

2012 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

編號：010037

作品名稱

過平面上 n 定點作正 n 邊形問題與其對偶命題

得獎獎項

大會獎：四等獎

作者姓名：林東成

就讀學校：國立鳳山高級中學

指導教師：張淑娟、王啟聰

關鍵字：正 n 邊形的外心

作者簡介



我是林東成，鳳山高中三年級。

我喜歡游泳，喜歡看小說，然而數學的獨特魅力更是最令我著迷。從國中起，我便對數學有著濃厚的興趣；在高中參加科展後，更是堅定我對數學的狂熱——享受發現問題，進而解決問題的快樂。因此，我常利用自己的閒暇時間參加一些數學營隊、數學競賽，像是聯電資優數學培訓研習營、亞太數學奧林匹亞研習營、高中數理暨資訊學科能力競賽等；這些活動不但使我的能力得以提升，更讓我感受到大家對數學的執著與熱忱。

摘要

本為主要探索「平面上任三點不共線的 n 個點是否存在 n 條線使其各線恰經過上述 n 點中之一點，並交出一正 n 邊形。」再則探究其對偶命題「任兩線不平行，任三線不共點的 n 條直線上，是否存在各線恰有一點，使其各點為一正 n 邊形之頂點。」

文中論及解的存在性及其一般解，並推廣至 n 個同心圓及 n 條平行線的情形。

Abstract

The problem is that n lines pass through n points on a plane which form a regular polygon and its antithesis proposition.

The research mainly explores “whether among any three incollinear points of n points on a plane exist n lines that make each of the n lines pass through any one of the above points and thus form a regular polygon.” It further explores the antithesis proposition—“whether on each of the n lines, any two of which are not parallel and any three of which are not concurrent, exists a point which makes itself the vertex of a regular polygon.”

The research consists of the following four aspects:

- (1) Using compass and ruler ,construct a regular polygon whose vertices lie on n given concentric circles.
- (2) The relations of radius of n given concentric circles satisfy condition (1).
- (3) Given n parallel lines,construct an regular polygon with each parallel line containing one of vertices of regular polygon.
- (4) The relations of mapping between n given concentric circles and n given parallel lines satisfy condition (1) and (3),respectively.

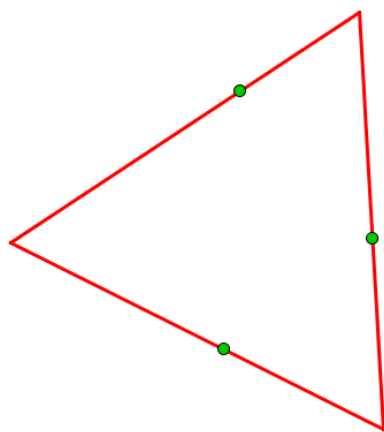
The significant results of this study are the special ways to solve construction questions which are to determine a locus or the constructible property by taking one of the unknowns(a point ,line, circle, triangle, or maybe something else). Furthermore, the research also explores the existence of a solution , its general solutions and dual property ,as well as the situation in which they are applied to n concentric circles and n parallel lines.

目錄

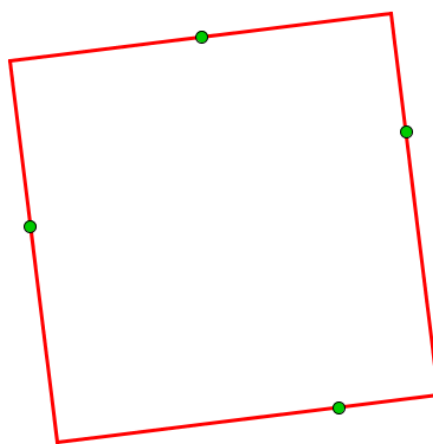
一、	研究動機	p.2
二、	研究目的	p.3
三、	研究設備及器材	p.4
四、	研究過程及方法	p.4
五、	研究結果	p.43
六、	應用	p.48
七、	參考資料	p.48

一、 研究動機

在學習複數的單元中，我們發現圓上三等分點，可形成正三角形；五等分點，可形成正五邊形。那麼，若給定的三個點是平面上不共線相異三點，可否通過一個正三角形呢？（如圖一）不共線相異四點，可否通過一個正方形呢？（如圖二）這個想法引發了我們一連串的探索。



圖一



圖二

二、 研究目的

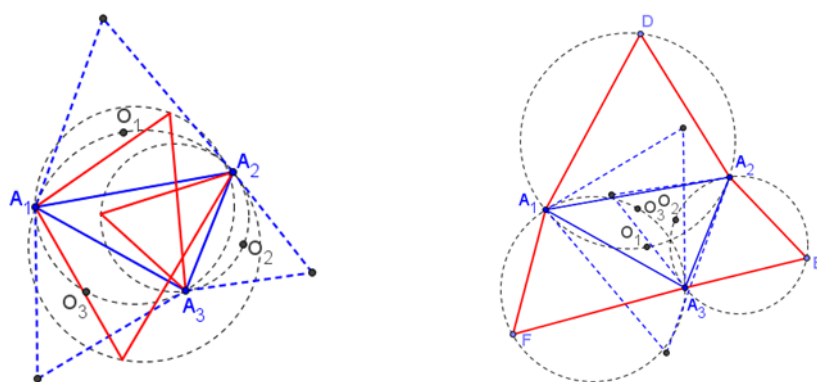
- (一) 探討平面上不共線的三點，可否存在正三角形，使得各線上恰含有前述三點中的一點。
- (二) 探討平面上任三點不共線的四點，可否存在正方形，使得各線上恰含有前述四點中的一點。
- (三) 探討平面上任三點不共線的五點，可否存在正五邊形，使得各線上恰含有前述五點中的一點。
- (四) 探討平面上任三點不共線的 n 點，可否存在正 n 邊形，使得各線上恰含有前述 n 點中的一點。
- (五) 探討平面上任兩線不平行、不共點的三線，可否存在正三角形，使得各頂點恰在前述三線中的一線。
- (六) 探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的四線，可否存在正方形，使得各頂點恰在前述四線中的一線。
- (七) 探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的五線，可否存在正五邊形，使得各頂點恰在前述五線中的一線。
- (八) 探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的 n 線，可否存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線。
- (九) 探討平面上 n 條平行線，可否存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線。
- (十) 探討平面上 n 個同心圓，可否存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 圓中的一圓。

三、 研究設備及器材

Geogebra 軟體、GSP 軟體、Cabri 軟體

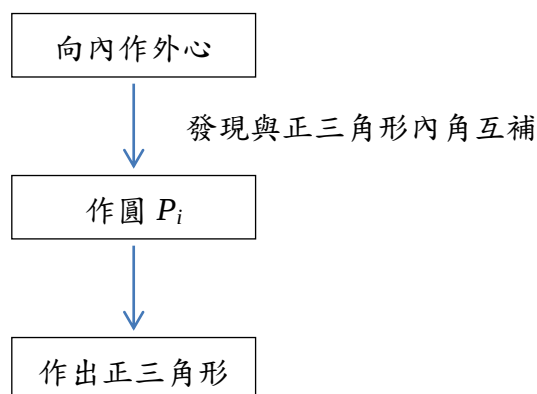
四、 研究過程及方法

本文通篇以外心貫穿，最主要是因為我們發現外心可以提供我們與正多邊形內角相關的角度，而為什麼要向內作而不是向外呢？如下圖所示，在作完外心之後，再利用圓內接四邊形對角互補的概念作得的三個紅色部分，以向內作外心與我們的所求——正三角形比較相似，於是我們利用向內作外心的方法，並加以修正。

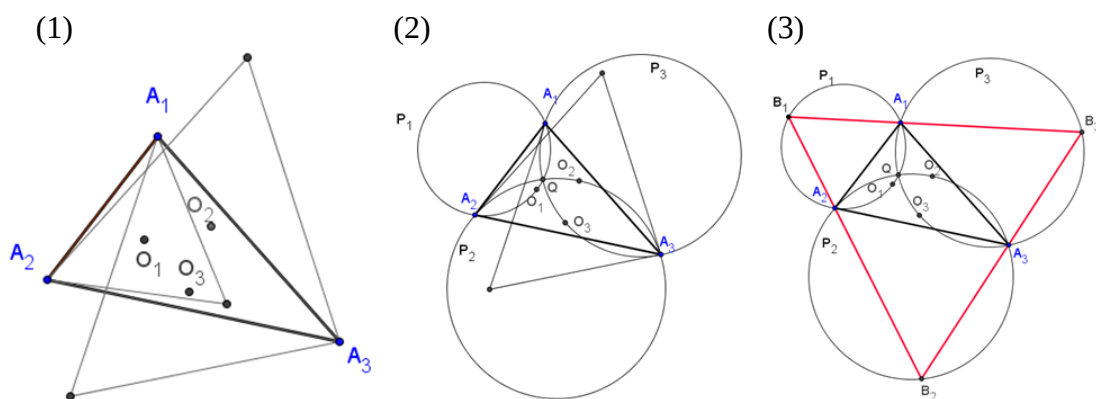


(一) 平面上不共線的三點，可存在正三角形，使得各線上恰含有前述三點中的一點

1. 想法：



2. 作圖方法(1~3)：



(1)以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊向內作出正三角形取其外心 O_1 ，同理作出 O_2 、 O_3 。

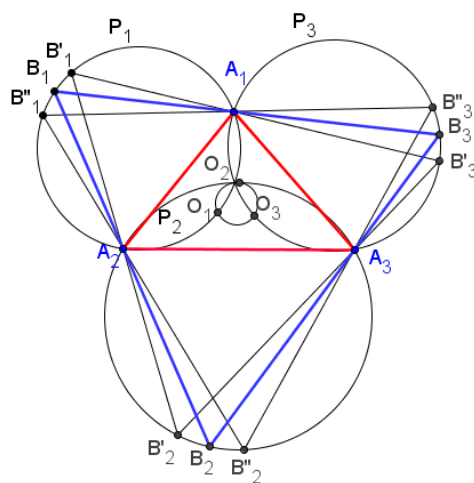
(2)作出通過 A_1 、 O_1 、 A_2 的圓 P_1 ，同理作出 P_2 、 P_3 。

(3)在 P_1 上取一點 B_1 ，連 $\overline{B_1A_2}$ 交 P_2 於 B_2 ，同理作出 B_3 ，則 $\triangle B_1B_2B_3$ 即為所求。

3. 存在性探討

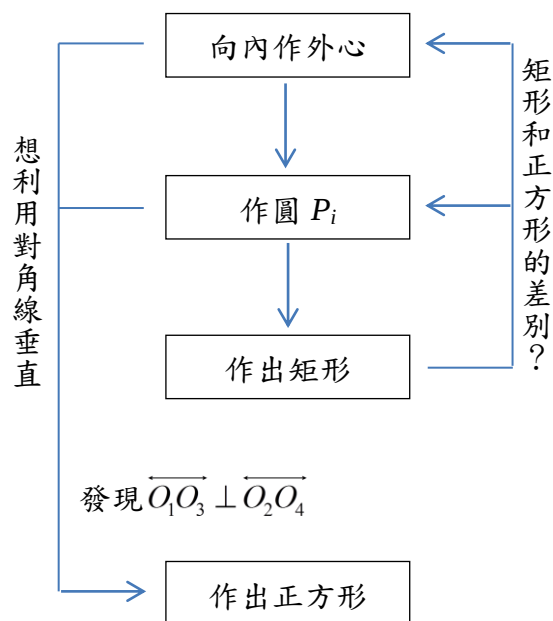
由於 P_1 、 P_2 、 P_3 三圓共點，故三角形任意三點必可作出無限多個正三角形通過。而在此我們要證明有無限多個正三角形通過之，需要兩個正三角形當生成元。

當我們畫出兩個正三角形之後，於 $B'_1B''_1$ 弧上取一點 B_1 ，則作 $\overline{B_1A_2}$ 必交 $B'_2B''_2$ 弧於 B_2 ，因為直線 $\overline{B_1B_2}$ 的斜率必介於 $\overline{B'_1B'_2}$ 和 $\overline{B''_1B''_2}$ 之間，同理可在 $B'_3B''_3$ 弧上找到 B_3 ，而此 $\triangle B_1B_2B_3$ 三內角又為六十度，故必為正三角形，則得知在 $B'_1B''_1$ 弧上，有無限多點可以構造出正三角形，即「只要可以作出兩個正三角形通過，就可以確定存在無限多個正三角形通過」。

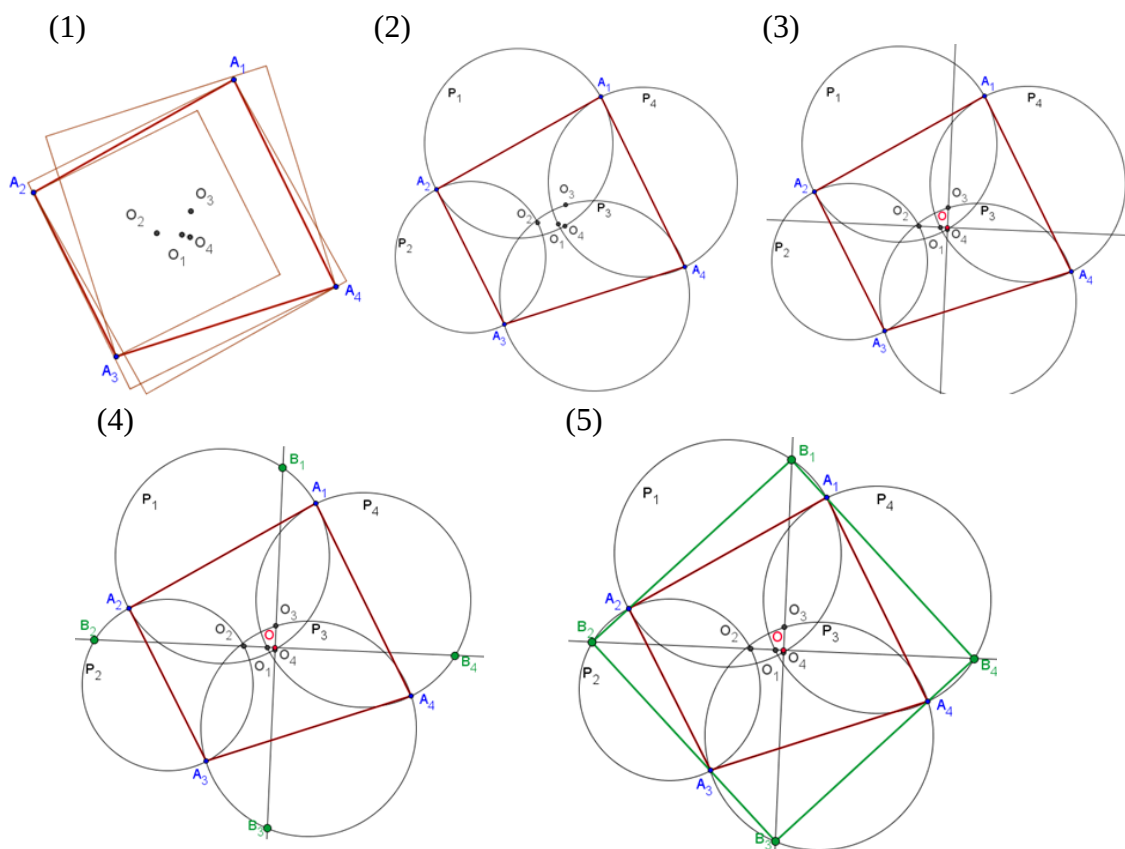


(二) 平面上任三點不共線的四點，可存在正方形，使得各線上恰含有前述四點中的一点

1. 想法：



2. 作圖方法(1~5)：



(1)分別以 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 、 $\overline{A_4A_1}$ 為邊長，向內作正方形。

(2)求出其外心 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 ，並分別過 $\Delta A_1O_1A_2$ 、 $\Delta A_2O_2A_3$ 、 $\Delta A_3O_3A_4$ 、 $\Delta A_4O_4A_1$ 作外接圓 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 。

(3)連接 $\overline{O_1O_3}$ 、 $\overline{O_2O_4}$ ，其交點為 O 。

(4)而 $\overline{O_1O_3}$ 分別交 P_1 、 P_3 於 B_1 、 B_3 ，且 $\overline{O_2O_4}$ 分別交 P_2 、 P_4 於 B_2 、 B_4 。

(5)連 $\overline{B_1B_2}$ 、 $\overline{B_2B_3}$ 、 $\overline{B_3B_4}$ 、 $\overline{B_4B_1}$ ，則四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即為所求之正方形。

3. 證明

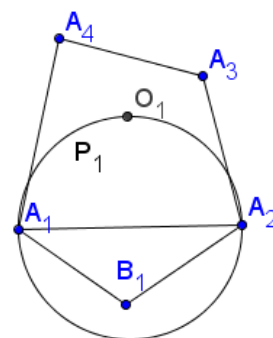
(1) **正方形的頂點 B_i 會落在 $\Delta A_iO_iA_{i+1}$ 的外接圓上**

假設 B_1 不落在 P_1 上

已知 $\angle A_1O_1A_2 = 90^\circ$ 又知道 $\angle A_1B_1A_2 = 90^\circ$ 矛盾

故得知 B_1 落在 P_1 上，得證。

而 B_2 、 B_3 、 B_4 同理可得



(2) **P_i 上的點必能通過 A_i 構造出矩形**

我們發現在不失一般性下，有些東西可以被固定住，所以只要證明會變動的東西是對的，即可完成此證明，於是我們決定用 **同一法**。

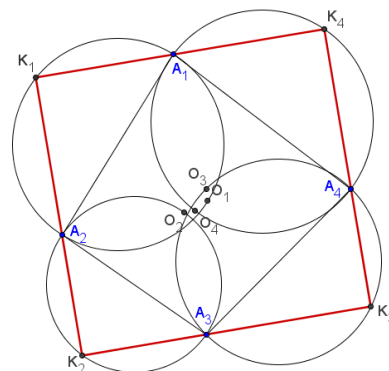
在 P_1 上任取一點 K_1 ，取 $K_2 \in P_2$ 使得 $K_1-A_2-K_2$ ；同理，作出 K_3 、 K_4 。

而 K_5 則為 $\overline{K_1A_1}$ 交於 P_4 的點。

由證明 1 得知： $\angle A_iK_iA_{i+1} = 90^\circ (i=1,2,\dots,4)$

又知道 $\angle A_4K_4A_1 = 4(90^\circ) - 3(90^\circ)$

$= 90^\circ = \angle A_4K_5A_1$ 。得到 $K_4 = K_5$ 。



(3) 證明 $\overrightarrow{O_1O_3} \perp \overrightarrow{O_2O_4}$

$$\Delta A_2SA_3 \cong \Delta A_2A_1S' (SAS)$$

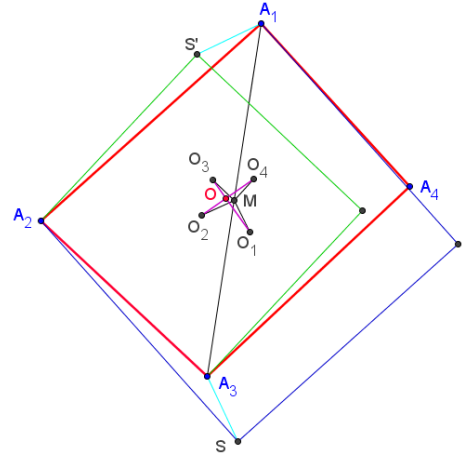
$$\therefore \overline{A_1S'} = \overline{SA_3} \text{ 且 } \overline{A_2A_3} \perp \overline{A_2S'} \therefore \overline{SA_3} \perp \overline{A_1S'}$$

$$\text{又 } \overline{O_1M} = \frac{1}{2} \overline{SA_3} \text{ 、 } \overline{O_2M} = \frac{1}{2} \overline{S'A_1}$$

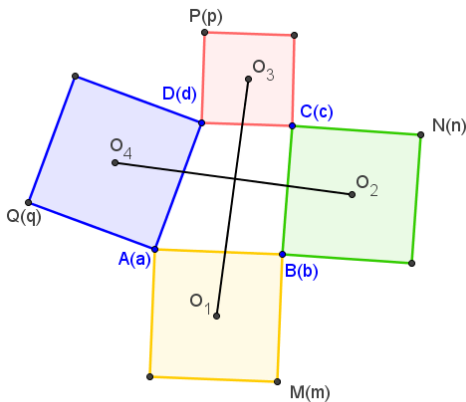
$$\text{再連 } \overrightarrow{O_1O_3} \text{ 、 } \overrightarrow{O_2O_4} \text{ , } \angle O_4MO_2 = \angle O_1MO_3$$

$$\therefore \Delta O_4MO_2 \cong \Delta O_3MO_1 (SAS)$$

$$\text{故 } \overline{MO_3} \perp \overline{MO_4} \text{ , 得知 } \overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4} \text{ 。}$$



※註：另證——複數方法



$$m = b + (a - b)i \text{ 、 } n = c + (b - c)i$$

$$p = d + (c - d)i \text{ 、 } q = a + (d - a)i$$

$$\therefore O_1 = \frac{a + b + (a - b)i}{2} \text{ 、 } O_2 = \frac{b + c + (b - c)i}{2} \text{ ,}$$

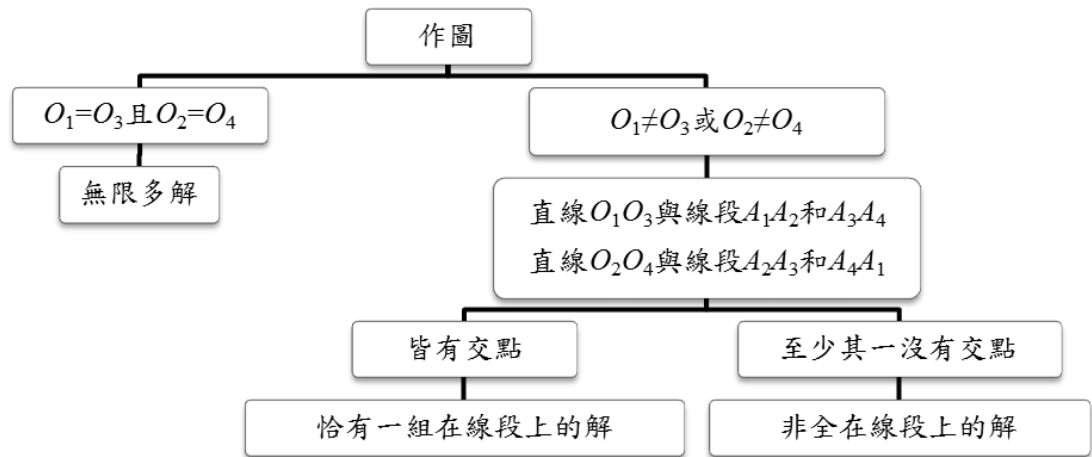
$$O_3 = \frac{c + d + (c - d)i}{2} \text{ 、 } O_4 = \frac{d + a + (d - a)i}{2}$$

$$\therefore \frac{O_3 - O_1}{O_4 - O_2} = \frac{c + d - a - d + (c - d - a + b)i}{a + d - b - c + (d - a - b + c)i} = -i$$

$$\text{所以 } \overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4} \wedge \overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$$

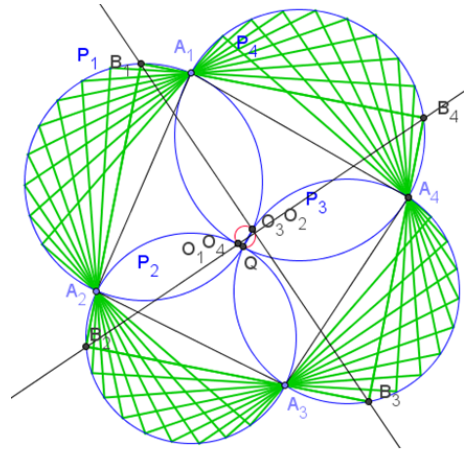
所以由(1)、(2)、(3)可得：四邊形 $K_1K_2K_3K_4$ 必為矩形，又因為 $\overline{K_1K_3} \perp \overline{K_2K_4}$ ，
故四邊形 $K_1K_2K_3K_4$ 必為正方形。

4. 存在性探討



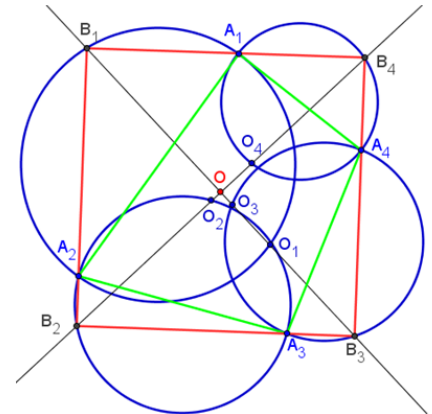
1. $O_1 = O_3 \wedge O_2 = O_4$:

因為 $O_1 = O_3$ 、 $O_2 = O_4$ ，所以 $\overline{O_1O_3}$ 、 $\overline{O_2O_4}$ 有無限多條，即可作出無限多個正方形。

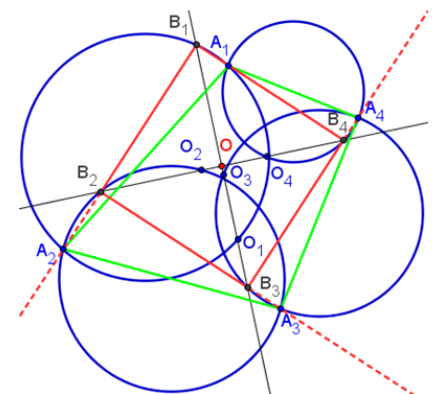


2. $\overline{O_1O_3}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_3A_4}$ 是否有交點， $\overline{O_2O_4}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 和 $\overline{A_4A_1}$ 是否有交點：

(1) 皆有交點： B_i 都會落在原四邊形的外面，作出線段上的解。

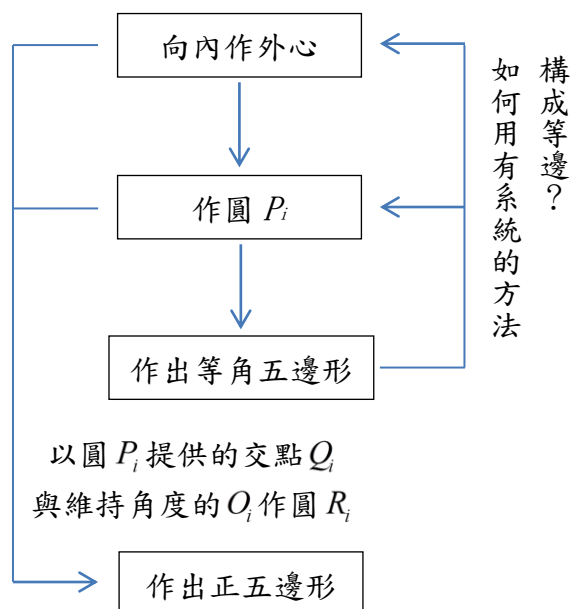


(2) 至少其一無交點： B_i 會有落在原四邊形內部，作出非全在線段上的解。

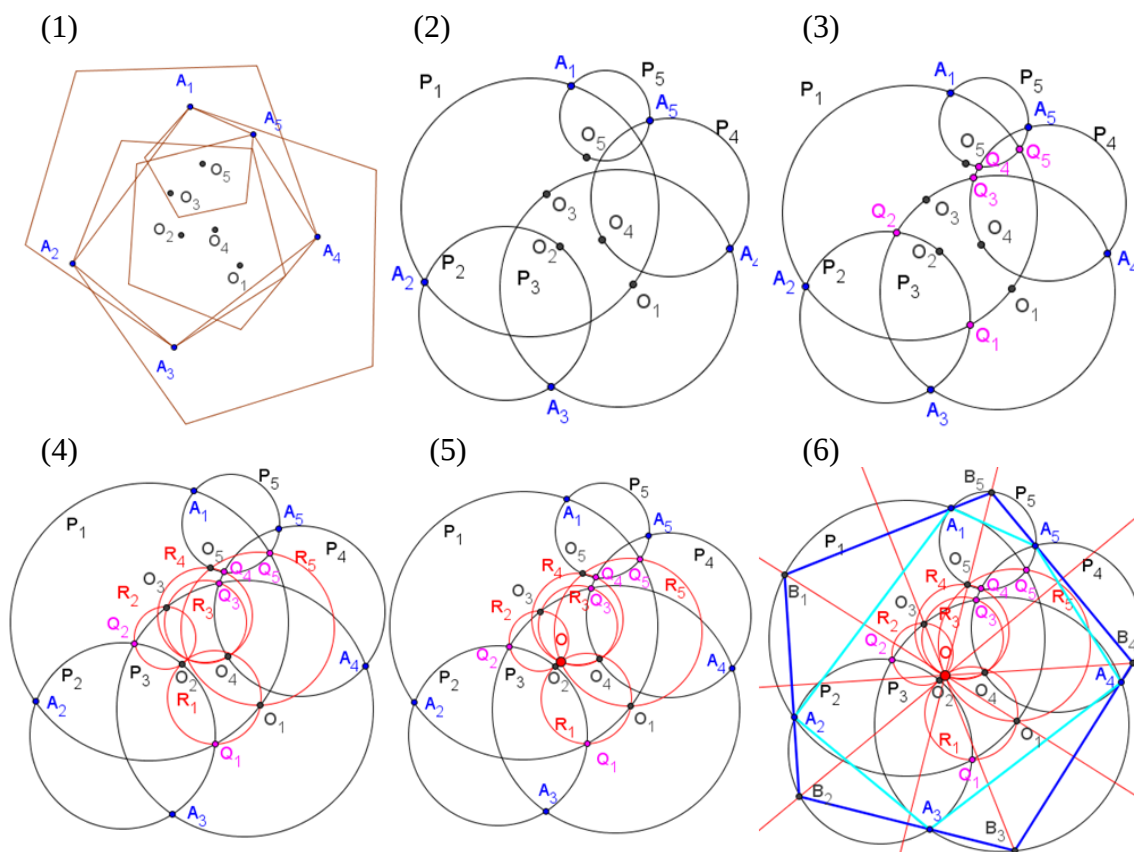


(三) 平面上任三點不共線的五點，可存在正五邊形，使得各線上恰含有前述五點中之一點

1. 想法：



2. 作圖方法(1~6)：



(1)以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊向內作出正五邊形並取其外心 O_1 ，同理作出 O_2 、 O_3 、 O_4 、 O_5 。

(2)作出通過 A_1 、 O_1 、 A_2 的外接圓 P_1 ，同理作出 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 。

(3)取圓 P_1 與圓 P_2 的交點 Q_1 ，同理作出 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 、 Q_5 。

(4)並作出通過 O_1 、 Q_1 、 O_2 的圓 R_1 ，同理作出 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 。

(5)取圓 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 的共同交點 O 。

(6)作 $\overrightarrow{OO_1}$ 、 $\overrightarrow{OO_2}$ 、 $\overrightarrow{OO_3}$ 、 $\overrightarrow{OO_4}$ 、 $\overrightarrow{OO_5}$ 分別與圓 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 交於 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 ，則五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 即為所求。

3. 證明

(1) **正五邊形的頂點 B_1 會落在 $\triangle A_1O_1A_2$ 的外接圓上**

假設 B_1 不落在 P_1 上

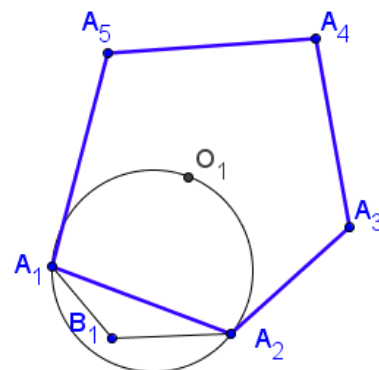
已知 $\angle A_1O_1A_2 = 108^\circ$

又知道 $\angle A_1B_1A_2 = 72^\circ$

矛盾

故得知 B_1 落在 P_1 上，得證。

而 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 同理可得



(2) **P_i 上的點必能通過 A_i 構造出等角五邊形**

在 P_1 上任取一點 K_1 ，取 $K_2 \in P_2$ 使得 $K_1-A_2-K_2$ ；

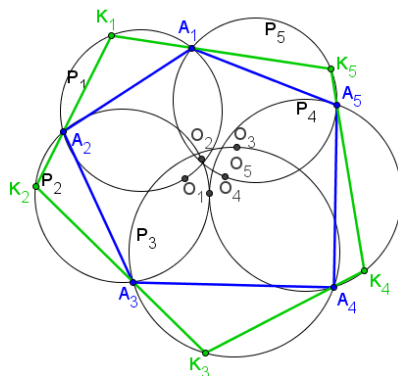
同理，作出 K_3 、 K_4 、 K_5 。

而 K_6 則為 $\overline{K_1A_1}$ 交於 P_5 的點。

由證明 1 得知： $\angle A_1K_iA_{i+1} = 72^\circ (i=1, 2, \dots, 4)$

又知道 $\angle A_5K_5A_1 = 5(72^\circ) - 4(72^\circ)$

$= 72^\circ = \angle A_5K_6A_1$ 得到 $K_5 = K_6$ 。



(3) O, O_i, B_i 共線

取 $O_1' = O$ 為縮放中心，

以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊作出的正五邊形放大至

其頂點皆在 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 上

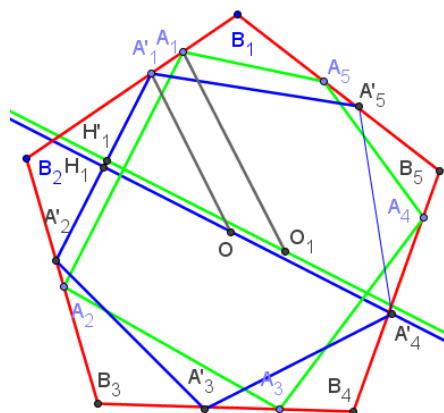
得到 $\Delta A_1H_1O_1 \sim \Delta A_1'H_1'O_1'$

，則 $\Delta A_1B_1O_1 \sim \Delta A_1'B_1O_1'$

即 $\overline{O_1'B_1} // \overline{O_1B_1}$

即可得知 O, O_1, B_1 共線。

而同理可得 $O, O_2, B_2, O, O_3, B_3, O, O_4, B_4, O, O_5, B_5$ 共線



(4) O 必落在 R_i 上

(i) O, Q_i 在 $\overrightarrow{O_iO_{i+1}}$ 異側

設 O 不在圓 R_i 上，但 $\angle B_1OB_2 = 72^\circ$ ，

即 $\angle O_1OO_2 = 108^\circ$

又

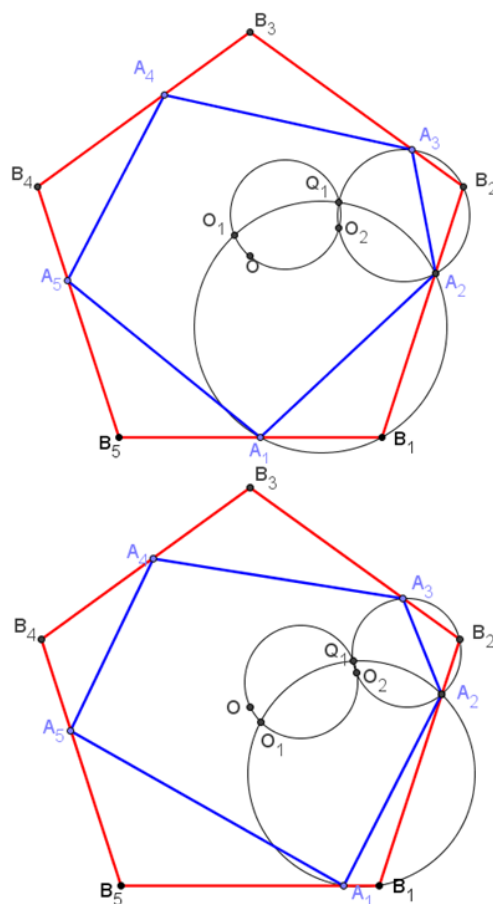
$$\begin{aligned} \angle O_1Q_1O_2 &= \angle O_1Q_1A_2 - \angle O_2Q_1A_2 \\ &= (180^\circ - \angle O_1A_1A_2) - \angle O_2A_3A_2 \\ &= 72^\circ \end{aligned}$$

矛盾，故得知 O 在圓 R_i 上。

(ii) O, Q_i 在 $\overrightarrow{O_iO_{i+1}}$ 同側

設 O 不在圓 R_i 上，但 $\angle B_1OB_2 = 72^\circ$

又

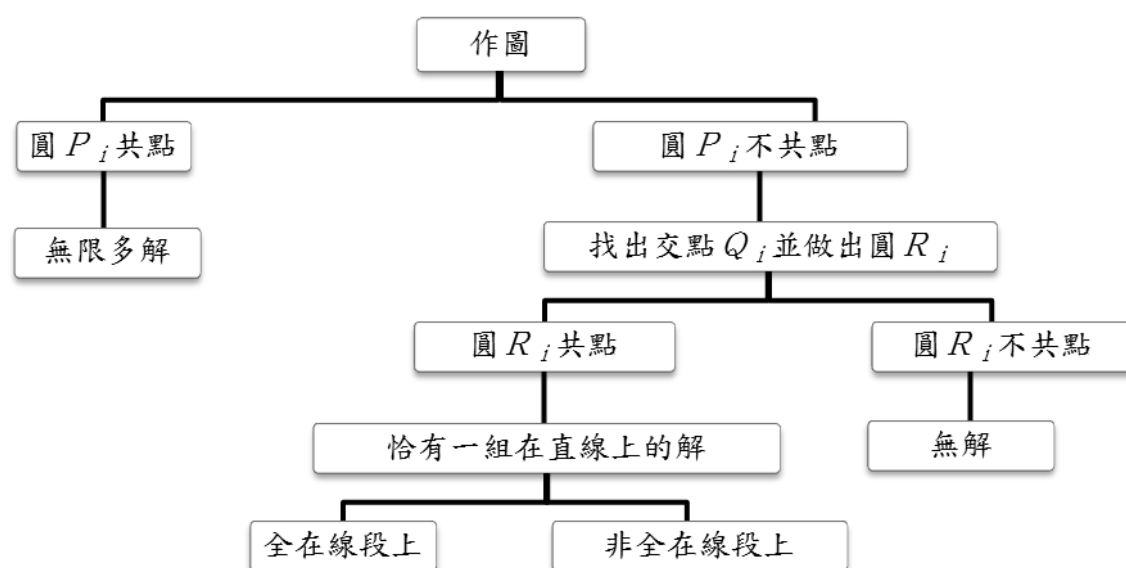


$$\begin{aligned}
& \angle O_1 Q_1 O_2 \\
&= \angle O_1 Q_1 A_2 - \angle O_2 Q_1 A_2 \\
&= (180^\circ - \angle O_1 A_1 A_2) - \angle O_2 A_3 A_2 \\
&= 72^\circ
\end{aligned}$$

矛盾，故得知 O 在圓 R_i 上。

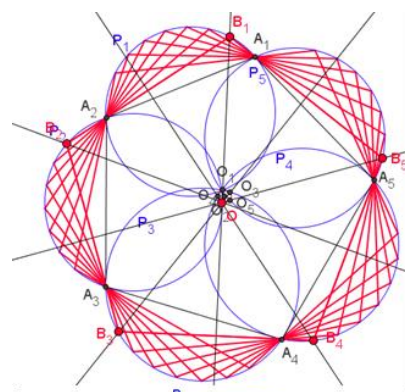
由(1)、(2)、(3)、(4)得知：有無限個等角五邊形 $K_1 K_2 K_3 K_4 K_5$ ，而當找出 O 之後，以 O 為外心的等角五邊形即為正五邊形。

4. 存在性探討



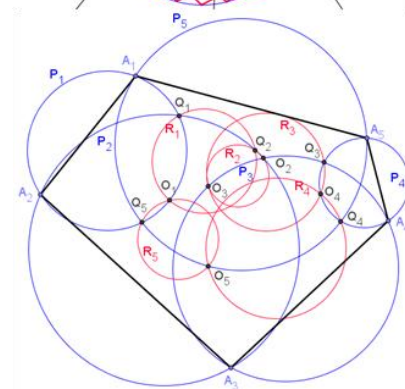
(1) 圓 P_i 共點：

此時，圓 $R_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 重合，所以此時的 O 有無限多個，必存在無限多個正五邊形。



(2) 圓 R_i 不共點：

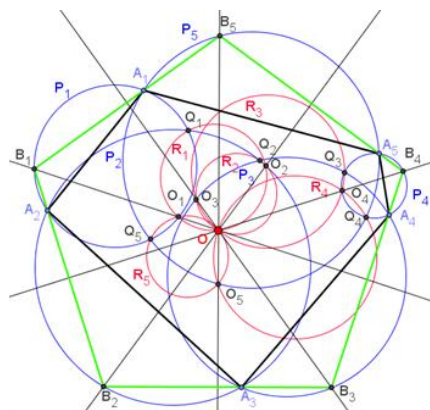
此時不存在 O ，即不存在正五邊形。



(3) 圓 R_i 共點

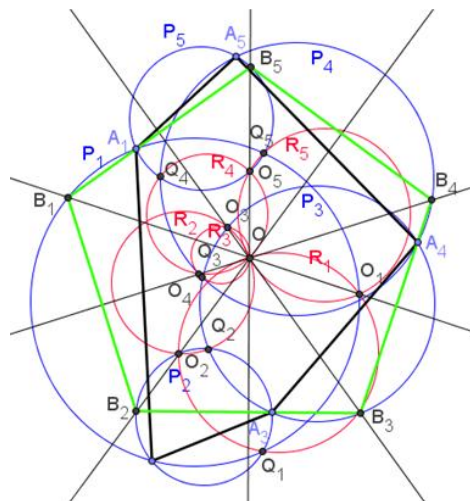
(i) 交點全在線段上：

B_i 都會落在原五邊形的外面，作出
線段上的解。



(ii) 交點不全在線段上：

B_i 會有落在原五邊形內部，作出非
全在線段上的解。



探討 在作圖的過程中，我們發現好像多一個點，作圖方法就有所改變；而當我們進一步摸索後，似乎發現奇邊形要透過外心 O 來求得頂點，而偶邊形卻不是，故我們便猜測奇邊形和偶邊形的作圖方法相異。

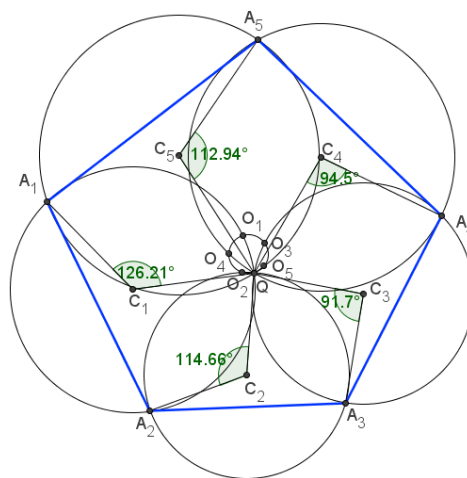
5. 端點範圍作圖及證明

(1) 作法

C_i 為圓 P_i 的圓心

(i) 比較 $\angle QC_1A_1$ 、 $\angle QC_2A_2$ 、 $\angle QC_3A_3$ 、

$\angle QC_4A_4$ 、 $\angle QC_5A_5$ 的大小



(ii)最大者連 $\overrightarrow{A_i O_i}$ 與外心軌跡圓R

的交點

(iii)最小者連 $\overrightarrow{A_{i+1} O_i}$ 與外心軌跡圓

R 的交點即可得到所求的端點範

圍

(2)證明

當外心 O 從 Q 轉到 O 時

圓心角 $\angle QC_0 O = \theta$

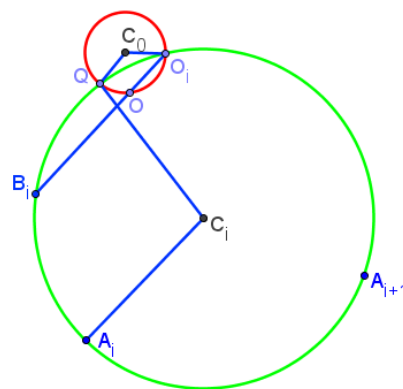
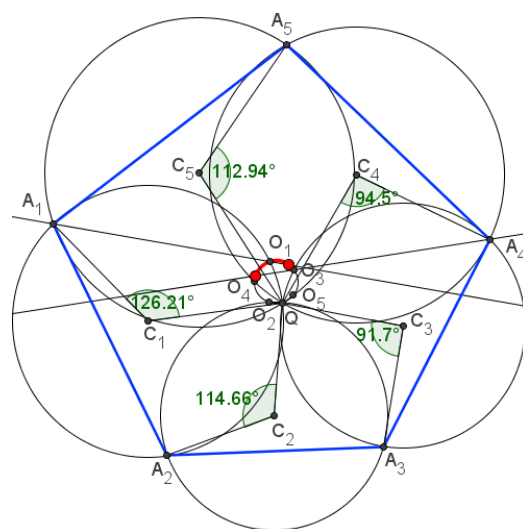
$\angle QC_0 O = 2\angle QO_i O = \angle QC_i B_i$

所以當 $\angle QC_i B_i$ 越大時代表越晚成立

連 $\overrightarrow{A_i O_i}$ 與外心軌跡圓R的交點

所以越小時代表越早不成立

連 $\overrightarrow{A_{i+1} O_i}$ 與外心軌跡圓R的交點



(四) 平面上任三點不共線的奇數點，可存在正 n 邊形，使得各線上恰含有前述 n 點中的一點

1.作法

(1)以 $A_1 A_2$ 向內作出正 n 邊形並取其外心 O_1 ，同理作出 $O_2, O_3, O_4, \dots, O_n$ 。

(2)作出通過 A_1, O_1, A_2 的外接圓 P_1 ，同理作出 $P_2, P_3, P_4, \dots, P_n$ 。

(3)取圓 P_1 與圓 P_2 的交點 Q_1 ，並作出通過 O_1, Q_1, O_2 的圓 R_1 ，同理作出 $R_2, R_3, R_4, \dots, R_n$ 。

(4)取圓 $R_1, R_2, R_3, R_4, \dots, R_n$ 的共同交點 O 。

(5)作 $\overrightarrow{OO_1}$ 、 $\overrightarrow{OO_2}$ 、 $\overrightarrow{OO_3}$ 、 $\overrightarrow{OO_4}$ 、 $\dots$ 、 $\overrightarrow{OO_n}$ 分別與圓 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 $\dots$ 、 P_n 交於 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 $\dots$ 、 B_n ，則 n 邊形 $B_1 B_2 B_3 B_4 \dots B_{n-1} B_n$ 即為所求。

2.證明

(1)正 n 邊形的頂點 B_i 會落在 $\Delta A_i O_i A_{i+1}$ 的外接圓上

假設 B_i 不落在 P_i 上

已知 $\angle A_i O_i A_{i+1} = \frac{360^\circ}{n}$ 又知道 $\angle A_i B_i A_{i+1} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ 與假設矛盾

故得知 B_i 落在 P_i 上，得證。

(2) P_i 上的點必能通過 A_i 構造出等角 n 邊形

在 P_1 上任取一點 K_1 ，取 $K_2 \in P_2$ 使得 $K_1-A_2-K_2$ ；同理作出

$K_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 。

而 K_{n+1} 則為 $\overrightarrow{K_1 A_1}$ 交於 P_n 的點。

由證明(1)得知： $\angle A_i K_i A_{i+1} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} (i=1, 2, 3, \dots, n-1)$

$$\text{又 } \angle A_n K_n A_1 = n \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \right) - (n-1) \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \right)$$

$$= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \angle A_n K_{n+1} A_1$$

得到 $K_n = K_{n+1}$ ，即 P_i 上的任意點必通過 A_i 構造出等角 n 邊形。

(3)證明 O 、 O_1 、 B_1 共線

取 $O_i' = O$ 為縮放中心，將 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 以為邊作出的正 n 邊形放大至其頂點皆在

$B_1 B_2 \dots B_n$ 上得到 $\Delta A_i H_i O_i \sim \Delta A_i' H_i' O_i'$ ，則 $\Delta A_i B_i O_i \sim \Delta A_i' B_i O_i'$ 即 $\overline{O_i' B_i} // \overline{O_i B_i}$

即可得知 O 、 O_1 、 B_1 共線

(4) **O 必落在 R_i 上**

(i) O 、 O_i 在 $\overleftrightarrow{O_i O_{i+1}}$ 異側

設 O 不在 R_i 上，但 $\angle B_i O B_{i+1} = \frac{360^\circ}{n}$ ，即 $\angle O_i O O_{i+1} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$

$$\text{又 } \angle O_i Q_i O_{i+1} = \angle O_i Q_i A_{i+1} - \angle O_{i+1} Q_i A_{i+1}$$

$$= (180^\circ - \angle O_i A_i A_{i+1}) - \angle O_{i+1} A_{i+2} A_{i+1} = \frac{360^\circ}{n}$$

矛盾，故得知 O 在 R_i 上

(ii) O 、 O_i 在 $\overleftrightarrow{O_i O_{i+1}}$ 同側

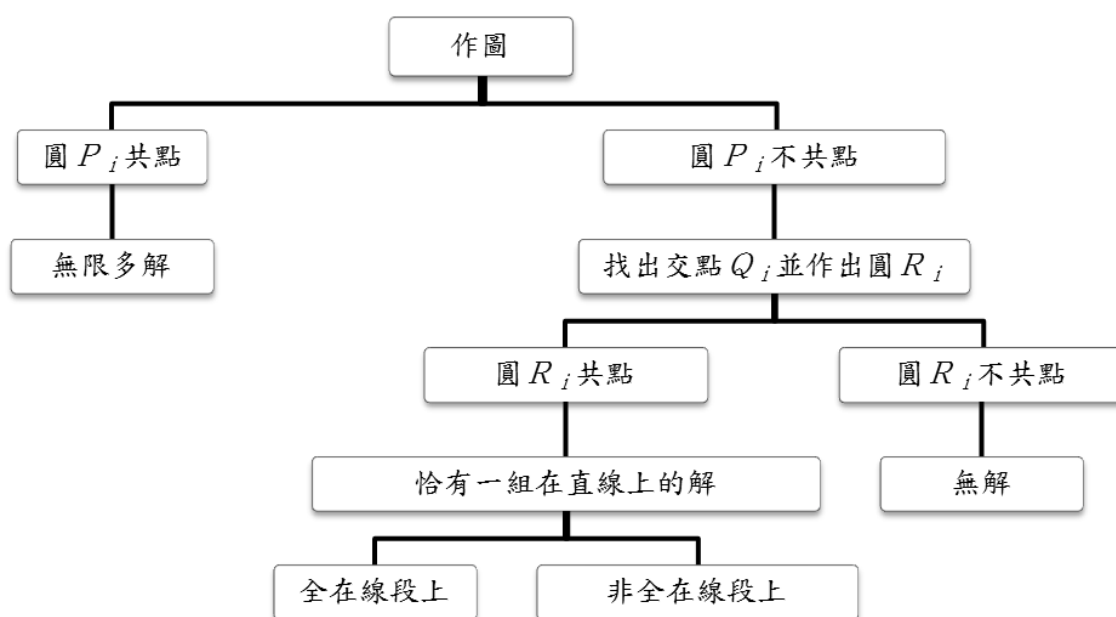
設 O 不在 R_i 上，但 $\angle B_i O B_{i+1} = \frac{360^\circ}{n}$

$$\text{又 } \angle O_i Q_i O_{i+1} = \angle O_i Q_i A_{i+1} - \angle O_{i+1} Q_i A_{i+1}$$

$$= (180^\circ - \angle O_i A_i A_{i+1}) - \angle O_{i+1} A_{i+2} A_{i+1} = \frac{360^\circ}{n}$$

矛盾，故得知 O 在 R_i 上。

3. 存在性探討



(五) 平面上任三點不共線的偶數點，可存在正 n 邊形，使得各線上恰含有前述 n 點中的一點

1.作法：

(1) 給定平面上 n 個點 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

(2) 分別以 $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \dots, \overline{A_nA_1}$ 為邊長，向內作正 n 邊形。

(3) 求出其外心 $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ 。

(4) 連接 $\overrightarrow{O_1O_{\frac{n+1}{2}}}, \overrightarrow{O_2O_{\frac{n+2}{2}}}, \dots, \overrightarrow{O_{\frac{n}{2}}O_n}$

(5) $\overrightarrow{O_1O_{\frac{n+1}{2}}}, \overrightarrow{O_2O_{\frac{n+2}{2}}}, \dots, \overrightarrow{O_{\frac{n}{2}}O_n}$ 的共同交點為 O

(6) $\overrightarrow{O_1O_{\frac{n+1}{2}}}, \overrightarrow{O_2O_{\frac{n+2}{2}}}, \dots, \overrightarrow{O_{\frac{n}{2}}O_n}$ 分別交圓 $P_1, P_{\frac{n+1}{2}}, P_2, P_{\frac{n+2}{2}}, \dots, P_n$ 於 $B_1,$

$B_{\frac{n+1}{2}}, B_2, B_{\frac{n+2}{2}}, \dots, B_n$ 。

(7) 連 $\overline{B_1B_2}, \overline{B_2B_3}, \overline{B_3B_4}, \dots, \overline{B_nB_1}$ ，則 n 邊形 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ 即為所求之正 n 邊形。

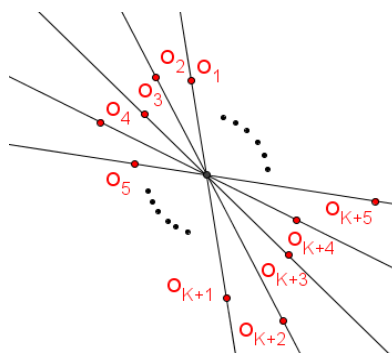
2. 證明： $O_i, O, O_{\frac{n+i}{2}}$ 共線

設 $L_i = \overrightarrow{OB_i} (i=1, 2, \dots, n)$

L_i 和 L_{i+1} 的夾角為 $\frac{360^\circ}{n}$

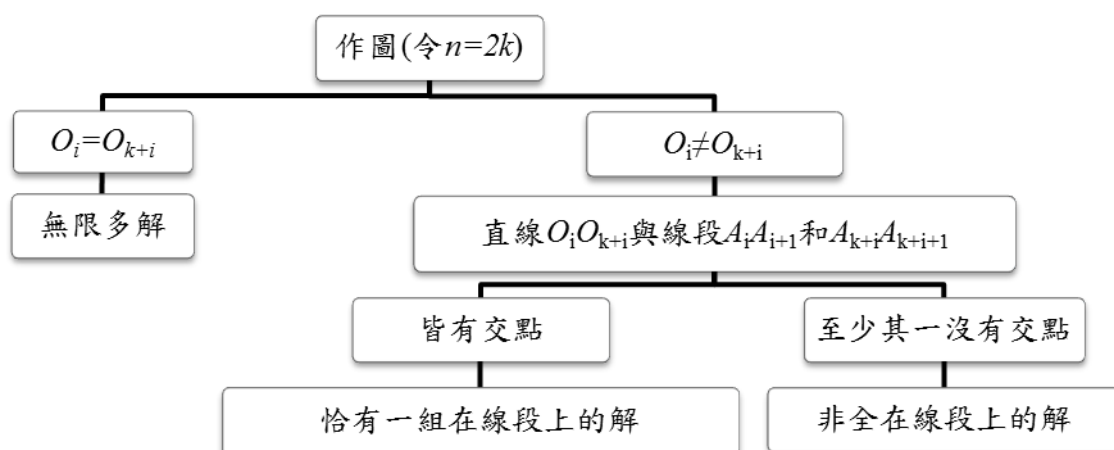
而 L_i 與 $L_{\frac{n+i}{2}}$ 的夾角為 $\frac{n}{2} \left(\frac{360^\circ}{n} \right)$ ，

亦即 $O_i, O, O_{\frac{n+i}{2}}$ 共線



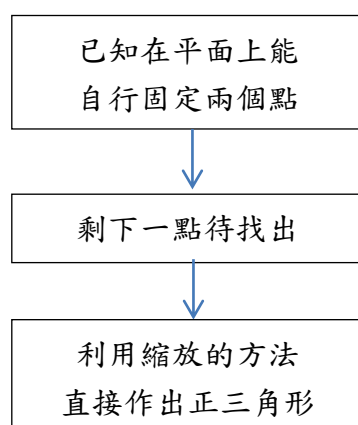
由以上得知偶數邊形對邊外心連線交圓 P_i 即可得到 B_i

3. 存在性探討

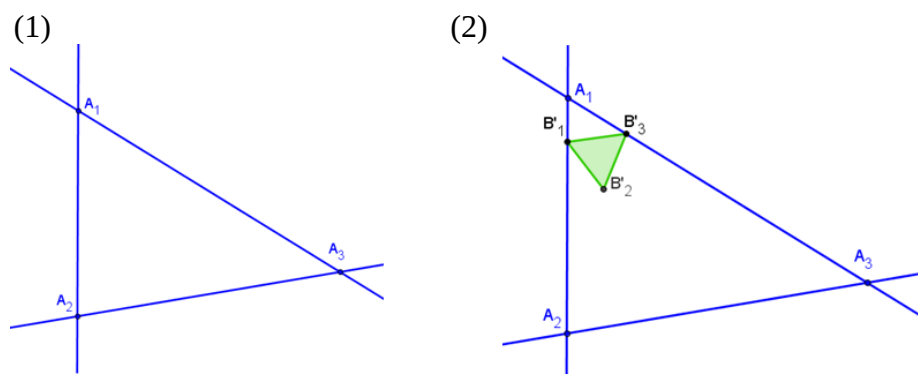


(六) 平面上任兩線不平行的不共點三線，可存在正三角形，使得各頂點恰在前述三線中的一線

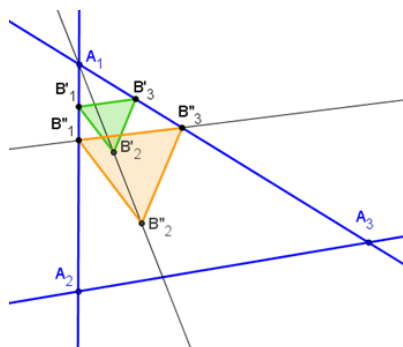
1. 想法：



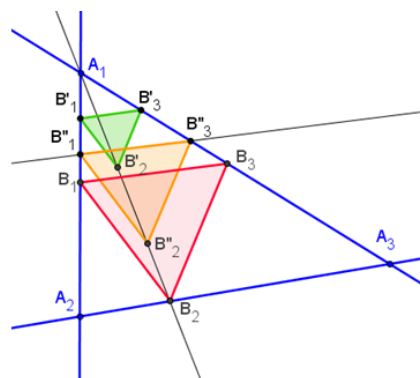
2. 作圖方法(1~4)：



(3)



(4)



(1) 在 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_1A_3}$ 各取一點 B'_1 、 B'_3 ，並向內作出正 $\triangle B'_1B'_2B'_3$ 。

(2) 在 $\overline{A_1A_2}$ 上取一點 B''_1 並在 $\overline{A_1A_3}$ 上取一點 B''_3 使得 $\overline{B''_1B''_3} \parallel \overline{B'_1B'_3}$ ，

同理 $\overline{B''_1B''_2} \parallel \overline{B'_1B'_2}$ ， $\overline{B''_2B''_3} \parallel \overline{B'_2B'_3}$ 。

(3) 連 $\overline{B'_2B''_2}$ 交 $\overline{A_2A_3}$ 於 B_2 ，則 B_2 即為

所求的一個頂點

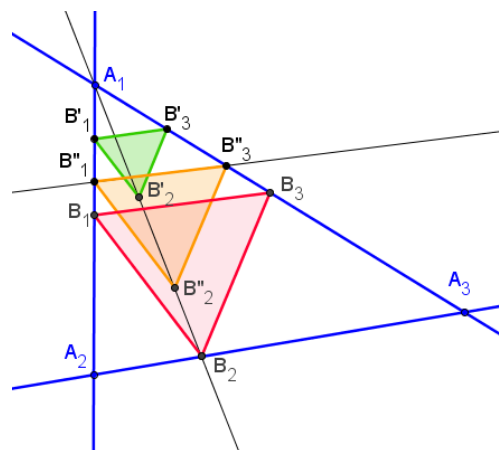
(4) 利用 B_2 作出正 $\triangle B_1B_2B_3$ 。

3. 證明

$$\because \overline{B_1B_2} \parallel \overline{B'_1B'_2}, \overline{B_2B_3} \parallel \overline{B'_2B'_3}$$

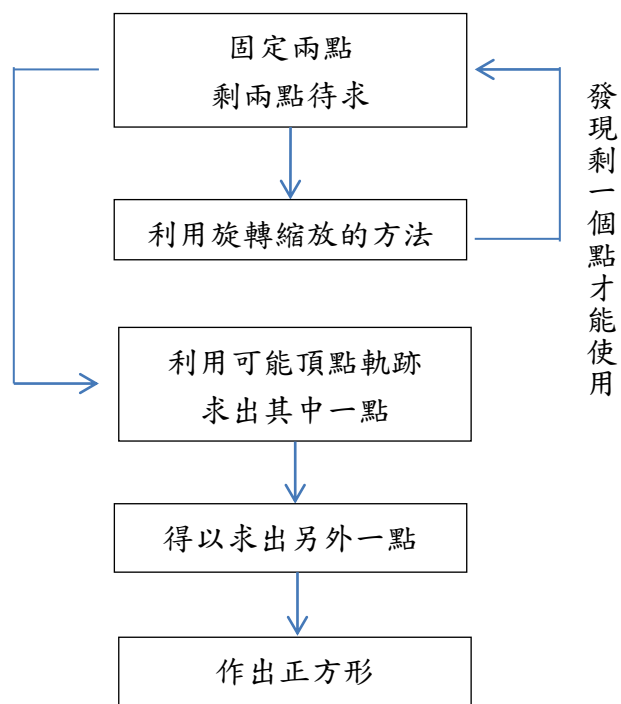
$$\therefore \triangle B_1B_2B_3 \sim \triangle B'_1B'_2B'_3 (AA)$$

故 $\triangle B_1B_2B_3$ 為正三角形

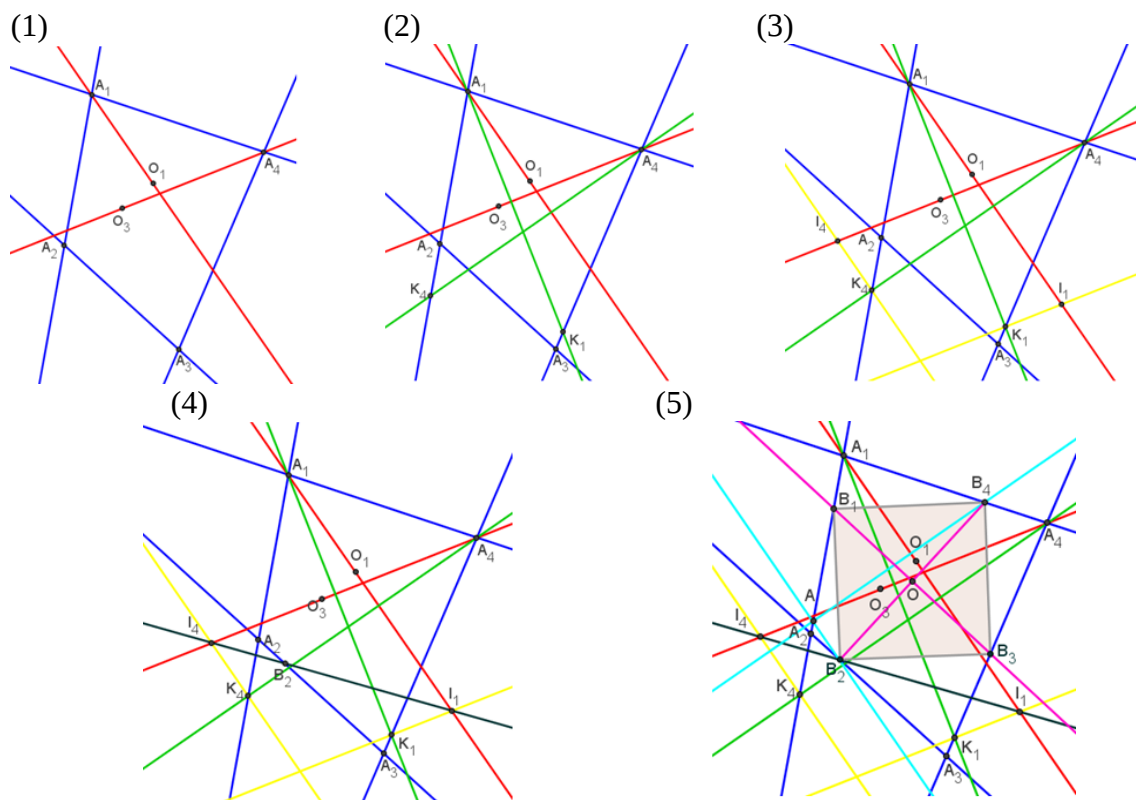


(七) 探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的四線，可存在正方形，使得各頂點恰在前述四線中的一線

1. 想法：



2. 作圖方法(1~5)：



(1)以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊向內作出外心 O_1 ，以 $\overline{A_3A_4}$ 為邊向內作出外心 O_3 ，連接 $\overline{A_1O_1}$ 、 $\overline{A_4O_3}$ 。

(2)過 A_1 作 $\overline{A_4O_3}$ 的垂直線交 $\overline{A_3A_4}$ 於 K_1 ，過 A_4 作 $\overline{A_1O_1}$ 的垂直線交 $\overline{A_1A_2}$ 於 K_4 。

(3)過 K_1 作 $\overline{A_4O_3}$ 的平行線交 $\overline{A_1O_1}$ 於 I_1 ，過 K_4 作 $\overline{A_1O_1}$ 的平行線交 $\overline{A_4O_3}$ 於 I_4 。

(4)連接 $\overline{I_1I_4}$ 交 $\overline{A_2A_3}$ 於 B_2 。

(5)過 B_2 平行 $\overline{A_1O_1}$ 交 $\overline{A_1A_2}$ 於一點 A ，過其交點作 $\overline{AB_2}$ 的垂直線交 $\overline{A_4A_1}$ 於 B_4 ，作 $\overline{B_2B_4}$ 中垂線交 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 於 B_1 、 B_3 ，則四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即為所求。

3. 證明

以 $\overline{B_2B_4}$ 為直徑畫圓交 $\overline{A_3A_4}$ 得 B_3 、 T

$\overline{TB_2} \parallel \overline{A_4O_3} \therefore \angle B_2TA_3 = 45^\circ$ 得知

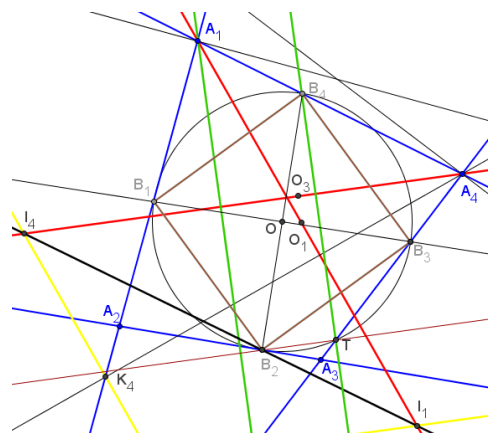
$\angle A_4TB_4 = 45^\circ$

故 $\angle B_4OB_3 = 90^\circ$ 故 $\overline{B_2B_4}$ 的中垂線會交

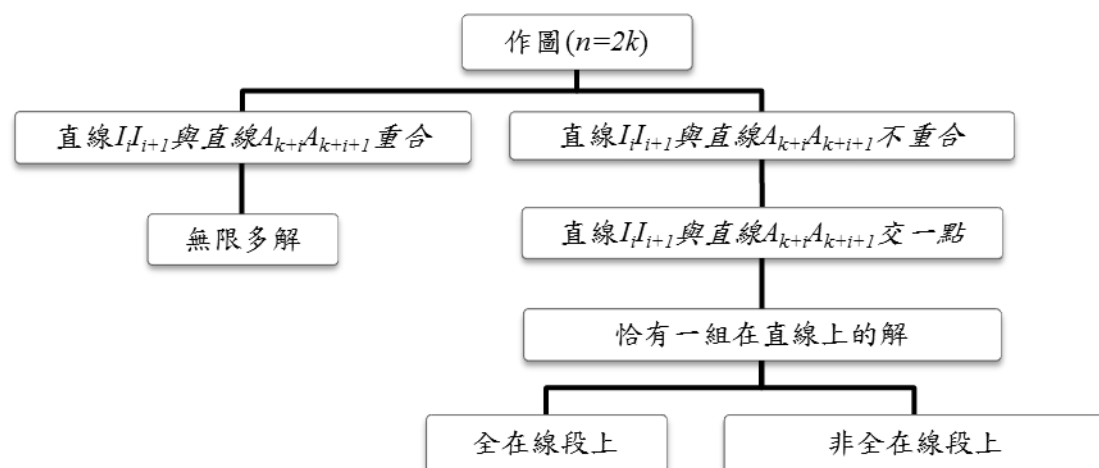
$\overline{A_3A_4}$ 於 B_3

同理可得 $\overline{B_2B_4}$ 的中垂線亦交 $\overline{A_1A_2}$ 於 B_1

故四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為正方形

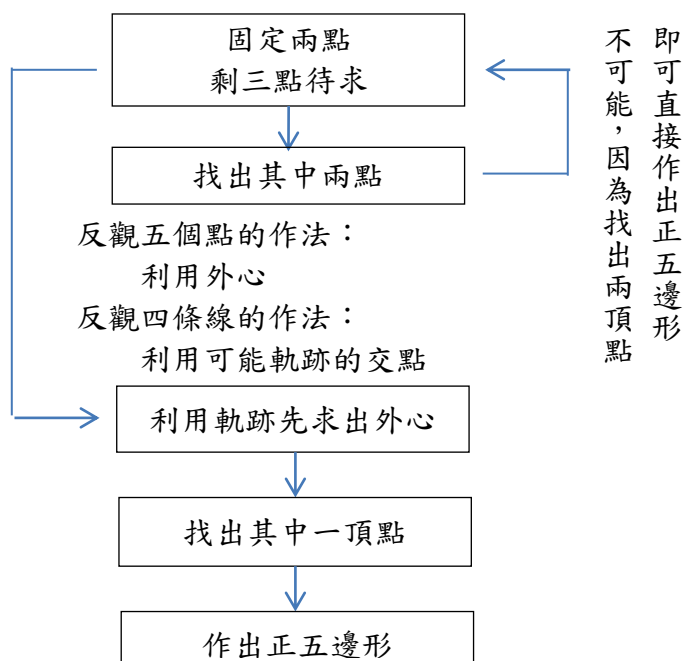


4. 存在性探討

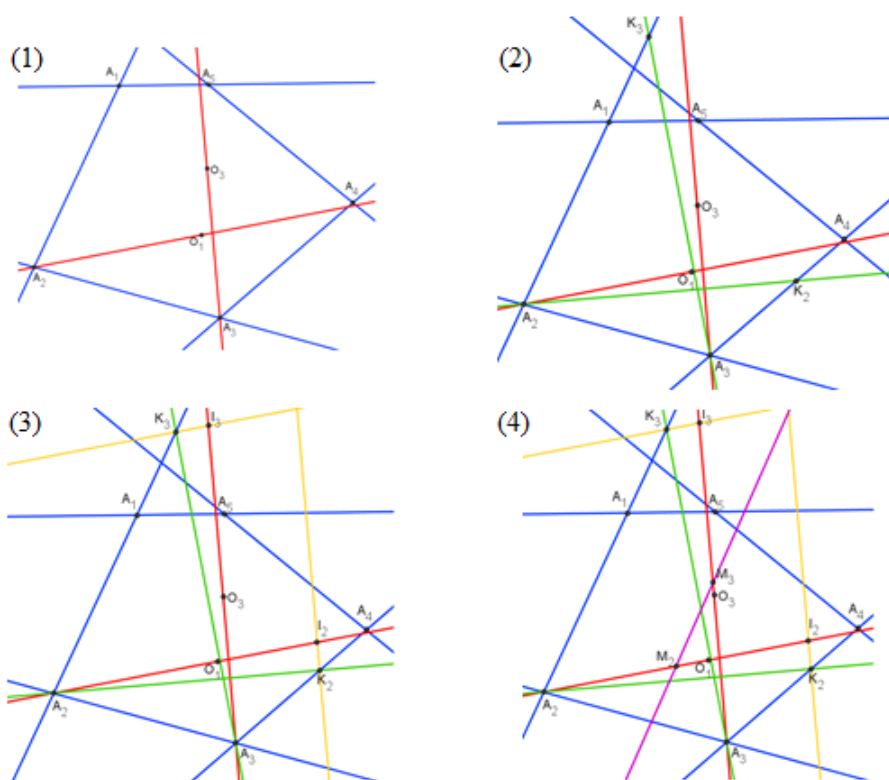


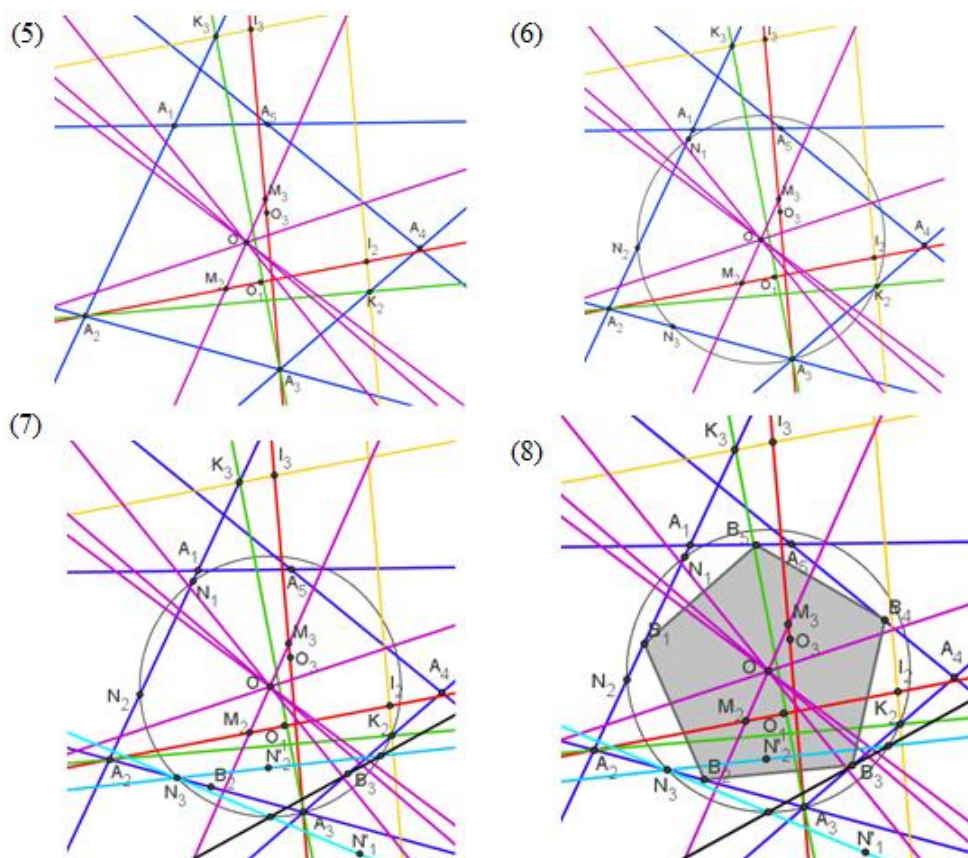
(八) 平面上任兩線不平行、任三線不共點的五線，可存在正五邊形，使得各頂點
恰在前述五線中的一線

1. 想法：



2. 作圖方法(1~8)：





(1)以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊向內作正五邊形的外心 O_1 ， $\overline{A_3A_4}$ 為邊向內作正五邊形外心 O_3 ，連 $\overline{A_2O_1}$ 、 $\overline{A_3O_3}$

(2)過 A_2 作 $\overline{A_3O_3}$ 垂直線交 $\overline{A_3A_4}$ 於 K_2 ，過 A_3 作 $\overline{A_2O_1}$ 垂直線交 $\overline{A_1A_2}$ 於 K_3

(3)過 K_2 作 $\overline{A_3O_3}$ 平行線交 $\overline{A_2O_1}$ 於 I_2 ，過 K_3 作 $\overline{A_2O_1}$ 平行線交 $\overline{A_3O_3}$ 於 I_3

(4)作 $\overline{A_2I_2}$ 、 $\overline{A_3I_3}$ 中點 M_2 、 M_3 ，連 $\overline{M_2M_3}$

(5)依此作法依序作完，共同交點 O 即為正五邊形的外心

(6)取一適當半徑，以 O 為圓心作圓，交 $\overline{A_1A_2}$ 於 N_1 、 N_2 ，交 $\overline{A_2A_3}$ 於 N_3

(7)以 N_3 為旋轉中心，將 $\overline{N_3N_1}$ 、 $\overline{N_3N_2}$ 順時針轉正五邊形的內角，與圓的交點相連，與 $\overline{A_3A_4}$ 交點即為 B_3

(8)再以 O 為中心將 B_3 旋轉，得其他頂點，將各個頂點連接即為正五邊形

3. 證明

(1) $\overline{QS}$ 中點為三頂點在三線上的正五邊形的外心

Q 為 $\overline{I_1I_5}$ 上的動點

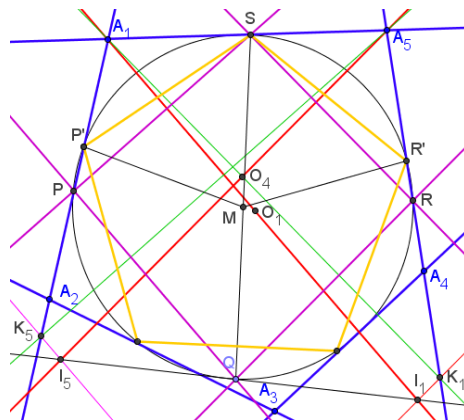
$\overline{QR} \parallel \overline{I_5A_5} \therefore \angle QRK_1 = 54^\circ$ 得知

$\angle SRA_5 = 36^\circ$,

$\angle SMR' = 2\angle SRA_5 = 72^\circ$

同理可得 $\angle SMP' = 72^\circ$

故 M 為正五邊形三頂點在三線上的外心



(2) 該外心軌跡為 $\overline{M_1M_5}$

(i)

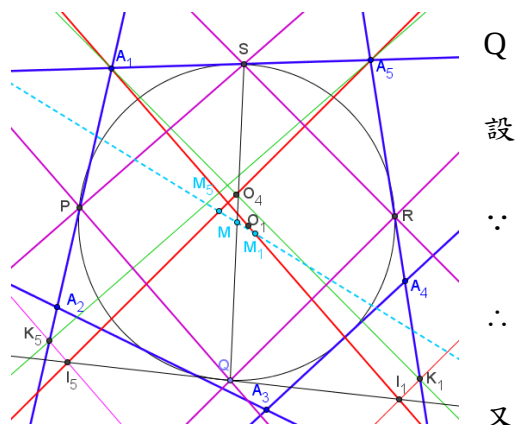
為 $\overline{I_1I_5}$ 上的動點

$\overline{I_5Q} : \overline{QI_1} = m : n$

$\overline{I_5A_5} \parallel \overline{QR} \parallel \overline{I_1K_1}$

$\overline{RK_1} : \overline{RK_5} = n : m$

$\overline{A_1K_1} \parallel \overline{RS} \therefore \overline{A_5S} : \overline{SA_1} = m : n$



Q

設

$\therefore$

$\therefore$

又

(ii)

$\overline{I_5I_1} \parallel \overline{CA_1}$

且 $\overline{I_5Q} : \overline{QI_1} = \overline{CF} : \overline{A_1F} = m : n$

$\overline{I_5C}$ 中點 M'_5 , $\overline{I_1A_1}$ 中點 M_1

則 $\overline{QF}$ 的中點 $M' \in \overline{M'_5M_1}$

今作 $\overline{A_5A_1}$ 且 $A_5 \in \overline{I_5C}$

使得 $\overline{A_1S} : \overline{SA_5} = n : m$

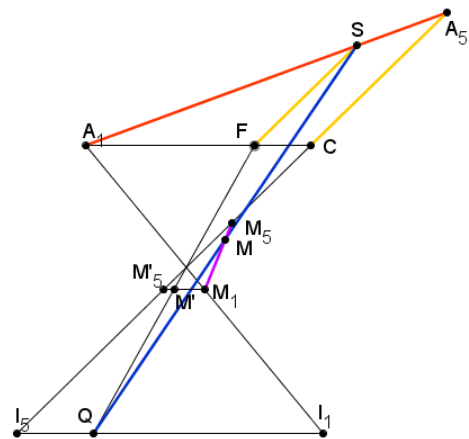
且 $\overline{I_5A_5}$ 中點為 M_5 ， $\overline{QS}$ 中點 M

則得知 $\overline{MM'} \parallel \overline{SF}$

即 $\overline{MM'} \parallel \overline{I_5A_5}$

故 $\overline{MM'}$ 為 $\triangle M_1M_5M_5$ 的中線

即 M 必落在 $\overline{M_1M_5}$ 上



※註：另證——複數方法

已知 $|a-p| : |p-b| = |c-q| : |q-d| = n : m$

$$m_1 = \frac{b+c}{2}, m_2 = \frac{a+d}{2}$$

$$\text{又 } p = \frac{ma+nb}{m+n}, q = \frac{nc+md}{m+n}$$

$$\text{則 } m = \frac{ma+nb+nc+md}{2(m+n)}$$

得到

$$\frac{m_2 - m}{m_2 - m_1} = \frac{\frac{ma+na+md+nd - ma - nb - nc - md}{2(m+n)}}{\frac{a+d-b-c}{2}} = \frac{n(a+d-b-c)}{(m+n)(a+d-b-c)} = \frac{n}{m+n}$$

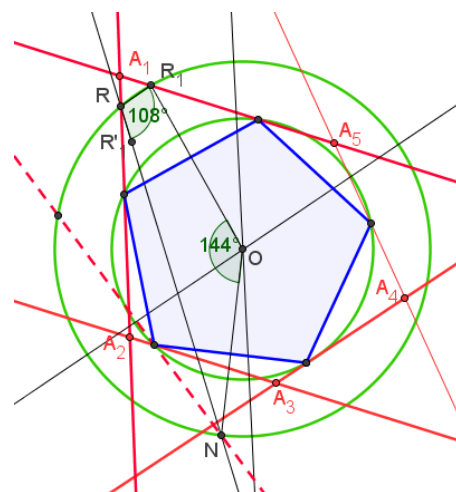
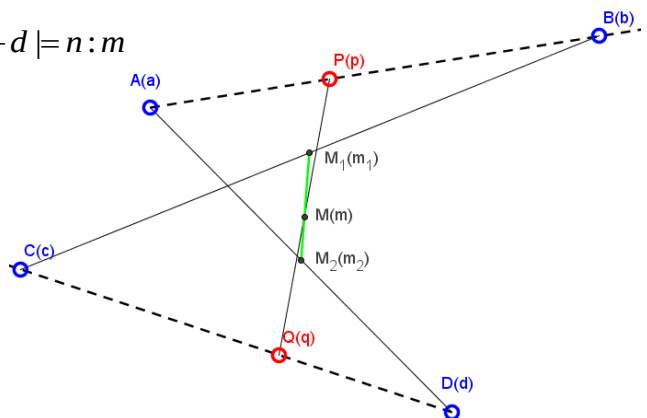
即 $\overline{PQ}$ 中點位在 $\overline{M_1M_2}$ 上

(3) 端點的軌跡

$$\because \angle R_1RN = 108^\circ \therefore \angle R_1ON = 144^\circ$$

$$\text{又 } \overline{R_1O} = \overline{NO}$$

$$\therefore \overline{R_1O} = \text{逆時針旋轉 } 144^\circ \text{ 可得 } \overline{NO}$$



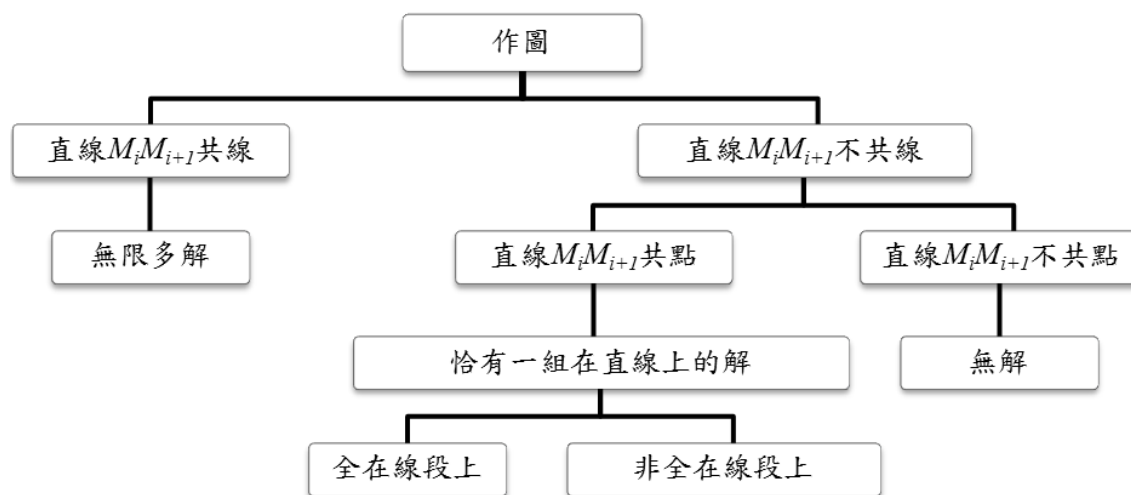
且 R_1 的軌跡為一直線

$\therefore N$ 的軌跡為一直線

故由上述證明得知

利用軌跡的方法可作出正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$

4. 存在性探討



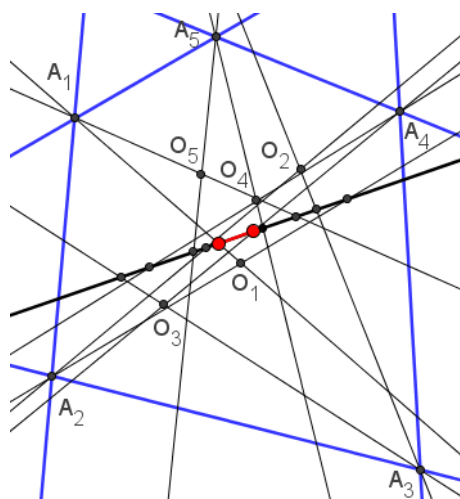
5. 端點範圍作法及證明

(1) 作法

① 連 $\overrightarrow{A_1O_1}$ 、 $\overrightarrow{A_2O_2}$ 、 $\overrightarrow{A_3O_3}$ 、 $\overrightarrow{A_4O_4}$ 、 $\overrightarrow{A_5O_5}$ 與外心軌跡的交點

② 連 $\overrightarrow{A_1O_5}$ 、 $\overrightarrow{A_2O_1}$ 、 $\overrightarrow{A_3O_2}$ 、 $\overrightarrow{A_4O_3}$ 、 $\overrightarrow{A_5O_4}$ 與外心軌跡的交點

③ 在①及②中所作出來的五個點中各取一點，並使此兩點的距離為最小值，則此兩點即為端點，而得以求出端點範圍。



(2)證明

當 B_i 順時針移動時，與 A_i 重合

$$B_{i-1} \in \overleftrightarrow{A_{i-1} A_i}$$

$$\therefore \overline{B_i B_{i-1}} \text{ 跟 } \overleftrightarrow{A_i A_{i-1}} \text{ 重合}$$

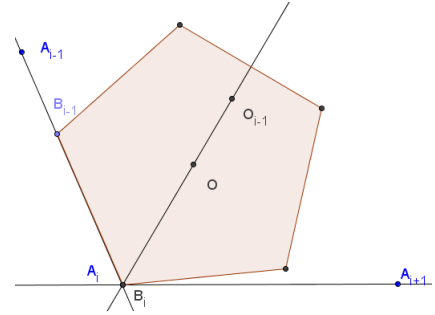
所以 $\angle B_{i-1}B_iO = \angle B_{i-1}B_iO_{i-1} = \angle A_{i-1}A_iO_{i-1}$

$\therefore B_i$ 順時針移動時， O 最先碰到 $\overrightarrow{A_i O_{i-1}}$ 與外心軌跡交點即為一端點

逆時針同理。

∴ B_i 逆時針移動時， O 最先碰到 $\overrightarrow{A_i O_i}$ 與外心軌跡交點即為另一端點

所以端點範圍為兩者各取一點，並使兩點間的距離為最小值。



(九) 平面上任兩線不平行、任三線不共點的奇數條線，可存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線

1.作法

(1)以 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 、 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 為邊長向內作正 n 邊形外心 O_{i-1} 、 O_{i+1} ，連 $\overline{A_iO_{i-1}}$ 、 $\overline{A_{i+1}O_{i+1}}$ 。

(2)過 A_i 作 $\overline{A_{i+1}O_{i+1}}$ 垂直線交 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 於 K_i ，過 A_{i+1} 作 $\overline{A_iO_{i-1}}$ 垂直線交 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 於 K_{i+1}

(3)過 K_i 作 $\overline{A_{i+1}O_{i+1}}$ 平行線交 $\overline{A_iO_{i-1}}$ 於 I_i ，過 K_{i+1} 作 $\overline{A_iO_{i-1}}$ 平行線交 $\overline{A_{i+1}O_{i+1}}$ 於 I_{i+1}

(4)作 $\overline{A_iI_i}$ 、 $\overline{A_{i+1}I_{i+1}}$ 中點 M_i 、 M_{i+1} ，連 $\overline{M_iM_{i+1}}$ 依此作法依序作完，所共同交點為 O 即為正 n 邊形的外心

(5)取一適當半徑，以 O 為圓心作圓，交 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 於 N_{i-1} 、 N_i ，交 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 於 N_{i+1}

(6)以 N_{i+1} 為旋轉中心，將 $\overline{N_{i+1}N_{i-1}}$ 、 $\overline{N_{i+1}N_i}$ 順時針轉正 n 邊形的內角，與圓的交點，相連，與 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 交點即為 B_{i+1}

(7)再以 O 為中心將 B_{i+1} 旋轉，得其他頂點，將各個頂點連接即為正 n 邊形

2.證明

(1) QS 中點為正 n 邊形的三頂點在三線上的外心

Q 為 $\overline{I_iI_{i+1}}$ 上的動點， $\overline{QR} \parallel \overline{I_iA_i} \therefore \angle QRK_{i+1} = (90 - \frac{180}{n})^\circ$ 得知

$$\angle SRA_i = \frac{180^\circ}{n}$$

$$\angle SMR' = 2\angle SRA_i = \frac{360^\circ}{n}。同理可得 \angle SMP' = \frac{360^\circ}{n}$$

故 M 為正五邊形三頂點在三線上的外心

(2) 該外心軌跡為 $\overline{M_i M_{i+1}}$

(i) Q 為 $\overline{I_i I_{i+1}}$ 上的動點，設 $\overline{I_i Q} : \overline{Q I_{i+1}} = m : n$

$$\therefore \overline{I_i A_i} // \overline{QR} // \overline{I_{i+1} K_{i+1}} \therefore \overline{RK_{i+1}} : \overline{RA_i} = n : m$$

$$\text{又 } \overline{A_{i+1} K_{i+1}} // \overline{RS} \therefore \overline{A_i S} : \overline{SA_{i+1}} = m : n$$

(ii) $\overline{I_i I_{i+1}} // \overline{CA_{i+1}}$

$$\text{且 } \overline{I_i Q} : \overline{Q I_{i+1}} = \overline{CF} : \overline{A_{i+1} F} = m : n$$

$\overline{I_i C}$ 中點 M'_i ， $\overline{I_{i+1} A_{i+1}}$ 中點 M_{i+1}

則 $\overline{QF}$ 的中點 $M' \in \overline{M'_i M_{i+1}}$

今作 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 且 $A_i \in \overline{I_i C}$ ，使得 $\overline{A_{i+1} S} : \overline{SA_i} = n : m$

且 $\overline{I_i A_i}$ 中點為 M_i ， $\overline{QS}$ 中點 M

則得知 $\overline{MM'} // \overline{SF}$ ，即 $\overline{MM'} // \overline{I_i A_i}$

故 $\overline{MM'}$ 為 $\triangle M_{i+1} M'_i M_i$ 的中線，即 M 必落在 $\overline{M_{i+1} M_i}$ 上

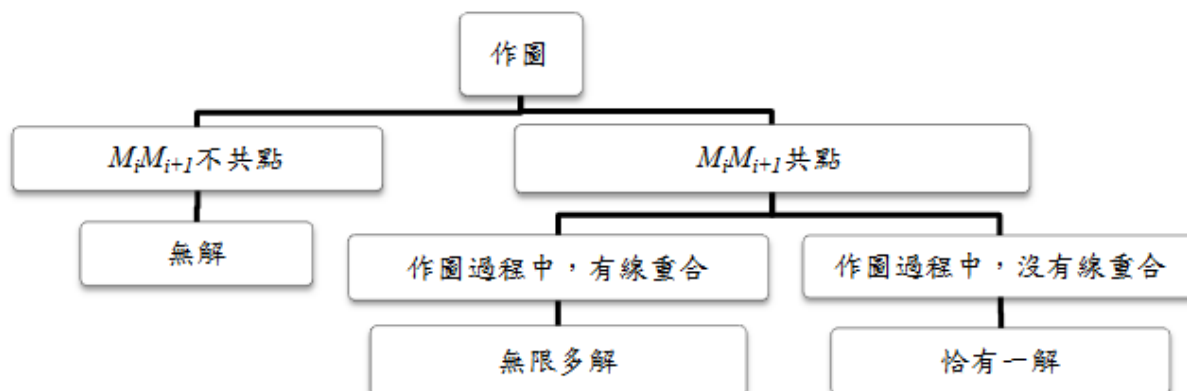
(3) 頂點的軌跡為一直線

$$\therefore \angle R_1 R N = (180 - \frac{360}{n})^\circ \therefore \angle R_1 O N = \frac{360^\circ}{n} \text{ 又 } \overline{R_1 O} = \overline{NO}$$

$\therefore \overline{R_1 O}$ 逆時針旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$ 可得 $\overline{NO}$ 且 R_1 的軌跡為一直線

$\therefore N$ 的軌跡為一直線

3. 存在性探討



(十) 平面上任兩線不平行、任三線不共點的偶數條線，可存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線

1.作法

(1) 以 $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 、 $\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 為邊長向內作正 n 邊形外心 O_{i-1} 、 O_{i+1} ，連 $\overrightarrow{AO_{i-1}}$ 、 $\overrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 。

(2) 過 A_i 作 $\overrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 垂直線交 $\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 於 K_i ，過 A_{i+1} 作 $\overrightarrow{AO_{i-1}}$ 垂直線交 $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 於 K_{i+1}

(3) 過 K_i 作 $\overrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 平行線交 $\overrightarrow{AO_{i-1}}$ 於 I_i ，過 K_{i+1} 作 $\overrightarrow{AO_{i-1}}$ 平行線交 $\overrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 於 I_{i+1}

(4) 連 $\overrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 交 $\overrightarrow{A_{\frac{n}{2}+i}A_{\frac{n}{2}+i+1}}$ 於 $B_{\frac{n}{2}+i}$

(5) 過 $B_{\frac{n}{2}+i}$ 平行 $\overrightarrow{AO_{i-1}}$ 交 $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 一點，過其交點作 $\overrightarrow{AO_{i-1}}$ 垂直線交 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 B_i

(6) 以 $B_{\frac{n}{2}+i}$ 、 B_i 的中點 O 為中心將 $B_{\frac{n}{2}+i}$ 、 B_i 旋轉得其他頂點，將頂點連接即為正 n 邊形

2.證明

$\overrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 交 $\overrightarrow{A_{k+i}A_{k+i+1}}$ 為頂點

B_i 、 B_{k+i} 對稱於 O

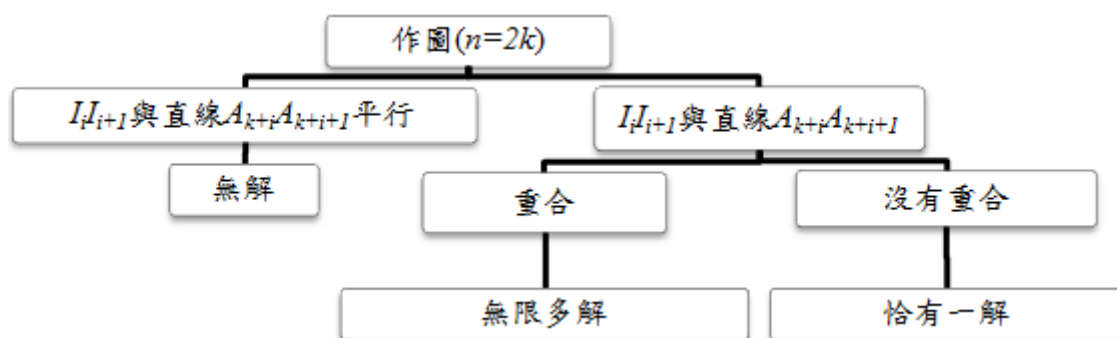
又 $\overrightarrow{AI_i}$ 、 $\overrightarrow{A_{i+1}I_{i+1}}$ 中點 M_i 、 M_{i+1}

又 B_i 的軌跡是 $\overrightarrow{AA_{i+1}}$ ， O 的軌跡是 $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ ，

$\therefore B_{k+i}$ 的軌跡是 $\overrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 又在 $\overrightarrow{A_{k+i}A_{k+i+1}}$

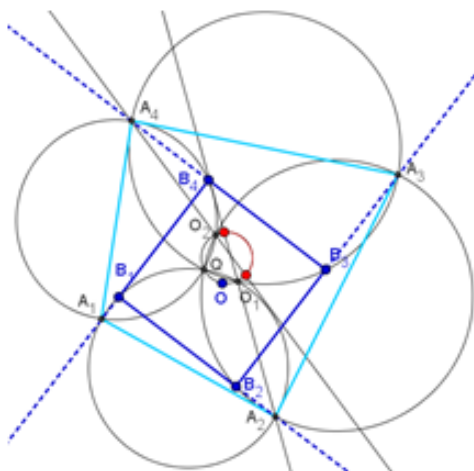
故 $\overrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 交 $\overrightarrow{A_{k+i}A_{k+i+1}}$ 為端點

3. 存在性探討

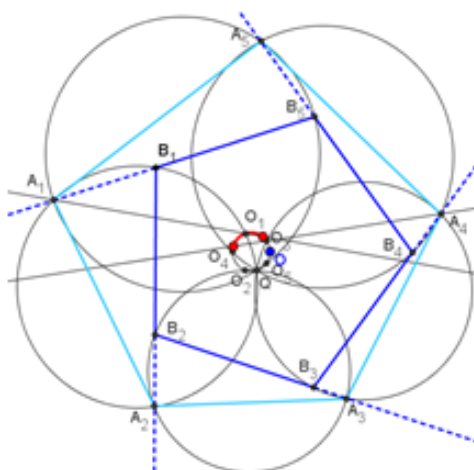


(十一) 若放寬限制：點 B_i 可以在 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 上，對於無限多解的探討：

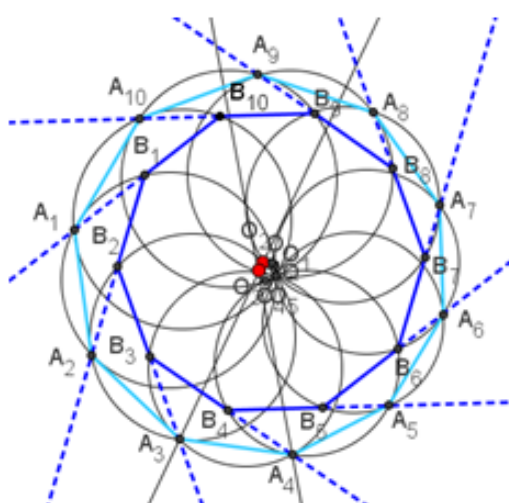
1. 四個點：



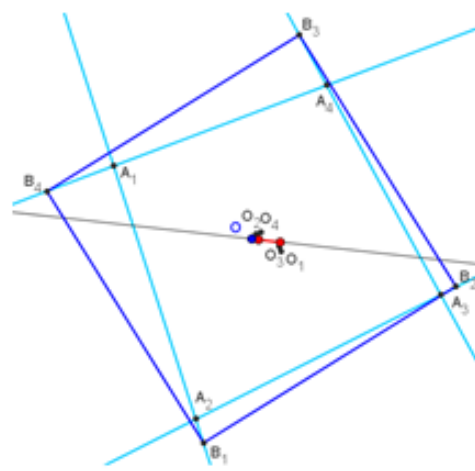
2. 五個點：



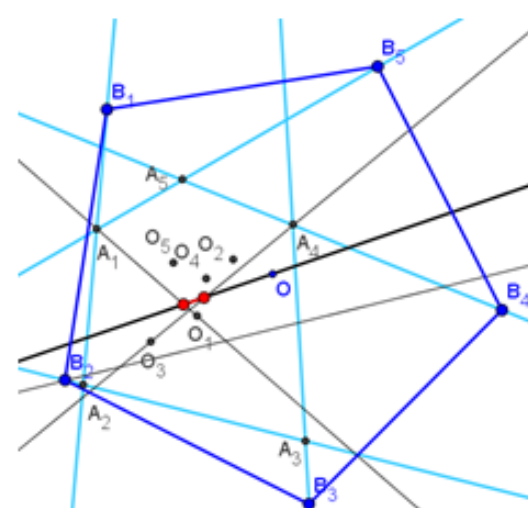
3. n 個點 (舉十邊形為例)：



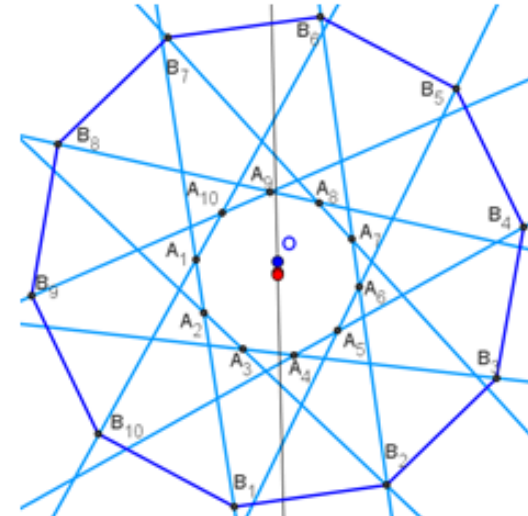
1. 四條線：



2. 五條線：



3. n 條線 (舉十邊形為例)：



(十二) 推廣至向外作外心時的情形

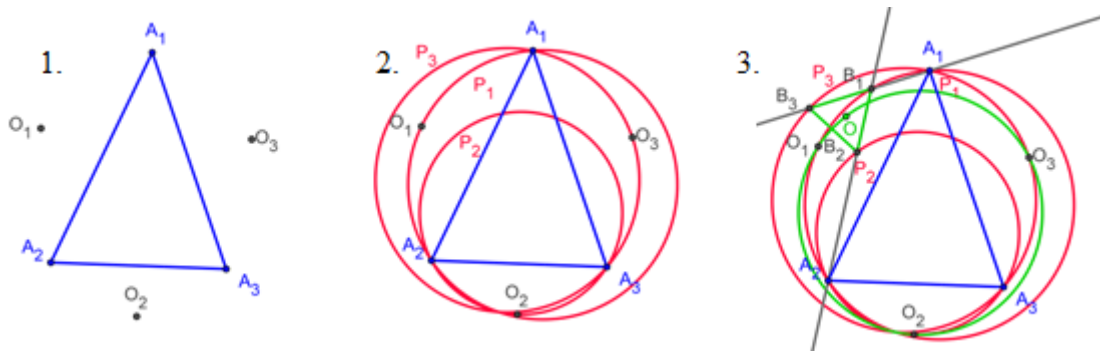
1. 三個點：

(1)作圖方法：

(i)以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊向外作出正三角形取其外心 O_1 ，同理作出 O_2 、 O_3 。

(ii)作出通過 A_1 、 O_1 、 A_2 的圓 P_1 ，同理作出 P_2 、 P_3 。

(iii)在 P_1 上取一點 B_1 ，連 $\overrightarrow{B_1A_2}$ 交 P_2 於 B_2 ，同理作出 B_3 ，則 $\triangle B_1B_2B_3$ 即為所求。



(2)證明：

證明與未放寬限制相同，故在此省略。

1.四個點：

(1)作圖方法：

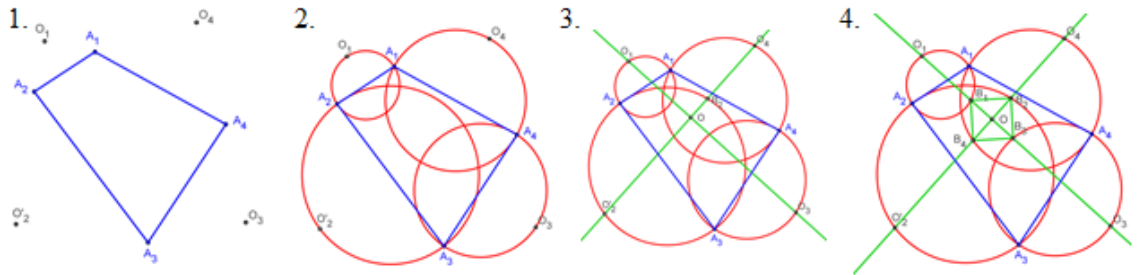
(i)分別以 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 、 $\overline{A_4A_1}$ 為邊長，向外作正方形。

(ii)求出其外心 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 ，並分別過 $\triangle A_1O_1A_2$ 、 $\triangle A_2O_2A_3$ 、 $\triangle A_3O_3A_4$ 、 $\triangle A_4O_4A_1$ 作外接圓 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 。

(iii)連接 $\overline{O_1O_3}$ 、 $\overline{O_2O_4}$ ，其交點為 O 。

(iv)而 $\overrightarrow{O_1O_3}$ 分別交 P_1 、 P_3 、於 B_1 、 B_3 ，且 $\overrightarrow{O_2O_4}$ 分別交 P_2 、 P_4 於 B_2 、 B_4 。

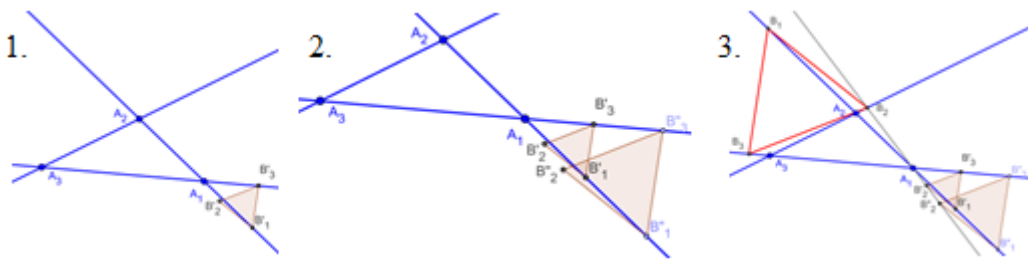
(v)連 $\overline{B_1B_2}$ 、 $\overline{B_2B_3}$ 、 $\overline{B_3B_4}$ 、 $\overline{B_4B_1}$ ，則四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即為所求之正方形。



(2)證明：

證明與未放寬限制相同，故在此省略。

1.三條線：



(1)作圖方法：

(i)在 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_1A_3}$ 各取一點 B'_1 、 B'_3 ，並向作出正 $\Delta B'_1B'_2B'_3$ 。

(ii)在 $\overline{A_1A_2}$ 在取一點 B''_1 並在 $\overline{A_1A_3}$ 上取一點 B''_3 使得 $\overline{B''_1B''_3} // \overline{B'_1B'_3}$ ，同理

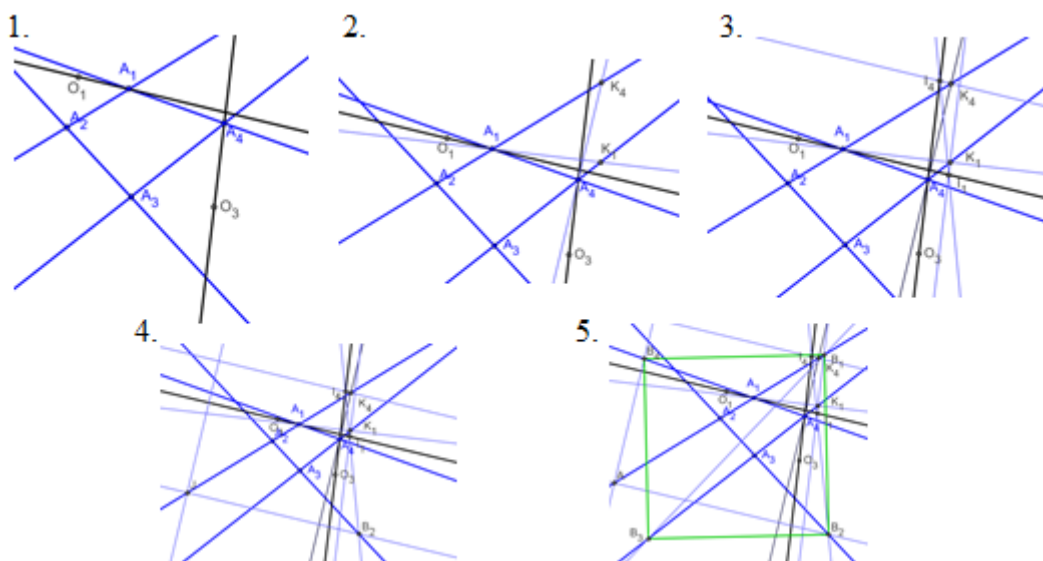
$$\overline{B''_1B''_2} // \overline{B'_1B'_2}, \overline{B''_2B''_3} // \overline{B'_2B'_3}。$$

(iii)連 $\overline{B'_2B''_2}$ 交 $\overline{A_2A_3}$ 於 B_2 ，則 B_2 即為所求的一個頂點，利用 B_2 作出正 $\Delta B_1B_2B_3$ 。

(2)證明：

證明與未放寬限制相同，故在此省略。

2. 四條線：



(1)作圖方法：

(i)以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊向外作出外心 O_1 ，以 $\overline{A_3A_4}$ 為邊向外作出外心 O_3 ，連接 $\overline{A_1O_1}$ 、 $\overline{A_4O_3}$ 。

(ii)過 A_1 作 $\overline{A_4O_3}$ 的垂直線交 $\overline{A_3A_4}$ 於 K_1 ，過 A_4 作 $\overline{A_1O_1}$ 的垂直線交 $\overline{A_1A_2}$ 於 K_4 。

(iii)過 K_1 作 $\overline{A_4O_3}$ 的平行線交 $\overline{A_1O_1}$ 於 I_1 ，過 K_4 作 $\overline{A_1O_1}$ 的平行線交 $\overline{A_4O_3}$ 於 I_4 。

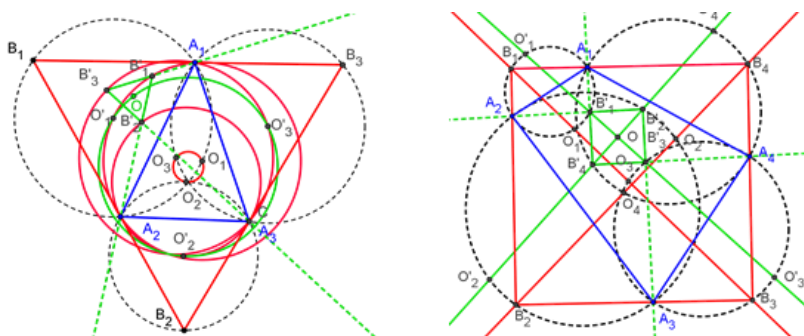
(iv)連接 $\overline{I_1I_4}$ 交 $\overline{A_2A_3}$ 於 B_2 。

(v)過 B_2 平行 $\overline{A_1O_1}$ 交 $\overline{A_1A_2}$ 於一點 A ，過其交點作 $\overline{AB_2}$ 的垂直線交 $\overline{A_4A_1}$ 於 B_4 ，作 $\overline{B_2B_4}$ 中垂線交 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 於 B_1 、 B_3 ，則四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即為所求。

(2)證明：

證明與未放寬限制相同，故在此省略。

- (十三) 若放寬限制，即點 B_i 可以在 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 上，同時可向內或向外作外心，則會有
恰有兩解的情形或兩組無限多解的情形



- (十四) 平面上 n 條平行線，可否存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線
一線

1.作法：以 $n = 4$ 為例：

(1) 給定平面上四條平行線

並命名 L_1, L_2, L_3, L_4

並在 L_1 取一點 A_1

(2) 在 L_2 取一點 A_2

並依據外心對兩點的相對位置

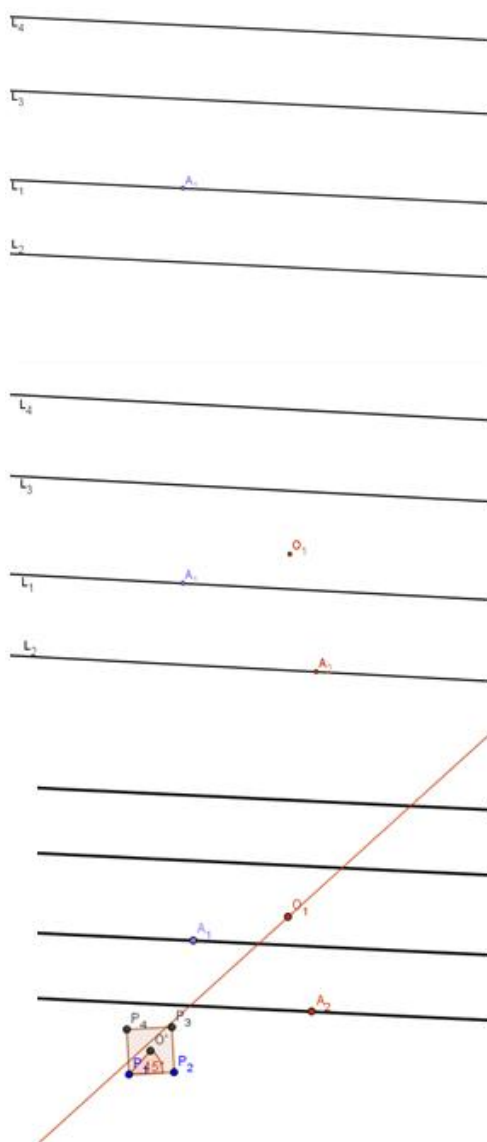
作出 O_1

(3) 作出一個正方形作輔助

取有向角 $P_2 P_1 O'$

作一條直線過 O_1

與平行線有向夾角為 $P_2 P_1 O'$



(4)同理在 L_3 、 L_4 取一點 A_3 、 A_4

並依據外心對兩點的相對位置

作出 O_2 、 O_3

取有向角 P_3PO' 、 P_4P_1O'

各作一條直線過 O_2 、 O_3

與平行線有向夾角分別為 P_3P_1O' 、

P_4P_1O'

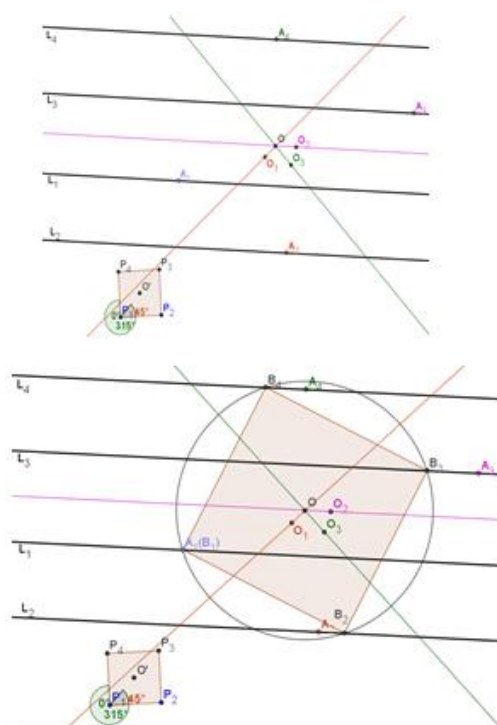
取通過 O_1 、 O_2 、 O_3 的三線共同交

於一點外心 O

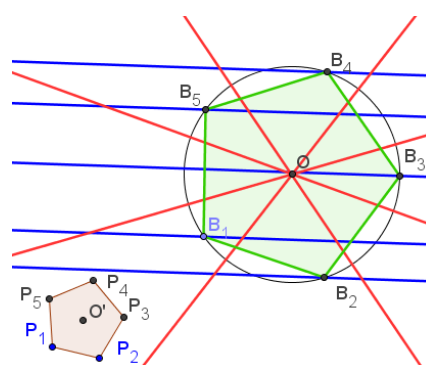
(5)以 O 為圓心過 A_1 作圓

取圓與平行線的交點

得正方形 $B_1B_2B_3B_4$



※註：(當 $n=5$ 的情形)



2.證明：

A_2 為直線上動點， O_1 為以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊長所作出的正 n 邊形外心

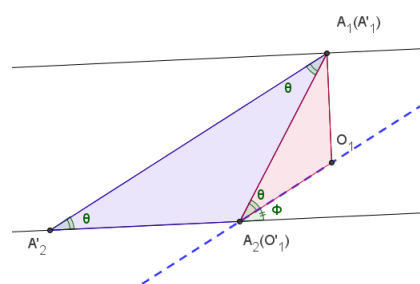
易知 O_1 所成的軌跡為一條直線，而必存在 A_2' 使得以 $\overline{A_1'A_2'}$ 為邊長所作的正 n 邊形外心 O_1' 與 A_2 重合

令 $\angle A_1A_2O_1 = \angle A_1'A_2'O_1' = \angle A_2'A_1'O_1' = \theta$

$\overrightarrow{O_1A_2}$ 與平行線的銳夾角為 ϕ

因為 $\angle A_1A_2O_1 = \angle A_2'A_1'O_1'$ 得知 $\overrightarrow{O_1A_2} \parallel$

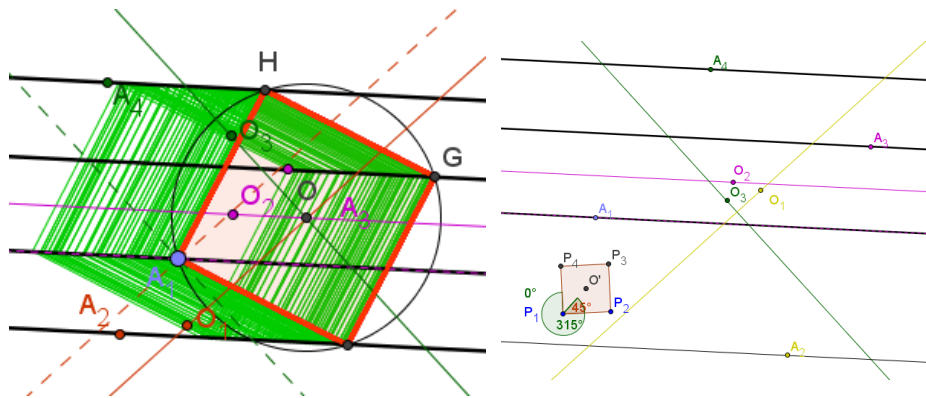
$\overrightarrow{A_1'A_2'}$ ，故 $\phi = \theta$ 。



3. 存在性探討:

一組無限多解

無解



(十五) 平面上 n 個同心圓，可否存在正 n 邊形，使得各頂點恰在前述 n 圓中的

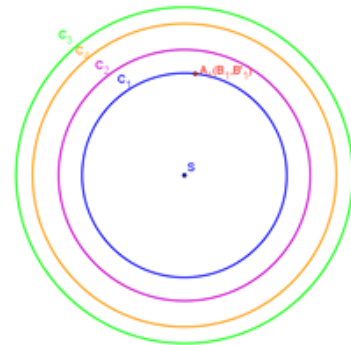
一圓

1. 作法：以 $n=4$ 為例

(1) 給定平面上四個同心圓

並命名 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4

並在 C_1 取一點 A_1



(2) 作出一個正方形作輔助

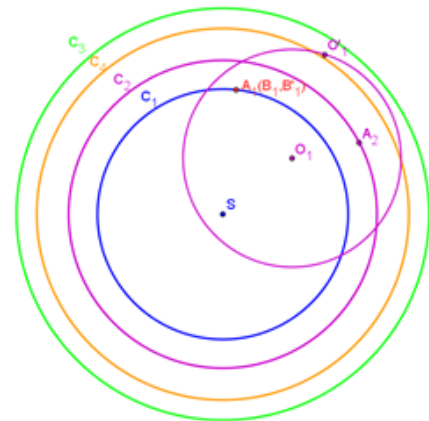
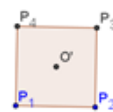
在 C_2 取一點 A_2

並依據外心對兩點的相對位置

作出 O'_1

同理以 A_1 、 S 為兩點，作出 O_1

以 O_1 為圓心，過 O'_1 作一圓 R_1



(3) 同理

在 C_3 、 C_4 取一點 A_3 、 A_4

並依據外心對兩點的相對位置作出 O'_2 、 O'_3 ，同理，

以 A_2 、 S 為兩點，作出 O_2

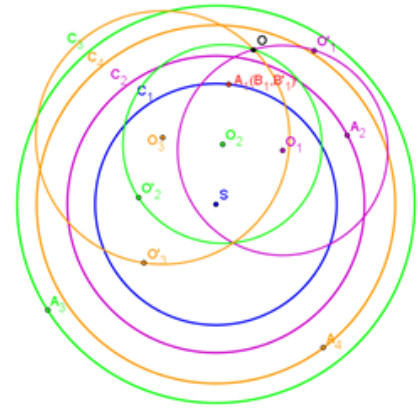
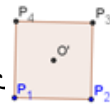
以 A_3 、 S 為兩點，作出 O_3

以 O_2, O_3 為圓心，過

O'_2, O'_3 作一圓 R_2, R_3

並取

R_1, R_2, R_3 共同交點即為外心



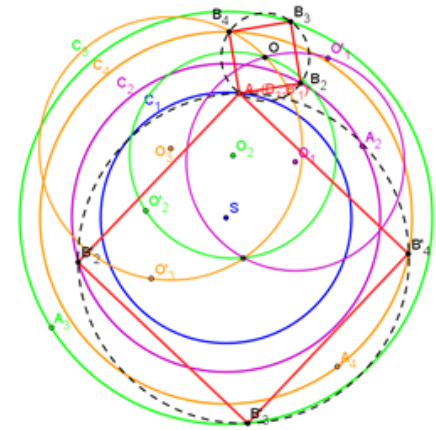
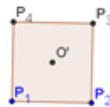
(4) 以 O 為圓心過 A_1 作圓

取圓與同心圓的交點

得正方形 $B_1B_2B_3B_4$

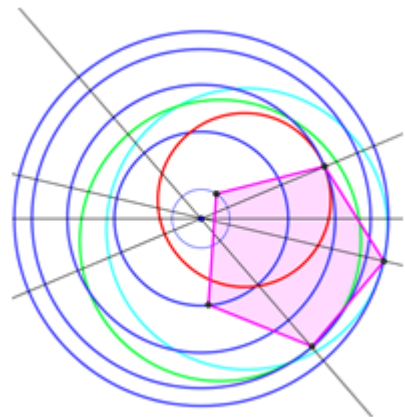
(若有另一交點，則得另一正

方形正方形 $B'_1B'_2B'_3B'_4$)



※註：(當 $n=5$ 的情形)

恰有一組無限多解時的狀況



2. 證明：

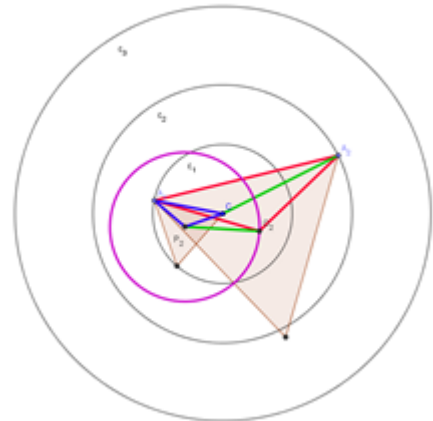
$$\because \angle A_2A_1O_2 = \angle CA_1P_2$$

$$\therefore \angle A_2A_1C = \angle O_2A_1P_2$$

$$\text{且 } \Delta CA_1P_2 \sim \Delta A_2A_1O_2 \Rightarrow \frac{A_2A_1}{CA_1} = \frac{A_1O_2}{A_1P_2}$$

$$\therefore \Delta A_2A_1C \sim \Delta O_2A_1P_2$$

而動點 A_2, O_2 為 C, P_2 為圓心的動點

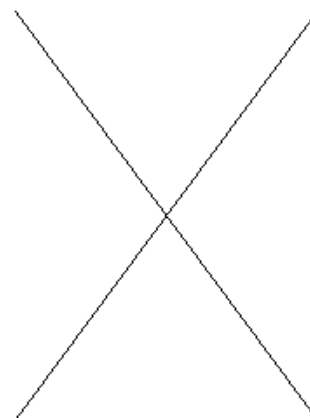
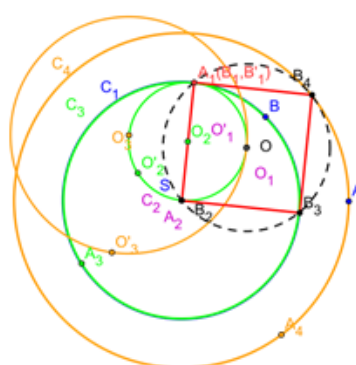
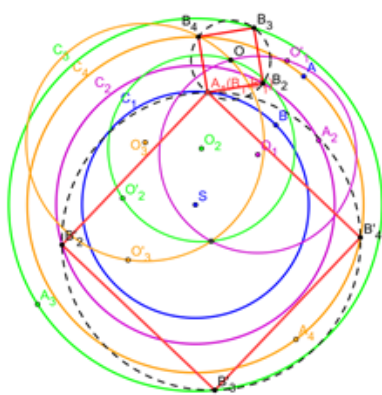


3.存在性探討：

兩組無限多解

一組無限多解

無解



4.同心圓上正 n 邊形存在之半徑關係

端點與圓心距裡最短的兩個逆時針命名 D_1 、 D_2 其餘逆時針依序命名圓心與 $D_k(k=3,4,\dots,n)$ 的距離即為 r_k 則：

$$r_k = r_1 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left| \sin \frac{(k-2)\pi}{n} \right| + r_2 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left| \sin \frac{(k-1)\pi}{n} \right|$$

而可推得：

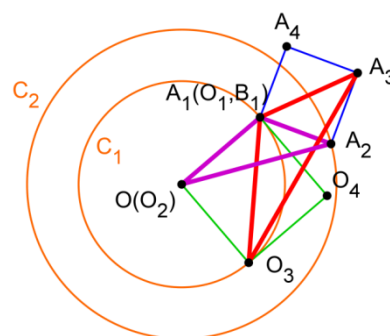
$$\begin{aligned} & r_k + r_{k+2} \\ &= r_1 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(\sin \frac{(k)\pi}{n} + \sin \frac{(k-2)\pi}{n} \right) + r_2 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(\sin \frac{(k+1)\pi}{n} + \sin \frac{(k-1)\pi}{n} \right) \\ &= r_1 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(2 \sin \frac{(k-1)\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) + r_2 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(2 \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{n} \left\{ r_1 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(\sin \frac{(k-1)\pi}{n} \right) + r_2 \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \left(\sin \frac{k\pi}{n} \right) \right\} = 2 \cos \frac{\pi}{n} r_{k+1} \end{aligned}$$

$$\text{即 } r_{k+2} = 2 \cos \frac{\pi}{n} r_{k+1} - r_k, (k \geq 3)$$

5.同心圓半徑長度證明（舉正方形為例）

令 $\overline{A_1 A_2}$ 長度為 r_2

$$\overline{O_1 O_2} : \overline{A_1 A_2} = \overline{O_1 O_k} : \overline{A_1 A_k} (k=3,4)$$



$$\angle O_2 O_1 A_2 = \angle O_k O_1 A_k \therefore \Delta O_2 O_1 A_2 \cong \Delta O_k O_1 A_k$$

$$\overline{O_2 A_2} = \overline{A_1 A_2} \therefore \overline{O_k A_k} = \overline{A_1 A_k}$$

又所求為恰有一種情形的情況

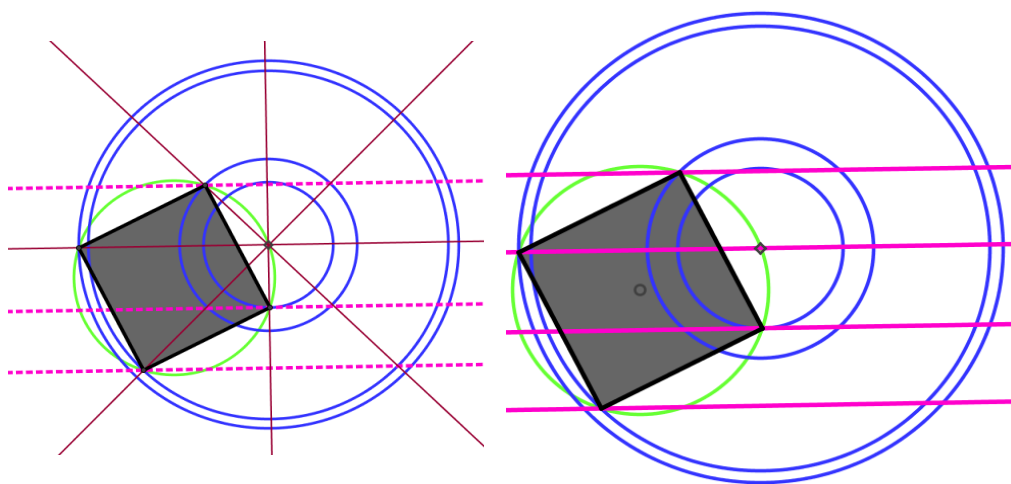
故圓 C_k 需與 A_k 所形成之軌跡相切

$$\text{故 } C_k \text{ 之半徑 } r_k = \overline{O_k O} + \overline{O_k A_k} = \overline{O_k O} + \overline{A_1 A_k}$$

$$r_k = r_1 \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \left| \sin \frac{(k-2)\pi}{4} \right| + r_2 \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \left| \sin \frac{(k-1)\pi}{4} \right|$$

6. 探討同心圓與平行線的之間相互關係

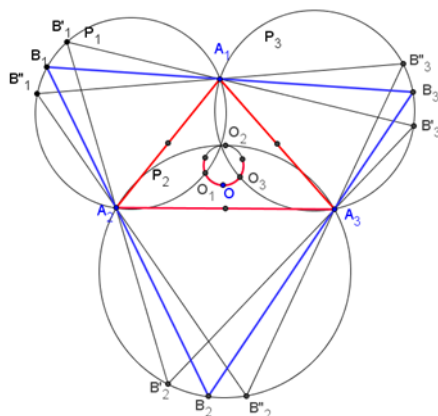
觀察同心圓跟平行線的恰有一組無限多解時的圖形



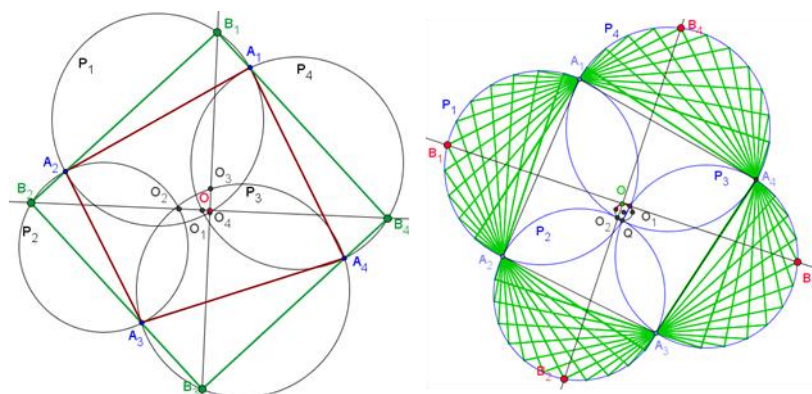
為了讓平行線與同心圓兜上關係，我們先以正方形的外心為圓心作出其外接圓，然後取任一個同心圓與平行線的交點作同心圓的圓心，過正方形的四個頂點即可作出所求的同心圓。

五、 研究結果

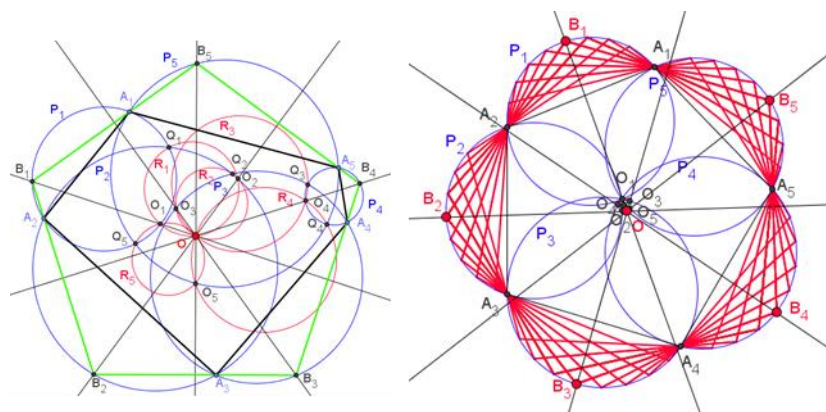
(一) 平面上不共線的三點，可以存在正三角形，使得各線上恰含有前述三點中的一點，但此三角形有無限多個。詳細內容參見 p.4。



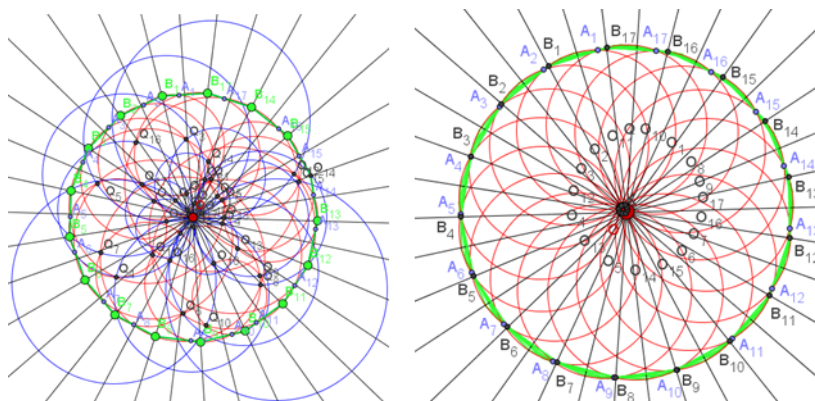
(二) 平面上任三點不共線的四點，使得各線上恰含有前述四點中的一點，一定存在正方形，可分為恰有一解、無限多解。詳細內容參見 p.6。



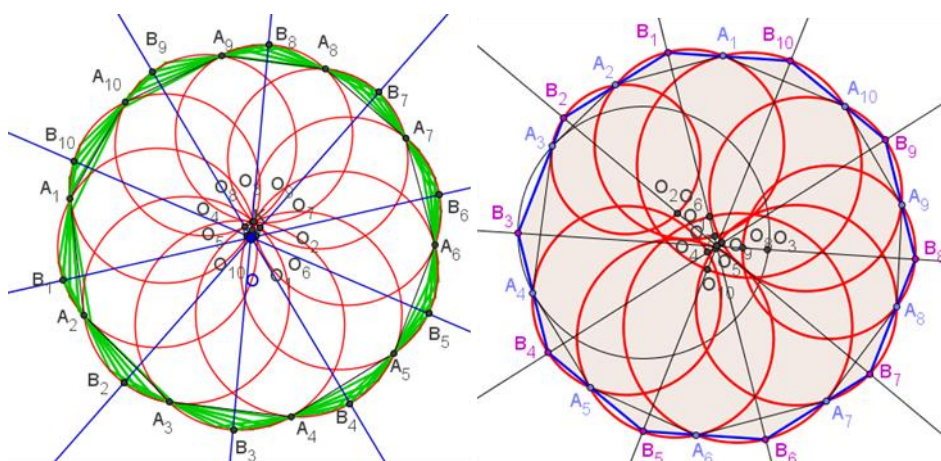
(三) 平面上任三點不共線的五點，使得各線上恰含有前述五點中的一點，不一定存在正五邊形，可分為恰有一解、無解、無限多解。詳細內容參見 p.10。



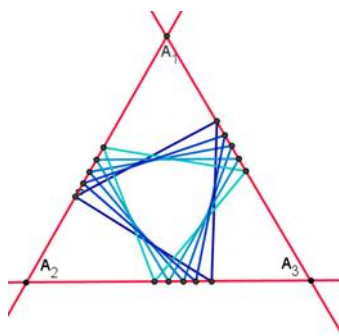
(四) 平面上任三點不共線的奇數點，使得各線上恰含有前述 n 點中的一點，不一定存在正奇邊形，可分為恰有一解、無解、無限多解。詳細內容參見 p.15。



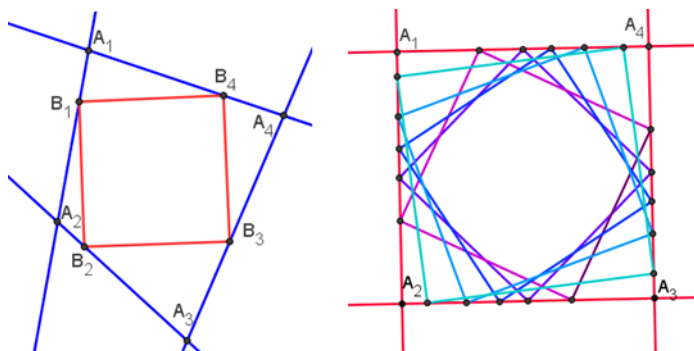
(五) 平面上任三點不共線的偶數點，使得各線上恰含有前述 n 點中的一點，不一定存在正偶邊形，可分為恰有一解、無解、無限多解。詳細內容參見 p.18。



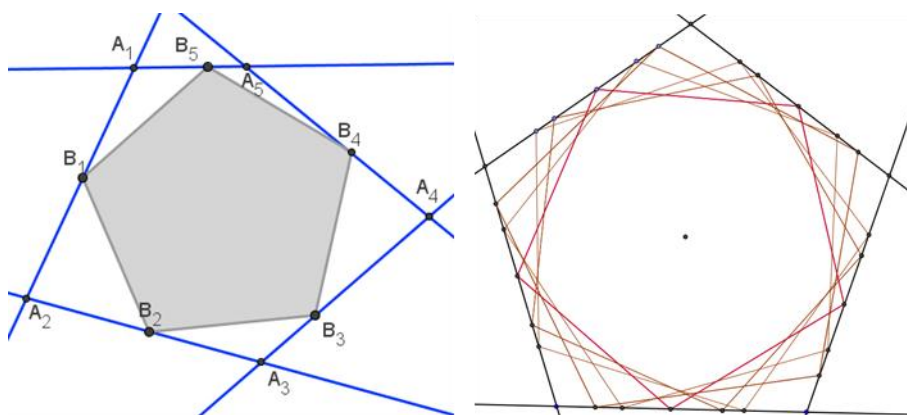
(六) 平面上任兩線不平行的不共點三線，使得各頂點恰在前述三線中的一線，必存在正三角形，但此三角形有無限多個。詳細內容參見 p.19。



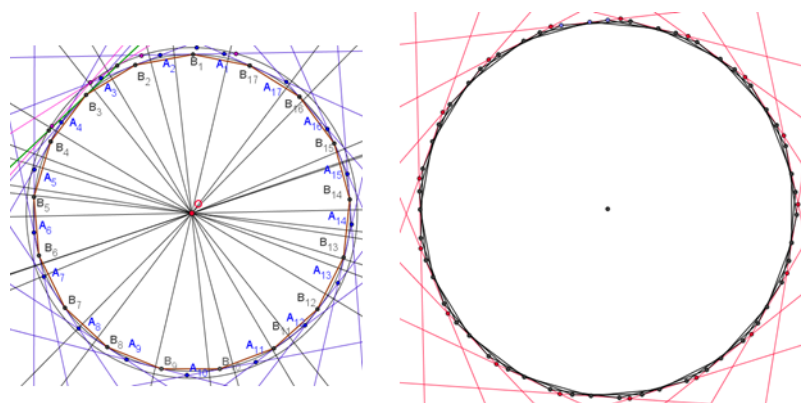
(七) 平面上任兩線不平行、任三線不共點的四線，使得各頂點恰在前述四線中的一線，一定存在正方形，分為無限多解、恰有一解。詳細內容參見 p.21。



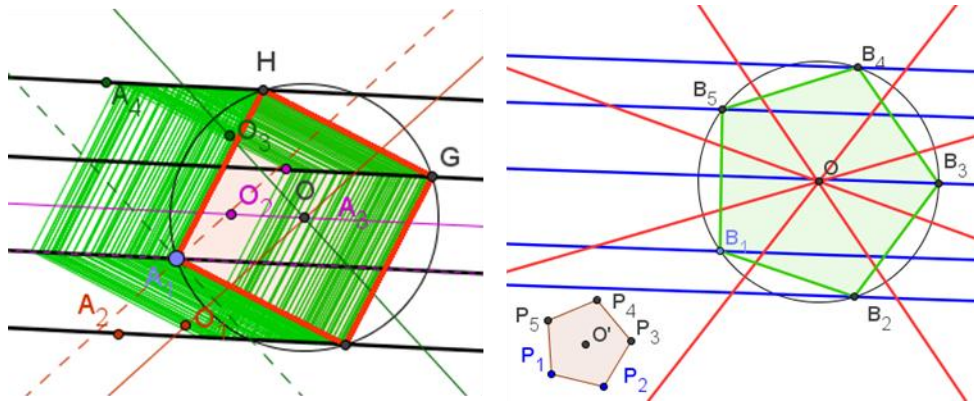
(八) 平面上任兩線不平行、任三線不共點的五線，使得各頂點恰在前述五線中的一線，不一定存在正五邊形，分為無解、無限多解、恰有一解。詳細內容參見 p.23。



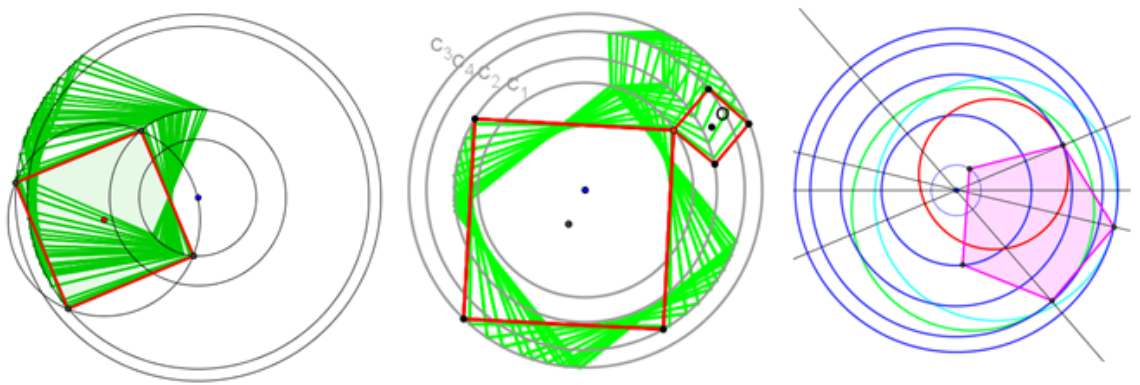
(九) 平面上任兩線不平行、任三線不共點的奇數條線，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線，不一定存在正奇邊形，分為無解、無限多解、恰有一解。詳細內容參見 p.29。



(十三) 平面上 n 條平行線，使得各頂點恰在前述 n 線中的一線，不一定存在正 n 邊形，分為無解、無限多解。詳細內容參見 p.37。

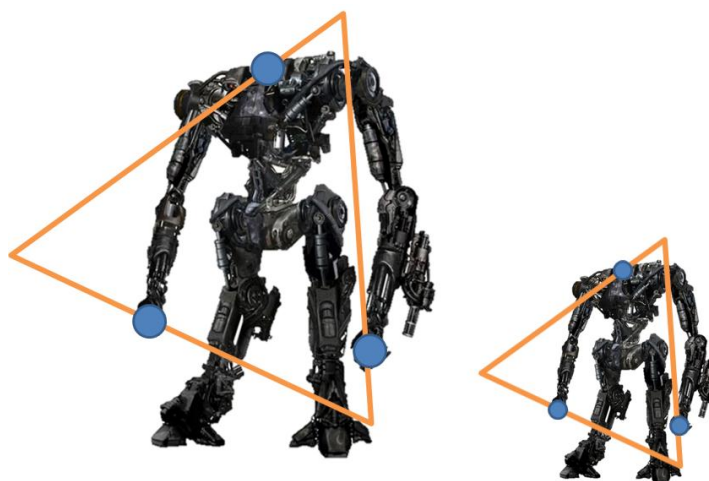


(十四) 平面上 n 個同心圓，使得各頂點恰在前述 n 圓中的一圓，不一定存在正 n 邊形，可分為無解、兩組無限多解，一組無限多解。詳細內容參見 p.39。



六、 應用

在工業設計模型上，常常需要放大或縮小特定的部分，此時可以用我們的研究結果，在特定的那些點上，構造出正多邊形，因為正多邊形在縮放時能夠維持固定比例，進而達到精準的縮放，因此模型縮放所造成的誤差也就能夠縮小。



七、 參考資料

- (一) 趙文敏(民 75) 幾何學概論 台北市 九章出版社
- (二) 許志農 高中數學一～四冊 龍騰出版社
- (三) Coxeter , H.S.M.(1969). Introduction to Geometry , John Wiley & Sons , New York
- (四) Howard Eves (1963). A Survey of Geometry , Volume Boston , Allyn and Bacon
- (五) Tao , Terence (2006). Solving Mathematical problems : A personal perspective oxford , New York , Oxford University Press
- (六) Zeitz , P.(2007). The Art and Craft of Problem Solving , John Wiley & Sons

評語

1. 作者採用傳統尺規作圖法明確的建構出所提出問題的完整解答。然而該問題卻能夠更生動的展示於動態幾何環境中。作者雖然有作動態展示，但是卻沒有展示到該問題的解是一對對的出現！
2. 數學科展除了要表達邏輯推理也要盡可能的表達”數學美”。以本作品而言，所研究的兩道問題具有高度的對偶性。就像古典投影幾何一般，就應該將兩道問題的解決步驟一左一右的並列於兩欄，如此更能夠強調邏輯推理與美學的互動。
3. 參考資料可以更貼切一點。