2012 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

編號：010047

作品名稱

多邊形的內接母子相似作圖與相關問題的研究

得獎獎項

大會獎：四等獎

作者姓名：王鈺涵

就讀學校：國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師：李淑芬、陳創義

關鍵字：相似形、旋轉中心、尺規作圖

作者簡介

我是王鈺涵。就讀國立台灣師範大學附屬高級中學二年級。

興趣是閱讀、打籃球和數學研究。

不知不覺中這已經是第三次報名參加國際科展的比賽了，就連科教館主辦的青少年科學人才培育計畫也是連續參加了兩屆，在這些充滿了數學與內接相似圖形的日子中，不知不覺的將自己的研究發展到現在的地步，有許多發現；亦有看到更多值得探討的地方，希望能在未來繼續努力了！

多邊形的內接母子相似作圖與相關問題的研究

摘要

文獻上，要尋找任意多邊形的內接母子相似圖形，尚未有好的辦法可解決此問題，本研究，藉由多邊形的旋轉與伸縮觀念產生相似形的定理，作出多邊形內接母子相似圖形，並找到相關性質。

利用相關性質，我們得到：

(1) 一般化的「內接母子相似作圖」法：可輕易過邊上一點、或過形內一點作出內接母子相似圖形。並找出最小內接母子相似及過形內一點三角形內接相似圖形的最多數量。

(2) 若 n 邊形存在內接母子相似圖形，則此 n 邊形必有「**旋心**」。反之，亦成立。

(3) 特殊四邊形(長方形、菱形、平行四邊形、等腰梯形、梯形、鳶形)存在內接母子相似形的條件。

(4) 探討多邊形具有內接母子相似圖形的條件。

(5) 建構出具有內接母子相似圖形的多邊形

Polygons within similar figures' drafting and related questions

Abstract

In the documents, people had not found any good methods to find a graph within similar figures. To resort to a polygon's rotation and telescopic, we create a graph within similar figures. And we found some property about it.

(1) General formula of "graph within a similar figure's geometric construction" : we can find edge point and internal point's graph within similar figures, we can also find the smallest graph within similar figures and know to come over a internal point maximum similar in a triangle.

(2) If a polygon has similar figures, then the polygon to be bound to have a brocard points, and vice versa.

(3) The condition of a special quadrilateral (rectangular, diamond, parallelogram, isosceles trapezoid, ladder, kite shape) have graph within similar figures.

(4) To probe into the condition of a special quadrilateral have graph within similar figures, we found the necessary condition about a polygon which within similar figures.

(5) We find a method to Create a polygon which within similar figures.

目錄

壹、前言

一、 研究動機

在國中課程裏，將任意三角形三邊中點連接，可得此三角形與原三角形相似，我們很好奇，是否有其他方法可以做出內接母子相似三角形？經過相關文獻資料的查詢，在 37 屆高中數學組國展作品「如何在三角形內找一個含給定角且具有最小面積的內接三角形」所使用的「垂足法」，與 46 屆國中數學組國展作品「內接相似三角形的尺規作圖」所使用的「旋轉法」。我們嘗試以「垂足法」、「旋轉法」作四邊形的內接母子相似。發現到「垂足法」只能做三角形；「旋轉法」只能作出四個角對應相等，但不能保證是內接母子相似，實際上，以旋轉法幾乎作不出內接母子相似多邊形(四邊以上)。因此，我們試著尋找一個方法，能夠做出三角形的內接母子相似，並推廣到四邊形以上的內接母子相似圖形。

二、 研究目的

1. 探討一般化方法，以尺規作出內接母子相似多邊形。
2. 探討多邊形存在內接母子相似的條件。
3. 建構出具有內接母子相似圖形的多邊形。

貳、研究器材

電腦、GSP 軟體、圓規、尺

參、研究過程

一、名詞定義

1. 在本研究中

(1) 多邊形 $A_1A_2\cdots A_n \cong$ 多邊形 $B_1B_2\cdots B_n$

(2) 多邊形 $A_1A_2\cdots A_n \sim$ 多邊形 $B_1B_2\cdots B_n$

表示各頂點的對應順序為 A_1 對應 B_1、A_2 對應 B_2、⋯、A_n 對應 B_n

2. 名詞定義：

(1)廣義內接母子相似 n 邊形：

分別在 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ n 個邊上各取一點 B_1、B_2、⋯、B_n，使得 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n \sim n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，我們稱 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 為 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的「廣義內接母子相似 n 邊形」。

(2)狹義內接母子相似 n 邊形：

若 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 為 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的「廣義內接母子相似 n 邊形」，且當 B_1、B_2、⋯、B_n 分別在 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_nA_1}$ 上，或 B_1、B_2、⋯、B_n 分別在 $\overline{A_nA_1}$、$\overline{A_nA_{n-1}}$、⋯、$\overline{A_2A_1}$ 上，則我們稱 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 為 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的「狹義內接母子相似 n 邊形」。

※特別注意：

為了方便說明，本研究將「狹義內接母子相似 n 邊形」簡稱為「內接母子相似 n 邊形」。

以 ΔABC 為例，其「廣義內接母子相似三角形」，共有下面六種不同對應接法的圖形，如圖 1-1～圖 1-6。

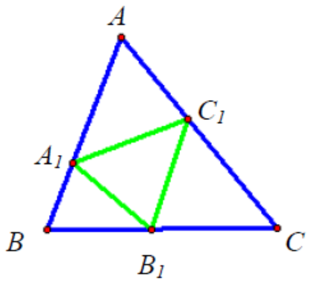


圖 1-1

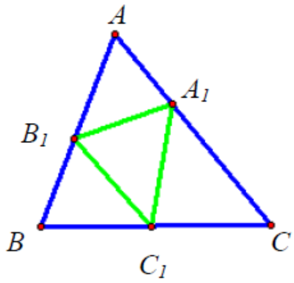


圖 1-2

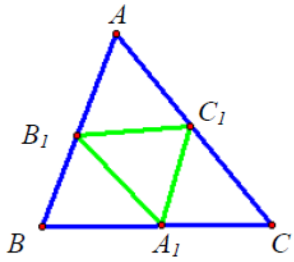


圖 1-3

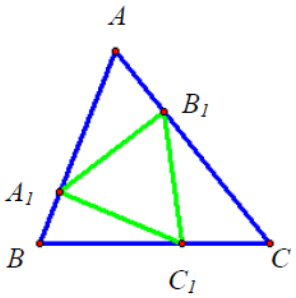


圖 1-4

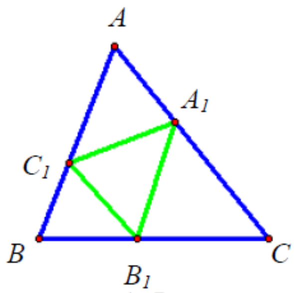


圖 1-5

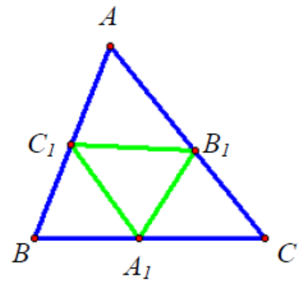


圖 1-6

其中，圖 1-1、圖 1-2 為「**狹義內接母子相似三角形**」，簡稱「**內接母子相似三角形**」。

根據本研究的名詞定義，可知一多邊形的內接母子相似多邊形其種類很多，研究不易。

因此，我們探討內容以「狹義內接母子相似多邊形」做出發。以下內容，皆使用簡稱：「**內接母子相似多邊形**」。

二、 內接母子相似三角形的旋轉、伸縮中心

在圖 1-1 與圖 1-2 中，我們

1. 發現：內接母子相似三角形，像是將原三角形，分別作逆時針或順時針旋轉並伸縮得到。

2. 猜測：如果上述發現結果是成立的，應有旋轉與伸縮中心，且兩圖形各自的旋轉與伸縮中心應為同一點。

至於任意一個平面圖形，同時利用一個點，當旋轉中心與伸縮中心，在旋轉定角與伸縮 k 倍所得的圖形，與原圖形之間到底會有什麼關聯性呢？我們證明下面定理：

【定理 1】：對於 n 邊形 $A_1A_2...A_n$，於其所在平面上取一點 S，若透過

〔步驟 1〕：以 S 為旋轉中心，將 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ 旋轉 θ，得 n 邊形 $A'_1A'_2...A'_n$

〔步驟 2〕：以 S 為伸縮中心，將 n 邊形 $A'_1A'_2...A'_n$ 伸縮 k 倍，得 n 邊形 $B_1B_2...B_n$

則 (I) n 邊形 $B_1B_2...B_n$ n 邊形 $A_1A_2...A_n$

(II) $\angle SA_1B_1 = \angle SA_2B_2 = \cdots = \angle SA_nB_n$

【證明】(I) (1)由〔步驟 1〕，可得 n 邊形 $A'_1A'_2...A'_n \cong n$ 邊形 $A_1A_2...A_n$

(2)由〔步驟 2〕，可得 n 邊形 $B_1B_2...B_n$ n 邊形 $A'_1A'_2...A'_n$

綜合(1)(2)可得 n 邊形 $B_1B_2...B_n$ n 邊形 $A_1A_2...A_n$

(II) 由〔步驟 2〕，可得

$\dfrac{\overline{SB_1}}{\overline{SA'_1}} = \dfrac{\overline{SB_1}}{\overline{SA_1}} = k$，

$\dfrac{\overline{SB_2}}{\overline{SA'_2}} = \dfrac{\overline{SB_2}}{\overline{SA_2}} = k$，(如圖 2-1)

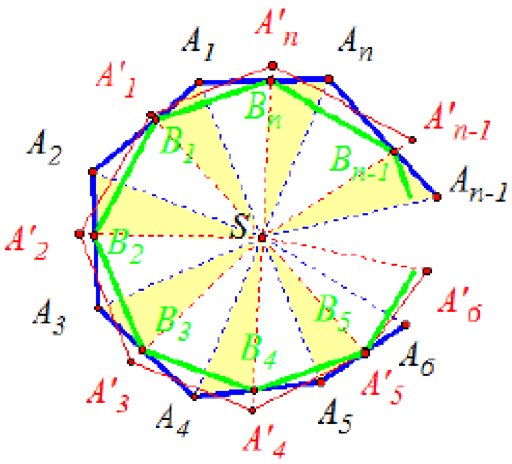


圖 2-1

由〔步驟 1〕可得

$\angle A_1SB_1 = \theta = \angle A_2SB_2$

所以 $\Delta A_1SB_1 \sim \Delta A_2SB_2$ (SAS 相似性質)

$\Rightarrow \angle SA_1B_1 = \angle SA_2B_2$

同理，

可得 $\angle SA_2B_2 = \angle SA_3B_3 = \cdots = \angle SA_{n-1}B_{n-1} = \angle SA_nB_n$

即 $\angle SA_1B_1 = \angle SA_2B_2 = \cdots = \angle SA_nB_n$

回到我們前面的猜測，根據【定理 1】，可得圖 1-1 中：　#

若 $\Delta A_1B_1C_1$ 是由【定理 1】的兩步驟所得到，

那麼 $\angle SAA_1 = \angle SBB_1 = \angle SCC_1$

(其中 S 為旋轉、伸縮中心，如圖 2-2)

可得：

$\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$。但是，是否真的存在一點 S，

使得 $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$ 呢？

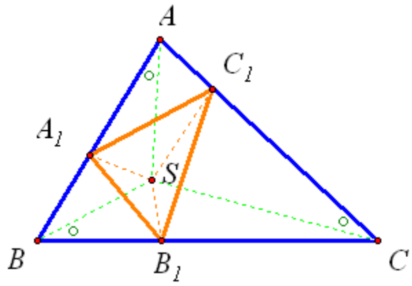


圖 2-2

分析：根據上述結論，若 S 存在，則

$$\angle ASB = 180^\circ - (\angle ABS + \angle SAB)$$
$$= 180^\circ - (\angle ABS + \angle SBC)$$
$$= 180^\circ - \angle ABC$$
$$= \angle ABC \text{ 的外角}$$

同理可證 $\angle BSC$ 為 $\angle BCA$ 的外角、$\angle CSA$ 為 $\angle CAB$ 的外角

#

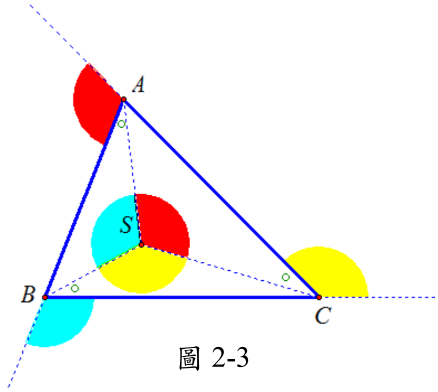


圖 2-3

據上述分析，我們作出可產生內接母子相似圖形的旋轉、伸縮中心：

內接母子相似三角形的旋轉、伸縮中心作圖

【已知】ΔABC

【求作】一點 S，使得 $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$

【作法】(1) 過 A、B 作圓 O_1，使 $\angle APB = \angle ABC$ 的外角。P 為 AB 上動點

(2) 過 B、C 作圓 O_2，使 $\angle BQC = \angle BCA$ 的外角。Q 為 BC 上動點

(3) 令圓 O_1、圓 O_2 第二交點為 S (註)，則 S 即為所求。

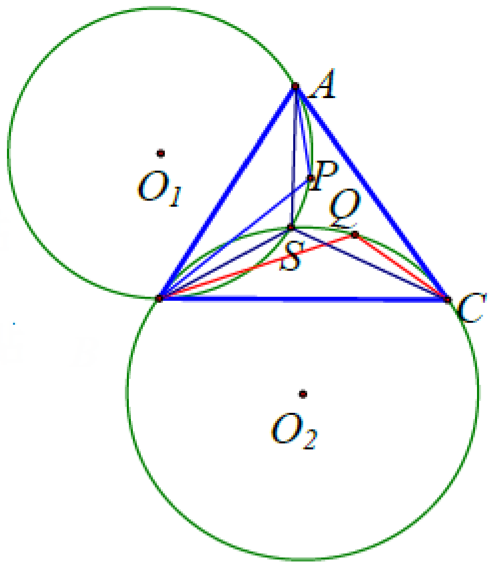


圖 2-4

※ 註：因為圓 O_1、圓 O_2 皆過 B 點，且兩圓不是外切圓，所以必有第二交點。

【證明】$\because \angle ASB=\angle APB$ (對等弧) $=\angle ABC$ 的外角

$\angle BSC=\angle BQC$ (對等弧)$=\angle BCA$ 的外角

又 ΔABC 的外角和$=360^\circ=$周角

$\therefore \angle ASC=\angle CAB$ 的外角，

可推得 $\angle SAB=\angle SBC=\angle SCA$

由上述作圖，可得知：

1. 圓 O_1 與圓 O_2 必存在。

2. $\because$ 圓 O_1 與圓 O_2 皆過同一點 B，又兩圓不相切。

$\therefore$ 兩圓必有另一交點 S。

即對於任意 ΔABC，使得 $\angle SAB=\angle SBC=\angle SCA$ 的 S 點必存在。 #

利用上述的推導與證明，我們可簡單的作出三角形的內接母子相似圖形。

過三角形邊上一點作內接母子相似圖形

【已知】ΔABC，$\overline{AB}$ 上一點 P

【求作】過 P 點，作 $\Delta PQR\sim\Delta ABC$，使得 Q、R 分別在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 上

【作法】(1) 作 ΔABC 的旋轉、伸縮中心 S，使得 $\angle SAB=\angle SBC=\angle SCA$

(2) 連 $\overline{SA}$、$\overline{SB}$、$\overline{SC}$、$\overline{SP}$

(3) 分別作 $\angle BSQ=\angle ASP$

$\angle CSR=\angle ASP$

交 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 於 Q、R

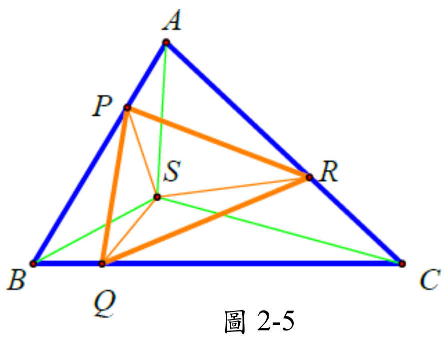


圖 2-5

(4) 連 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$、$\overline{RP}$，則 ΔPQR 為所求。

從上面的推論，顯然產生內接相似三角形的旋轉、伸縮中心對於本研究相當重要。因此，我們特別給此旋轉、伸縮中心定義名稱：

「旋心」定義：

凸 n 邊形 $A_1A_2...A_n$，若形內存在一點 S，使得

$\angle SA_1A_2 = \angle SA_2A_3 \cdots \angle SA_{n-1}A_n = \angle SA_nA_1$

則 S 點稱為凸 n 邊形的「旋心」，且：

(1) 當 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ 為逆時針排列，則我們稱 S 點為「左旋心」。

(2) 當 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ 為順時針排列，則我們稱 S 點為「右旋心」。

在此特別說明，「旋心」的探討事實上是包含「左旋心」及「右旋心」，只是任意多邊形向左旋轉及向右旋轉的作圖與證明觀念是同理可得的，僅是旋轉方向的差異，因此本研究接續內容所提及到的「旋心」，皆是以「左旋心」為探討基礎。

有了旋心的定義，我們想瞭解三角形的旋心是否能像國中幾何課程中三角形的內心、外心、重心一樣，具有一些特別的性質？甚至能推廣應用。以下是我們的相關研究：

三、 探討三角形旋心的性質

【性質 1】三角形必存在旋心 S

【性質 2】外角性質：

$\angle ASB$ 為 $\angle ABC$ 的外角、$\angle BSC$ 為 $\angle ACB$ 的外角、$\angle CSA$ 為 $\angle BAC$ 的外角。

【性質 3】切線性質：$\overleftrightarrow{BC}$ 為 ΔABS 外接圓的切線、$\overleftrightarrow{AC}$ 為 ΔBCS 外接圓的切線、$\overleftrightarrow{AB}$ 為ΔACS 外接圓的切線。

【證明】根據旋心定義，可得 $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$

所以 $\overleftrightarrow{BC}$ 為 ΔABS 外接圓的切線

$\overleftrightarrow{AC}$ 為 ΔBCS 外接圓的切線

$\overleftrightarrow{AB}$ 為 ΔACS 外接圓的切線

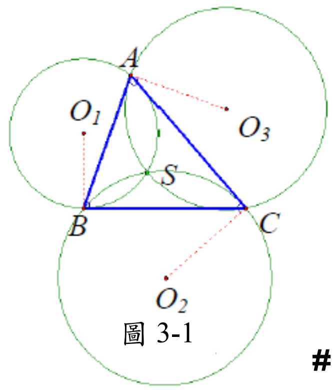


圖 3-1

#

【性質 4】內接母子相似三角形性質：以旋心 S 為旋轉中心，將 $\overleftrightarrow{SA}$、$\overleftrightarrow{SB}$ 及 $\overleftrightarrow{SC}$ 依逆時針等角度旋轉，分別與 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 交於 A_1 、B_1 、C_1 ，則

(1) $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ 。

(2) $\angle SA_1B_1 = \angle SB_1C_1 = \angle SC_1A_1 = \angle SAB$

【證明】①$\because S$ 為ΔABC 的旋心，$\therefore$ $\angle ASB = \angle ABC$ 的外角，

又 $\angle ASA_1 = \angle BSB_1$ ，$\therefore$ $\angle A_1SB_1 = \angle ASB = \angle ABC$ 的外角，

$\Rightarrow A_1$ 、B 、B_1 、S 四點共圓

$\Rightarrow \angle SA_1B_1 = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{B_1S} = \angle SBC = \angle SAB$

且 $\angle A_1BS = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{A_1S} = \angle A_1B_1S$

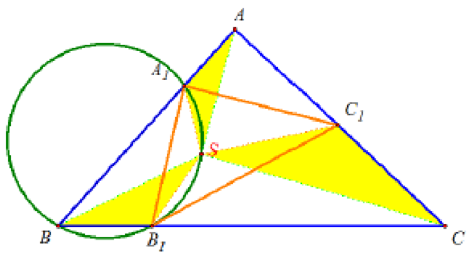


圖 3-2

②同理可證，$\angle SB_1C_1 = \angle SCC_1$ ，$\angle SC_1A_1 = \angle SAA_1$

$\Rightarrow \angle SA_1B_1 = \angle SB_1C_1 = \angle SC_1A_1 = \angle SAB \cdots (2)$ 之證明

又 $\angle A_1BS = \angle A_1B_1S$ 、$\angle B_1SC = \angle B_1C_1S$ 、$\angle C_1AS = \angle C_1A_1S$

可得 $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC(AA\sim)\cdots(1)$ 之證明

【性質 5】旋心到三邊距離

$$\overline{SA} = \frac{b^2c}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \text{、} \quad \overline{SB} = \frac{c^2a}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \text{、}$$

$$\overline{SA} = \frac{a^2b}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

【已知】ΔABC，S 為 ΔABC 的旋心，M 為 $\overline{AC}$ 的中點

令 ΔABC 為 Δ，$\because \angle SAB = \angle SBC = \angle SCA = \alpha$

【證明】① 作 $\overline{OA}$ 垂直 $\overline{AB}$，$\overline{OM}$ 垂直 $\overline{AC}$，兩線交於 O 點

② $\because \angle MOA = \angle BAC \quad \Rightarrow \sin\angle BAC = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{OA}}$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2}bc\sin\angle BAC = \frac{1}{2}bc\sin\frac{\overline{MA}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}bc\sin\frac{\frac{1}{2}b}{\overline{OA}} = \frac{\frac{1}{4}b^2c}{\overline{OA}}$$

$$\Rightarrow \overline{OA} = \frac{b^2c}{4\Delta}$$

且 $\overline{SA} = 2\sin\alpha\overline{OA} = 2\sin\alpha(\dfrac{b^2c}{4\Delta})$

(餘弦定理)

同理可得 $\overline{SB} = 2\sin\alpha(\dfrac{c^2a}{4\Delta})$ 、

$\overline{SC} = 2\sin\alpha(\dfrac{a^2c}{4\Delta})$

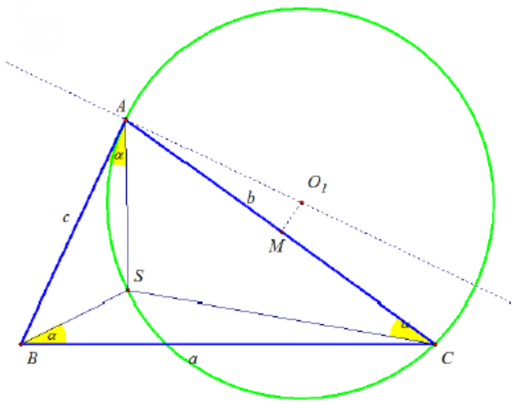


圖 3-3

③ 又 $\because \Delta = \dfrac{1}{2}c\overline{SA}\sin\alpha + \dfrac{1}{2}a\overline{SB}\sin\alpha + \dfrac{1}{2}b\overline{SC}\sin\alpha$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha(c\overline{SA} + a\overline{SB} + b\overline{SC}) = \frac{1}{2}\sin\alpha\left[(\frac{2\sin\alpha}{4\Delta})(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)\right]$$

$$\Rightarrow 4\Delta^2 = \sin^2\alpha(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\Delta}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

$$\therefore \overline{SA} = 2(\frac{2\Delta}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}})(\frac{b^2c}{4\Delta}) = \frac{b^2c}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

同理可得 $\overline{SB} = \dfrac{c^2a}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$ 、$\overline{SC} = \dfrac{a^2c}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$

【性質 6】$\Delta SAB:\Delta SBC:\Delta SCA=b^2c^2:c^2a^2:a^2b^2$

【證明】

$$\Delta SAB:\Delta SBC:\Delta SCA=\frac{1}{2}c\overline{SA}\sin\alpha:\frac{1}{2}a\overline{SB}\sin\alpha:\frac{1}{2}b\overline{SC}\sin\alpha$$
$$=b^2c^2:c^2a^2:a^2b^2$$

四、 三角形旋心的應用

利用【性質 4】，我們作出【應用一】與【應用二】：

【應用一】過三角形內部一點，作內接母子相似三角形。

【已知】ΔABC 內部一點 P

【求作】過 P 點，作 $\Delta A_1B_1C_1\sim\Delta ABC$，使得 A_1、B_1、C_1 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 上。

【作法】(1) 作 ΔABC 的旋心 S，並連接 $\overline{SP}$、$\overleftrightarrow{SB}$。

(2) 作 ΔPSD 及其外接圓，使得 $\angle PDS=\angle SBC$。如圖 4-1-1

(3) 令 ΔPSD 的外接圓交 $\overline{AB}$ 於 A_1。

(實際上，ΔPSD 的外接圓與三角形的周界可能產生 0~6 個交點)

I. 若無交點，則表示無法找到過 P 點的內接母子相似三角形，如圖 4-1-2；

II. 若只有一交點，即此時過 P 點的內接母子相似三角形最多只有 1 個，如圖 4-1-3；

III. 若有兩交點，即此時過 P 點的內接母子相似三角形最多有 2 個，如圖 4-1-4；

IV. 若有三交點，即此時過 P 點的內接母子相似三角形最多有 3 個，如圖 4-1-5；

V. 若有四交點，即此時過 P 點的內接母子相似三角形最多有 4 個，如圖 4-1-6；

VI. 若有五、六交點，即此時過 P 點的內接母子相似三角形最多只有 4 個；

(4) 作 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 交 $\overline{BC}$ 於 B_1 。

(5) 作 $\angle CSC_1 = \angle ASA_1$ ，C_1 在 $\overline{AC}$ 上。

(6) 連接 $\Delta A_1B_1C_1$ 即為所求。

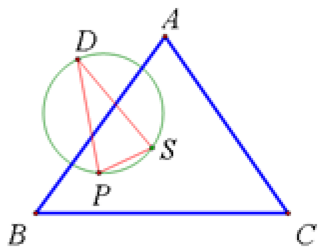


圖 4-1-1

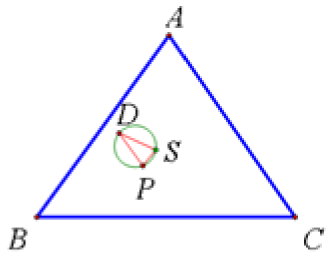


圖 4-1-2—沒有交點

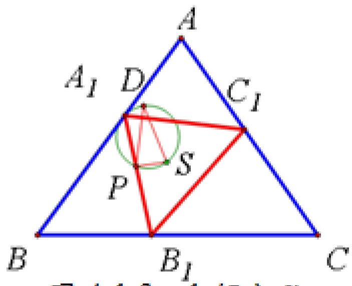


圖 4-1-3—1 個交點

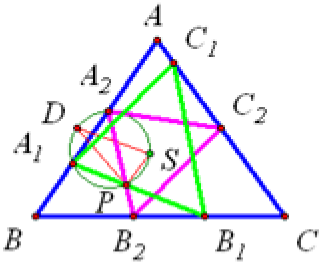


圖 4-1-4—2 個交點

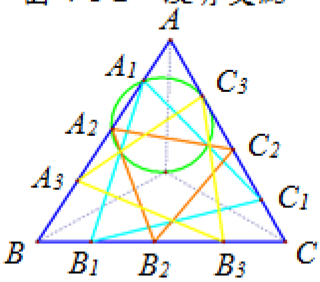


圖 4-1-5—3 個交點

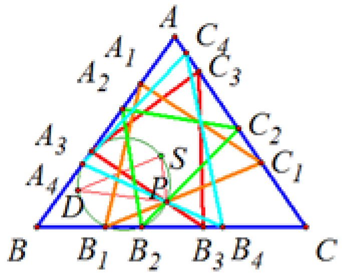


圖 4-1-6—總共 4 個交點

【證明】 以圖 4-1-3 為例：

(1) $\angle PA_1S = \angle PDS = \angle SBC$ (圓周角對等弧)

$\therefore \angle SA_1B_1 = \angle B_1\mathrm{B}S$

可得 A_1 、B 、B_1 、S 四點共圓 $\Rightarrow \angle AA_1S = \angle BB_1S$

又 $\angle SAA_1 = \angle SBB_1$

$\therefore \angle ASA_1 = \angle BSB_1$

(2) 且同理可得 $\angle CSC_1 = \angle ASA_1$

$\therefore \angle ASA_1 = \angle BSB_1 = \angle CSC_1$

根據【性質 4】可得 $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

【應用二】尋找 ΔABC 最小的內接母子相似三角形

【已知】ΔABC

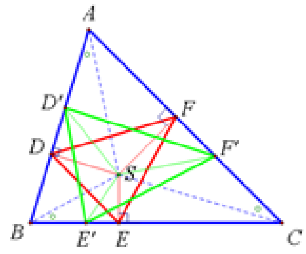


圖 4-2-1

【求作】ΔABC 的最小內接母子相似圖形

【作法】(1)作 ΔABC 的旋心 S

(2)分別作 $\overline{SD} \perp \overline{AB}$、$\overline{SE} \perp \overline{BC}$、$\overline{SF} \perp \overline{CA}$ 於 D、E、F (註)

(3)連接 ΔDEF 為所求。

【證明】(1)S 為 ΔABC 的旋心，$\therefore \angle SAB = \angle SBC = \angle SCA$ 又

$\angle SDA = \angle SEB = \angle SFC = 90^\circ$，$\therefore \angle ASD = \angle BSE = \angle CSF$

由【性質 4】可得到 $\Delta DEF \sim \Delta ABC$。

(2) 如圖 4-2-1，在 $\overline{AB}$ 上取一點 D' 異於 D

且過 D' 點，可作出內接母子相似

$\Delta D'E'F' \sim \Delta ABC \sim \Delta DEF$

(3)$\because \Delta SD'E' \sim \Delta SAB \sim \Delta SDE$

又 $\overline{SD'} > \overline{SD}$

可得 ΔDEF 為 ΔABC 最小內接

相似三角形

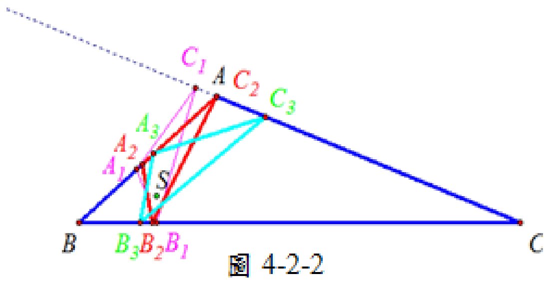


圖 4-2-2

※註：若【作法 2】圖形不存在，如圖 4-2-2，即存在一角度(假設為 $\angle CAS$)使得 $\angle CAS > 90^\circ$，此時 $\angle CAB > 90^\circ$，即 ΔABC 為鈍角三角形。(反之若 ΔABC 為鈍角三角形，其中 $\angle A > 90^\circ$，若 $\angle CAS \le 90^\circ$，則仍可作出上述的最小內接母子相似三角形)。針對此種情況，我們作圖如下：

【作法】(1) 作 ΔABC 的旋心 S

(2) 作 $\angle ASD = \angle CSA$，D 在 $\overline{AB}$ 上

作 $\angle BSE = \angle CSA$，E 在 $\overline{BC}$ 上

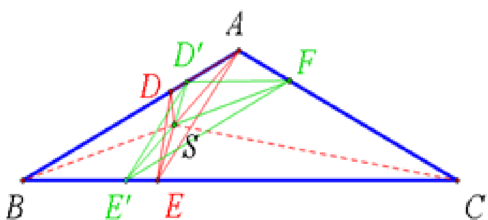


圖 4-2-3

(3) 連接ΔADE，即為所求。

【證明】(1) 在$\overline{AC}$上任取一點F異於A

(2) 過F作ΔABC的內接母子相似$\Delta FD'E'$若存在，即$\Delta FD'E' \sim \Delta ADE$

(3) 在ΔAFS中，$\because \angle FAS = \angle CAS \geq 90^{\circ}$

$\therefore \angle AFS < 90^{\circ}$，$\Rightarrow \angle CAS > \angle AFS \Rightarrow \overline{SF} > \overline{SA}$

可得ΔADE為ΔABC內的最小內接母子相似圖形。

【應用三】廣義內接母子相似三角形的應用與推廣

至於，廣義的內接母子相似三角形，是否存在旋轉與伸縮中心？我們推導如下：

選擇圖 1-3 的對應接法。顯然，我們不能直接找到一個點，並利用此點直接將ΔABC作旋轉、伸縮而得到$\Delta A_1B_1C_1$。因此，我們想若存在可利用旋轉、伸縮中心作圖，必須先找出一個可旋轉的$\Delta A'B'C'$，其中$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$且$A'$、$B'$、$C'$分別在$\overline{BC}$、$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上。利用這個推論，分析如下：

若$\angle A \geq \angle B$，作$\Delta A'AC \sim \Delta ABC$，其中$A'$在$\overline{BC}$上，如圖 4-3-1。

若圖 1-3 存在產生廣義內接母子相似三角形的旋轉、伸縮中心，

由【定理 1】可得$\angle SCA = \angle SAB = \angle SA'C$。

此點S是否存在呢？若S點存在，則必

$\angle ASC = \angle BAC$的外角、$\angle A'SC = \angle ACB$的外角

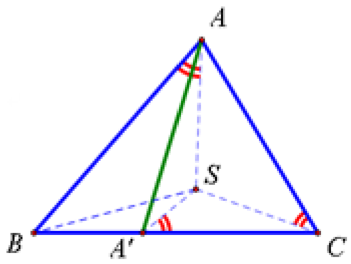


圖 4-3-1

利用此結果，我們作圖如下：

廣義內接母子相似三角形的作圖

【已知】ΔABC，$\overline{BC}$上一點P

【求作】過P點，作$\Delta PQR \sim \Delta ABC$，使得$Q$、$R$分別在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上

【作法】(1) 作 $\angle CAA' = \angle B$，A' 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上

(2) 過 A 、C 作圓 O_1，使得

$\angle ADC = \angle BAC$ 的外角

(3) 過 A' 、C 作圓 O_2，使得

$\angle A'EC = \angle ACB$ 的外角

(4) 令圓 O_1 、圓 O_2 第二交點為 S

(5) 連 $\overline{SA}$ 、$\overline{SA'}$ 、$\overline{SC}$ 、$\overline{SP}$

(6) 分別作 $\angle ASQ = \angle A'SP$ 、$\angle CSR = \angle A'SP$

交 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 於 Q 、R

(7) 連 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$ 、$\overline{RP}$，則 ΔPQR 為所求 #

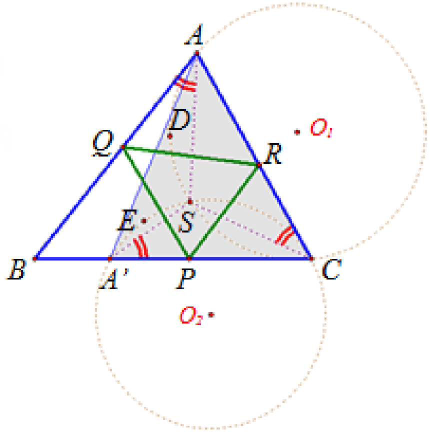


圖 4-3-2

其中上述作法(1)~(4)實際上，即是圖 1-3，廣義內接母子相似的旋轉、伸縮中心作圖，從上面的作圖，可得知：圖 1-3 產生廣義的內接母子相似接法之旋轉、伸縮中心必存在。同樣的方式，我們也可得到如圖 1-4、圖 1-5、圖 1-6 相同接法的旋轉、伸縮中心及其作圖，如圖 4-3-3、圖 4-3-4、圖 4-3-5。

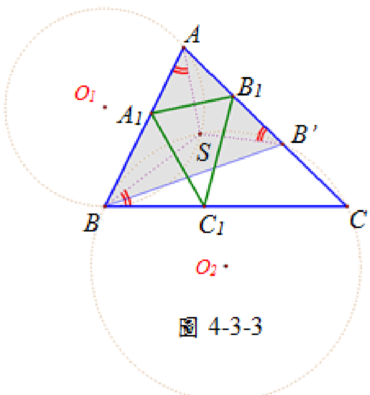


圖 4-3-3

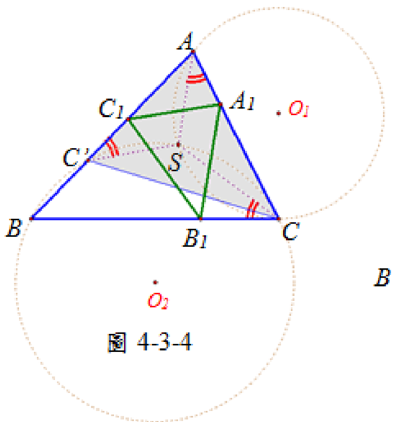


圖 4-3-4

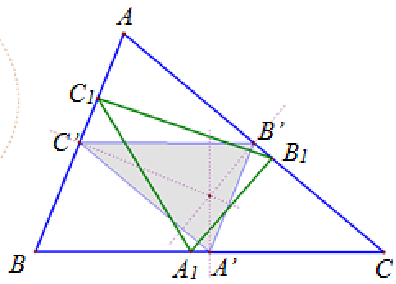


圖 4-3-5

另外，我們有一個疑問：

過邊上一點，作相同對應接法的內接母子相似三角形是否唯一呢？

【討論】1. ΔABC 中，若過 $\overline{BC}$ 上一點 D，存在兩個相同對應接法的廣義內接母子相似

子相似

ΔDE_1F_1 、 ΔDE_2F_2，如圖 4-3-6，可得 $\Delta DE_1E_2 \sim \Delta DF_1F_2$ (SAS 相似)

$\Rightarrow \angle DE_1E_2 = \angle DF_1F_2$ ，可得 A 、 E_1 、 D 、 F_1 四點共圓

$\Rightarrow \angle A + \angle E_1DF_1 = 180°$

(1) 若 $\angle E_1DF_1 \neq \angle A$ ，則 $\angle E_1DF_1 + \angle A < 180°$ ，與上述結論不合。即此條件下，過邊上一點不存在兩個以上相同對應接法的內接母子相似三角形，即當 ΔABC 不為直角三角形，則對應接法所形成的內接相似三角形必唯一。

(2) 若 $\angle E_1DF_1 = \angle A = 90°$ ，且當：

① $\angle DE_1F_1 = \angle C$ ，則 $\angle C = \angle DE_1F_1 = \angle DAF_1$

$\therefore \angle C + \angle CAD = 90° = \angle ADC$

即 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

② $\angle DE_1F_1 = \angle B$ ，則 $\angle B = \angle DE_1F_1 = \angle DAF_1$

$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{BD}$

同理 $\overline{DA}=\overline{DC}$

可得 D 為直角 ΔABC 的外心。

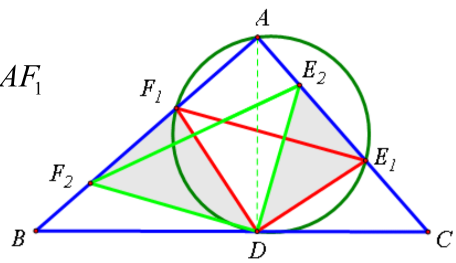


圖 4-3-6

由上可知型如圖 1-3、圖 1-6 且 $\angle A = 90°$ 時，此時過 D 點所形成的內接母子相似三角形並不唯一。

2.實際上在討論(2)之①②兩種情形，D 點可視為 ΔDE_1F_1 在原 ΔABC 的三邊所在直線作旋轉、伸縮的中心點。

3.由上述的討論可得結論：對於任意三角形的廣義內接母子相似三角形，皆可以旋心的作圖方式作出。

【應用四】特殊四邊形內接母子相似圖形之探討

(一)、多邊形旋心性質一般化的探討：

討論在三角形旋心的性質中，可知三角形必存在旋心，那麼凸 n 邊形($n\ge 4$)是否也存在旋心呢？由旋心的定義我們可得可知凸 n 邊形($n\ge 4$)不一定存在旋心。

理由：對於凸 n 邊形 $A_1A_2A_3......A_n$，依據下列作圖步驟

(1)作 $\Delta A_1P_1A_2$ 外接圓 O_1，使得 $\angle A_1P_1A_2=\angle A_1A_2A_3$ 之外角

(2)作 $\Delta A_2P_2A_3$ 外接圓 O_2，使得 $\angle A_2P_2A_3=\angle A_2A_3A_4$ 之外角

(3)令圓 O_1、圓 O_2 第二交點為 S 可得 $\angle SA_1A_2=\angle SA_2A_3$

(4)作 $\Delta A_3P_3A_4$ 外接圓 O_3，使得 $\angle A_3P_3A_4=\angle A_3A_4A_5$ 之外角

①當 $\angle SA_3A_4\ne SA_1A_2$，則 n 邊形 $A_1A_2A_3......A_n$ 不存在旋心。

②當 $\angle SA_3A_4=SA_1A_2$，則繼續作出 $\Delta A_iP_iA_{i+1}$ 外接圓 O_i，使得 $\angle A_iP_iA_{i+1}=\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 之外角。

如此下去，顯然，對於任意 n 邊形($n\ge 4$)並不一定皆具有旋心。(如圖 4-4-1)

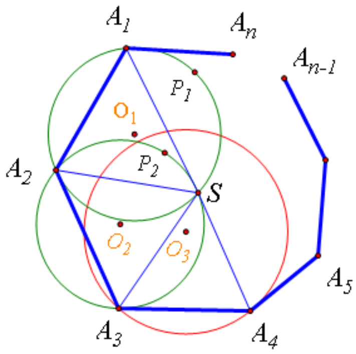


圖 4-4-1

#

至於凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 若存在旋心 S，則是否仍具有三角形旋心的相關性質？操作如下：

【性質 1】外角性質：

$\angle A_1SA_2=\angle A_1A_2A_3$ 的外角、$\angle A_2SA_3=\angle A_2A_3A_4$ 的外角、…、

$\angle A_nSA_1=\angle A_nA_1A_2$ 的外角

$\because S$ 為凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的旋心

$$\therefore \angle SA_1A_2=\angle SA_2A_3=\cdots=\angle SA_nA_1$$

可得 $\angle A_1SA_2 = 180^\circ - \angle SA_1A_2 - \angle SA_2A_1$

$= 180^\circ - \angle SA_2A_3 - \angle SA_2A_1$

$= \angle A_1A_2A_3$ 的外角

同理可證：$\angle A_2SA_3 = \angle A_2A_3A_4$ 的外角、…、$\angle A_nSA_1 = \angle A_nA_1A_2$ 的外角

【性質 2】切線性質：$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 為 ΔA_1SA_2 的外接圓的切線、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 為 ΔA_2SA_3 的外接圓的切線、…、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 為 $\Delta A_{n-1}SA_n$ 的外接圓的切線

由旋心的定義，同三角形【性質 3】切線性質可類推得證。

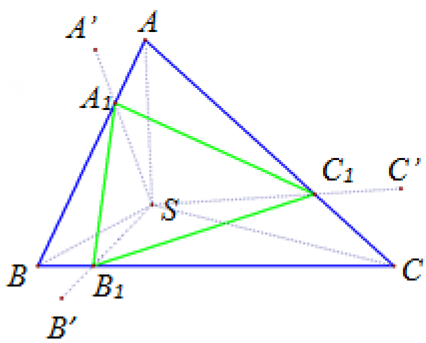
【性質 3】內接母子性質：以 S 為旋轉中心，將 SA_1、SA_2、…、SA_n 同方向等角度旋轉，且分別與 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、…、$\overline{A_nA_1}$ 交於 B_1、B_2、…、B_n，則凸 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ ~凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$。

【性質 4】：若 n 邊形存在旋心，則此 n 邊形必有內接母子相似圖形。

【證明】(1)我們以三角形為例，如右圖

①S 為三角形的旋心，則我們已 S 為中心作旋轉，可得

$$\overline{SA}' = \overline{SA}\cos\theta\frac{|\overline{SA}|}{|\overline{SA}\cos\theta|},$$



令 $\overline{SA}'\times r = \overline{SA_1}$

$\Rightarrow \overline{SB}'\times r = \overline{SB_1}\times r, \overline{SC}'\times r = \overline{SC_1}\times r$

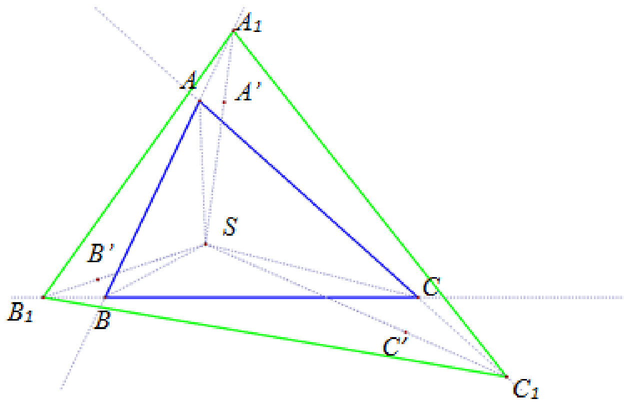
②若 B_1、C_1 不落於 $\overleftrightarrow{CB}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 上，則我們假設 $\overrightarrow{SB_1}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 B''、$\overrightarrow{SC_1}$ 交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 C''

$\Rightarrow \Delta SAA' = SBB'' = SCC''$

$\Rightarrow \overline{SA}:\overline{SA_1} = \overline{SB}:\overline{SB''} = \overline{SC}:\overline{SC''} = 1:r$

$\therefore B''$ 為 B_1、C'' 為 C_1 故得證

(2)由此證明我們亦可看出，旋心所作出的內接相似圖形亦可推廣至三射線上的相似圖形，如下圖所示



【性質 5】：若 n 邊形存在內接母子相似圖形，則此 n 邊形必有旋心。

【證明】(1)我們以四邊形為例，如圖 4-4-2、圖 4-4-3：

①令四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 為四邊形 $ABCD$ 的內接母子相似四邊形，

作 ΔAD_1A_1 的外接圓 O_1 與 ΔA_1BB_1 的外接圓 O_2，假設圓 O_1、圓 O_2 第二交點 S，

可得 A、A_1、S、D_1 及 A_1、B、B_1、S 四點共圓

$\therefore \angle D_1AS = \angle D_1A_1S = \angle 1$

即 $\angle SAB = \angle SA_1B_1 = \angle 2 = \angle SBC$

又 $\angle SBA_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1S} = \angle A_1B_1S$

$\therefore \Delta ASB \sim \Delta A_1SB_1$ (AA 相似)

故 $\frac{\overline{AS}}{\overline{A_1S}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{B_1S}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}$

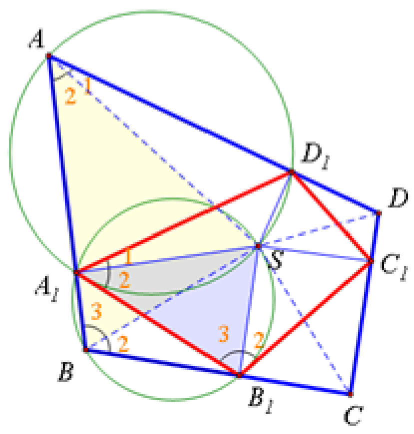


圖 4-4-2

② 在 ΔBSC 與 ΔB_1SC_1 中(圖 4-4-3)

$\because \frac{\overline{BS}}{\overline{B_1S}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}$，$\angle SBC = \angle SB_1C_1 = \angle 2$

$\therefore \Delta BSC \sim \Delta B_1SC_1$ (SAS 相似)

故 $\angle SCB = \angle SC_1B_1 = \angle 4$，

即 S、B_1、C、C_1 四點共圓

$\angle SB_1C_1 = \angle SCD = \angle 2 = \angle SC_1D_1$

③同理可證 S、D、D_1、C_1 四點共圓

可得 $\angle SDA = \angle 2$

$\Rightarrow \angle SAB = \angle SBC = \angle SDA = \angle 2$

即 S 為四邊形 $ABCD$ 的旋心。

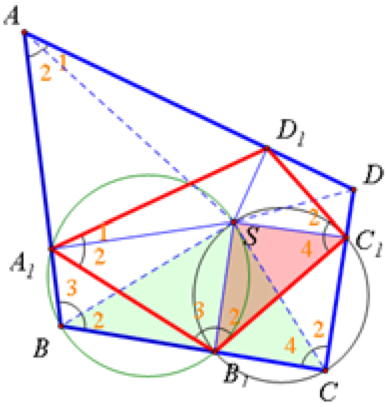


圖 4-4-3

(2) 若將上述證明推廣至 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，若其存在內接母子相似 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$，則可由上述證明①與證明②得

$\angle SA_1A_2 = \angle SA_2A_3 = \angle SB_1B_2 = \angle SB_2B_3$。

又由證明③可類推 $\angle SA_3A_4 = \cdots = \angle SA_nA_1 = \angle SB_3B_4 = \cdots = \angle SB_nB_1 = \angle 2$

故若 n 邊形存在內接母子相似圖形，則此 n 邊形必有旋心。 #

由於凸 $n(n \geq 4)$ 邊形不一定存在旋心。因此，要利用旋心作內接母子相似圖形，就先要確定何種圖形才具有旋心？但因為凸 n 邊形的變數太多，研究困難度太高，所以我們就將研究範圍縮小為課本所提的特殊四邊形，以下是我們的研究：

(二)、平形四邊形旋心之探討：

【定理 2-1】若平行四邊形 $ABCD$ 存在旋心 S，則此平行四邊形 $ABCD$ 必滿足：

(1) S 落在平行四邊形 $ABCD$ 的對角線交點上。

(2) $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BS}} = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CS}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DS}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AS}} = \sqrt{2}$，反之亦成立。

【證明】 (1) $\because S$ 為平行四邊形 $ABCD$ 的旋心，根據旋心的定義

$\angle SAB = \angle SBC = \angle SCD = \angle SDA$

可得 $\angle ASB = \angle 1$，$\angle BSC = \angle 2$，$\angle CSD = \angle 3$，$\angle ASD = \angle 4$

又 $\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$，$\therefore \angle ASB = \angle CSD$

且$\angle 1+\angle 2=180^{\circ}=\angle 3+\angle 4$，∴ A、S、C 共線，B、S、D 共線

即平行四邊形的旋心在對角線的交點上。

#

(2) ∵ S 為平行四邊形 $ABCD$ 的旋心

∴ $\overline{BA}$ 切 ΔSAD 外接圓於 A 點

由圓的切割線性質可得

$$\overline{BA}^2=\overline{BD}\times\overline{BS}=2\overline{BS}\times\overline{BS}=2\overline{BS}^2$$

$$\overline{BA}=\sqrt{2}\,\overline{BS}$$

同理可證 $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CS}}=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{DS}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AS}}=\sqrt{2}$ 。

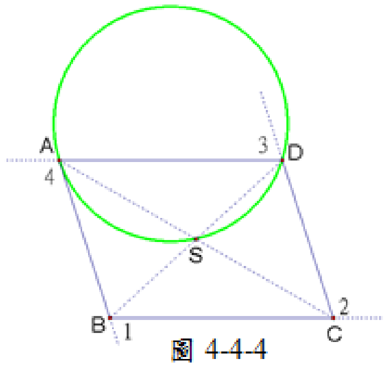


圖 4-4-4

#

【逆敘述證明】：

在 ΔABD 與 ΔSBA 中

$\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BS}}=\sqrt{2}$ ，$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AS}}=\sqrt{2}$ ，$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BA}}=\dfrac{2\overline{BS}}{\overline{BA}}=\sqrt{2}$

∴ $\Delta ABD\sim\Delta SBA$ （SSS 比例相似）

故 $\angle SAB=\angle SDA$ ，又 $\angle SBC=\angle SDA$ ，$\angle SCD=\angle SAB$

∴ $\angle SAB=\angle SBC=\angle SCD=\angle SDA$

即 S 為平行四邊形 $ABCD$ 的旋心

#

由【定理 2-1】可知，具有旋心的平行四邊形 $ABCD$ 必滿足

$\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BS}}=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CS}}=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{DS}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AS}}=\sqrt{2}$ 。

所以現在我們可以利用上述的條件，試著作出具有旋心的平行四邊形 $ABCD$。

【作法】1.作 ΔSBC 使得 $\overline{BC}=\sqrt{2}\,\overline{SC}$

2.在 $\overleftrightarrow{BS}$ 上取 $\overline{SD}=\overline{SB}$ 、$\overleftrightarrow{CS}$ 上取 $\overline{SA}=\overline{SC}$

3.連平行四邊形 $ABCD$ 即為所求。

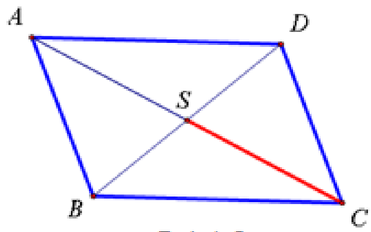


圖 4-4-5

接著探討長方形、正方形與菱形是否具有旋心？

【定理 2-2】若長方形 $ABCD$ 具有旋心，則此長方形必為正方形。

【證明】若 S 為長方形 $ABCD$ 的旋心

$\because$ $ABCD$ 為平行四邊形

$\therefore$ 由【定理 2-1】可知 $\overline{AB}=\sqrt{2}\,\overline{BS}$ 、

$\overline{AD}=\sqrt{2}\,\overline{AS}$

又四邊形 $ABCD$ 為長方形

$\therefore \overline{BS}=\overline{AS}$ (對角線互相平分且等長)

可推得 $\overline{AB}=\overline{AD}$

即此時的長方形 $ABCD$ 必為正方形

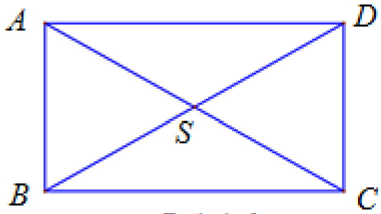


圖 4-4-6

因此我們可以得知：鄰邊不等長的長方形無旋心，即無內接母子相似圖形。 #

【定理 2-3】若菱形 $ABCD$ 具有旋心，則此菱形必為正方形。

【證明】若 S 為菱形 $ABCD$ 的旋心

(1) $\because$ $ABCD$ 是平行四邊形

$\therefore$ 由【定理 2-1】可知 $\overline{AB}=\sqrt{2}\,\overline{BS}$ 及 $\overline{AD}=\sqrt{2}\,\overline{AS}$

又四邊形 $ABCD$ 為菱形，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}$

得 $\overline{AS}=\overline{BS}=\overline{DS}=\overline{CS}$

$\therefore \overline{AC}=\overline{BD}$

即此時菱形 $ABCD$ 為正方形

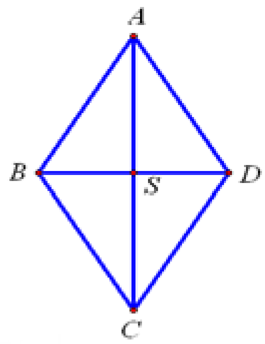


圖 4-4-7

因此我們可以得知：鄰角不等的菱形無旋心，即無內接母子相似圖形。 #

(三)、梯形旋心之探討：

【定理 3-1】梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，若具有旋心 S，則 S 落在 $\overline{BD}$ 上。

【證明】(1) $\because S$ 為梯形的 $ABCD$ 旋心，$\therefore \angle SAB=\angle SBC=\angle SCD=\angle SDA$

(2) $\angle ASB+\angle ASD$，(如圖 4-4-8)

$=180^\circ-(\angle SAB+\angle SBA)+180^\circ-(\angle SDA+\angle SAD)$

$=360^\circ-(\angle SAB+\angle SAD+\angle SBA+\angle SDA)$

$=360^\circ-(\angle SAB+\angle SAD+\angle SBA+\angle SBC)$

$=360^\circ-180^\circ(\because \overline{AD}//\overline{BC})=180^\circ$

$\therefore$ B、S、D 則三點共線，即 S 落在 $\overline{BD}$ 上。

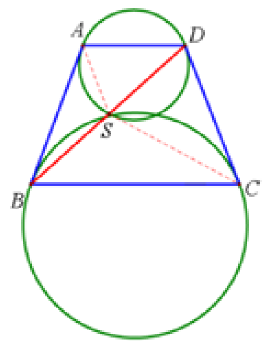


圖 4-4-8

#

【定理 3-2】 等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$，若具有旋心 S，則 S 在對角線的中點上。

【證明】(1)由【定理 3-1】可得 S 落在 $\overline{BD}$ 上

(2) 根據旋心的切線性質可得 $\overline{AB}^2=\overline{BS}\times\overline{BD}$ 、$\overline{CD}^2=\overline{DS}\times\overline{BD}$

又 $\overline{AB}=\overline{CD}$，$\therefore$ $\overline{BS}=\overline{DS}$

即 S 在對角線的中點上

(實際上，在上述條件下，左旋心、右旋心分別在 $\overline{BD}$ 、$\overline{AC}$ 中點上) #

【定理 3-3】 梯形 $ABCD$ 中 $\overline{AD}//\overline{BC}$，若具有旋心 S 及 ΔABS 、ΔCDS 的外接圓分別為圓 O_1 、圓 O_3，則 O_1 、S 、O_3 共線

【證明】(1)連接 $\overline{O_1A}$ 、$\overline{O_1S}$ 、$\overline{O_3S}$

(2) $\because \angle SBA=\angle 1=\dfrac{\overset{\frown}{AS}}{2}$，又 $\angle AO_1S=\overset{\frown}{AS}=2\angle 1$，

$\therefore \angle ASO_1=\angle SAO_1=\dfrac{180^\circ-2\angle 1}{2}=90^\circ-\angle 1$ ， 同理 $\angle DSO_3=90^\circ-\angle 2$

由【定理 3-1】可得 S 在 $\overline{BD}$ 上，$\therefore \angle ASD=\angle 1+\angle 2$

(3) 故 $\angle ASO_1+\angle ASD+\angle DSO_3=(90^\circ-\angle 1)+(\angle 1+\angle 2)+(90^\circ-\angle 2)=180^\circ$

即 O_1 、S 、O_3 共線

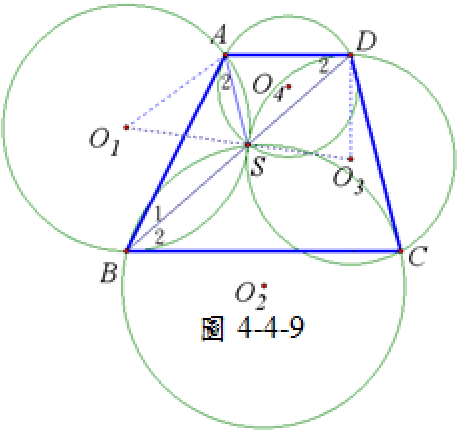


圖 4-4-9

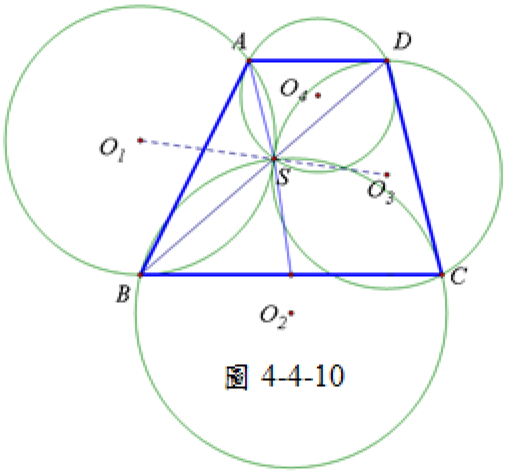


圖 4-4-10

#

【定理 3-4】 梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，若具有旋心 S，則 ΔABS 與 ΔCDS 的外接圓 O_1 、O_3 形成外切。

【證明】由【定理 3-3】可得證。

#

【定理 3-5】 若梯形 $ABCD$ 具有旋心，其中 $\overline{AD}//\overline{BC}$ ，則 $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$

【證明】已知 S 為梯形 $ABCD$ 的旋心，(如圖 4-4-11)

$\therefore$ $\overline{BC}$ 為圓 O_1 的切線、$\overline{CD}$ 為圓 O_2 的切線、$\overline{DA}$ 為圓 O_3 的切線、$\overline{AB}$ 為圓 O_4 的切線。

(1)令梯形四邊分別 $\overline{AB}=a$ 、$\overline{BC}=b$ 、$\overline{CD}=c$ 、$\overline{AD}=d$ ，

延長 $\overline{DA}$ 至 H ，使得 $DFBH$ 為長方形，作 $\overline{O_1G}\perp\overline{DF}$ 於 G

令梯形高 $\overline{DF}=\overline{BH}=h$ ，

$\overline{CF}=s=\sqrt{c^2-h^2}$

$\overline{O_1G}=\overline{BC}-\overline{FC}=b-s$

(2)令 I 為 $\overline{AB}$ 的中點，作 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ 於 E

$\therefore$ $\overline{AI}=\overline{IB}=\dfrac{a}{2}$

在 ΔO_1IB 與 ΔBEA 中

$\because$ $\angle O_1IB=\angle BEA=90^{\circ}$，

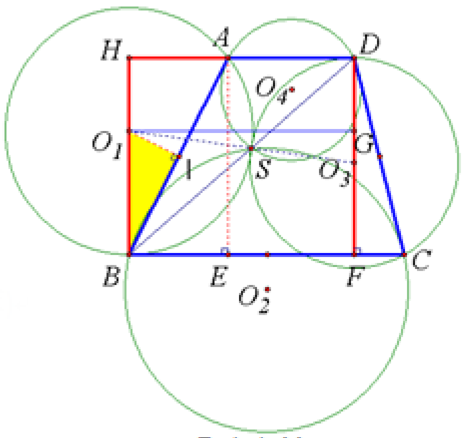


圖 4-4-11

$\angle EAB = \angle IBO_1$ ($\because \overline{AE} // \overline{BH}$，$\therefore$ 內錯角相等)

$\therefore \Delta O_1IB \sim \Delta BEA$ (AA 相似)

因此可得$\overline{O_1B}$：$\overline{BA}$ = $\overline{IB}$：$\overline{EA}$

即r_1：$a = \frac{a}{2}$：h

$\therefore r_1 = \frac{a^2}{2h}$，同理可得$r_3 = \frac{c^2}{2h}$

(3)圓O_1與圓O_3相切 $\therefore \overline{O_1O_3} = r_1 + r_3 = \frac{1}{2h}(a^2 + c^2)$

(4)在直角ΔO_1O_3G中，$\overline{O_1O_3} = \frac{1}{2h}(a^2 + c^2)$、$\overline{O_3G} = r_1 + r_3 - h$

則 $(r_1 + r_3)^2 = (r_1 + r_3 - h)^2 + (b - s)^2$

$\Rightarrow 0 = -2h(r_1 + r_3) + h^2 + b^2 - 2bs + s^2$

$-2h(r_1 + r_3) + b^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} + c^2 = 0$

$b^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} + c^2 - 2h \cdot \frac{1}{2h}(a^2 + c^2) = 0$ ($\because s^2 + h^2 = c^2$)

$b^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} - a^2 = 0$ 利用配方法

$b^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} + (\sqrt{c^2 - h^2})^2 = a^2 + (c^2 - h^2)$

$(b - \sqrt{c^2 - h^2})^2 = a^2 + c^2 - h^2$

$b = \sqrt{c^2 - h^2} \pm \sqrt{a^2 + c^2 - h^2}$ (其中$b = \sqrt{c^2 - h^2} - \sqrt{a^2 + c^2 - h^2}$ 不合)

(5) $\overline{BF} = b - s = (\sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{a^2 + c^2 - h^2}) - \sqrt{c^2 - h^2} = \sqrt{a^2 + c^2 - h^2}$

$\overline{BD}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{DF}^2$

$= c^2 - h^2 + a^2 + h^2 = c^2 + a^2$

故 $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$

#

【定理 3-6】 若等腰梯形 $ABCD$ 具有旋心，其中 $\overline{AD}//\overline{BC}$，則 $\overline{BD}=\sqrt{2}\,\overline{AB}$

【證明】由【定理 3-5】具有旋心的梯形滿足 $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$，若梯形 $ABCD$ 為等腰梯形時($\overline{AB}=\overline{CD}$)，因此可得 $\overline{BD}^2=2\overline{AB}^2$，也就是對角線 $\overline{BD}=\sqrt{2}\,\overline{AB}$

#

(四)、鳶形的旋心之探討：

【定理 4-1】 若鳶形 $ABCD$ 具有旋心，則 $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$

【證明】(1) $\because$ S 為鳶形 $ABCD$ 的旋心，$\therefore$ $\angle SAB=\angle SBC=\angle SCD=\angle SDA$

又 $\angle ABC=\angle ADC$

$\Rightarrow$ $\angle ABC$ 的外角 $=\angle ADC$ 的外角

$\Rightarrow$ $\angle ASB=\angle CSD$

$\therefore \Delta ABS\sim\Delta CDS$ （AA 相似）

可推得 $a:c=b:d$ (令 $\overline{AS}=a$、$\overline{BS}=b$、$\overline{CS}=c$、$\overline{DS}=d$)

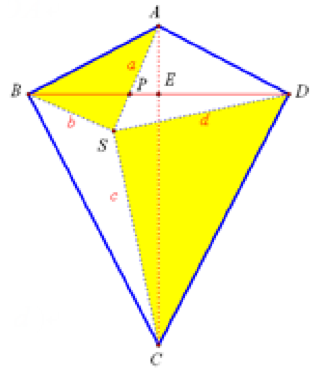


圖 4-4-12

(2)又在$\triangle ASC$ 和$\triangle BSD$ 中

$\because a:c=b:d$，

$\angle DSB=\angle DSA+\angle ASB=\angle DSA+\angle CSD$

$=\angle CSA$ $\therefore \Delta ASC\sim\Delta BSD$ (SAS 相似)

$\Rightarrow \angle CAS=\angle DBS$

(3) 在$\triangle AEP$ 和$\triangle BSP$ 中

$\because \angle EAP=\angle SBP$、$\angle APE=\angle BPS$

$\therefore \angle PSB=\angle AEP=90^\circ$

可得 $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$

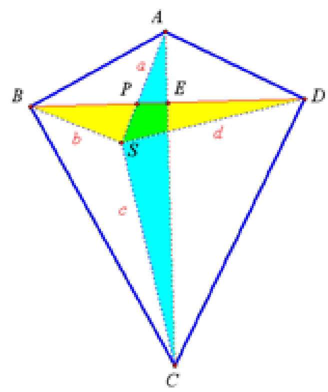


圖 4-4-13

故鳶形 $ABCD$ 只有在 $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$ 時，才具有旋心。 #

由上述分析，當$\angle ABC=\angle ADC=90^{\circ}=$其對角線的夾角度數，則此鳶形必有旋心。

我們很好奇的想 ”若四邊形$ABCD$及其對角線交於E，當$\angle ABC=\angle ADC=\angle AEB$” 則此四邊形是否具有旋心呢？以下是我們的探討：

【定理 4-2】四邊形$ABCD$其對角線交於E，若$\angle ABC=\angle ADC=\angle BEC$，則此四邊形必有旋心。

【證明】(1)作ΔABE外接圓圓O_1，$\because \angle BEC=\angle ABC$

$\therefore \angle BEA=\angle ABC$的外角

$\Rightarrow \angle BAE=\angle CBE$

可得$\overleftrightarrow{BC}$為ΔABE外接圓的切線。

(2)同理作ΔCDE外接圓圓O_2，可得$\overleftrightarrow{AD}$為ΔCDE外接圓的切線。

(3)若圓O_1與圓O_2第二交點S，

連$\overline{SA}$、$\overline{SB}$、$\overline{SC}$、$\overline{SD}$，可得$\angle SAE=\angle SBE$、$\angle SCE=\angle SDE$

$\Rightarrow \Delta ACS\sim\Delta BDS$ (AA相似)

$\Rightarrow \overline{AS}：\overline{BS}=\overline{CS}：\overline{DS}$

(4)在ΔABS與ΔCDS中，

$\because \overline{AS}：\overline{BS}=\overline{CS}：\overline{DS}$，$\angle ASB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\angle AEB=\angle CED=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}=\angle CSD$

$\therefore \Delta ABS\sim\Delta CDS$ (SAS相似)

$\Rightarrow \angle SAB=\angle SCD$

又$\angle SBC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BS}=\angle SAB$、$\angle SDA=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DS}=\angle SCD$

$\therefore \angle SAB=\angle SBC=\angle SCD=\angle SDA$

即S為四邊形$ABCD$的旋心。

(5)若圓O_1、圓O_2外切，則E為切點(如圖 4-4-15)

作兩圓內公切線L，可得$\angle EBC=\angle 1=\angle 2=\angle EDA$

又 $\angle EAB = \angle EBC$，$\angle ECD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE} = \angle EDA$

$\therefore \angle EAB = \angle EBC = \angle EDA$，即 E 為四邊形 $ABCD$ 的旋心。

#

綜合上述得證。

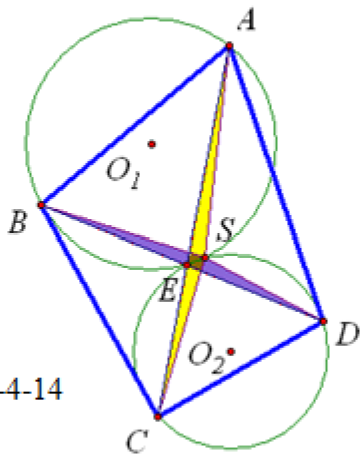


圖 4-4-14

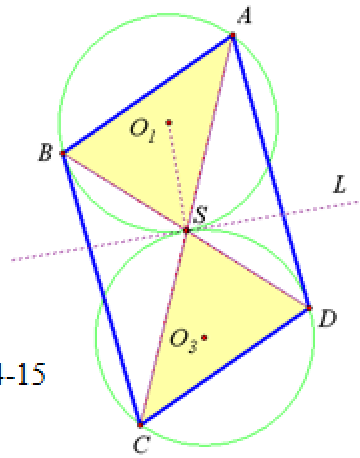


圖 4-4-15

(五)、特殊四邊形內接母子相似尺規作圖

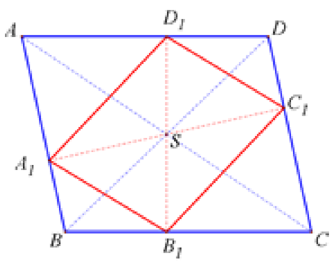
利用上述結論與三角形的作圖方法，我們作出具有旋心的平行四邊形、梯形及鳶形之最小與過內部一點的內接母子相似圖形：

【應用一】特殊四邊形之最小內接母子相似圖形

【作法】同 ΔABC 的最小內接母子相似圖形作法，見 P_8。

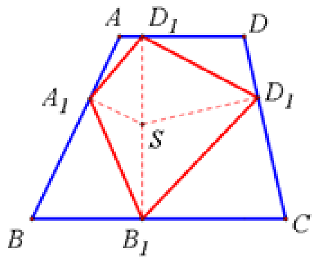
1.平行四邊形

圖 4-4-16



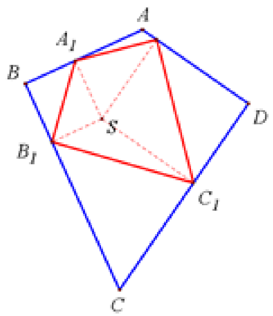
2.梯形

圖 4-4-17



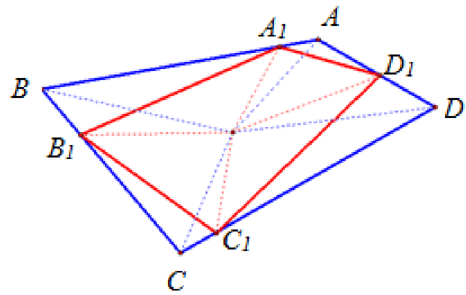
3.鳶形

圖 4-4-18



4.特別形

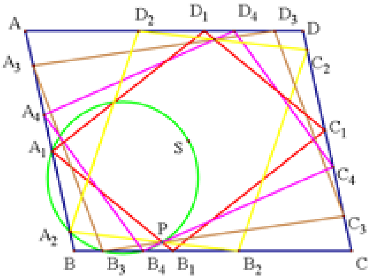
圖 4-4-19



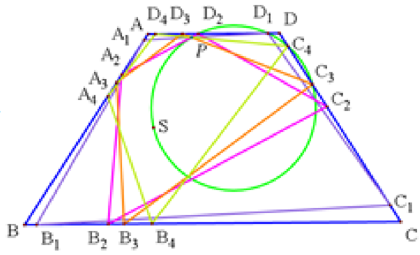
【應用二】特殊四邊形過內部一點的內接母子相似圖形

【作法】同 ΔABC 的過內部一點內接母子相似圖形作法。

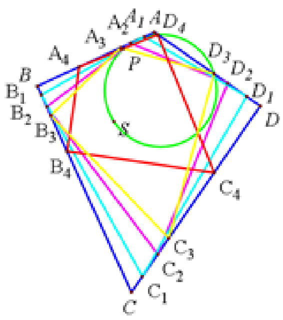
1.平行四邊形
圖 4-4-20



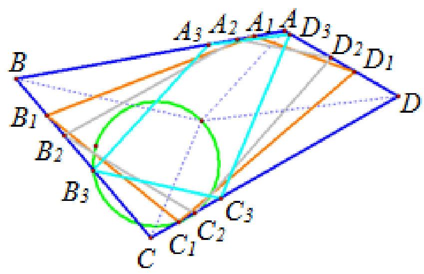
2.梯形
圖 4-4-21



3.鳶形
圖 4-4-22



4.特別形
圖 4-4-23



五、 多邊形內接母子相似圖形之一般化

已知四邊形 $ABCD$ 中，

圓 O_1 為以 $\overline{AB}$ 為弦、$\overline{BC}$ 為切線之圓；

圓 O_2 為以 $\overline{BC}$ 為弦、$\overline{CD}$ 為切線之圓；

圓 O_3 為以 $\overline{CD}$ 為弦、$\overline{AD}$ 為切線之圓；

圓 O_4 為以 $\overline{AD}$ 為弦、$\overline{AB}$ 為切線之圓。

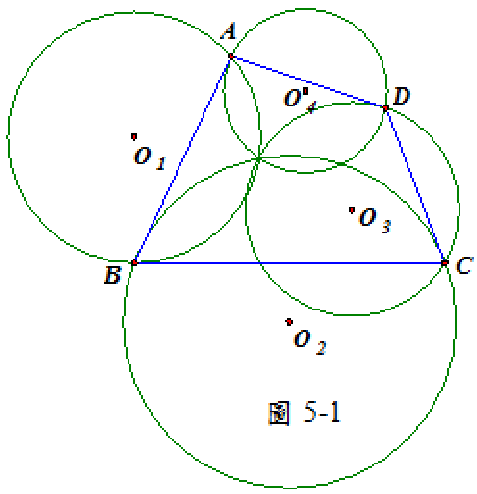


圖 5-1

【性質 1】：若四邊形 $ABCD$ 存在旋心 S，則 S 必存在於圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3、圓 O_4 之圓周上，即四圓共點於 S。

【證明】若旋心 S，不存在於圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3、圓 O_4 中某幾個圓的圓周上。不妨假設 S 不落在圓 O_1 的圓周上，那麼 S 的位置關係有下列兩種情況：

〈情況一〉S 落在圓 O_1 之圓周外，如(圖 5-2)

(1) 分別連接 $\overline{SA}$ 交圓 O_1 於 Q，連接 $\overline{SB}$ 交圓 O_1 於 P，則

因為 S 為四邊形 $ABCD$ 的旋心，所以 $\angle SAB=\angle SBC$

(2) 又圓 O_1 為弦切圓，所以 $\angle SAB=\dfrac{1}{2}BQ$ 弧$>\dfrac{1}{2}BP$ 弧$=\angle PBC=\angle SBC$

(3) 綜合(1)(2)矛盾，可證 S 不落在圓 O_1 之圓外

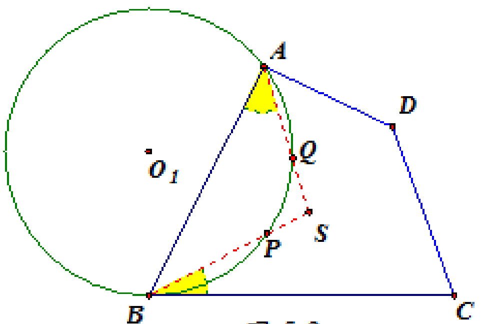


圖 5-2

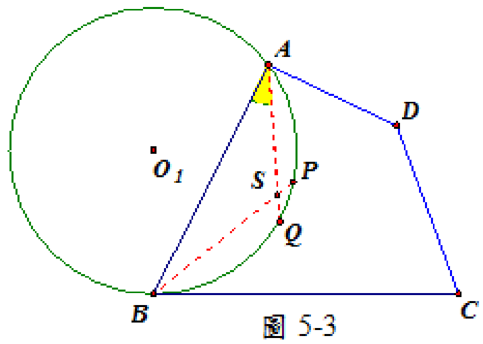


圖 5-3

〈情況二〉S 落在圓 O_1 之圓內，如(圖 5-3)

(1) 分別作 $\overleftrightarrow{AS}$ 交圓 O_1 於 Q，作 $\overleftrightarrow{BS}$ 交圓 O_1 於 P，則

因為 S 為四邊形 $ABCD$ 的旋心，所以 $\angle SAB=\angle SBC$

(2) 又因為圓 O_1 為弦切圓，所以 $\angle SAB=\dfrac{1}{2}BQ$ 弧$<\dfrac{1}{2}BP$ 弧$=\angle SBC$

(3) 綜合(1)(2)矛盾，可證 S 不落在圓 O_1 之圓外

綜合上述，可證旋心 S 必存在於圓 O_1。同理可證得，旋心 S 必存在於圓 O_2、圓 O_3、圓 O_4，即四圓共點於 S。 #

我們將【性質 1】加以推廣：

【性質 1-1】 若 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$ 存在旋心 S，則 S 必存在於圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3、…、圓 O_n 之圓周上，即 n 個圓共點於 S。

其中：圓 O_1 為以 $\overline{A_1A_2}$ 為弦、$\overline{A_2A_3}$ 為切線之圓；

圓 O_2 為以 $\overline{A_2A_3}$ 為弦、$\overline{A_3A_4}$ 為切線之圓；…；

圓 O_n 為以 $\overline{A_nA_1}$ 為弦、$\overline{A_1A_2}$ 為切線之圓。

【證明】 同【性質 1】之證明過程。

至於，四邊形 $ABCD$ 是否存在旋心 S？

(1) 根據旋心的定義，知 $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCD = \angle SDA$。

(2) 又圓 O_1 中，$\angle SAB = \angle SBC$；圓 O_3 中，$\angle SCD = \angle SDA$。

#

因此，我們只要考慮 $\angle SAB = \angle SBC$ 與 $\angle SCD = \angle SDA$ 是否相等？即考慮圓 O_1、圓 O_3(或圓 O_2、圓 O_4)即可。

又當四邊形 $ABCD$ 存在旋心 S，則由[性質 1]可知，四圓(圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3、圓 O_4)共點於 S。

根據上述分析，我們研究出下列性質：

【性質 2】 若四邊形 $ABCD$ 存在旋心 S，且圓 O_1、圓 O_3 相切，則

(1) S 落在圓 O_1、圓 O_3 的切點上。

(2) 圓 O_1 與圓 O_3 的切點 B 與 D 之連線段通過 S。

證明：(1) 根據【性質 1】，可證得當四邊形 $ABCD$ 存在旋心 S，則 S 落在圓 O_1、圓 O_3 的圓周上，又兩圓相切，所以 S 落在圓 O_1、圓 O_3 的切點上。

(2) ① 連接 $\overline{SA}$、$\overline{SB}$、$\overline{SC}$、$\overline{SD}$

② 通過 S 做兩圓的內公切線 L，可得

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 5 = \dfrac{1}{2} BS$ 弧，

$\angle 3 = \angle 4 = \angle 6 = \dfrac{1}{2} DS$ 弧

又 $\angle 2 = \angle 4$

所以 $\angle 5 = \angle 6$

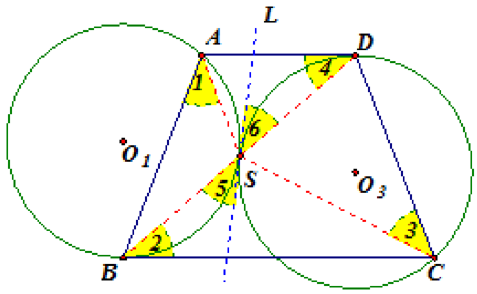


圖 5-4

可得B、S、D共線。

即圓O_1與圓O_3的切點B與D之連線段通過S。 #

【性質 2-1】 若四邊形$ABCD$存在旋心S，且圓O_1、圓O_3相切，則$\overline{AD}//\overline{BC}$

【證明】 根據【性質 2】，可得S落在$\overline{BD}$上，又$\angle 2=\angle 4$，所以$\overline{AD}//\overline{BC}$。 #

【性質 3】 已知四邊形$ABCD$的一組弦切圓(圓O_1、圓O_3)，相交於兩點S、P。

若且唯若四邊形$ABCD$存在旋心於S，則P點位於$\overline{BD}$上。

【證明】連接$\overline{SA}$、$\overline{SB}$、$\overline{SC}$、$\overline{SD}$、$\overline{SP}$、$\overline{PB}$、$\overline{PD}$

(1)充分性

① 因為S旋心，所以$\angle 1=\angle 3$

② 又A、B、P、S四點共圓，所以$\angle 1=\angle SPB$的外角

③ 且C、D、S、P四點共圓，所以$\angle 3=\angle 5$

④ 由①②③可得 $\angle SPB$的外角$=\angle 5$

即P點位於$\overline{BD}$上。

(2)必要性

① 因為P點位於$\overline{BD}$上

② 又A、B、P、S四點共圓

③ 且C、D、S、P四點共圓

④ 所以由①②③可得 $\angle 2=\angle 1=\angle 5=\angle 3=\angle 4$

即S點為四邊形$ABCD$的旋心。 #

【推廣】

分析：(1) 對於五邊形，是否存在旋心？則需得到$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$(如圖 5-5)是否全部相等？因此，我們只需要考慮兩組弦切圓(例如：圓O_1、圓O_3與圓O_3、圓O_5)的結果。

(2) 對於n邊形，是否存在旋心？則需得到$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、…、$\angle n$是否全部相等？因此，我們需要考慮$\left[\frac{n+1}{2}\right]$組圓(為了方便說明，在此選擇了[圓$O_1$、圓$O_3$]與 [圓$O_3$、圓$O_5$]與…與[圓$O_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]-1}$、圓$O_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$])的結果。

(註：[ ]為高斯符號。)

同【性質 3】之證明方式，可得下面性質：

【性質 3-1】 已知五邊形$ABCDE$的 3 個弦切圓(圓O_1、圓O_3、圓O_5)共點於S，且圓O_1與圓O_3另一交點為P、圓O_3與圓O_5另一交點為Q。若且唯若五邊形$ABCDE$存在布洛卡點於S，則P點位於$\overline{BD}$上、Q點位於$\overline{AD}$上。(註：P、Q可能不存在，即兩圓相切)

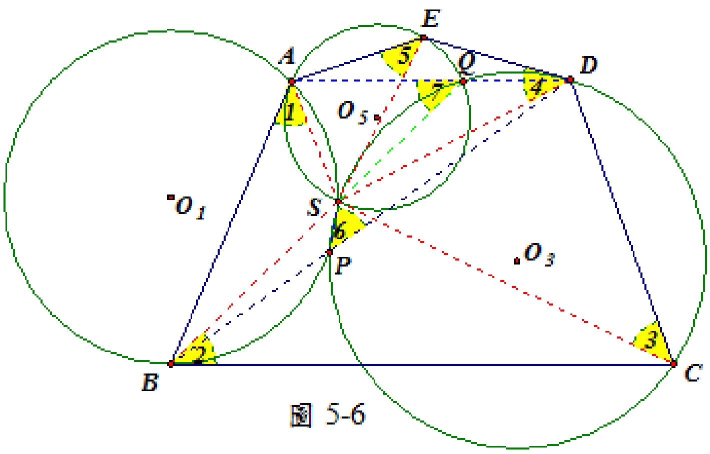


圖 5-6

【性質 3-2】 已知n邊形$A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$的$\left[\frac{n+1}{2}\right]$個弦切圓(圓$O_1$、圓$O_3$、圓$O_5$、…、圓$O_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$)共點於$S$，且圓$O_1$與圓$O_3$另一交點為$P_1$、圓$O_3$與圓$O_5$另一交點為$P_2$、…、圓$O_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]-1}$與圓$O_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$另一交點為$P_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$。若且唯若

(1) n為奇數，且n邊形$A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$存在旋心於$S$，則$P_1$點位於$\overline{A_2A_4}$上、$P_2$點位於$\overline{A_4A_6}$上、…、$P_{\frac{n-1}{2}}$點位於$\overline{A_{n-1}A_1}$上。

(2) n為偶數，且n邊形$A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$存在旋心於$S$，則$P_1$點位於$\overline{A_2A_4}$上、$P_2$點位於$\overline{A_4A_6}$上、…、$P_{\frac{n-2}{2}}$點位於$\overline{A_{n-2}A_n}$上。

利用【性質 3-2】，可作出n邊形旋心的尺規作圖，如下：

【應用一】n邊形旋心的尺規作圖流程

以四邊形為例

【步驟 1】作出一組弦切圓(圓O_1、圓O_3)

檢驗：(1) 若圓O_1、圓O_3無交點，則無旋心。(如圖 5-7)

(2) 若圓O_1、圓O_3有交點，則繼續【步驟 2】。

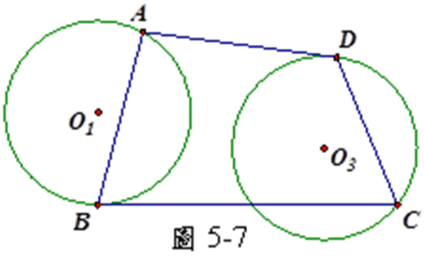


圖 5-7

【步驟 2】 連接$\overline{BD}$

檢驗：(1) 若圓O_1、圓O_3相切於P，且

① $\overline{BD}$未通過P點，則無旋心。(如圖 5-8)

② $\overline{BD}$通過P點，則P點為所求。(如圖 5-9)

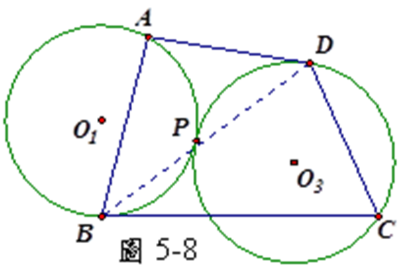


圖 5-8

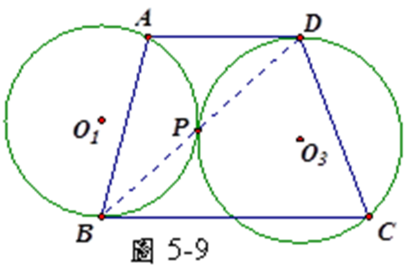


圖 5-9

(2) 若圓O_1、圓O_3交於P、Q兩點，且

① $\overline{BD}$未通過P點及Q點，則無旋心。(如圖 5-10)

② $\overline{BD}$ 通過 P 點，則 Q 點為所求。(如圖 5-11)

③ $\overline{BD}$ 通過 Q 點，則 P 點為所求。(如圖 5-12)

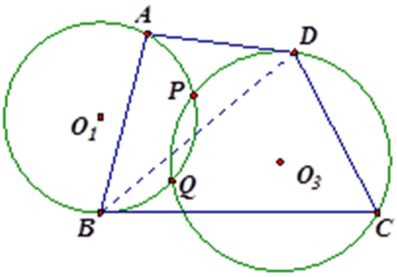


圖 5-10

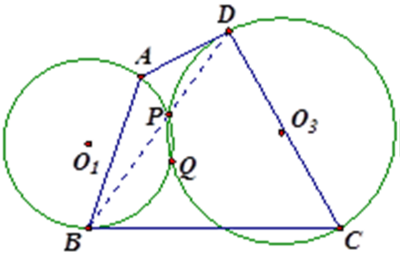


圖 5-11

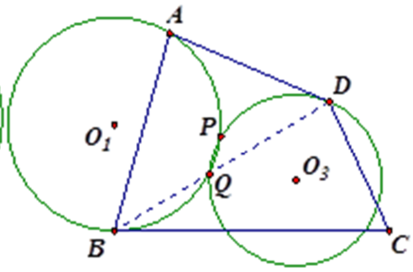


圖 5-12

以五邊形為例

【步驟 1】 作出三個弦切圓(圓 O_1、圓 O_3、圓 O_5)

檢驗：(1) 若圓 O_1、圓 O_3、圓 O_5 未共點，則無旋心。

(2) 若圓 O_1、圓 O_3、圓 O_5 共點(S)。，則繼續【步驟 2】。圖 5-13

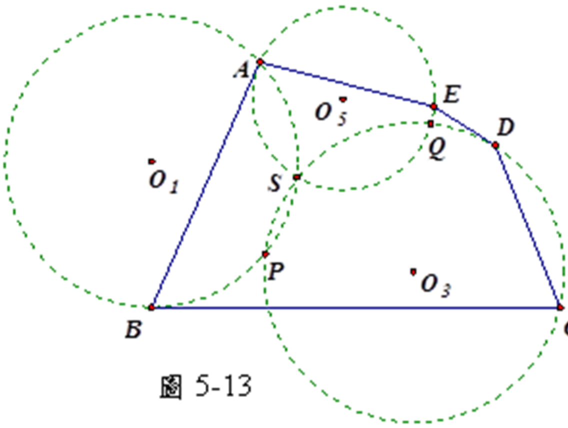


圖 5-13

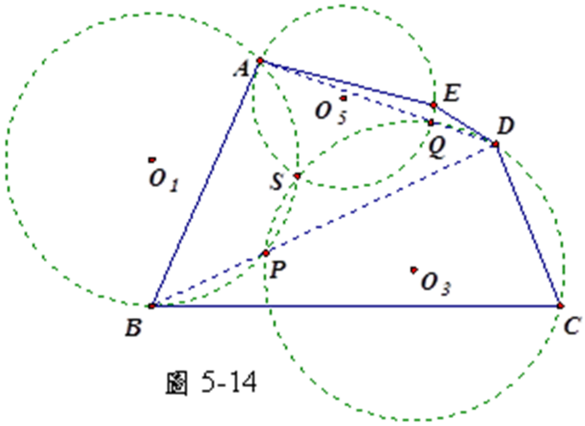


圖 5-14

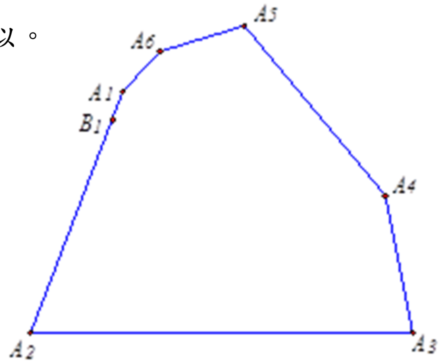
【步驟 2】 連接 $\overline{BD}$、$\overline{AD}$

檢驗：(1) $\overline{BD}$ 未通過 P 點或 $\overline{AD}$ 未通過 Q 點，則無旋心。

(2) $\overline{BD}$ 通過 P 點且 $\overline{AD}$ 通過 Q 點，則 S 點為所求。(如圖 5-14) #

註：上述過程，三個弦切圓(圓 O_1、圓 O_3、圓 O_5)尚有其他位置關係，但分析類似[四邊形]，只要利用[性質 3-2]，即可得出結果。

同樣的方式，可推廣出[n 邊形旋心的尺規作圖]，接著以前述的研究---「三角形的內接母子相似作圖」方法，即可作出內接母子相似。



以六邊形為例：

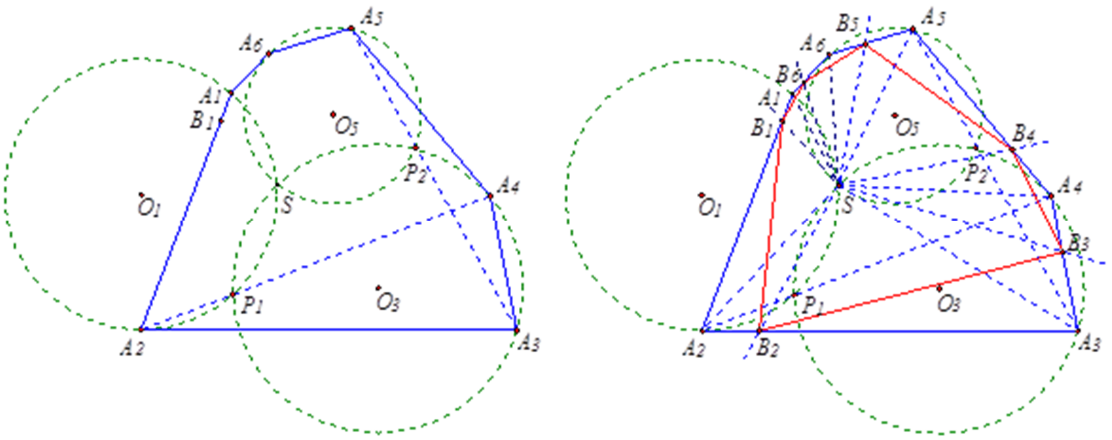
已知：六邊形 $A_1A_2\cdots A_6$

求作：過 $\overline{A_1A_2}$ 上一點 P，作六邊形 $A_1A_2\cdots A_6$ 的內接母子相似

簡略作法：

(1) 作出旋心 S

(2) 作 $\angle A_2SB_2=\cdots=\angle A_6SB_6=\angle A_1SB_1$，連接六邊形 $A_1A_2\cdots A_6$ 為所求。



從上述的作圖流程，可發現對於 $n(n\geq 4)$ 邊形，要存在有旋心的圖形，實際上是相對的少。因此，如何建構出具旋心的 n 邊形，對本研究顯然是重要的。以下，我們利用【性質 3-2】的結果，建構具旋心的 n 邊形：

【應用二】建構具旋心的 n 邊形

1.【已知】$\angle ABX$

【求作】如何建構具旋心的四邊形？

【作圖】(1) 作以 $\overline{AB}$ 為弦、$\overline{BX}$ 為切線的弦切圓(圓 O_1)

(2) 在 $\angle ABX$ 內部取一點 D (第 1 動點)

(3) 連 $\overline{BD}$，交 AB 弧於 P 點

(4) 過 D 點作 $\overline{AD}$ 垂線交 $\overline{PD}$ 中垂線於 O_3

(5) 作半徑 $\overline{O_3D}$ 之圓 O_3 交 $\overleftrightarrow{BX}$ 於 C [可能無交點(無解)、可能兩個交點(兩解)]

(6) 連接四邊形 $ABCD$ 為所求

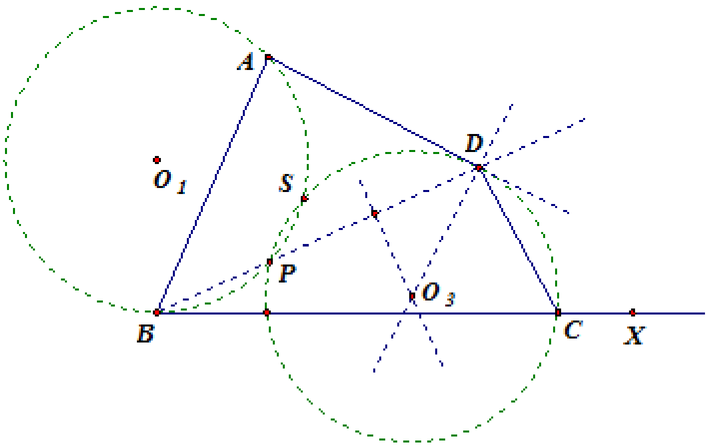


圖 5-15

討論：對於給定 $\angle ABX$ ，我們需要 1 個動點 D，才可建構出具旋心的四邊形。

2.【已知】$\angle ABX$

【求作】如何建構具旋心的五邊形？

【作圖】(1) 作以 $\overline{AB}$ 為弦、$\overline{BX}$ 為切線的弦切圓(圓 O_1)

(2) 在 $\angle ABX$ 內部取一點 D (第 1 動點)

(3) 連 $\overline{BD}$，交 AB 弧於 P 點

(4) 作 $\overline{PD}$ 中垂線，於中垂線上取一點 O_3 (第 2 動點)

(5) 作半徑 $\overline{O_3D}$ 之圓 O_3 交 $\overleftrightarrow{BX}$ 於 C

[可能無交點(無解)、可能兩個交點(兩解)]

(6) 作 $\overline{AD}$ 交圓 O_3 於 Q

(7) 作 ΔASD 之外接圓(圓 O_5) (其中：S 為圓 O_1、圓 O_3 之另一交點)

(8) 過 D 點作 $\overline{O_3D}$ 之垂線交圓 O_5 於 E

[可能無交點(無解)、可能兩個交點(兩解)]

(9) 連接五邊形 $ABCDE$ 為所求

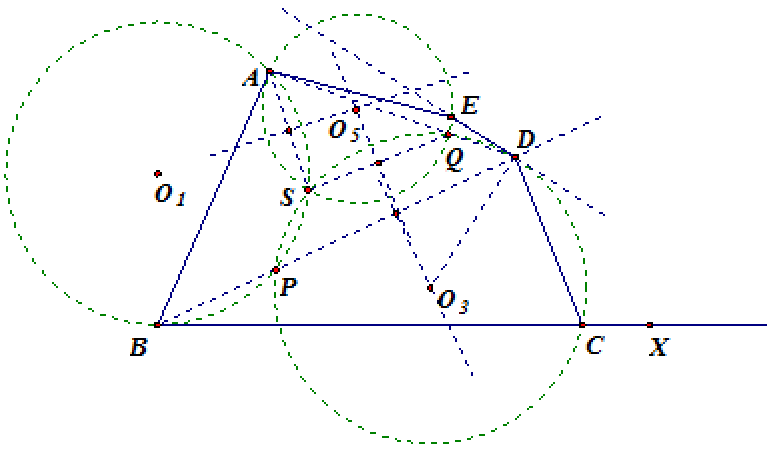


圖 5-16

討論：對於給定 $\angle ABX$，我們需要 2 個動點 D、O_3，才可建構出具旋心的五邊形。

3.【已知】$\angle ABX$

【求作】如何建構具旋心的六邊形？

【作圖】(1) 作以 $\overline{AB}$ 為弦、$\overline{BX}$ 為切線的弦切圓(圓 O_1)

(2) 在 $\angle ABX$ 內部取一點 D (第 1 動點)

(3) 連 $\overline{BD}$，交 AB 弧於 P 點

(4) 作 $\overline{PD}$ 中垂線，於中垂線上取一點 O_3 (第 2 動點)

(5) 作半徑 $\overline{O_3D}$ 之圓 O_3 交 $\overleftrightarrow{BX}$ 於 C

[可能無交點(無解)、可能兩個交點(兩解)]

(6) 作以 $\overline{AS}$ 為弦、$\overline{AB}$ 為切線的弦切圓(圓 O_6)

(其中：S 為圓 O_1、圓 O_3 之另一交點)

(7) 在圓 O_6 上取一點 F (第 3 動點)

(8) 連 $\overline{DF}$，交 PD 弧於 Q 點

(9) 作 ΔFSQ 之外接圓(圓 O_5)

(10) 過 D 點作 $\overline{O_3D}$ 之垂線交圓 O_5 於 E

[可能無交點(無解)、可能兩個交點(兩解)]

(11) 連接六邊形 $ABCDEF$ 為所求

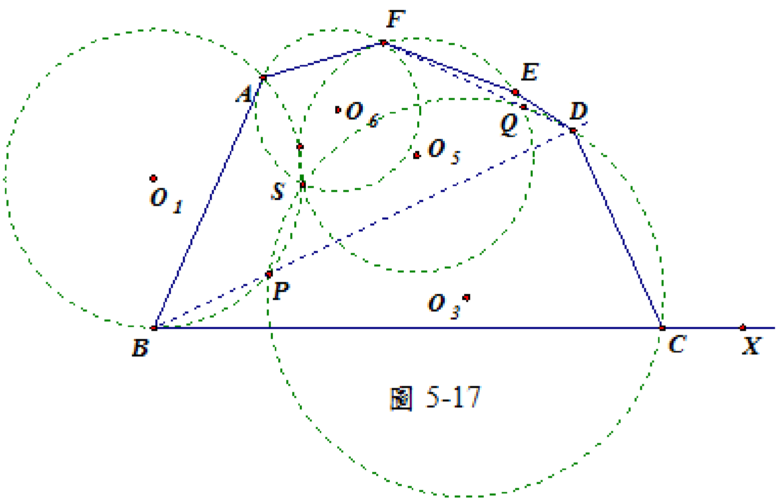


圖 5-17

討論：對於給定 $\angle ABX$，我們需要 3 個動點 D、O_3、F，才可建構出具旋心的五邊形。 #

如此造下去，可得

結論：對於 $n(n \geq 4)$ 邊形，當給定 $\angle ABX$，我們需要 $(n-3)$ 個動點，才可建構出具布洛卡點的 n 邊形。

肆、結論

一、凸n邊形旋心的性質

1. 三角形必有旋心，邊數 4 以上的多邊形則不一定存在旋心。

2. 正n邊形的旋心，落在其中心位置。

3. 任意凸n邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的旋心具有以下性質：

(1) 外角性質：$\angle A_1SA_2=\angle A_2$ 的外角、$\angle A_2SA_3=\angle A_3$ 的外角、⋯ $\angle A_nSA_1=\angle A_1$ 的外角。

(2) 切線性質：$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 為 ΔA_1SA_2 的外接圓切線、$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 為 ΔA_2SA_3 的外接圓的切線、⋯、$\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 為 $\Delta A_{n-1}SA_n$ 的外接圓的切線。

(3) 內接母子相似性質：以 S 為旋轉中心，將 $\overleftrightarrow{SA_1}$、$\overleftrightarrow{SA_2}$、⋯、$\overleftrightarrow{SA_n}$ 逆時針等角度旋轉，且分別與 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_nA_1}$ 交於 B_1、B_2、⋯、B_n，則n邊形 $B_1B_2\cdots B_n\sim n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$。

(4) n邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 為n邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的內接母子相似圖形，則兩n邊形具有相同旋心。

(5) 若n邊形存在內接母子相似圖形，則此n邊形必有旋心。

二、旋心的推廣與應用

1. 任意凸n邊形若存在旋心，則可利用旋心作出

(1) 過邊上一點的內接母子相似圖形。

(2) 過內部一點的內接母子相似圖形。

(3) 最小內接母子相似圖形。

2. 特殊四邊形存在旋心的要件與相關結果：

(1) 平行四邊形 $ABCD$ 中，若 $\frac{\overline{BA}}{\overline{BS}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CS}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{DS}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AS}}=\sqrt{2}$，則必有旋心。

(2) 非正方形的長方形與菱形無旋心，即無內接母子相似圖形。

(3) 梯形 $ABCD$(其中 $\overline{AD}//\overline{BC}$)若存在旋心，則：

①S 落在其中一條對角線上。

②兩腰與旋心所形成的外接圓圓 O_1、圓 O_3，兩圓外切。

③$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$。

(4) 等腰梯形若滿足對角線的長度等於腰長的 $\sqrt{2}$ 倍，則必有旋心且旋心在對角線中點上。

(5) 鳶形 $ABCD$，當 $\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$，則鳶形必有旋心。

(6) 四邊形 $ABCD$ 對角線交於 E，若 $\angle ABC=\angle BCD=\angle AEB$，則此四邊形必有旋心。

三、多邊形內接母子相似圖形之一般化

1. 若 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$ 存在旋心 S，則 S 必存在於圓 O_1、圓 O_2、圓 O_3、…、圓 O_n 之圓周上，即 n 個圓共點於 S。其中：圓 O_1 為以 $\overline{A_1A_2}$ 為弦、$\overline{A_2A_3}$ 為切線之圓；圓 O_2 為以 $\overline{A_2A_3}$ 為弦、$\overline{A_3A_4}$ 為切線之圓；...；圓 O_n 為以 $\overline{A_nA_1}$ 為弦、$\overline{A_1A_2}$ 為切線之圓。

2. 已知 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$ 的 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 個弦切圓(圓 O_1、圓 O_3、圓 O_5、...、圓 $O_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$)共點於 S，且圓 O_1 與圓 O_3 另一交點為 P_1、圓 O_3 與圓 O_5 另一交點為 P_2、……、圓 $O_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]-1}$ 與圓 $O_{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$ 另一交點為 $P_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$。若且唯若

(1) n 為奇數，且 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$ 存在旋心於 S，則 P_1 點位於 $\overline{A_2A_4}$ 上、P_2 點位於 $\overline{A_4A_6}$ 上、……、$P_{\frac{n-1}{2}}$ 點位於 $\overline{A_{n-1}A_1}$ 上。

(2) n 為偶數，且 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$ 存在旋心於 S，則 P_1 點位於 $\overline{A_2A_4}$ 上、P_2 點位於 $\overline{A_4A_6}$ 上、……、$P_{\frac{n-2}{2}}$ 點位於 $\overline{A_{n-2}A_n}$ 上。

3. 對於 $n(n\geq 4)$ 邊形，當給定 $\angle ABX$，我們需要 $(n-3)$ 個動點，才可建構出具旋心的 n 邊形

伍、討論

經過資料的查詢，我們發現「旋心」與文獻上的「布洛卡點」的定義相同，不過我們也並未發現有關於以布洛卡點作出內接母子相似圖形的研究。

在此特別強調，我們一開始的研究方向是「多邊形內接母子相似」的作圖與性質探討，並非以探討布洛卡點的性質與應用來作為研究方向。

因此，**在本說明書的開頭也並未引進「布洛卡點」，而使用之前的稱呼「旋心」，是依照我們研究所發現的順序進行撰寫，也為了再次強調我們的研究為「多邊形內接母子相似」的討論，並非布洛卡點。**

陸、參考資料

1. 陳冒海，國中數學第五冊，南一書局
2. 郭志中、秦睿謙、詹逸傑、郭名旗，內接相似三角形的尺規作圖，中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
3. 黃胤勛、李易哲、劉奕辰、王昱翔，形中有形，中華民國第四十八屆中小學科學展覽會

評語

作者將多邊形地內接母子相似圖形的存在問題轉換成旋心的存在問題,據此,旋心是本作品研究的重點，對於三角形旋心的探討非常完整，四邊形的探討，對於特殊四邊形，由邊及角的性質，給出旋心存在的充分條件，並且給出內接母子相似圖形的尺規作圖。本作品目錄，將特殊四邊形地內接母子相似圖形放在第四節，三角形旋心的應用之下是不合理的編排。