low viscosity of the water drop. In the range of 30-60 Hz,  $\Gamma_c$  decreases smoothly with raising frequency and reaches a minimum value at 60Hz.

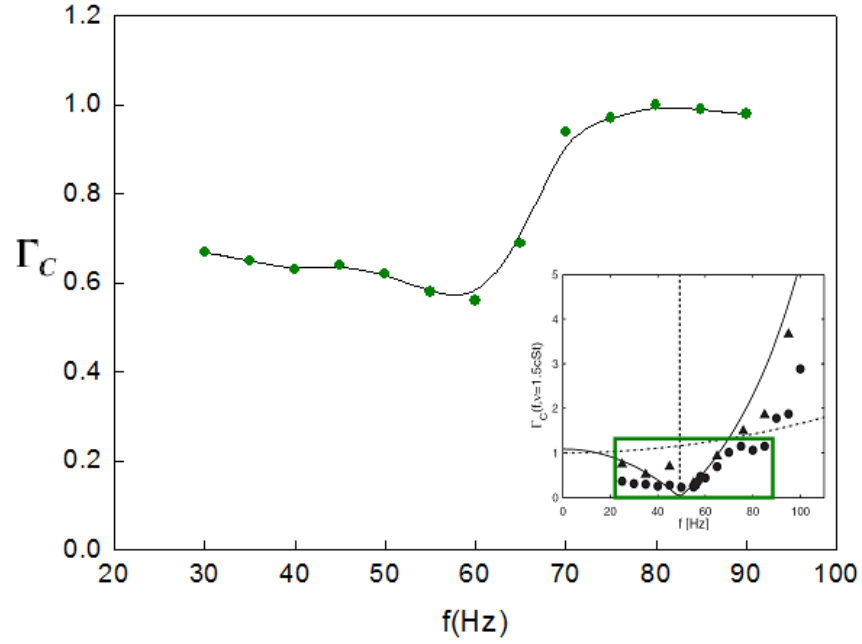


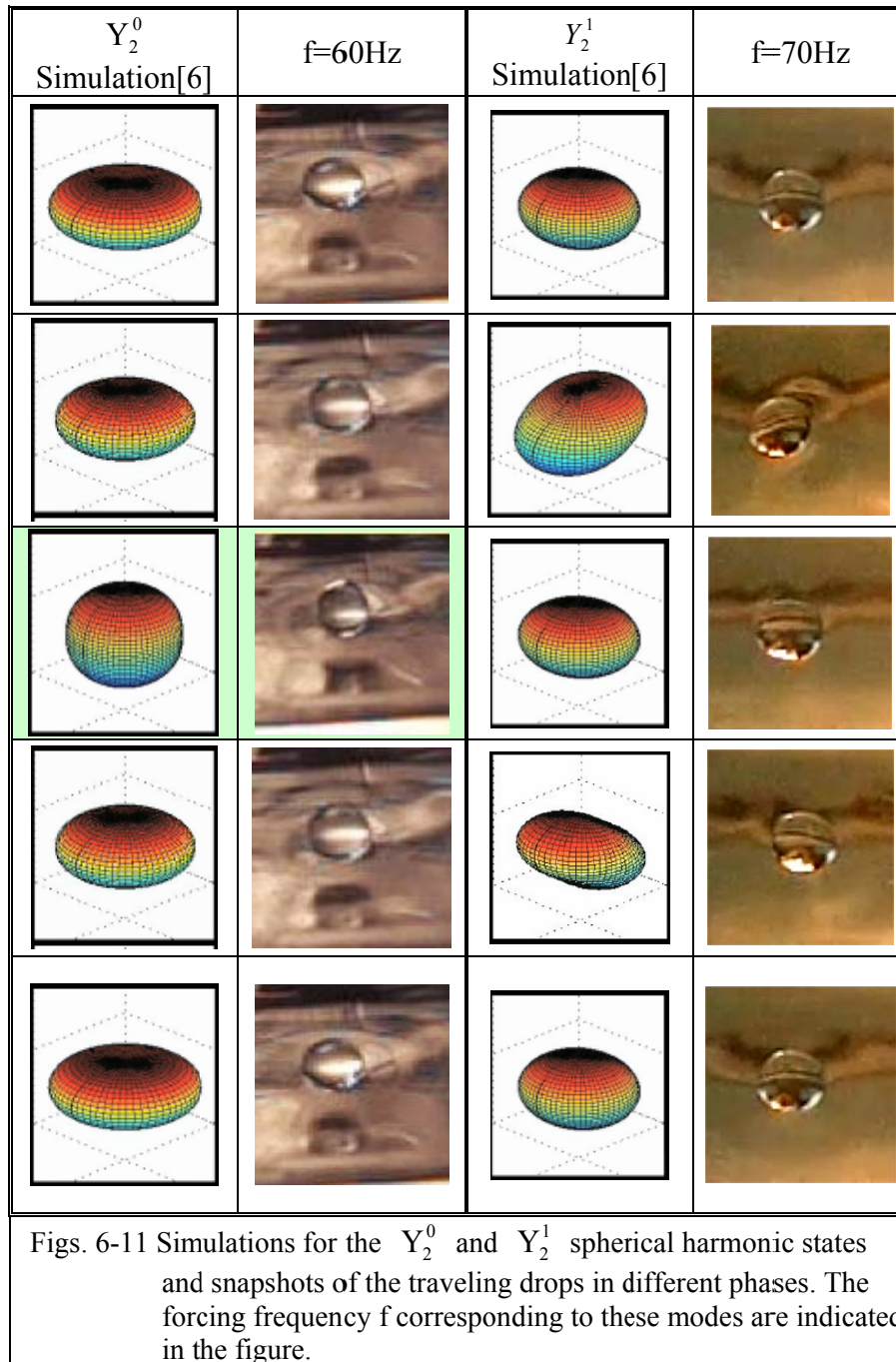
Fig.6-10 Evolution of the threshold value of the reduced acceleration  $\Gamma_c$  for traveling with respect to the forcing frequency.

The forced equation of the droplet on the sinusoidal vertically vibrated liquid surface is:

$$\sum_{\ell,m} \left( \frac{d^2 \zeta_{\ell,m}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\zeta_{\ell,m}}{dt} + \omega_{\ell}^2 \zeta_{\ell,m} \right) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (6-1)$$

where  $\zeta_{\ell,m}$  is the deformation in the  $Y_{\ell}^m$  state;  $\beta$  is the damping coefficient;  $m$  is mass of the drop;  $\omega$  is the forcing frequency. When  $\beta$  is small and  $\omega$  is close to the natural frequency  $\omega_{\ell}$ , a resonance phenomenon of the droplet–air film system occurs. The minima in  $\Gamma_c$  curves corresponds to a resonance phenomenon of the traveling droplet which is analogous to the results of previous study [7].





The first and third columns in Fig. 6-11 represent simulations taken from different phases of the oscillation for the modes  $Y_2^0$  and  $Y_2^1$  separately. And the second and forth columns in Fig. 6-11 represent snapshots taken from different phases of the oscillation for a traveling droplet at forcing frequency 60Hz and 70Hz separately..

The snapshots of the traveling drop are very similar to the simulations in the  $Y_2^0$  state except the green frame in Fig. 6-11. The non-axisymmetry shape of the photo in



green frame means the mixing state of modes  $Y_2^0$  and  $Y_1^1$  for the traveling drop. According to the previous discussion, the  $Y_1^1$  mode was the translational mode and the  $Y_2^0$  mode was the oscillating mode without translating. According to Fig. 6-11, it could be distinguished that the amplitude of the  $Y_1^1$  state in the second column is larger than that in the forth column.

The jump in Fig.6-10 from 60Hz to 70Hz means a state transition from the mode  $Y_2^0$  to  $Y_2^1$  which could be explained by the following analysis. According to the observation, if  $\lambda_F/d$  is much greater than 1, the drop prefers to be excited as the  $Y_2^0$  mode, but as  $\lambda_F/d$  approaching to 1, the  $Y_2^0$  state would be replaced by  $Y_2^1$  mode. Where d is a diameter of the drop and  $\lambda_F$  is the Faraday wave length. The explanation for the  $Y_2^0$  state to be replaced by the mode  $Y_2^1$  as  $\lambda_F/d$  approaching to 1 could be stated as below. When the diameter of the drop in the  $Y_2^0$  state is close to  $\lambda_F$ , it's difficult for the drop to form the deformation along an equatorial direction. It leads to the mode  $Y_2^0$  be suppressed and the mode  $Y_2^1$  be excited.

Comparing the snapshots of the traveling drops at 60Hz with those at 70Hz in Fig. 6-11, the traveling drop at 70 Hz with the mode  $Y_2^1$  corresponds to a more violent oscillation than that at 60Hz with the mode  $Y_2^0$ . More energy is needed to excite the droplet of the mode  $Y_2^1$  than of the mode  $Y_2^0$ , which leads the jump from 60Hz to 70Hz in Fig.6-10.

A larger surface area of the droplet in oscillation corresponds to a higher surface energy. So the surface areas for the traveling drop of the modes  $Y_2^0$  and  $Y_2^1$  have to be examined. The surface areas  $S_2^0$  of mode  $Y_2^0$  and  $S_2^1$  of mode  $Y_2^1$  for the traveling droplet could be derived from the previous theory as below.

$$\begin{aligned} S_2^0 &\cong 4\pi R^2 + 2\pi A_0^2 R^2 e^{-i2\omega_2 t} \int_0^\pi \frac{5}{16\pi} (3\cos^2\theta - 1)^2 \sin\theta d\theta \\ &= 4\pi R^2 + A_0^2 R^2 e^{-i2\omega_2 t} \quad (6-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2^1 &\cong 4\pi R^2 + 2\pi A_1^2 R^2 e^{-i2\omega_2 t} \int_0^\pi \frac{15}{8\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \\
&= 4\pi R^2 + A_1^2 R^2 e^{-i2\omega_2 t} \quad (6-2)
\end{aligned}$$

where R is the radius of the sphere;  $A_1$  and  $A_0$  are the amplitudes corresponding to the modes  $Y_2^0$  and  $Y_2^1$  separately and  $\omega_2$  is the Rayleigh frequency[3] when  $\ell = 2$ .

According to the previous discussion,  $A_1 > A_0$ , leads a jump from 60Hz to 70Hz in Fig.6-10 as the mode  $Y_2^1$  excited.

The average velocity of 5 drops (0.020ml) under three values of  $\Gamma$  ( $\Gamma_c < \Gamma$ ) and different forcing frequency on the vertically vibrated liquid surface were measured and were listed in Table 6-2. Table 6-2 shows the droplet moving faster under higher frequency and larger acceleration in the range of 30-60Hz. According to the previous equation (5-6), when the drop was excited with the mode  $Y_1^1$  on vertically vibrated liquid surface, the drop would move in a constant speed  $v_{c,x}$  and  $v_{c,x} \propto a_{1,1}$ . The liquid surface is vertically vibrated at higher forcing frequency and larger acceleration which can trigger on larger amplitude of the translational mode  $Y_1^1$  and causes the droplet move faster.

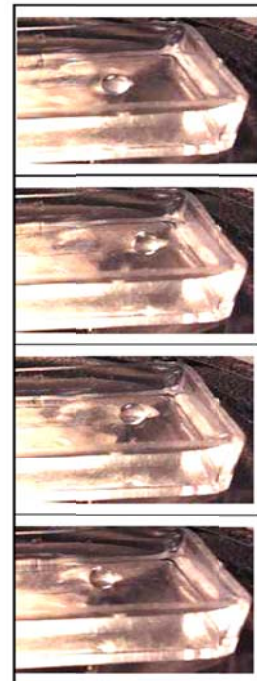
The forced motion of the bath provides some energy to the droplet, a part of which helps the droplet to translate while the other part increases internal motions inside the droplet, which are eventually dissipated by viscosity. The proportion of energy supplied to the translational/internal motion varies with the forcing frequency.

Table 6-2 The average velocity of 5 drops (0.020ml) under three values of  $\Gamma$  ( $\Gamma > \Gamma_c$ ) at different forcing frequency on the vertically vibrated liquid surface.

f(Hz)	$\Gamma$		Average velocity (mm/s)					
			1	2	3	4	5	Average value of five drops
30	$\Gamma_1$	<b>0.57</b>	13.4	15.1	10.5	12.3	11.0	<b>12.5</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.76</b>	23.6	20.8	18.2	19.6	16.9	<b>19.8</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.82</b>	43.0	40.5	36.0	41.2	42.8	<b>40.7</b>
40	$\Gamma_1$	<b>0.57</b>	14.6	21.2	20.8	19.6	16.2	<b>18.5</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.77</b>	26.1	30.3	32.0	29.6	28.9	<b>29.4</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.86</b>	44.5	44.2	38.6	35.2	44.5	<b>41.4</b>
50	$\Gamma_1$	<b>0.60</b>	31.3	22.4	25.8	28.0	22.1	<b>25.9</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.78</b>	50.0	30.4	55.2	33.8	46.7	<b>43.2</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.85</b>	53.3	52.1	58.2	51.0	57.1	<b>54.3</b>
60	$\Gamma_1$	<b>0.58</b>	26.9	24.0	25.5	34.4	26.7	<b>27.5</b>
	$\Gamma_2$	<b>0.79</b>	42.3	44.4	42.3	55.9	47.9	<b>46.6</b>
	$\Gamma_3$	<b>0.87</b>	62.7	50.0	65.1	49.2	61.5	<b>57.7</b>
70	$\Gamma_1$	<b>0.94</b>	16.8	19.2	18.7	21.5	19.6	<b>19.2</b>
	$\Gamma_2$	<b>1.04</b>	23.6	20.5	19.3	20.2	19.0	<b>20.5</b>
	$\Gamma_3$	<b>1.17</b>	25.9	23.1	21.8	26.7	27.8	<b>25.1</b>
80	$\Gamma_1$	<b>1.00</b>	22.0	21.1	18.7	26.2	19.0	<b>21.4</b>
	$\Gamma_2$	<b>1.12</b>	14.8	16.8	25.2	36.9	15.9	<b>21.9</b>
	$\Gamma_3$	<b>1.26</b>	31.3	43.5	31.9	40.8	30.3	<b>35.6</b>
90	$\Gamma_1$	<b>0.98</b>	22.6	21.8	20.0	26.2	19.3	<b>22.0</b>
	$\Gamma_2$	<b>1.28</b>	35.6	29.8	31.9	37.8	30.3	<b>33.1</b>
	$\Gamma_3$	<b>1.39</b>	41.9	37.5	36.8	43.2	45.2	<b>40.9</b>

When the frequency was in the range of 70-90Hz as listed in Table 6-2, the Faraday wave length was short and close to the diameter of the droplet. The droplet is easier to be bound by the Faraday wave or to be slowed down in the range of 70-90Hz than that in the range of 50-60Hz. The mode  $Y_2^1$  excited in the range of 70-90 Hz enhances the oscillation and decreases the translation of the droplet. Mode  $Y_2^1$  ( $m \neq 0$ ) is found to decrease the translating ability of the droplet which is similar to Dorbolo's et al. work [6].

From above discussion, we found the theoretical model using the spherical harmonics  $Y_l^m$  as a part of the solution of the Laplace equation, in good agreement with the experimental results for the droplets proceeding on the vertically vibrated liquid surface. So



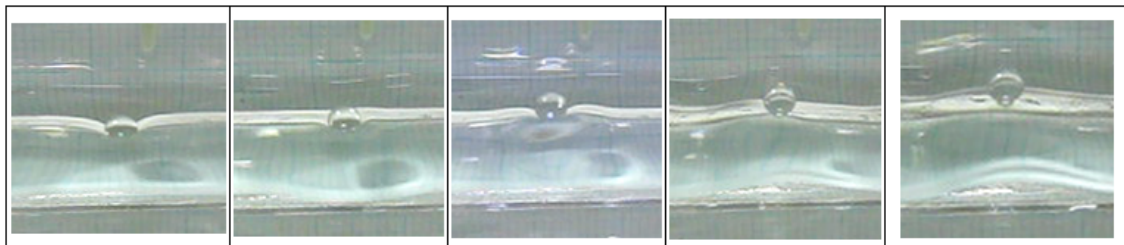
Figs. 6-12 Pictures of the the traveling droplet reflected by the wave field.

the motion of the drop on the vertically vibrated liquid surface could be decomposed of the excitation on the spherical harmonics basis for further analysis.

Sometimes the traveling droplet is reflected by the wave field as shown in Figs. 6-12 when it proceeds to an edge of the container without touching the edge then left away. The time interval between each frame is 1/20 second.

#### (iv) Bouncing on the surface wave

The water drop (0.02ml) bounces vertically on the Faraday waves without translation as shown in Figs. 6-13. The time interval between each frame is 1/120 second.



Figs. 6-13 The water drop bounced on the Faraday waves with deformation at forcing frequency 30Hz.

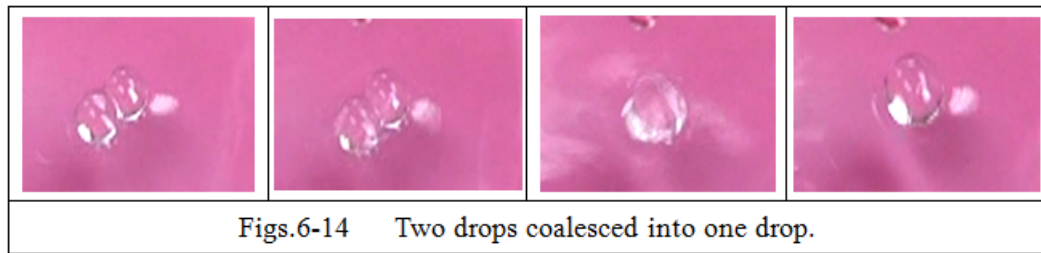
The bouncing ability of droplets is due to the cooperation of (i) the droplet deformation that stores potential energy, and (ii) the vertical force resulting from the squeezing of the intervening air layer between the droplet and the bath. The water drop with large volume is difficult to bounce on the surface wave. In this experiment, we couldn't find more details about the bouncing phenomena of the water drop on the surface wave as the previous works [4-7]. It's worth finding an appropriate way to produce tiny water droplet in order to study the bouncing water droplet on the surface wave in the future.

### **(3) The interactions of the floating droplets on the vertically vibrated liquid surface**

There are four types of interactions among floating droplets: coalescence, bouncing, touching each other and forming orbital motion and repulsion. The corresponding interactions were described as following.

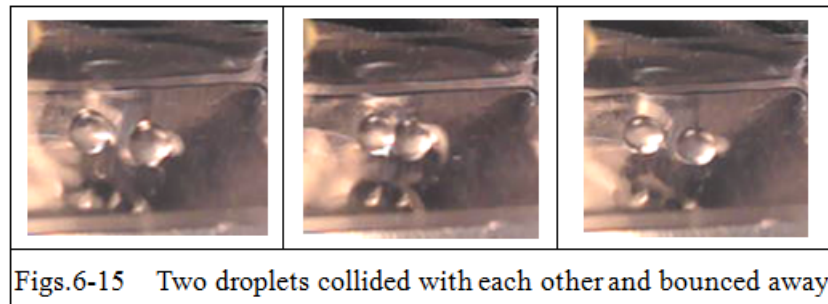
#### (i) Coalescence

Coalescence is a common interaction between two droplets owing to the attraction of the van der Waals forces as illustrated in Figs.6-14.



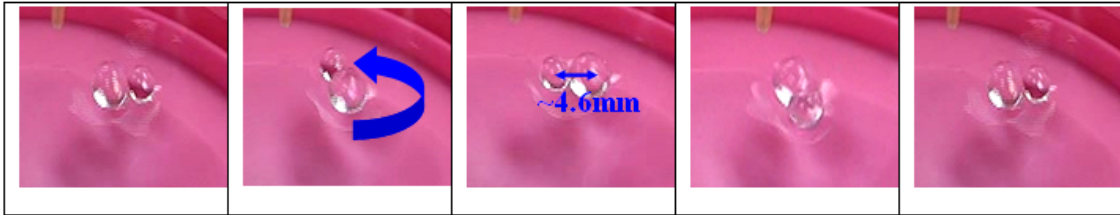
(ii) Bouncing

When two drops collides with each other, they would bounce away as an impact between two billiard balls.

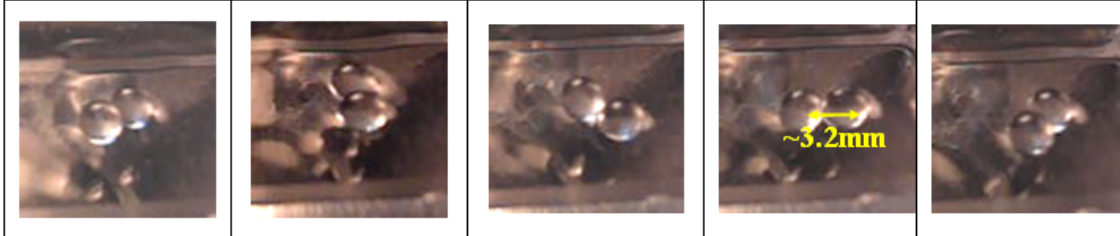


(iii) Orbital motion

When two drops come close together, they would orbit around each other as given in Figs. 6-16. The period of the orbital motion is longer as the distance between the centers of the droplets extends.



Figs. 6-16 a. Two drops orbit with each other of different size.



Figs. 6-16 b. Two drops orbit with each other of the same size.

The centripetal force of droplet A illustrated in Fig. 6-17 is the resultant force including the total effect of the surface tension on the liquid surface and the touching force between droplet A and droplet B.

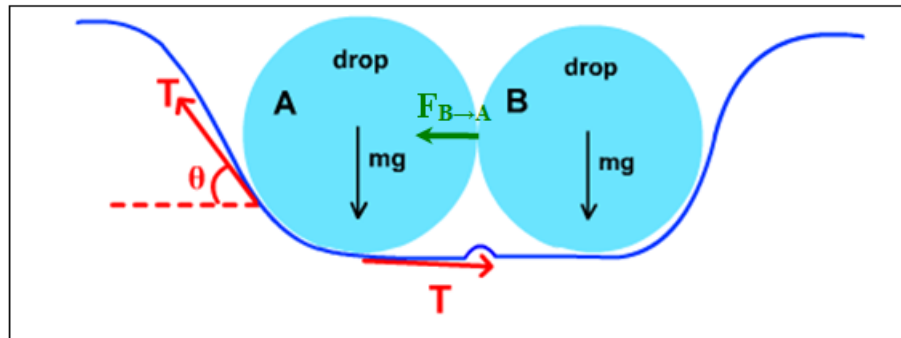


Fig.6-17 The force diagram of two droplets orbit with each other

The spinning motion for a cluster of four drops was also observed as shown in fig.6-18.

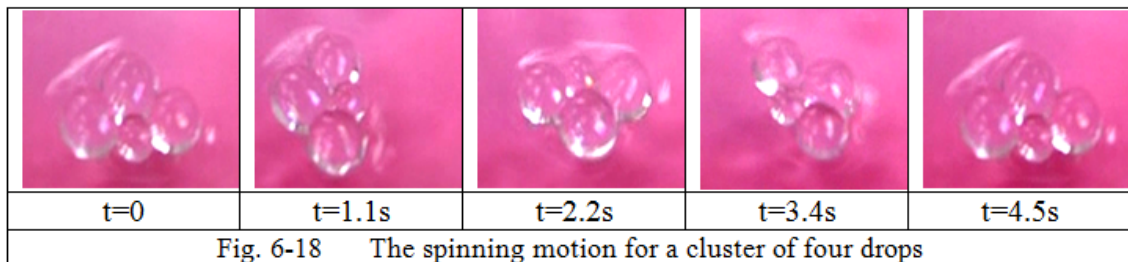
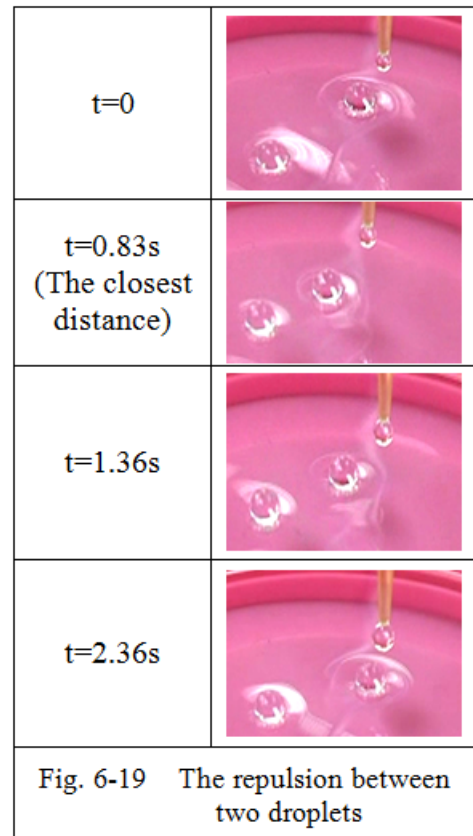


Fig. 6-18 The spinning motion for a cluster of four drops

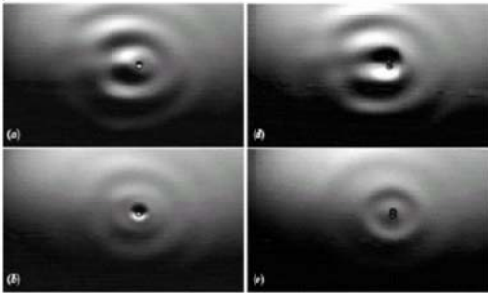
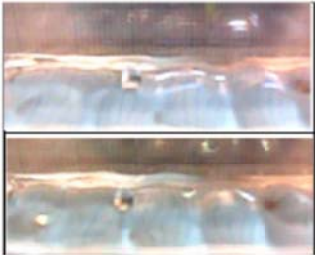
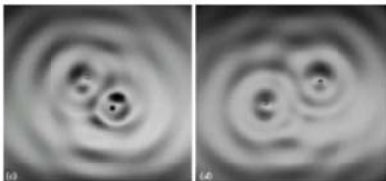

(iv)Repulsion

The repulsive phenomenon of two drops is not common. Two drops come close to each other without touching each other then left away as given in Figs. 6-19. The orbital and repulsive interactions between two drops are so incredible. According the previous studying about ‘walker’ [4-5], the author demonstrated that walkers can behave as billiard balls, undergo scattering collisions or form circular orbits. The mechanism of the orbital or repulsive motion for ‘mover’ should be analogous to the walkers.

Finally we made comparisons between ‘mover’ and ‘walker’ as follows.





Comparison	Walker The oil droplet in the studies[4-5]	Mover The water droplet in this experiment
Similarities	<p>1. When the forcing amplitude is increased just below the Faraday wave threshold, the bouncing oil drop becomes a 'walker' propagating at a constant velocity on the interface.</p> 	<p>When the forcing amplitude is over the Faraday wave threshold, the oscillating water drop becomes a 'mover' traveling at a near constant velocity on the liquid surface.</p> 
	<p>2. When two walkers approach each other, they formed orbital or repulsive motion.</p>	<p>When two movers approach each other on the vibrating surface, they formed orbital or repulsive motion as well.</p>
	<p>3. Small Clusters of bouncing oil droplets can form spinning motion.</p>	<p>Small Clusters of water droplets can form spinning motion as well.</p>
	<p>4. The period of the orbital motion is longer as the orbital radius extends.</p>	<p>The period of the orbital motion is longer as the distance of the movers widens.</p>
Differences	<p>1. The walker's deformation can be neglected because of the high viscosity and small volume.</p>	<p>The mover forms significant deformation on the surface wave because of the low viscosity</p>
	<p>2. Two walkers can have either the same or opposite bouncing phases in orbital motion with distance apart.</p> 	<p>Two droplets form orbital motion in the same oscillating phase without distance apart.</p> 
	<p>3. Observed the diffraction, interference and orbital quantization phenomena.</p>	<p>Not Observed the diffraction, interference and orbital quantization phenomena.</p>

## **VII. Conclusion and Applications**

### **1. Life time influenced by the mechanism and variables of floating droplets on quiescent water surface**

- (1). The main mechanism of a floating droplet could be referred to the existence of the air cushion trapped between the opposing surfaces of a droplet and a water surface.
- (2). Better life time conditions were concluded by statistical data of the experiments with different variables.

### **2. Floating droplets influenced by the wind-blown water surface**

- (1). The life time of the floating droplet could be significantly lengthened by wind because the air cushion could be replenished by the wind, leading to a delayed coalescing process.
- (2). The smaller droplets moved faster than the bigger ones regardless of the wind speed.
- (3). Distributions of the same-sized droplets moving speed were found to be centralized under stronger wind, otherwise under less strong wind.

### **3. Physical phenomena related to the vertically vibrating liquid surface and the floating droplets**

- (1). The life time of floating droplets on the vibrating surface was longer than those on the static surface.
- (2). The floating droplets randomly dropped on the wave crest or the wave trough. Little rule change relation was found between the life time and the vibrating frequency or the surface vibrating acceleration.
- (3). Motion of the floating droplets on the vibrating water surface included oscillation, back and forth translation, proceeding and bouncing.
- (4). The droplets would proceed on the water surface as the vibrating acceleration exceeded the threshold value yet did not turn the surface into chaos. When the

vibrating frequency of the water surface equaled to the natural oscillating frequency of the droplets, the threshold value was minimum.

(5). When proceeding on the vibrating water surface with different forcing frequency, the droplets presented different modes of oscillation. Mode

$Y_2^1 (m \neq 0)$  is found to decrease the translating ability of the droplet.

(6). Coalescence, bouncing off, orbital motion and repulsion were observed when two droplets approached each other on the vibrating liquid surface.

These surprising findings in the experiment could lead to improve applications in diverse fields including micro-fluid, chemistry, biology and pharmacy manufacture. The wind blowing (suitable for large scale as ocean) and vertically vibrating liquid surface (suitable for small scale as laboratory) can deliver droplets on the liquid surface. The study in this experiment could give some directions to manipulate the droplets' motion on the liquid surface.

## Acknowledgement

We would like to thank Prof. Chu, National Chung Cheng University.

## References

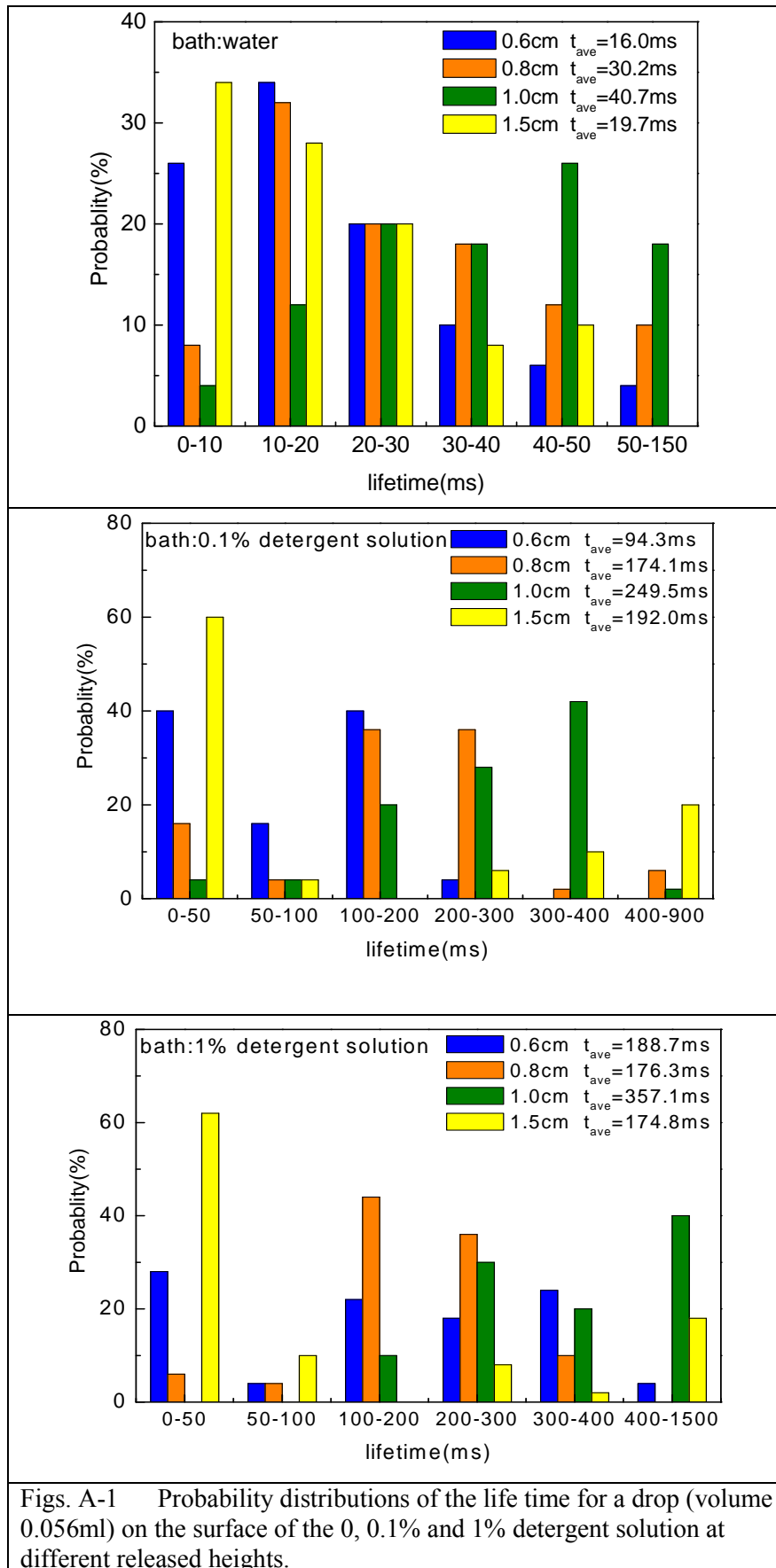
- [1] S. Douady, J. Fluid Mech. **221**, 383 (1990).
- [2] T. B. Benjamin and F. Ursell, Proc. R. Soc. Lond., A **255**, 505 (1954).
- [3] L. Rayleigh, Proc. R. Soc. London **29**, 71 (1879).
- [4] Y. Couder, S. Protière, E. Fort, and A. Boudaoud, Nature (London) **437**, 208 (2005).
- [5] S. Protière, A. Boudaoud and Y. Couder, J. Fluid Mech. **554**, 85 (2006).
- [6] S. Dorbolo, D. Terwagne, N. Vandewalle and T. Gilet, New J. of Phys. **10**, 113021 (2008).
- [7] T. Gilet, D. Terwagne, N. Vandewalle, and S. Dorbolo Phys. Rev. Lett. **100**, 167802 (2008).

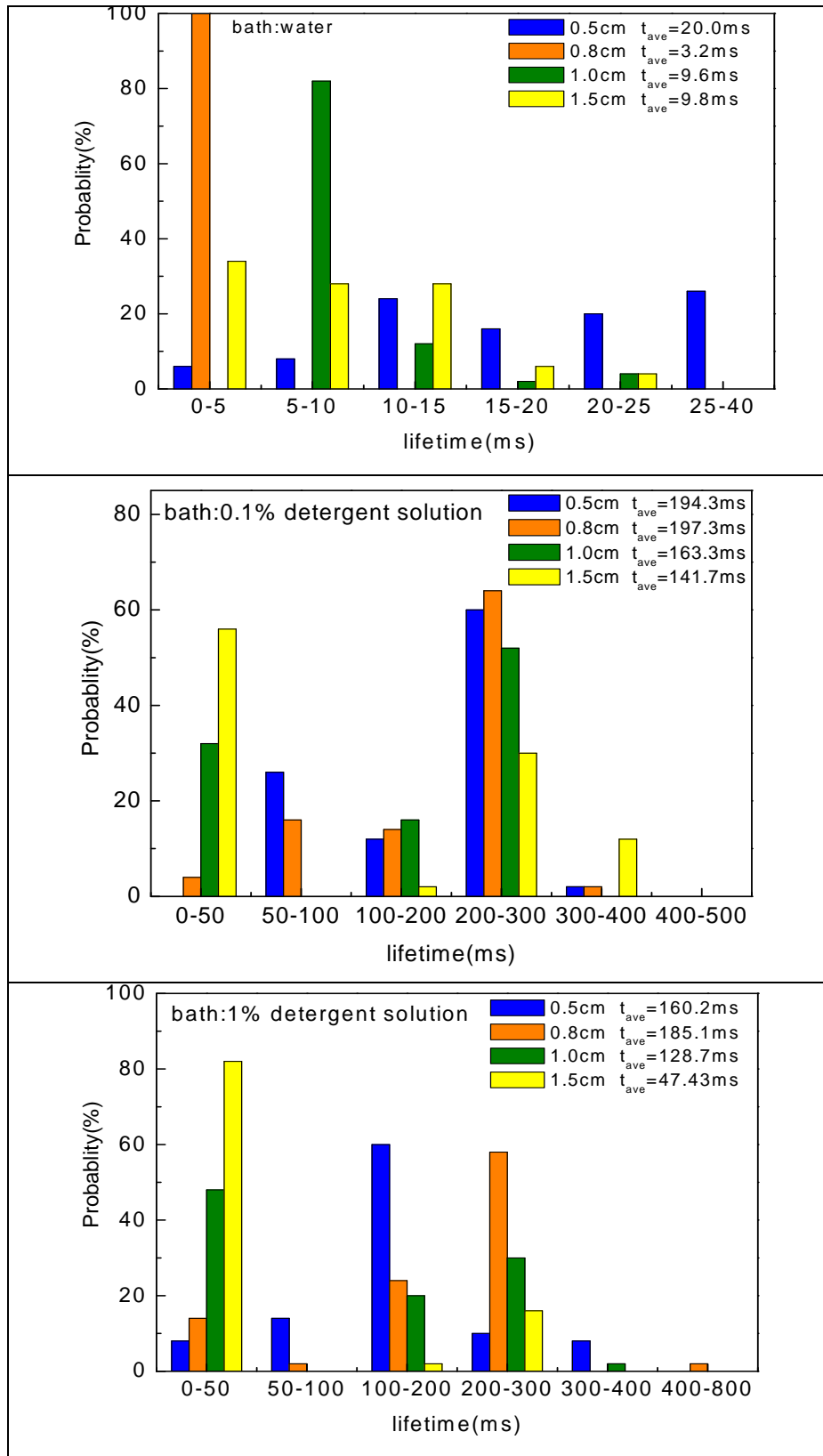
## **Appendix:**

### **Discussions of floating droplets' life span under different conditions**

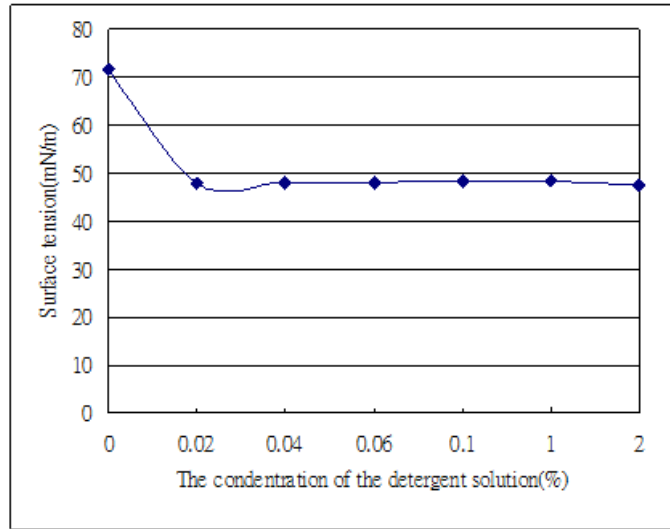
In the experiment procedure, the temperature was controlled in  $29 \pm 1.0^{\circ}\text{C}$  approximately. The life time of the floating droplet with different variables as the height it being released from, the size of the droplet and different concentrations of detergent solution were measured respectively. According the statistic results, we tried to find out the optimal conditions for water drops sustaining on the quiescent liquid surface.

According to the results from figures A-1 and A-2, a large drop sustained longer than a small one on the quiescent liquid surface under the same condition because of the sufficient air cushion between the large drop and the liquid surface. The life time of the drop could be prolonged on the surface with detergent solution. The existence of the surfactant would decrease the surface tension and make the liquid surface more elastic as given in Fig.A-3. The optimal conditions for water drops sustaining on the quiescent liquid surface were released at a height of 1cm, the bath with 0.1% detergent solution from the results of figures A-1 and A-2.





Figs. A-2 Probability distributions of the life time for a drop (volume 0.056ml) on the surface of the 0, 0.1% and 1% detergent solution at different released heights.



Figs. A-3 The diagram of surface tension varies with the concentrations of the detergent solution



## 評語

使用完整的理論模型，探討水滴在各種不同條件下，漂浮在液面的情形，所獲得結果，可佐證文獻中使用較高黏滯係數之液體所獲得的結果。實驗有一定難度，過程頗具實驗精神。未來可再思考，可如何超越文獻中已發現或探討的現象或原理。