

2012 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

編號：010038

作品名稱

腦筋打結的滋味—猜帽上數邏輯推理遊戲

得獎獎項

大會獎：四等獎

作者姓名：黃蕾而

就讀學校：臺北市立第一女子高級中學

指導教師：王嘉慶

關鍵字：帽上數、候選數、帽集平面

作者簡介



我是黃蕾而，現在就讀北一女中二年級。我喜歡看書、隨筆、聽音樂，最愛的還是思考數學，享受解題的樂趣。

自從小學接觸數學競賽後，就愛上了數學這片天空，透過競賽，我學到的不只是數學，更結交了許多同好，也有著與一般同學不同的經歷。平時我也會動手做東西，像是一些摺紙或模型的遊戲。除此之外，我也喜歡打橋牌，千變萬化的牌局讓我深深著迷於動腦的快樂。

第一次做科展的過程，讓我學習到很多，也磨練了我的耐心和毅力。此外，我也看到了有別於競賽的另一個有趣的天地。

摘要

本研究受 2004 IWYMIC 啟發，此題可追溯自二十世紀數篇以「know/don't know problem」為題的論文，共同背景如下：

有數個邏輯學家分別戴上寫有特定數值的帽子。他們會完美的推理且不會說謊。作為玩家，他們輪流發言並試圖推斷自己的帽上數。

我們致力於和帽上數範圍、發言順序、構句相關的變形，透過數論技巧求解並以「相鄰矩陣」表示過程。另對原題缺點提出「候選數」之概念、改進規則；而找到能代替複雜推理的簡單操作後，我們分析、證明了它們的特殊性質。

應用上，玩家產生對話的過程可作為雜湊函數使用。未來，本研究可再推廣至更多更自由的構句、納入三個玩家、或允許誤導等等，以豐富遊戲。

Abstract

This study originated from a problem in <Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition (IWYMIC), 2004>. After searching, we found some papers written in the 20th century, and they have the same background:

There are several logicians with specific numbers on their hats. They make perfect inferences, and aren't allowed to tell a lie. With the information of the others' number, they are asked to find out their own number as soon as possible.

There are many promotions based on this statement. In the study, we used number theory to find out all possible answers, and graphs to show the process. Also, there is a problem in the original puzzle that in most cases, the game won't come to an end forever. So, we built up some new rules to solve it, analyzed, and proved their features.

In the future, we would like to research in the case of adding more logicians, more interesting dialogue, or adding liars into the game.

一、動機

筆者第一次看到這個題目是第五屆青少年數學國際城市邀請賽的填充第五題，以下是它的原命題：

已知 x 與 y 皆為大於 1 的正整數。現將此兩數之積寫在 A 頭頂的帽子上，將此兩數之和寫在 B 頭頂的帽子上。他們兩人都看不見自己帽子上的數，但都可以看到對方帽子上的數。他們分別輪流說出以下的對話：

B：我不知道我帽子上的數。

A：我也不知道我帽子上的數。

B：我依然不知道我帽子上的數。

A：我現在知道我帽子上的數了。

A、B 兩人都是飽學的邏輯學家，他們不會推理錯誤，而且說的都是真話。請問 A、B 帽子上所寫的數字分別是多少？

當時筆者和幾位同學一起解決這個問題，後來又找到一些資料，裡面有這個命題的變形，包括：不同人先說話、改變 x 、 y 取值範圍、推論對方反應。

不同人先說話

已知 x 與 y 皆為大於 1 的正整數。現將此兩數之積寫在 A 頭頂的帽子上，將此兩數之和寫在 B 頭頂的帽子上。他們兩人都看不見自己帽子的上的數，但都可以看到對方帽子上的數。他們分別輪流說出以下的對話：

A：我不知道我帽上的數。

B：我也不知道我帽上的數。

A：我依然不知道我帽上的數。

B：我現在知道我帽子上的數了。

改變 x 、 y 取值範圍

已知 x 與 y 皆為正整數。現將此兩數之積寫在 A 頭頂的帽子上，將此兩數之和寫在 B 頭頂的帽子上。他們兩人都看不見自己帽子上的數，但都可以看到對方帽子上的數。他們分別輪流說出以下的對話：

B：我不知道我帽上的數。

A：我也不知道我帽子上的數

B：我依然不知道我帽上的數。

A：我現在知道我帽子上的數了。

推論對方反應

已知 x 與 y 皆為大於 1 的正整數。現將此兩數之積寫在 A 頭頂的帽子上，將此兩數之和寫在 B 頭頂的帽子上。他們兩人都看不見自己帽子的上的數，但都可以看到對方帽子上的數。他們分別輪流說出以下的對話：

A：你無法推斷出你帽子上的數

B：我不知道我帽子上的數。

A：我現在知道我帽上的數了。

這引起了我的興趣，於是便決定將這一系列的題目做為研究主題。

二、目的

在本研究中，我們希望可以分析不同的條件對於推理過程的影響，以及解與解之間的關聯性。

而除了原本的命題之外，我們也可以改變邏輯學家回答問題的方式，不使兩人輪流說話，而是讓他們同時說話，這樣一來遊戲就會變得比較公平。

命題

已知 x 與 y 皆為大於 1 的正整數。現將此兩數之積寫在 A 頭頂的帽子上，將此兩數之和寫在 B 頭頂的帽子上。他們兩人都看不見自己帽子的上的數，但都可以看到對方帽子上的數。

每隔一段時間鈴響，此時他們都要說出是否知道自己的帽上數：

第一次鈴響：兩人都說：我不知道我帽上的數。

第二次鈴響：兩人都說：我還是不知道我帽子上的數。

第三次鈴響：A：我仍然不知道我帽子上的數。

B：我現在知道我帽上的數了。

因此在本研究中，我們嘗試著找出以下幾個特性：

(一)、說話次數對解的影響。

(二)、不同變形與解之間的關聯。

(三)、不同的對話方式對解的影響。

(四)、各組解本身的性質及之間關聯性。

三、方法

為了方便之後的研究，在這裡統合所有的命題，並給予新的故事背景。

命題

✚ 兩個邏輯學家在數學年會玩對賭。遊戲的過程如下：

由公正的邏輯大師 Christina 榮譽教授拿出兩頂帽子，並且選定兩個數字 x 、 y 。他將這兩個數字的「和」寫在一頂帽子上，並給教授 Prudence 戴著；再將這兩個數字的「積」寫在另一頂帽子上，並給教授 Sam。

✚ 比賽規則是：

- (1) 兩個人都知道自己帽上的數是「和」還是「積」。
- (2) 他們都看得到對方帽子上的數，但不知道自己帽子上的數
- (3) 不得說謊及隱瞞事實。
- (4) 先猜出自己的帽上數者，判他獲勝。

✚ 這個遊戲看似公平，但是 Christina 教授不希望賭博傷和氣，所以想要在所有
人之前控制比賽結果，讓兩位教授輪流贏。

分析

所以 Christina 教授要先確定遊戲能在有限時間內結束，然後還要知道怎麼寫數字會讓誰贏。另外，他也設計了不同的遊戲前提，如改變取值範圍、要求一位教授嘗試猜測對方反應等等，使這個遊戲玩起來更加有趣。

整體來說，Christina 希望能確認在所有情況下的「勝利條件」。

四、過程

這裡包括了所有的推導及證明。

在開始討論這些命題前，我們首先定義一些名詞。

定義 - 類質數

「質數」約定俗成的定義是：

一個大於 1 的自然數中，除了 1 和此整數自身外，無法被其他自然數整除的數。

然而，因為不同的命題有不同的範圍限制，所以在這裡定義「類質數」：

「當一個數 k 在命題要求的範圍內，至多只能找到 1 和自身兩個因數」，則稱 k 為「類質數」。

特別地，在這樣的定義下，1 也屬於類質數之一，且所有的質數都是類質數。

實例

若範圍取所有正整數，則 4 的因數有 1、2、4，因此 4 在這個範圍下不是類質數。

若範圍取大於 2 的整數，則 4 的因數只有本身，因此 4 在這個範圍下是類質數。

定義 - 分割

若 k 可在題目要求的範圍內表示成兩個數 a 、 b 的和，便稱 $a+b$ 為 k 的一組分割。

另外，當一個數「可以」表示成兩個質數之和時，則稱這個數為「哥德巴赫數」。

假設「哥德巴赫猜想」成立，則所有大於等於 4 的偶數都是哥德巴赫數。

所以在此定義：當一個數可以表示成兩個類質數的和時，便稱這個數為「假哥德巴赫數」。而哥德巴赫數必為假哥德巴赫數。

實例

若範圍取所有正整數，則 4 的分割就有 $1+3$ 和 $2+2$ 兩組。

而 4 可分割成 2 和 2 兩個類質數相加，因此 4 為假哥德巴赫數。

定義 - 分解

若 k 可在指定的範圍內表示成兩個整數 a、b 的積，則稱 $a \times b$ 為 k 的一組分解。

另外，當一個數「僅能」分解成兩個質數的積時，則這個數為「半質數」。

類似的，定義「假半質數」是指「在給定範圍內僅有一組分解的數」。

實例

在範圍取所有正整數時，4 的分解有兩組： 1×4 和 2×2 ，因此 4 在此範圍不是假半質數。

而在範圍為大於 1 正整數下，4 的分解僅有一組 2×2 ，所以 4 在這個範圍下是假半質數。

定義 - 解

把符合命題的數稱為一組「解」。

「解」的形式會以由兩個正整數組成的數對來表現。

因為 Christina 寫在帽上的兩個數分別為兩數之積與兩數之和，所以我們讓 a 為兩數之積，b 為兩數之和，所以(a,b)即代表(Sam 的帽上數,Prudence 的帽上數)。在本報告中，所有以數對呈現的都是「解」。

定義 - 初始解

在接下來的命題之中，會發現有些命題的後續發展將會利用到前一組解，形成一種類似遞迴的關係。若有這種情況，我們稱一個命題的第一個解為「初始解」。初始解可能僅有一組，也有可能有多組。

定義 - 步

在推導過程中，「一次回答」稱之為「一步」，包含最後「我知道我帽子上的數了」也算是一步。

(一) 基礎命題

基礎命題(引用青少年數學邀請賽的命題)，其實相當於 Christina 讓 Prudence (看到積)先發表看法，而範圍限制就等於將 Christina 選定的 $x \cdot y$ 限定為大於 1 的整數。

分析

我們先從最簡單的情況開始討論。

一步

- (1) 若 Prudence (看到積) 在看到對方的數字時，就知道自己的帽上數，則這個「積」是個「假半質數」。否則這個數字的分解就會有兩組以上，會使他無法判斷 Christina 所放的數字是哪一組。

說明一點：若某位教授說了一句話後，另一個回答：「我知道了。」答話的人必須肯定自己帽子上的數才能回答。但是對只有聽到對話的人來說，會有很多種可能導致這個對話過程。對知道答案的教授來說是「唯一解」，但對我們來說卻會有「多組解」，這是因為教授可以用看到的對方帽子上的數作為條件。

兩步

- (1) 如果 Prudence 無法推斷出自己帽上的數，表示 Sam (看到和) 帽上的數不是個假半質數。
- (2) 換到 Sam 的角度來看，他從上一步得知帽上數不是假半質數，再看看對方的帽上數，就可以推斷出自己的帽上數，這表示：對方的數的分割「只有一組」不是兩個類質數。
- (3) 經由推斷可得知這兩個帽上數只能是(12,7)一組。下面將說明這個事實。

說明

- ⊕ 當 $x+y=7$ 時，7 有兩種分割 $2+5$ 和 $3+4$ ，此時 $xy=10$ 或 12 。但 10 是假半質數，12 不是。
- ⊕ 在(12,7)的情況下，Prudence 看到 12 時，無法判斷分解是 2×6 或是 3×4 ，

因此會回答不知道。

- Sam 看到 7，知道他的分割是 2+5 或 3+4。如果自己的帽子上是 10，對方一看到 10 就會回答「知道了」，所以自己的帽子上必定是 12。

證明

- 當 $x+y=4$ 時， $x+y$ 僅有一種分割為 2+2，此時 $xy=4$ 。

但 4 為假半質數，Prudence 看到時回答「我知道了」，故矛盾。

- 當 $x+y=5$ 時， $x+y$ 亦僅有一組分割 2+3，此時 $xy=5$ 。

但 5 也是個假半質數，故矛盾。

- 當 $x+y=6$ 時， $x+y$ 有兩種分割 2+4 和 3+3，此時 $xy=8$ 或 9。

無論是哪一種分割，8 和 9 都是假半質數，故矛盾。

- 當 $x+y \geq 8$ 時， $x+y$ 至少有兩種分割的方法「 $4+(x+y-4)$ 」和「 $6+(x+y-6)$ 」，但 4 和 6 都不是類質數，因此 $x+y$ 至少有兩種「不是由兩個類質數組成」的分割，這與我們的推論不合。

經由上面推導證明了這個推論。下面是這段證明的表格。

表格

兩數之和	和的分割	兩數之積	積的分解
4	2+2	4	2×2
5	2+3	6	2×3
6	2+4	8	2×4
	3+3	9	3×3
<u>7</u>	2+5	10	2×5
	<u>3+4</u>	<u>12</u>	<u>3×4</u>
$k(\geq 8)$	$4+(k-4)$	$4k-16$	$2(2k-8)$ $4(k-4)$
	$6+(k-6)$	$6k-36$	$2(3k-18)$ $3(2k-12)$ $6(k-6)$

分析

回到上一段分析的結尾，我們知道若 Prudence 說不知道，而 Sam 推論出帽上數時，這兩個數字必定是 3 和 4，而兩人的帽上數分別是 12 和 7。

三步

如果第二步時，Sam 說的是「我不知道」，這表示：和有不只一組的「分割」是由兩個非假質數組成。經由推論可知此時兩人的帽上數只會是(12,8)一組。

說明

- ✦ 當 Prudence 看到 12 時，因為它的分解有 2×6 和 3×4 兩種，他無法判斷自己的帽上數是 8 或是 7，因此會回答不知道。
- ✦ Sam 看到 8 時，知道它的分割是 $2+6$ 、 $3+5$ 和 $4+4$ 三種，如果自己的帽上數是 15 的話，則對方會回答他知道了，因此不會是 15。但他仍無法確定自己的帽上數是 12 或 16，所以還是會回答不知道。
- ✦ Prudence 看到了 12，由上一段分析的說明知道若他的帽上數是 7，則對方必定會回答知道了，所以自己的帽上數僅有可能是 8。

分析

上限

- ✦ 經由前面的分析，我們得知初始解為(12,7)，再由討論，得知下一組為(12,8)。類似上面的推論，我們可以推知接下來的發展會是：
(16,8)、(16,10)、(24,10)三組。
- ✦ 但基礎命題至多只能到五個「不知道」。在第六個不知道後，輪到 Prudence 說話，他看到 24 時會無法判斷是 2×12 或 3×8 ，亦即無法判斷自己的帽上數是 14 或 11，如此一來後面的命題便無法繼續進行下去了。

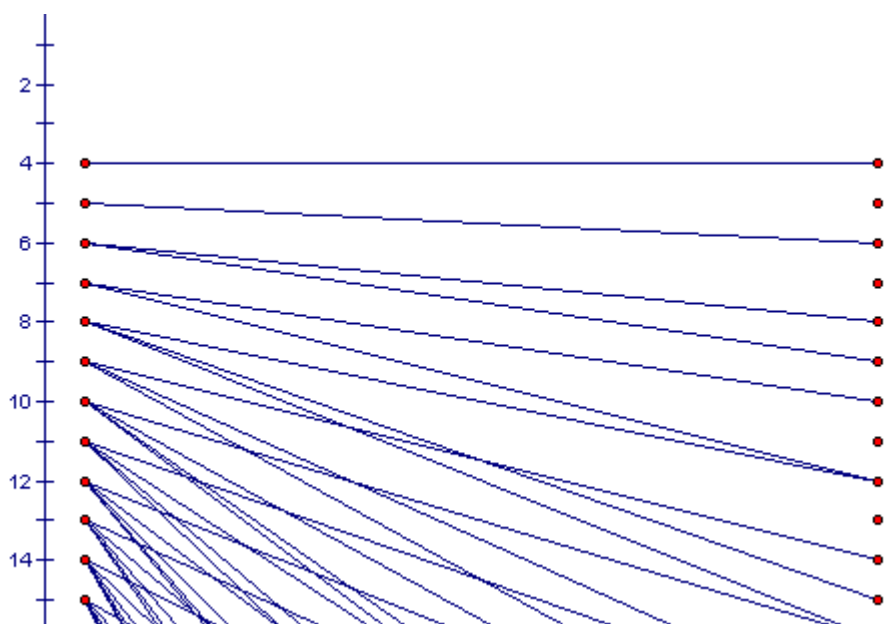
至此，我們討論完基礎命題的所有情況。

表格 - 解

	兩數之積	兩數之和
一步	-	
兩步	12	7
三步	12	8
四步	16	8
五步	16	10
六步	24	10

以上表格僅列出唯一解的情況。

圖表



(二) 不同人先說話

在這個情況下，相當於 Christina 讓 **Sam (看到和) 先說話**，而取值範圍則和基礎命題一樣，都是限定在 x 、 y 皆大於 1 的情況下。

分析

類似於基礎命題的做法，我們由「一步完成」開始討論。

一步

- (1) 如果 Sam 在第一眼看到「和」時，就能知道自己的帽上數，表示這個「和」僅有一種分割的方法。如此一來，這個數字必定是 $4(=2+2)$ 或 $5(=2+3)$ 。

兩步

- (1) 如果 Sam 說「不知道」，表示和的分割方法不只一種，亦即不是 4 或 5。
- (2) Prudence(看到積)得知上面這個訊息後，看到對方的數字便說「知道了」，這顯示：這個「積」除了 $2 \times 2(=4)$ 和 $2 \times 3(=6)$ 之外只會有一種分解方式，所以它必定是個假半質數。特別注意到的是，4 和 6 本身也是假半質數，也就是說，如果換成 Prudence 先說話，仍然不會影響 Sam 在第一步時，知道或不知道的結果。

多步

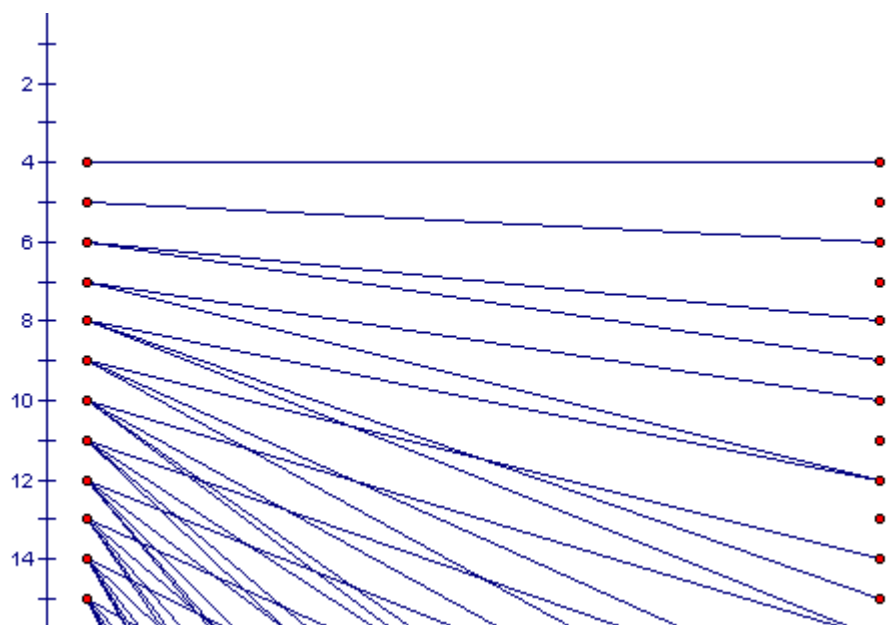
- (3) 當 Prudence 說「他不知道」時，Sam 所得知的訊息是「我的帽上數不是假半質數」，至此會發現：後續發展會跟基礎命題一樣，唯一的差別就是 Sam 有沒有說了那句「知道」或「不知道」。這表示，在這個變形中的第一步其實是無關緊要的。

到這裡，我們討論完了第一種變形。

表格 - 解

	兩數之積	兩數之和
一步	-	-
兩步	-	-
三步	12	7
四步	12	8
五步	16	8
六步	16	10
七步	24	10

圖表



(三) 改變取值範圍

Christina 這回又出了第三個主意。他把 x 、 y 的選取範圍改變成任意正整數，其餘的規定則依照基礎命題。

分析

一步

- (1) 當 Prudence (看到積) 第一眼看到積時，便立刻知道自己的帽上數，表示他看到的數只有一種分解方法。而在取值範圍為所有正整數的情況下，只有類質數： 2 、 3 、 5 、 7 、 $\dots$ ，符合這個條件。

兩步

- (1) 若 Prudence 說的是「不知道」，表示這個積不會是類質數。所以和的分割必須剛好有兩種，而其中一種是「 1 +類質數」。
- (2) 而符合條件的僅有 $(4,4)$ 一組解。這也是唯一一組初始解。

說明

- ⊕ 當 Prudence 看到 4 時，因為 4 有兩種分解 1×4 和 2×2 ，所以他無法確定自己的帽上數是 5 或者 4 。
- ⊕ Sam (看到和) 看到 4 時，因為 4 有兩個分割 $1+3$ 或 $2+2$ ，所以自己的帽上數可能是 4 或 3 。但如果自己的帽上數是 3 ，對方一定立刻就知道，故自己的帽上數必定是 4 。

證明

- ⊕ 當 $x+y=2$ 時，僅有一種分割為 $1+1$ 。
此時 Prudence 看到的是 1 ，因為分解方法只有一種 1×1 ，所以便知道自己的帽上數是 2 。

- ⊕ 當 $x+y=3$ 時，也僅有一組分割是 $1+2$ 。
此時 Prudence 看到的是 2，2 只有一種分解方法為 1×2 ，所以也可以馬上知道自已的數字是 3。
- ⊕ 當 $x+y=5$ 時，有兩組可能的分割 $1+4$ 和 $2+3$ 。但這不符合分析中的要求。
- ⊕ 當 $x+y \geq 6$ 時，至少會有三種以上的不同分割，其中至多只會有一組是「 $1+\text{類質數}$ 」，所以這些全部都不會是初始解。

表格

兩數之和	和的分割	兩數之積	積的分解
2	1+1	1	1×1
3	1+2	2	1×2
4	1+3	3	1×3
	<u>2+2</u>	<u>4</u>	<u>1x4</u>
			2×2
5	1+4	4	1×4
			2×2
	2+3	6	1×6
			2×3
$k(\geq 6)$	$2+(k-2)$	$2k-4$	$1(2k-4)$
			$2(k-2)$
	$4+(k-4)$	$4k-16$	$1(4k-16)$
			$2(2k-8)$
			$4(4k-4)$

分析

三步

如果第二步的結果是不知道，類似於基礎命題的推導，可知若接下來 Prudence 說知道，則兩人的帽上數必定是(4,5)。

說明

- ⊕ 當 Prudence 看到 4 時，他會知道自已的帽上數可能是 $5(=1+4)$ 或 $4(=2+2)$ 。
但無法確定，因此會回答不知道。

- ✦ Sam 看到 5 時，會知道自己的帽上數有可能是 $4(=1\times 4)$ 或 $6(=2\times 3)$ 。
無論自己的帽上數是 4 或 6，對方一開始都會說不知道，所以他也無法確定自己的數字。
- ✦ Prudence 聽到對方說不知道，推知：如果自己的帽上數是 4，對方就會知道他自己的帽上數是 4。所以自己的帽上數只能是 5。

分析

上限

同基礎命題的發展模式，我們可以知道接下來的解會是 (6,5)、(6,7)，而這也是在這個變形的最後一組解。

第五步時，Prudence 會推知自己的帽上數有可能是 $10(=2\times 5)$ 或 $12(=3\times 4)$ ，但他無法確定是哪一個，所以這個命題的發展至多只有四步。如果第四步仍沒有人知道，則這個變形就永遠不會結束。

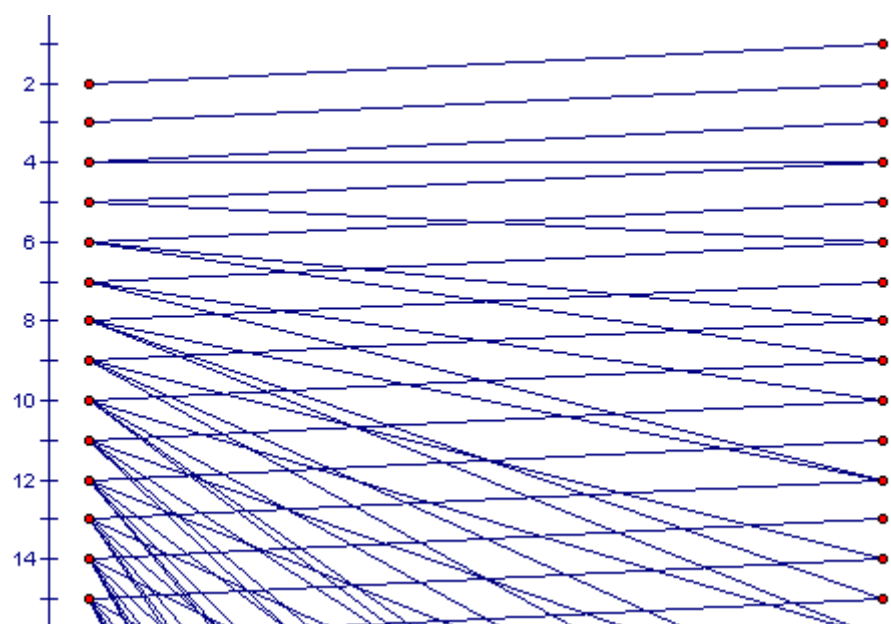
至此，我們完成了第二個變形的推導。

表格 - 解

	兩數之積	兩數之和
一步	-	
兩步	4	4
三步	4	5
四步	6	5
五步	6	7

以上表格僅列出唯一解的情況。

圖表



(四) 推論對方的反應

在 Christina 幫兩個教授戴上帽子後，並叫 Sam（看到和）先說話。他看了看對方的帽子，想了一下，便說：「雖然我不知道我的帽上數是多少，但我敢肯定，當你第一眼看到我的帽上數時，絕對不知道你的帽上數是多少。」Christina 覺得這個回答很有趣，便決定嘗試找出他的發展。

在開始這段的推導之前，我們需先定義幾個名詞。

定義—偶奇分解

「偶奇分解」指的是將一個偶數分解成一個偶數和一個奇數，這樣的好處是他們的和是奇數，可以排除「偶數必定是假哥德巴赫數」的討論情形。

定義—二奇分解

「二奇分解」是偶奇分解中的一個特例，當一個偶數分解成「二的次方數」和一個「奇數」時，我們把這樣的分解稱為「二奇分解」。

定義—雙質分割

當一個數字分割成兩個類質數時，我們稱這個分割方式為「雙質分割」。

若哥德巴赫定理為真，則所有大於等於4的偶數都有雙質分割。

另外，所有有雙質分割的奇數必定表示成「2+類質數」的形式。

定義—二質分割

若可將一個數字分割成「二的次方數」和「奇半質數」，則稱這個分割方法為「二質分割」。

分析

我們先來看看在什麼情況下教授會說出這句話。

一步

- (1) 若 Sam (看到和) 看到的是一個「假哥德巴赫數」, 那他就無法做出這個判斷。

當他看到一個「假哥德巴赫數」時, 那個數會有一個分割是「兩個類質數相加」, 他頭上的數字就有可能分解成兩個類質數, 使對方一看到就能推知。

兩步

- (1) 當 Sam 說「你無法推斷你的帽上數」, 則 Prudence 就知道: 自己的帽上數無法分割成兩個類質數。若哥德巴赫猜想為真, 所有大於等於 4 的偶數都可以分割成兩個質數, 而質數必定為類質數, 所以自己的帽上數肯定不是偶數。

- (2) 這也表示, 這個積必定不會是奇數(因奇數的分解必為兩個奇數, 如此一來和就只能是偶數。)

而偶數分解時可能會是兩偶數相乘, 這也矛盾。

因此只有偶奇分解可行。此時, 若 Prudence 在看到積時就知道自己的帽上數, 代表這個積的偶奇分解僅有一組。

所以被 Christina 選到的兩個數, 其中之一必定是 2 的次方數, 另一個則是個類質數, 且這兩個數的和沒有雙質分割。

表格

我們以表格的形式來看兩步的情況。因為分解必為一奇一偶, 所以只需討論和為奇數的情況。而因為奇數的雙質分割必為「2+類質數」, 因此這個狀況也可以排除。

兩數之和	二質分割	兩數之積
11	4+7	28
17	4+13	52
23	4+19	76
	16+7	112
27	4+23	92
	8+19	152
	16+11	176
29	16+13	208
35	4+31	124
	16+19	304
	32+3	96
37	8+29	232
	32+5	160
41	4+37	148
47	4+43	172

以上表格僅列出和小於50的情況

分析

以上表格中所有的數據組都是兩步完成的解，因為這些積的偶奇分解只有一種(即二奇分解)，且他們的分解的和都不可能有雙質分割。

我們取其中的(208,29)為例來說明推導的過程。

說明

✦ Sam 看到 $29(=2+27)$ 時，因 29 並不是個假哥德巴赫數，所以他可以肯定的說出：「你肯定不知道你的帽上數」。

✦ Prudence 從他這句話推知：自己的帽上數並不是個假哥德巴赫數，而他看到 208 時，將其分解得到：

$$\begin{aligned}
 208 &= 2 \times 104 & 2+104 &= 106 \\
 &= 4 \times 52 & \text{但} & 4+52 = 56 \\
 &= 8 \times 26 & & 8+26 = 34 \\
 &= 13 \times 16 & &
 \end{aligned}$$

上面三個和都是假哥德巴赫數，因此不可能是這幾個組合。所以自己的帽上數只能是 $13+16=29$ 了。

分析

除此之外，類似於前幾個命題的想法，也有可能是透過「有兩個情況，但其中一個不符合，所以僅可能是另一個」的過程而確認了兩步的解。

我們用另一個表格來看這個狀況。

在這個表格中，我們站在「和」角度來看這個可能，而藉由前面，我們已經得知可以不用討論和為哥德巴赫數的狀況。我們還可以略去分割為「二的次方數+類質數」狀況，因他們積只有一種偶奇分解。

表格

兩數之和	分割	兩數之積	偶奇分解	分解之和	雙質分割
<u>11</u>	<u>2+9</u>	<u>18</u>	<u>2x9</u>	<u>11</u>	<u>X</u>
			6x3	9	2+7
	5+6	30	2x15	17	X
			6x5	11	X
			10x3	13	2+11
17	2+15	30	2x15	17	X
			6x5	11	X
			10x3	13	2+11
	3+14	42	2x21	23	X
			6x7	13	2+11
			14x3	17	X
	5+12	60	4x15	19	2+17
			12x5	17	X
			20x3	23	X
	6+11	66	2x33	35	X
			6x11	17	X
			22x3	25	2+23
	7+10	70	2x35	37	X
			10x7	17	X
			14x5	19	2+17
	8+9	72	8x9	17	X
			24x3	27	X

以上表格僅列出和小於 20 的情況。

分析

從這個表格中，我們可以推出(18,11)為第二種情況下的唯一一組解。

在和大於等於 17 時，分支的情況太多，會讓 Prudence 無法確認自己的帽上數。

說明

- ✦ 當 Sam 看到 $11(=2+9)$ 時，它並不是個假哥德巴赫數，因此他會說「你肯定不知道你的帽上數」。
- ✦ Prudence 聽到這句話時，得知自己的帽上數不是個假哥德巴赫數，而他看到 $18=2\times 9=3\times 6$ 。

如果 Christina 選的是 3 和 6，其和為 9 是個假哥德巴赫數，不符合第一句話，所以被選到的數一定是 2 和 9，其和為 11，就是自己的帽上數，所以他回答「我知道了」。

分析

上面便是兩步完成的所有情況。在討論完這個部份後，接著看到三步完成的情況。

三步

- (1) 在兩步完成中除了(18,11)之外的其他解，其後續發展有太多種情況要討論，都會無法使教授確認自己的帽上數。所以我們只要看(18,11)的後續發展。也就是說，(18,11)是這個命題的初始解。
- (2) 如果 Prudence 說不知道，Sam 就知道：自己的帽上數不是 18，否則對方就會知道自己的帽上數。根據上面的表格，自己的帽上數一定是 30。

說明

- ✦ 當 Sam 看到 11 時，因為這不是個假哥德巴赫數，所以他可以判定對方第一眼必定不知道自己的帽上數。

✦ 而 Prudence 看到 30 時，其可能的偶奇分解有

$$30 = 2 \times 15 \qquad 2 + 15 = 17$$

$$= 3 \times 10 \qquad \text{但}$$

$$= 5 \times 6 \qquad 5 + 6 = 11$$

有兩個和不是假哥德巴赫數，因此他仍無法判斷帽上數是 17 或 11。

✦ 回到 Sam，由上一段已經推知若他的頭上的數是 18，對方就會知道他自己的帽上數。此時符合條件的分割只剩下 5+6 一組，所以他就可以得知自己的帽上數為 30。

分析

多步

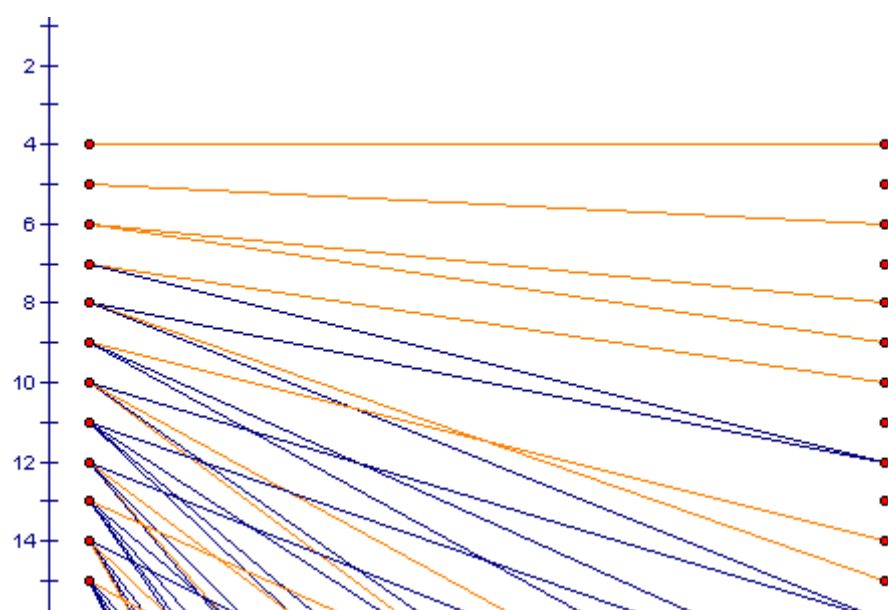
類似於三步完成的做法，我們可以知道四步完成的情況是(30,13)。且這也是這個命題的上限。

當和為 13 且積不為 30 時，有很多種情況，使得無法繼續推斷下去，因此超過四步未完成時，這個命題就會從此沒完沒了。

以上是對第三種變形的所有分析。

表格一解		
	兩數之積	兩數之和
一步	-	
兩步	-	
三步	30	11
四步	30	13

圖表



(五) 改變回答方式

在改變了不同的命題條件後，Christina 決定改變遊戲進行的方式。他找來了一個鈴，規定在按鈴前，大家都不能說話，一按鈴就要立刻說出自己知不知道自己的數字。

分析

這個命題我們需要分線討論。

一步

在第一步就完成時，會有三種可能：

(1)兩人同時回答知道。

(2)只有 Prudence（看到積）知道。

(3)只有 Sam（看到和）知道。

- ✦ 當兩個人都知道時，對 Prudence 來說，他看到的必定是一個假半質數，而對 Sam 來說，他看到的數只能有一種分割方法。符合後者的只有 $4(=2+2)$ 和 $5(=2+3)$ 兩組，而此時前者所看到的可能是 $4(=2\times 2)$ 或 $6(=2\times 3)$ ，都能讓他一看到時就判斷出自己的帽上數。
- ✦ 如果只有 Prudence 知道，表示這個積是個半質數。而 Sam 說不知道，表示這個和有兩種以上的分割，也就是這個和大於等於 6。符合的僅有當積是 4 和 6 以外的半質數的情況。
- ✦ 如果只有 Sam 知道，代表他看到的「和」只有一種分割，也就是他看到的必定是 $4(=2+2)$ 或 $5(=2+3)$ 。但不管 Prudence 看到的是 $4(=2\times 2)$ 或 $6(=2\times 3)$ ，他一定可以馬上知道自己的帽上數。所以這種情況是不可能發生的。

兩步

兩步的情況一樣分成三種：

(1)兩人同時知道。

(2)只有 Prudence 知道。

(3)只有 Sam 知道。

⊕ 當兩個人都知道的時候，對 Prudence 來說會有同於下面的發展：

Prudence：我不知道我的帽上數。

Sam：我也不知道我的帽上數。

Prudence：我現在知道我的帽上數了。

而對於 Sam，也會有同於下面的發展：

Sam：我不知道我的帽上數。

Prudence：我也不知道我的帽上數。

Sam：我現在知道我的帽上數了。

根據基礎命題的推論，前者的解是(12,8)，後者的解是(12,7)，而這兩個是不會同時發生的。

⊕ 當 Prudence 知道時，對 Sam 來說會同於下面這個命題：

Prudence：我不知道我的帽上數。

Sam：我也不知道我的帽上數。

Prudence：我現在知道我的帽上數了。

同時，對 Sam 來說就是：

Sam：我不知道我的帽上數。

Prudence：我也不知道我的帽上數。

Sam：我還是不知道我的帽上數。

符合前者的解是(12,8)，而這個解從 Sam 的角度來看也成立。

⊕ 當只有 Sam 知道時，對 Prudence 來說，過程同下：

Prudence：我不知道我的帽上數。

Sam：我也不知道我的帽上數。

Prudence：我還是不知道我的帽上數。

而 Sam 就看到了：

Sam：我不知道我的帽上數。

Prudence：我也不知道我的帽上數。

Sam：我知道我的帽上數了。

後者的解是(12,7)，但並不符合前者，所以在這個情況下沒有解。

多步

多步時我們一樣分成三種情況來看：

(1)兩人都知道。

(2)只有 Prudence 知道。

(3)只有 Sam 知道

✦ 如果兩個都知道，則對 Prudence 來說，過程同於：

Prudence：我不知道我的帽上數。

Sam：我也不知道我的帽上數。

.....

Prudence：我現在知道我的帽上數了。(第 $2n-1$ 步)

而在 Sam 看來，則是：

Sam：我不知道我的帽上數。

Prudence：我也不知道我的帽上數。

.....

Sam：我現在知道我的帽上數了。(第 $2n-1$ 步)

由「不同人先說話」，我們知道後者的命題同於：

Prudence：我不知道我的帽上數。

Sam：我也不知道我的帽上數。

.....

Prudence：我現在知道我的帽上數了。(第 $2n-2$ 步)

而引用「基礎命題」的推論，得知這兩個是不會同時發生的，因此無解。

✚ 當只有 Prudence 知道時，對他來說過程同於：

Prudence：我不知道我的帽上數。

Sam：我也不知道我的帽上數。

.....

Prudence：我現在知道我的帽上數了。(第 $2n-1$ 步)

對於另一個 (Sam) 來說則是：

Sam：我不知道我的帽上數。

Prudence：我也不知道我的帽上數。

.....

Sam：我還是不知道我的帽上數。(第 $2n-1$ 步)

也就是：

Prudence：我不知道我的帽上數。

Sam：我也不知道我的帽上數。

.....

Sam：我還是不知道我的帽上數。(第 $2n-2$ 步)

這兩個是可以同時發生的，而當 $n=3$ 時，其解為(16,10)，當 $n \geq 4$ 時便會無解。也就是說，如果第三次按鈴時還沒有人推的出來，這個命題就會永遠無法結束。

✚ 當只有 Sam 知道時，對 Prudence 來說會有同下發展：

Prudence：我不知道我的帽上數。

Sam：我也不知道我的帽上數。

.....

Prudence：我還是不知道我的帽上數。(第 $2n-1$ 步)

對 Sam 則是：

Sam：我不知道我的帽上數。

Prudence：我也不知道我的帽上數。

.....

Sam：我知道我的帽上數了。(第 $2n-1$ 步)

也就是：

Prudence：我不知道我的帽上數。

Sam：我也不知道我的帽上數。

.....

Prudence：我還是不知道我的帽上數。(第 $2n-2$ 步)

而這兩個命題不會同時成立，因此無解。

我們可以發現在按鈴後同時回答的命題中，是 Prudence 必不會比對方晚知道，僅可能在一步完成平手，絕不會是僅 Sam 勝出的情況。

除此之外，若要使這局比賽能夠結束，則安排的數字必須同於基礎命題中，一、三、五步完成的情況。

至此，我們討論完了最後一個變形。

表格一解

	兩數之積	兩數之和
一步	-	
兩步	12	8
三步	16	10

以上表格僅列出唯一解的情況。

(六) 改變遊戲規則

我們發現在上述的規則裡出現了一些問題，例如：大部分的帽上數對都會使遊戲永遠無法結束。在我們重新分析原命題之後，我們發現新的元素，也就是「候選數」的概念。

定義—帽上數

帽子和數為一體，不可分割。且每一頂帽上數都只能給特定的人戴，以避免討論上的混亂。

定義—帽對

為帽上數對的簡稱。以原命題為例，形如 $(m+n, mn)$ 的數對就是一個帽對。

定義—帽集

所有合法帽對的集合。我們可以將帽集畫在平面上表示，稱為帽集平面。而事實上，帽集平面就是帽集二部圖對映的 biadjacency matrix。

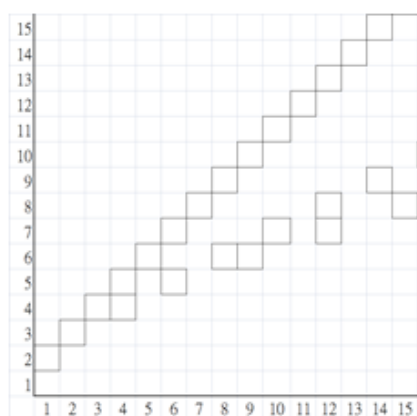
定義—候選帽

指那些符合玩家接收到的資訊，被認為有可能出現在自己頭上的帽子。

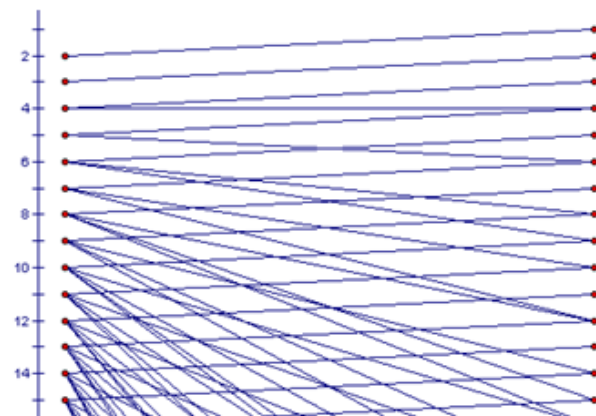
定義—候選數

候選帽的個數稱為候選數。

以原命題為例，若 Sam 看到的是 6，那麼自己的數字可能是 5,8,9，這三個就是他的候選帽，而他的候選數就是 3。



biadjacency matrix



bipartite graph

Rule - g

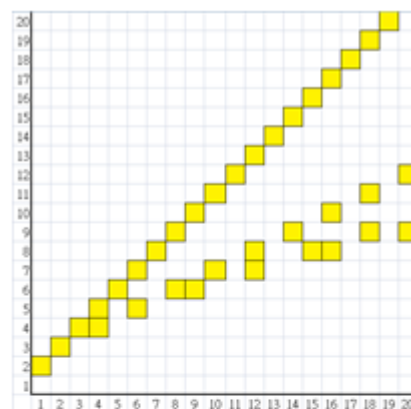
選定一個正整數 g ，要求玩家在自己的候選數不大於 g 的時候，告訴對方這件事情，否則回答「我不知道」。

在 rule- g 之下，其合法台詞為：「我不知道」、「我可以在 g 次內猜出來」。

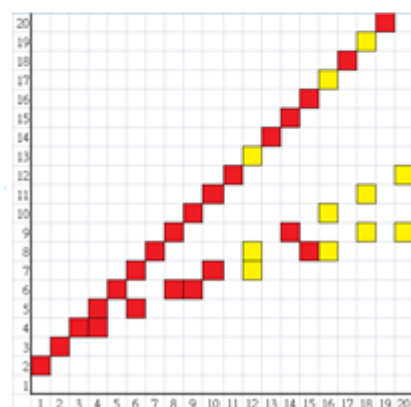
特別的，當 $g=1$ 時，這個規則和 Rule-1 是相同的。

令 $g=2$ ，來處理原本的和積帽集。

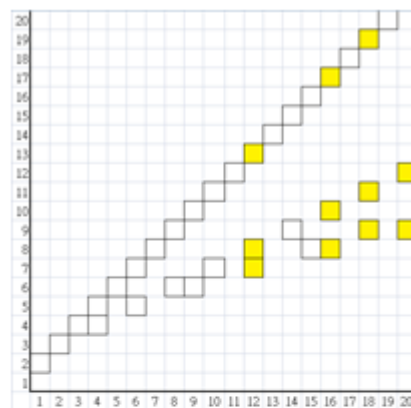
原帽集如右：



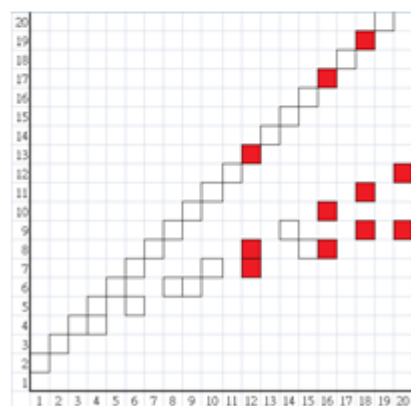
如果 Prudence 看到後說「我可以用兩次機會猜出來」，則可能的帽對如右紅格：



若否，則 Sam 眼中的帽集只剩下：



而紅格的部分 Sam 都可以用 2 次機會猜出。



因此在 20x20 的和積帽集內，我們可以順利分辨出所有的帽對。

但我們會發現，使用 rule-g 仍然無法有效解決遊戲無法結束的問題，例如右邊這個特殊帽集在 Rule-g=2 時依然不會結束。

8							
7							
6							
5							
4							
3							
2							
1							
	1	2	3	4	5	6	7

另一方面，若要使遊戲能保證結束，則要先繪出帽集，並且事先計算各帽對的候選數變化，並套用到更大的 g 值才行。如此一來，就變成了只是先算出候選數，這樣遊戲就變得不好玩了。因此我們嘗試再找出新規則。

Rule-cp

我們規定邏輯學家在每一次的回答都要報出自己的候選數，並且說出自己認為這個遊戲是否應該結束，這取決於他自己的候選數還會不會再減少。

在 Rule-cp 之下，合法的台詞包括：「我的候選數是 k」；「我認為我的候選數會/不

會再減少」。

若一個邏輯學家說出：「我的候選數不會再減少了。」這句話的效果就如同 rule-1 中的「我知道了」，都代表著這個遊戲即將結束。

另外，從這個規則開始，我們擴展可用帽集的範圍，不再受限於和積帽集。因此我們將 X 座標以數字代替，Y 座標以英文大寫字母代替，而邏輯學家以 Mr. X 和 Ms. Y 取代，其中 Mr. X 看到的是 X 座標，Ms. Y 看到的是 Y 座標。

我們以右圖為例來說明這個規則：

若 Mr. X 看到的是 1，他會想：如果我戴的是 A，則對方會說他的候選數是 2；如果我戴的是 C，則對方會說他的候選數是 3，所以我的候選數一定會減少。因此我要回答：我的候選數是 2，而且遊戲還不應該結束。

D				
C				
B				
A				
	1	2	3	4

若 Mr. X 看到的是 2，那麼如果他戴 C，則對方會說他的候選數是 3；如果他戴的是 D，則對方會說他的候選數是 2，所以他應該回答：「我的候選數是 2，而且遊戲還不應該結束。」

若 Mr. X 看到的是 3，那麼如果他戴 A，則對方會說他的候選數是 2；如果他戴的是 C，則對方會說他的候選數是 3，所以他應該回答：「我的候選數是 2，而且遊戲還不應該結束。」

若 Mr. X 看到的是 4，那麼如果他戴 B，則對方會說他的候選數是 1；如果他戴的是 D，則對方會說他的候選數是 2，所以他應該回答：「我的候選數是 2，而且遊戲還不應該結束。」

因此我們可以先填出如右的表：

D		2?		2?
C	2?	2?	2?	
B				2?
A	2?		2?	
	1	2	3	4

而在 Ms. Y 依照 Mr. X 的期望回答之後，她知道對方即將猜出自己的帽上數，但有了這個資訊，她的候選數還是無法減少，因此她會回答遊戲應該要結束了。

特別說明的是，在所有的圖表中，「？」所代表的是玩家認為遊戲要繼續進行，而「！」代表的則是玩家認為遊戲應該結束了。

D		2?2!		2?2!
C	2?3!	2?3!	2?3!	
B				2?1!
A	2?2!		2?2!	
	1	2	3	4

Rule-c

我們想知道 c 和 p 個別的功用，因此我們把 c 單獨拉出來，只要求邏輯學家告訴對方自己的候選數，而不告訴對方是否應該結束。

而依照 rule-c，無論 Mr. X 看到的是 1、2、3、4 的哪一個，他的候選數都是 2，因此他會這樣回答：

D		2		2
C	2	2	2	
B				2
A	2		2	
	1	2	3	4

為 Mr. X 的回答全部一樣，而 Ms. Y 也清楚這件事，所以對她來說並不會有影響，所以前兩次回答後會填出如右的表格：

D		2,2		2,2
C	2,3	2,3	2,3	
B				2,1
A	2,2		2,2	
	1	2	3	4

而對 Mr. X 來說，現在的帽集平面可以拆成三個部分，因此不管是哪一格，他都有辦法立即推論出自己的帽子。

(2,1) + (2,2) + (2,3) →				
D				
C				
B				
A				
	1	2	3	4

D				
C				
B				
A				
	1	2	3	4

D				
C				
B				
A				
	1	2	3	4

D		2,2,1		2,2,1
C	2,3,1	2,3,1	2,3,1	
B				2,1,1
A	2,2,1		2,2,1	
	1	2	3	4

但對 Ms. Y 來說，他仍然無法分辨出自己的帽子，因此他的候選數依然不變。

而遊戲進行到此，會發現 Mr. X 的候選數一直維持在 1，而 Ms. Y 的候選數也不會再改變。雖然他們對話會永遠持續，但事實上，遊戲到這裡已經可以視同為結束了。

D		2,2,1,2		2,2,1,2
C	2,3,1,3	2,3,1,3	2,3,1,3	
B				2,1,1,1
A	2,2,1,2		2,2,1,2	
	1	2	3	4

Rule-p

類似的，我們只保留下 p 的規則，規定邏輯學家在每一回合時，都只告訴對方遊戲是否應該結束，而完全不告訴對方自己的候選數。

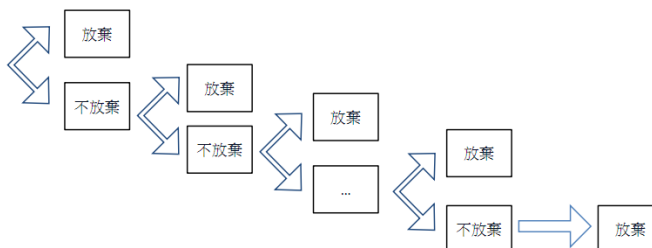
但在這樣的規則下，我們發現只要帽集平面是有限的，邏輯學家就會因人人自危而放棄，以下我們將證明這件事。

定理-有限帽集必可結束

在帽集有限的情況下，兩人的候選數都是正整數，而他們的和必會隨著資訊的交換而遞減。這個值在某個時刻之後必定會停留在一定值，其最小值是 2，也就是兩人都知道自己帽上數的情形。所以有限帽集必定會在有限句之內結束。

定理-有限帽集在 rule-p 之下必定要放棄

我們以決策數來看，根據上一個定理可以知道：在整個過程中一定會有最後一個「不放棄」，但邏輯學家已經知道這後面要接「放棄」，因此這個放棄必不能給他任何訊息，也就是說，這一個「不放棄」是不合理的，因為他的候選數依然不會減少。往回遞推，便可得知第一個「不放棄」即已不合理，所以 rule-p 在有限的帽集下，在遊戲的一開始便已經被迫放棄了。



Rule-C

由於 rule-p 的命題過弱，無法解決任何問題，因此我們嘗試改進他，要求邏輯學家只說出自己認為遊戲該不該結束，但在決定放棄時要一併報出自己的候選數。

而本規則下的合法句型包括：「我認為我們還不應該放棄」以及「我們應該放棄了，我的候選數是 k 」。

不管是哪一格，Mr. X 知道自己的候選數是 2，而且對方下回合一定會說不能再減少，並且報出她的候選數，而自己知道對方的候選數後就可以確定自己帶的是哪一頂了，因此候選數可以再減少，還不必放棄遊戲。所以會填出如右的表格。

D		?		?
C	?	?	?	
B				?
A	?		?	
	1	2	3	4

而 Ms. Y 也和我們預測的相同，接著填了如右的表格。

D		?,12		?,12
C	?,13	?,13	?,13	
B				?,11
A	?,12		?,12	
	1	2	3	4

但 rule-C 事實上仍有 rule-p 的問題，也就是有時候會被迫放棄，因此我們決定要繼續改善這個問題，以提出一個對方都有利的規則。

Rule-P

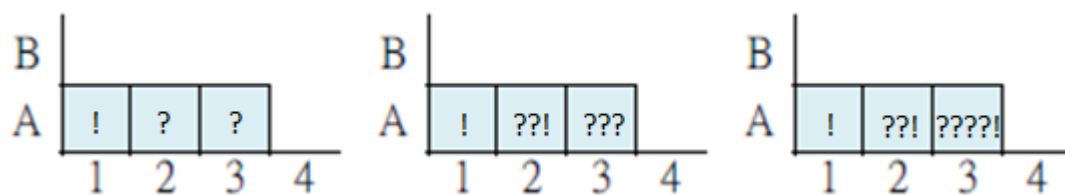
在這個規則中，我們要求邏輯學家必須同時考慮對

方的狀況，以決定遊戲是否應該結束。這個規則的合法台詞為：「我們應該/不應該放棄。」

在這個例子中，Mr. X 不管看到哪一個，都知道自己所戴的是 A，因此他在第一回合就可以說放棄了。填出來的就如右圖。

B				
A	!	!	!	
	1	2	3	4

但除了這個對話，另外一種對話也是不違規的。



在這個例子裡，Mr. X 和 Ms. Y 已事先約定好如何處理這個帽集。如果 Mr. X 看到的是 1，則在第一次回答時就結束遊戲，否則繼續。若看到的是 2，則在第二次結束遊戲，依此類推。也就是說，rule-P 給了邏輯學家策略討論的空間，以幫助雙方達到彼此確認帽上數的目的。除此之外，這也表示了 rule-P 會有多重對話的特性。

五、結果

(一) 基礎命題

- 初始解為(12, 7)，位在第 2 步。
- 有解的步數上限為 6 步。

(二) 不同人先說話

- 初始解為(12,7)，位在第 3 步。
- 第一句的「我不知道」是無關緊要的。
- n 步完成可化簡為基礎命題的 $n-1$ 步完成。
- 有解的步數上限為 7 步。

(三) 改變取值範圍

- 初始解為(4,4)，位在第 2 步。
- 有解的步數上限為 4 步。

(四) 推論對方的反應

- 兩步完成的情況下有無限組解。
- 初始解為(18,11)，位在第 2 步。
- 有解的步數上限為 4 步。

(五) 改變回答方式

- 採分線處理，以兩個邏輯學家各自的角度看發展。
- 初始解為(12,8)，位在第 2 步。
- n 步完成可化簡為基礎命題的 $2n-1$ 步完成。

- 有解的步數上限為 3 步
- 僅一步完成時可能平手，其餘勝者為且僅為 Prudence（看到積）。

(六) 改變遊戲規則

- rule-k 可擴大可解的範圍，但無法有效解決對話無法結束的問題。
- rule-cp 可使遊戲結束，但規則過於複雜，因為還需要判斷遊戲是否已結束。
- rule-c 是最淺顯易懂得規則，也是各規則間解析度最高的。
- rule-p 為強度最低的規則，無法解決任何問題。
- rule-C 可改善 rule-p 的問題，但仍會有被迫放棄的情形。
- rule-P 有可合作及多重對話的特性。

六、討論

在過程中，我們發現了幾個特點：

- 部分情況下會有不只一組解。
- 命題的初始解皆唯一。
- 多步完成的情況下都是建立在前一組解上。也就是說，第 n 步若要有解，必須要第 $n-1$ 步有解，但反過來並不一定成立。同一個命題條件的解與解之間形成了一種類似「遞迴」的關係。
- 在帽上數分別為兩數和、兩數積的情況下，能完成的步驟必有上限。
- 部分命題可化簡為基礎命題。
- 第四個命題(推論對方的反應)整體而言性質較為迥異，他無法表現成基礎命題的變形，且複雜度也較高。如果把這個命題：(Prudence 看到積、Sam 看到和)

Sam ：你無法推斷出你的帽上數。

Prudence ：我也不知道我的帽上數。

Sam ：我現在知道我的帽上數了。

跟下面這個命題：

Prudence ：我不知道我的帽上數字。

Sam ：我也不知道我的帽上數字。

Prudence ：我還是不知道我的帽上數。

Sam ：現在我知道我的帽上數了。

兩個拿來做比較，乍看之下是相同的。如果讓把同樣的數字放在他們頭上，而改讓 Prudence 先說話，他會回答不知道，而 Sam 同時推測出對方不知道，但在這個條件下自己還是不知道，所以他還是會回答不知道。

實際上我們會發現，「你無法推斷你帽子上的數」這句話是比「連續兩個人說不知道」還要強的，也就是說，它可以排除掉更多的情況。

- 在後面的各個 rule 裡，每一個都有他個別的功用，也具有不同的解析度 (亦即區辨每一個帽對的能力高低)。其中 rule-c 是最簡易，也是最好用的規則。而 rule-p 則是完全相反。

在未來方面，我們在此再找出幾個值得探討的方向並做簡短的介紹。

(一) 變化 – 更自由的構句

我們可以將句型做更多的變化，例如，兩人都說：「你還不知道你的帽上數。」或者「你的候選數比我多/少。」以及其他的台詞。

(二) 變化 – 加入說謊者

在原本的命題裡規定邏輯學家不可以說謊，但我們可以去掉這個規則，加入會固定說謊的人，而這個規則只有在三人以上玩家時才有趣。

七、應用

對於遊戲玩家來說，要以對方的帽上數來構造出整個對話過程(尤其是使用 rule-c)是相對容易的，但對旁聽者來說，他必須要找出每一個帽對的對話過程，仍不一定能確認兩人的帽上數。這相當於「陷門」的概念，也就是幾近於「單向」的過程。

八、結論

我們從最基本的 know/don't know problem 出發，藉由數論分析得解，並證明了在大部分的情況下，邏輯學家的對話永遠都不會結束。除了數論方法，我們也引進了帽集平面的概念，以處理原本的 know/don't know problem，並且延伸到更廣泛的構句以集各式各樣的帽集平面。

除了現有的規則外，我們還可以推廣到更多自由的構句，例如：兩個人在對話過程中都說「你現在知道/不知道你的帽上數。」或者「你的候選數比我多/少。」等易可加入更多的玩家，甚至加入說謊者，使整個遊戲更富變化性。

九、參考文獻

圖書

- ✚ 1977 , Mr. P. and Ms. S. , Mathematics Magazine VOL.50, NO. 5 , Page 268-269.
- ✚ 1985 , Know/Don't Know Problem , Mathematics Magazine VOL.57 , NO. 3 , Page 180-181.
- ✚ John O. Kiltinen , 1985 , Goldbach,Lemoine,and a Know/Don't Know Problem , Mathematics Magazine VOL.58, NO. 4 , Page 195-203.
- ✚ 九章數學教育基金會 , 2004 , 腦筋打結的滋味—猜帽上數邏輯推理遊戲

網頁

- ✚ The logical hat problem
<http://www.mathpuzzle.com/LogicalHats.txt>
- ✚ 半質數
<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%8A%E8%B3%AA%E6%95%B8>
- ✚ 哥德巴赫猜想
<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%93%A5%E5%BE%B7%E5%B7%B4%E8%B5%AB%E7%8C%9C%E6%83%B3>
- ✚ 猜帽上數問題
http://www.chiuchang.org.tw/modules/newbb/viewtopic.php?topic_id=3406&forum=6#20988

評語

本作品初賽之後，已有相當程度的修正與改進。圖表的呈現方式，由原本之 bipartite graph 變成 biadjacency matrix，的確是一個進步。作者改變一些遊戲的規則，並加入「候選數」的概念，使整個作品相對豐富。然而這份作品最大的問題在“presentation”上，不管是書面報告或者口頭報告，在表達、呈現和「說故事」的能力，都有相當大的改進空間。某些層面來說，這甚至反應作者對自己的作品，並未完全了解。評審組建議在此次科展之後，作者可以對此作品重新修正，並請老師或專家指導。