

# 2012 年臺灣國際科學展覽會

## 優勝作品專輯

編號：010031

### 作品名稱

由正  $2n$  邊形與一點所衍生的三角形面積比值問題

### 得獎獎項

大會獎：三等獎

新加坡正選代表：2012 年新加坡科技展覽會

作者姓名：吳佳鴻、蔡雯詠

就讀學校：國立臺南第一高級中學

指導教師：蕭健忠

關鍵字：正  $2n$  邊形、三角函數、面積

## 作者簡介



我的名字是吳佳鴻，目前就讀國立台南第一高級中學三年級。

自從國小接觸一些數學問題後，我便迷上了解題的樂趣。在思考的過程中，常常會把頭腦裡的知識全部翻出來嘗試，所以每次想出一題，都覺得觀念又澄清了一次，使我經常沉溺於數學的世界探索，嘗試找出更多令人驚奇的結果。面對新的問題時，我總是抱持好奇的心，多方嘗試不同的解題路線，希望尋求深藏於問題背後的秘密。

在數學眾多的領域之中，我尤其喜歡「幾何」。本作品的研究主題，便是我們作能力競賽試題時所得到的靈感。我們對於题目的好奇，引發了本次的研究。雖過程面臨無數瓶頸，但我們一一突破，終於得到最後結果。

這次參加國際科展，希望能拓展視野，精益求精。



我的名字是蔡雯詠，目前就讀國立台南第一高級中學三年級，喜歡寫作，捕捉片刻心情的悸動；喜歡數學，醉心於出其不意的奧妙。兩年前，因緣際會走進一所有紅樓倩影的高中，而展開了一場數學專題研究。過程中，有挫折，有喜悅，卻在時間流轉中驚見自身的成長，在一次次的修正中顯得更成熟。感謝身邊的人一路上無私的幫助與支持，讓我有堅持下去的動力。我想，不論在競賽中最後是否脫穎而出，這些日子走來的足跡，已讓我有滿滿的收穫。

## 由正 $2n$ 邊形與一點所衍生的三角形面積比值問題

*the Ratio of the Areas of Triangles Formed by a Regular  $2n$  sides Polygon and a Point*

### 摘要

本次研究的靈感來自於能力競賽中，一道證明由六邊形內部一點  $P$  所導致的面積比值為 1 的問題(詳見第 4 頁)。這份報告主要的目的，在探討推廣到正  $2n$  邊形內部時的情況，求出將  $P$  點移至外部時任一點的面積比值，並進一步討論面積多次方之問題。

這次研究利用 GSP 協助了解圖形的性質，並善用解析幾何和輔助線作圖。報告中的許多證明，可以用「各個三角形的高相加」的觀念搭配三角函數運算做出結論。

文中結果顯示，除了證明：當  $P$  點在正  $2n$  邊形內部時，必滿足面積比值為 1 外，並提供了當  $P$  點在正  $2n$  邊形外部時，面積比值的各種可能性。其證明方法，可作為解決正  $2n$  邊形面積問題的重要參考。

## Abstract

The inspiration of this research comes from one of the problems in a math competition. The problem needs to be proved that the interior  $P$  point in the hexagon will cause the area ratio is equal to 1 (See the 4th page for details). The main purpose of this research is to discuss and extend this property to the situation of the  $2n$  sides regular polygon, get the area ratio when the  $P$  point is moved anywhere outside the  $2n$  sides regular polygon, and further discuss the problem of the area to the power of a nature number  $m$ .

GSP is used to help understand the property of each graph. Analytic geometry and auxiliary line are also well made use of. Many of the proof methods in this research use the concept of adding the heights of each triangle and come with the operation of trigonometric function to make the final result.

The result of the research not only shows that the area ratio equals 1 when  $P$  point is inside the  $2n$  sides regular polygon but also indicates all possibilities of the area ratio when  $P$  point is outside the  $2n$  sides regular polygon. The proof methods used in this research can be the important reference to solve the problems about the area ratio of the  $2n$  sides regular polygon.

## 目錄

中英文摘要 .....	p. iv
壹、研究動機 .....	p. 2
貳、研究目的 .....	p. 3
參、研究設備材及器材 .....	p. 3
肆、研究過程與方法 .....	p. 4
伍、研究結果.....	p.46
陸、討論.....	p.49
柒、結論.....	p.52
捌、參考資料與其他.....	p.52

## 壹、研究動機

在解能力競賽試題時，我們發現了一個有趣的題目：「 $P$  是正六邊形  $A_1A_2\dots A_{2n}$  內任意一點，試證明  $\Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \Delta A_5A_6P = \Delta A_2A_3P + \Delta A_4A_5P + \Delta A_6A_1P$ 。」我們很快的知道，對正  $2n$  邊形這個性質仍然是對的。但是，如果  $P$  點在正  $2n$  邊形外部時，是否有相同的結果？藉由 GSP 的幫助，我們知道一般的情形是不會相等的，而哪些點可以使等式成立呢？又我們在第 50 屆全國科展作品(點到為止—由西姆松定理所衍生的極值與定值探討)中得知：「半徑為  $R$  的圓上一動點  $P$ ，到其內接正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$  各邊距離平方和為一定值」，便好奇，若將  $\Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \dots + \Delta A_{2n-1}A_{2n}P$  改為  $(\Delta A_2A_3P)^m + (\Delta A_4A_5P)^{m+\dots} + (\Delta A_{2n}A_1P)^m$ ，那麼等式是否還會成立呢？我們覺得這些問題十分有趣，希望找到隱藏在這個題目背後的秘密。

## 貳、研究目的

一、討論正  $2n$  邊形時，是否有相同的結果？

二、 $P$  點在正  $2n$  邊形外部時，哪些點可以使等式成立？

三、研究  $P$  點在正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$  外部時，面積比

$$\lambda = \frac{\Delta A_2A_3P + \Delta A_4A_5P + \dots + \Delta A_{2n}A_1P}{\Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \dots + \Delta A_{2n-1}A_{2n}P}$$
 的性質。

四、 $P$  點在正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$  內部時， $\Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \dots + \Delta A_{2n-1}A_{2n}P =$

$$(\Delta A_2A_3P)^m + (\Delta A_4A_5P)^m + \dots + (\Delta A_{2n}A_1P)^m$$
 是否會成立？

五、 $P$  點在正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$  外部時，

$$(\Delta A_1A_2P)^m + (\Delta A_3A_4P)^m + \dots + (\Delta A_{2n-1}A_{2n}P)^m =$$

$$(\Delta A_2A_3P)^m + (\Delta A_4A_5P)^m + \dots + (\Delta A_{2n}A_1P)^m$$
 是否會成立？

## 參、研究設備及器材

紙、筆、電腦 (GSP)

## 肆、研究過程與方法

一、探討正  $2n$  邊形內部任意一點  $P$  所形成的面積比：

(一)正六邊形的情況 (原題)：

①如下圖(1)，分別延長  $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 、 $\overline{A_4A_5}$ 、 $\overline{A_5A_6}$ 、 $\overline{A_6A_1}$ ，其中  $\overline{A_1A_2}$  交  $\overline{A_5A_6}$  於  $B$ 、 $\overline{A_1A_2}$  交  $\overline{A_3A_4}$  於  $C$ 、 $\overline{A_3A_4}$  交  $\overline{A_5A_6}$  於  $D$ ，而  $\overline{A_2A_3}$  交  $\overline{A_1A_6}$  於  $E$ 、 $\overline{A_2A_3}$  交  $\overline{A_4A_5}$  於  $G$ 、 $\overline{A_4A_5}$  交  $\overline{A_1A_6}$  於  $F$ 。

②由於正六邊形的外角為  $60^\circ$ ，可知  $\triangle A_1A_6B$ 、 $\triangle A_2A_3C$ 、 $\triangle A_4A_5D$  均為正三角形。

因此  $\overline{A_6B} = \overline{A_5A_6} = \overline{A_5D}$ 、 $\overline{A_1B} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2C}$ 、 $\overline{A_4D} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_3C}$

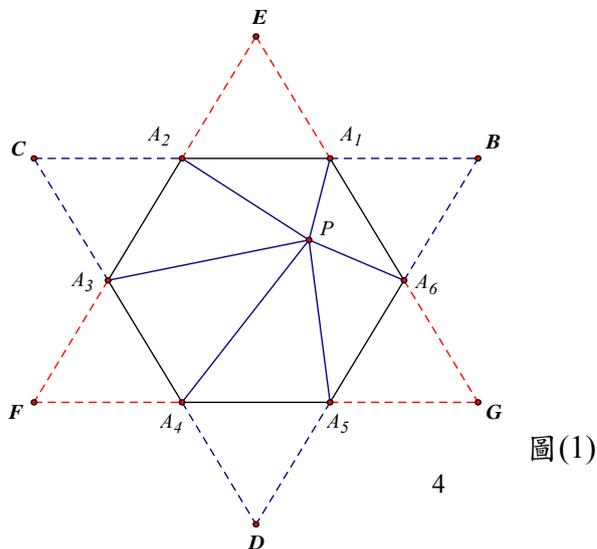
所以  $\triangle A_1A_2P = \frac{1}{3} \triangle BCP$ 、 $\triangle A_3A_4P = \frac{1}{3} \triangle CDP$ 、 $\triangle A_5A_6P = \frac{1}{3} \triangle BDP$

故可得  $\triangle A_1A_2P + \triangle A_3A_4P + \triangle A_5A_6P = \frac{1}{3} \triangle BCP + \frac{1}{3} \triangle CDP + \frac{1}{3} \triangle BDP$

③同理，可得  $\triangle A_2A_3P + \triangle A_4A_5P + \triangle A_6A_1P = \frac{1}{3} \triangle EFP + \frac{1}{3} \triangle FGP + \frac{1}{3} \triangle EGP$

又由邊長關係可得  $\triangle EFG \cong \triangle BCD$ ， $\therefore \triangle EFG = \triangle BCD$

故  $\triangle A_1A_2P + \triangle A_3A_4P + \triangle A_5A_6P = \triangle A_2A_3P + \triangle A_4A_5P + \triangle A_6A_1P$ ，得證。



(二) 正  $2n$  邊形的情形：

證明：對於正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$ ， $P$  為此正  $2n$  邊形邊上或內部任意一點，

$$\text{則 } \Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \dots + \Delta A_{2n-1}A_{2n}P = \Delta A_2A_3P + \Delta A_4A_5P + \dots + \Delta A_{2n}A_1P$$

(證明)

①如圖(2)，分別延長  $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 、 $\dots$ 、 $\overline{A_{2n}A_1}$ 。其中  $\overline{A_1A_2}$  交  $\overline{A_3A_4}$  於  $B_1$ 、

$\overline{A_3A_4}$  交  $\overline{A_5A_6}$  於  $B_2$ 、 $\dots$ 、 $\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$  交  $\overline{A_1A_2}$  於  $B_n$ ，即形成一正  $n$  邊形

$B_1B_2\dots B_{n-1}B_n$ 。而  $\overline{A_{2n}A_1}$  交  $\overline{A_2A_3}$  於  $C_1$ 、 $\overline{A_2A_3}$  交  $\overline{A_4A_5}$  於  $C_2$ 、 $\dots$ 、 $\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}$  交

$\overline{A_{2n}A_1}$  於  $C_n$ ，即形成一正  $n$  邊形  $C_1C_2\dots C_{n-1}C_n$ 。

②假設正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$  邊長為  $a$ ，正  $n$  邊形  $B_1B_2\dots B_{n-1}B_n$  及  $C_1C_2\dots C_{n-1}C_n$  的邊長為  $b$  (可由邊長關係輕易得到兩正  $n$  邊形邊長相等)，並假設  $a=qb$  ( $q$  為常數)。

③由比例關係可得  $\Delta A_1A_2P = q\Delta B_nB_1P$ 、 $\Delta A_3A_4P = q\Delta B_1B_2P$ 、 $\dots$ 、

$$\Delta A_{2n-1}A_{2n}P = q\Delta B_{n-1}B_nP$$

$$\therefore \Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \dots + \Delta A_{2n-1}A_{2n}P = q(\Delta B_nB_1P + \Delta B_1B_2P + \dots + \Delta B_{n-1}B_nP) =$$

$$qS_{B_1B_2\dots B_n}$$

④同理，可得

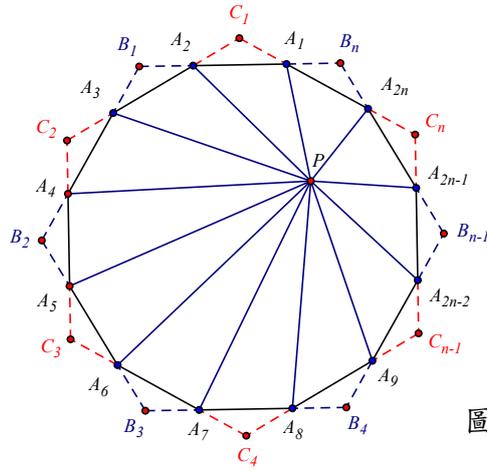
$$\Delta A_2A_3P + \Delta A_4A_5P + \dots + \Delta A_{2n}A_1P = q(\Delta C_1C_2P + \Delta C_2C_3P + \dots + \Delta C_nC_1P) =$$

$$qS_{C_1C_2\dots C_n}$$

又由邊長關係易證  $B_1B_2\dots B_{n-1}B_n$  全等於  $C_1C_2\dots C_{n-1}C_n$ ，

$$\therefore qS_{B_1B_2\dots B_n} = qS_{C_1C_2\dots C_n}$$

故 $\Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \dots + \Delta A_{2n-1}A_{2n}P = \Delta A_2A_3P + \Delta A_4A_5P + \dots + \Delta A_{2n}A_1P$ ，得證。



圖(2)

二、探討正  $2n$  邊形外部任意一點  $P$  欲形成面積比為 1 之條件：

將  $P$  點移至外部後，面積和不一定會相等。為了接下來討論之方便，我們定

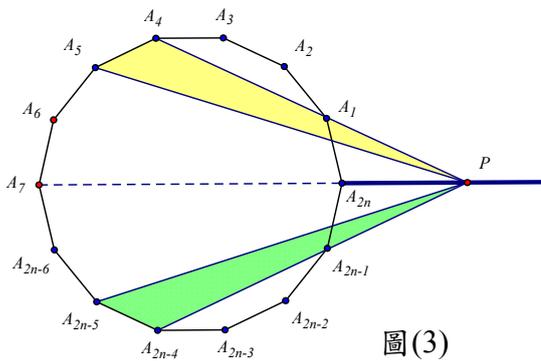
義兩面積比  $\lambda = \frac{\Delta A_2A_3P + \Delta A_4A_5P + \dots + \Delta A_{2n}A_1P}{\Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \dots + \Delta A_{2n-1}A_{2n}P}$ ，面積和相等也就是  $\lambda=1$ 。以下為

討論  $\lambda=1$  的情形。

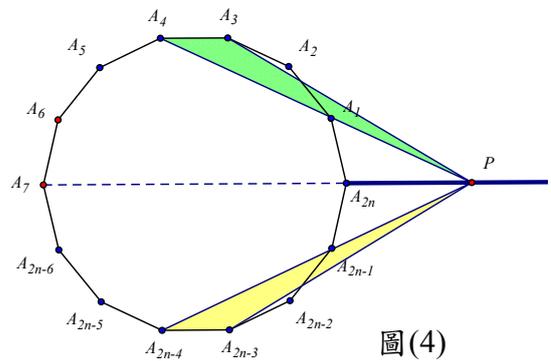
(一)對稱性的觀察：

依圖形之對稱性（相似的兩個三角形恰會上下對稱，參考圖(3)(4)），若  $P$

點位於正  $2n$  邊形對角線的延長線上，則  $\lambda=1$ 。此為使得  $\lambda=1$  之明顯解。



圖(3)



圖(4)

(二)解析法探討  $P$  點其他位置：

我們用 GSP 軟體繪圖後發現，當  $n > 3$  時，似乎存在其他使得  $\lambda=1$  的點。我們先用解析法找出  $P$  點的確切位置(以正八邊形為例)。令正八邊形  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$  邊長為 1。並假設使  $\lambda=1$  的點  $P$  位於直線  $y=mx$  上，即  $P(x, mx)$ ，其中  $1-\sqrt{2} < m < -1+\sqrt{2}$  (因為正八邊形之對稱性，所以只需討論  $P$  點在  $\overline{OA_1}$  與  $\overline{OA_8}$  之間)

藉由代入各點座標計算各個三角形面積，化簡可得

$$\Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \Delta A_5A_6P + \Delta A_7A_8P = \sqrt{2}x$$

$$\Delta A_2A_3P + \Delta A_4A_5P + \Delta A_6A_7P + \Delta A_8A_1P = x + \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{解方程式 } x + \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}x, \text{ 得 } x = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

(與  $m$  值無關)。

(三)由(一)(二)所得之結論及相關推測：

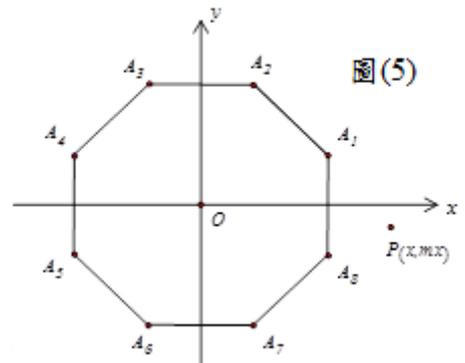
①由(二)之結果知，在  $1-\sqrt{2} < m < -1+\sqrt{2}$

之條件下， $P$  之  $x$  值與  $m$  無關 (即其符

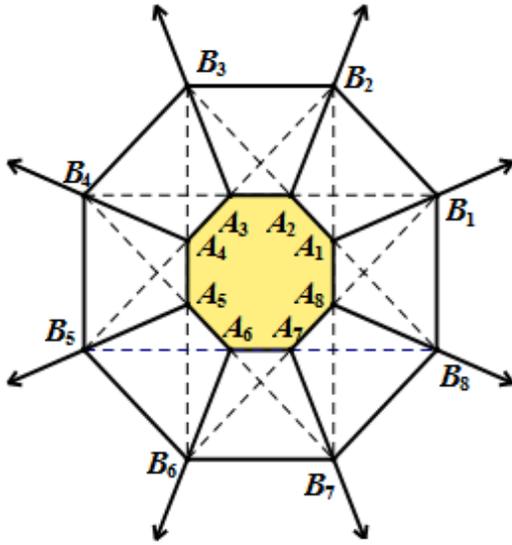
合  $\lambda=1$  之軌跡為一線段)。又由(一)對稱性，易知在對角線的延長線上的所有點均符合  $\lambda=1$ 。由於有八個邊，所以所有滿足  $\lambda=1$  的點，應為一正八邊形及一放射狀圖形 (如圖(6)中黑色粗線部分)。

②由觀察發現，該線段範圍恰是  $\overline{A_7A_8}$  與  $\overline{A_2A_3}$  交點，及  $\overline{A_2A_1}$  與  $\overline{A_6A_7}$  交點之間。

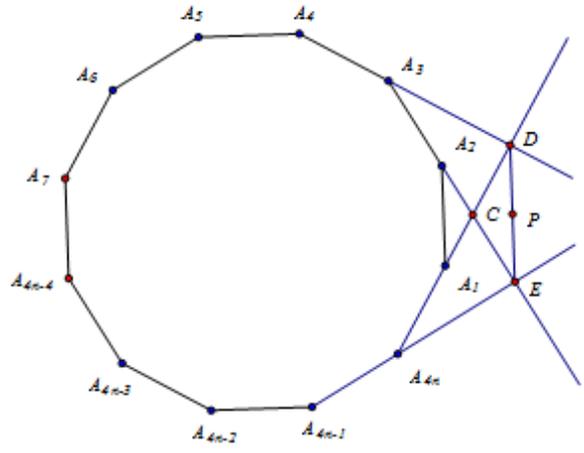
又利用 GSP 試了正十、十二、十四邊形……等，亦有相同的結果。所以推測：當  $n > 3$  時，使  $\lambda=1$  的點，可用圖(6)虛線延長方式找出其軌跡 (以



圖(6)為例，延長  $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_7A_8}$ 、 $\overline{A_6A_7}$  得到交點  $B_1$ 、 $B_8$ ， $\overline{B_1B_8}$  即為滿足  $\lambda=1$  之  $P$  點軌跡)



圖(6)



圖(7)

(四)證明由(三)所得之推測：

證明：對正  $4n$  邊形( $n \geq 2$ )而言，對頂點編號為  $A_1, A_2, \dots, A_{4n}$ ，延長  $\overline{A_{4n}A_1}$ 、 $\overline{A_4A_3}$  交於  $D$ ，延長  $\overline{A_{4n-1}A_{4n}}$ 、 $\overline{A_3A_2}$  交於  $E$ ，當動點  $P$  在  $\overline{DE}$  上任意移動 (如圖(7))，就可得到

$$\Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \dots + \Delta A_{4n-1}A_{4n}P = \Delta A_2A_3P + \Delta A_4A_5P + \dots + \Delta A_{4n}A_1P$$

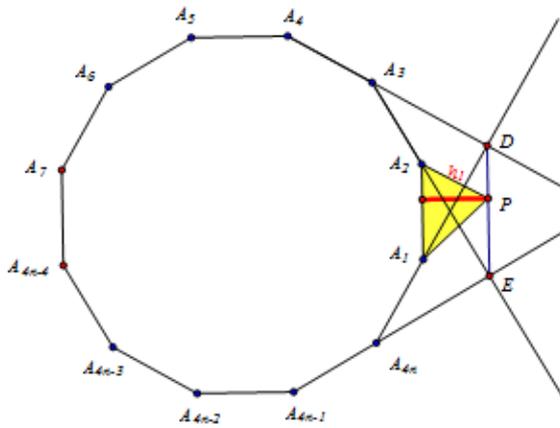
亦即  $\lambda = 1$ 。

(證明)

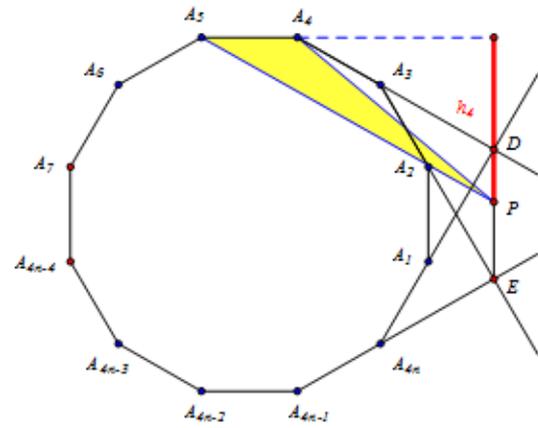
- ①設正  $4n$  邊形邊長  $a$ ，其外角為  $\theta$ ， $A_{2n}$  與  $A_{4n}$  的距離為  $k$ 。 $\Delta A_1A_2P$  中  $\overline{A_1A_2}$  邊上的高  $h_1$ ， $\Delta A_2A_3P$  中  $\overline{A_2A_3}$  邊上的高  $h_2 \dots$ ， $\Delta A_{4n}A_1P$  中  $\overline{A_{4n}A_1}$  邊上的高  $h_{4n}$ 。
- (參考圖(8)(9))

$$\Delta A_1 A_2 P + \Delta A_3 A_4 P + \dots + \Delta A_{4n-1} A_{4n} P = \frac{a}{2} (h_1 + h_3 + \dots + h_{4n-1})$$

$$\Delta A_2 A_3 P + \Delta A_4 A_5 P + \dots + \Delta A_{4n} A_1 P = \frac{a}{2} (h_2 + h_4 + \dots + h_{4n})$$



圖(8)



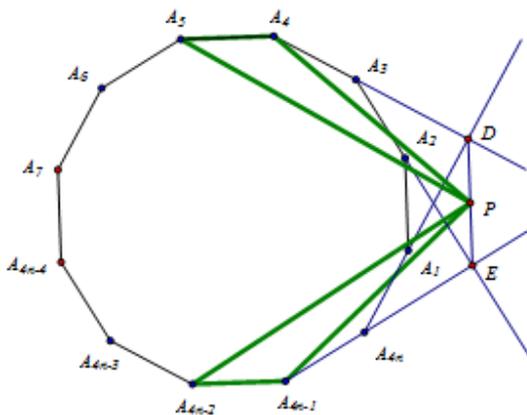
圖(9)

②由圖形可以得到：

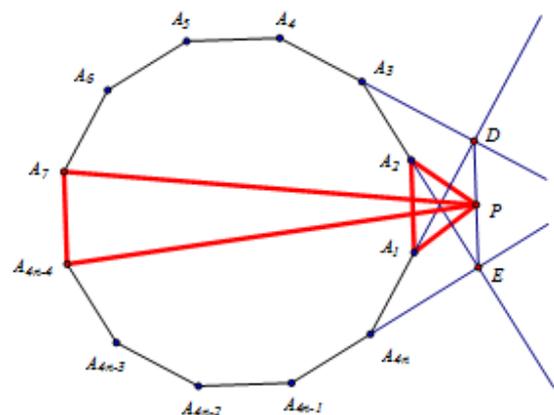
$h_3 + h_{2n+3} = h_4 + h_{2n+4} = \dots = h_{2n-1} + h_{4n-1} = k$  (如圖(10)兩個綠色三角形的高

加為  $k$ )  $h_{2n} - h_{4n} = h_{2n+1} - h_1 = h_{2n+2} - h_2 = k$  (如圖(11)兩個紅色三角形

的高相減為  $k$ )



圖(10)



圖(11)

③根據正  $2n$  邊形的對稱性，可得到  $\overline{DE}$  平行  $\overline{A_1 A_2}$ ，且  $\overline{A_3 A_2}$  與  $\overline{A_{4n} A_1}$  交於  $C$ 。

設  $\overline{CD} = \overline{CE} = x$  (如圖(12))

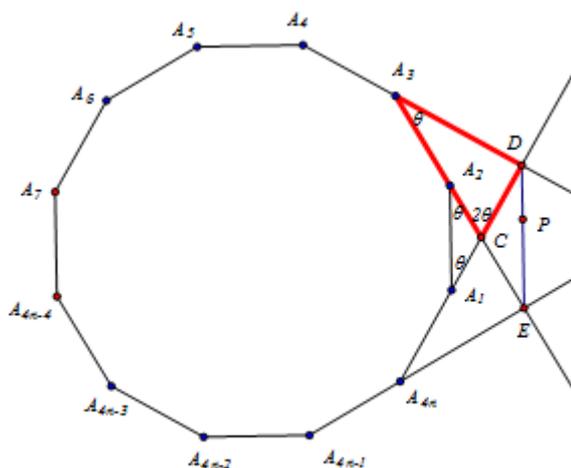
在  $\Delta A_3DC$  中，由正弦定理可知： $\frac{\overline{A_3C}}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{CD}}{\sin \theta}$  (如圖(12)中紅色三角形)

形)

$$\text{即 } \frac{a + \frac{a}{2} \sec \theta}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{x}{\sin \theta} \Rightarrow x = \frac{a}{2 \cos \theta (2 \cos \theta - 1)}$$

又由三角形面積可推出  $h_2 + h_{4n} = \overline{DE} \sin \theta = 2x \cos \theta \sin \theta = \frac{a \sin \theta}{2 \cos \theta - 1}$

且  $h_1 = x \sin \theta + \frac{a}{2} \tan \theta = \frac{a \sin \theta}{2 \cos \theta - 1}$ ，故  $h_1 = h_2 + h_{4n}$



圖(12)

④由①②可推出

$$\Delta A_1 A_2 P + \Delta A_3 A_4 P + \dots + \Delta A_{4n-1} A_{4n} P = \frac{a}{2} (2h_1 + nk)$$

$$\Delta A_2 A_3 P + \Delta A_4 A_5 P + \dots + \Delta A_{4n} A_1 P = \frac{a}{2} [2(h_2 + h_{4n}) + nk]$$

又由③得到  $h_1 = h_2 + h_{4n}$ ，綜合以上可得：

$$\Delta A_1 A_2 P + \Delta A_3 A_4 P + \dots + \Delta A_{4n-1} A_{4n} P = \frac{a}{2} (2h_1 + nk)$$

$$= \frac{a}{2} [2(h_2 + h_{4n}) + nk] = \Delta A_2 A_3 P + \Delta A_4 A_5 P + \dots + \Delta A_{4n} A_1 P$$

故 $\Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \dots + \Delta A_{4n-1}A_{4n}P = \Delta A_2A_3P + \Delta A_4A_5P + \dots + \Delta A_{4n}A_1P$ ，得證。

上述方法使用在正 $4n+2$ 邊形之情況時，卻會發生配對上的問題。整理如下：

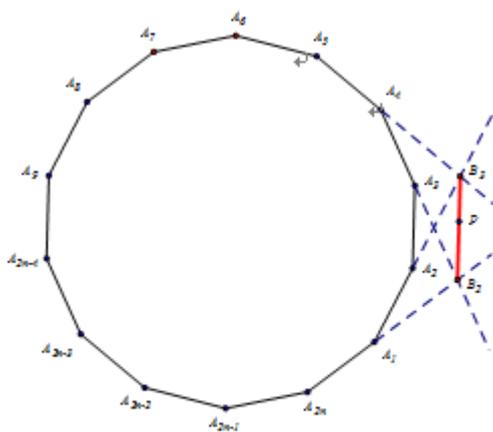
同上，我們可對高作配對，所得之式子為：

$$\begin{cases} h_{2n-1} - h_{4n} = h_{2n+2} - h_1 = h_{2n+3} - h_2 = k \\ h_3 + h_{2n+4} = h_4 + h_{2n+5} = \dots = h_{2n-2} + h_{4n-1} = k \end{cases}$$

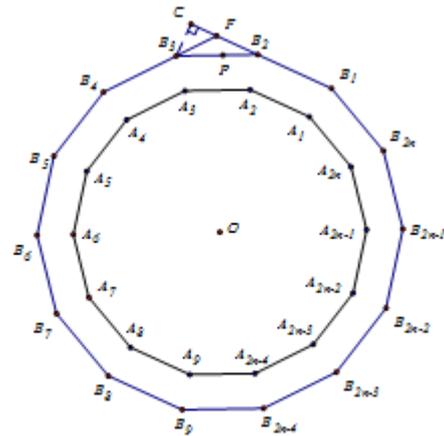
而我們欲證明 $h_1 + h_3 + h_5 + \dots + h_{4n+1} = h_2 + h_4 + h_6 + \dots + h_{4n+2}$

由於配對時，編號為奇數之高均和編號為偶數之高配為一組，造成無法使用此關係式化簡 $h_1 + h_3 + h_5 + \dots + h_{4n+1}$ 或 $h_2 + h_4 + h_6 + \dots + h_{4n+2}$ ，以致無法得到證明。為了解決此配對失敗之問題，我們嘗試思考另一種作法證明所有正 $2n$ 邊形時均成立。作法如下：

證明：對正 $2n$ 邊形( $n \geq 4$ )而言，對頂點編號為 $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ ，延長 $\overline{A_{2n}A_1}$ 、 $\overline{A_4A_3}$ 交於 $B_2$ ，延長 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_5A_4}$ 交於 $B_3$ ，當動點 $P$ 在 $\overline{B_2B_3}$ 上任意移動(如圖(13))，可以得到 $\Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \dots + \Delta A_{2n-1}A_{2n}P = \Delta A_2A_3P + \Delta A_4A_5P + \dots + \Delta A_{2n}A_1P$ ，亦即 $\lambda = 1$ 之情況。



圖(13)



圖(14)

(證明)

①過  $\overline{B_2B_3}$ ，作與  $A_1A_2\dots A_{2n}$  共中心，每邊均平行於原正  $2n$  邊形對應邊的正

$2n$  邊形， $B_1B_2\dots B_{2n}$ ，如圖(14)。延長  $\overline{B_1B_2}$ 、 $\overline{B_3B_4}$  交一點  $F$ ，過  $B_3$  作  $\overline{B_3C}$

$\perp \overline{B_1B_2}$  於  $C$  點。

②令  $P$  點到  $\overline{A_2A_3}$  的距離為  $k$ ， $A_1A_2\dots A_{2n}$  外角為  $\theta$ 。

③令  $\Delta PB_1B_2$  以  $\overline{B_1B_2}$  為底的高為  $H_1$ 、 $\Delta PB_2B_3$  以  $\overline{B_2B_3}$  為底的高為  $H_2$ 、 $\Delta PB_3B_4$

以  $\overline{B_3B_4}$  為底的高為  $H_3$ ... $\Delta PB_{2n-1}B_{2n}$  以  $\overline{B_{2n-1}B_{2n}}$  為底的高為  $H_{2n-1}$ 、 $\Delta PB_{2n}B_1$

以  $\overline{B_{2n}B_1}$  為底的高為  $H_{2n}$  (參考圖(17)、(18)舉例)。令  $\Delta PA_1A_2$  以  $\overline{A_1A_2}$  為底的

高為  $h_1$ 、 $\Delta PA_2A_3$  以  $\overline{A_2A_3}$  為底的高為  $h_2$ 、 $\Delta PA_3A_4$  以  $\overline{A_3A_4}$  為底的高為

$h_3$ ... $\Delta PA_{2n-1}A_{2n}$  以  $\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$  為底的高為  $h_{2n-1}$ 、 $\Delta PA_{2n}A_1$  以  $\overline{A_{2n}A_1}$  為底的高為  $h_{2n}$

(參考圖(15)、(16)舉例)。

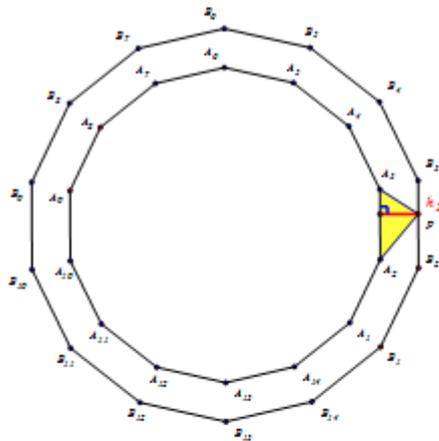
對  $B_1B_2\dots B_{2n}$  而言， $P$  在邊上，亦屬於多邊形內部。依 p.5 一、(二)的證明，可

得：

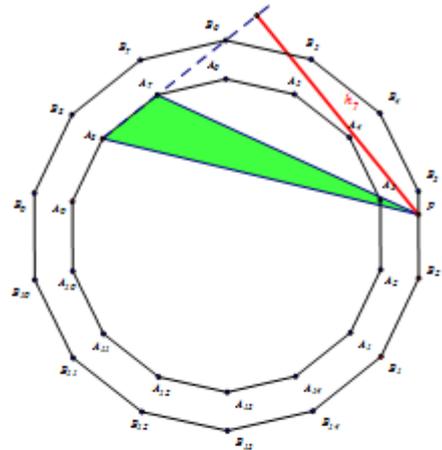
$$\Delta B_1B_2P + \Delta B_3B_4P + \dots + \Delta B_{2n-1}B_{2n}P = \Delta B_2B_3P + \Delta B_4B_5P + \dots + \Delta B_{2n}B_1P$$

$$\text{故可令 } H_1 + H_3 + H_5 + \dots + H_{2n-1} = H_2 + H_4 + H_6 + \dots + H_{2n} = p$$

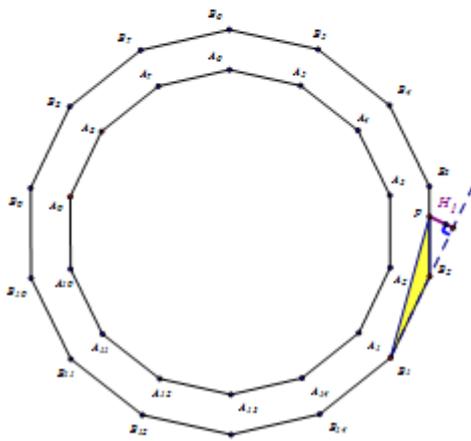
$$\text{又易知 } H_2 = 0 \Rightarrow H_1 + H_3 + H_5 + \dots + H_{2n-1} = H_2 + H_4 + H_6 + \dots + H_{2n} = p$$



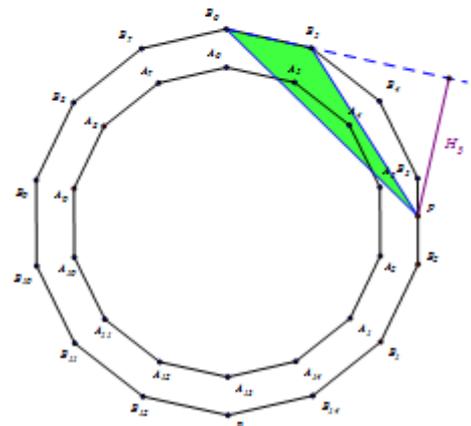
圖(15)



圖(16)



圖(17)



圖(18)

④  $\triangle B_2B_3F$  為等腰三角形，又  $\triangle B_2B_3F =$

$$\frac{1}{2}(\overline{B_2F} \times H_1 + \overline{B_3F} \times H_3) = \frac{1}{2}(\overline{B_2F} \times \overline{CB_3})$$

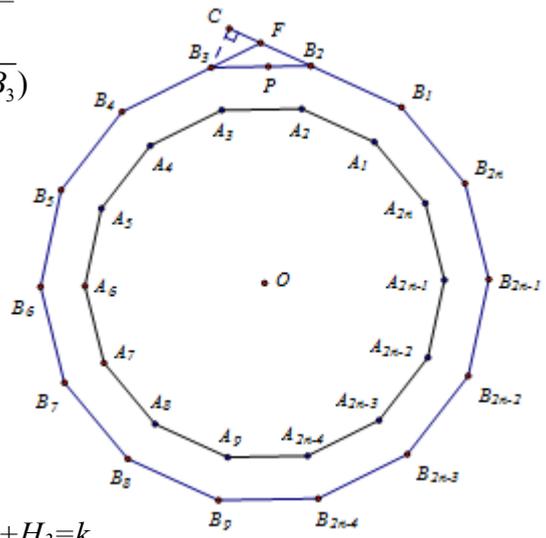
$$\hookrightarrow H_1 + H_3 = \overline{CB_3}$$

又  $\angle B_3CB_2 = 90^\circ$

$$\hookrightarrow H_1 + H_3 = \overline{CB_3} = \overline{B_2B_3} \sin \theta$$

同 p.9③ 之作法可得

$$\frac{k}{\overline{B_2B_3}} = \sin \theta \Rightarrow k = \overline{B_2B_3} \sin \theta, \text{ 故 } H_1 + H_3 = k$$

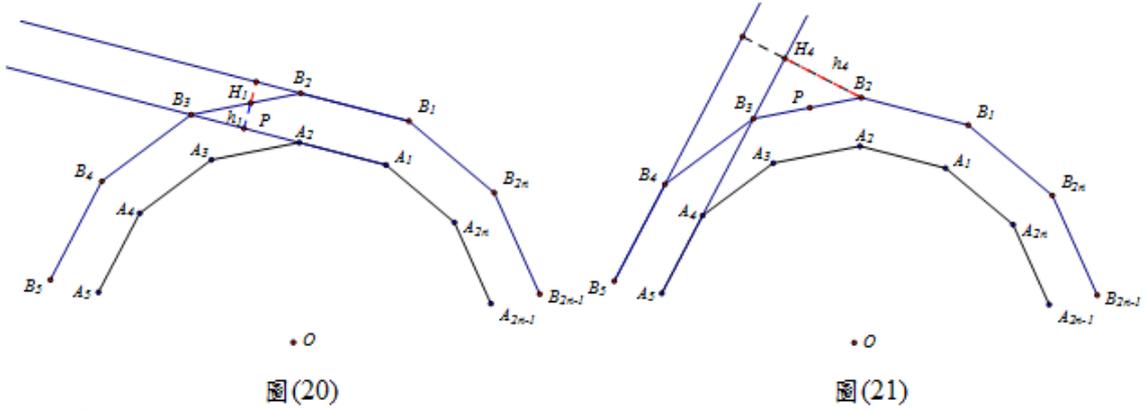


圖(19)

⑤ 由圖(19)易知， $h_2 = k$ 。又由圖形可得，得  $H_1 + h_1 = k, H_3 + h_3 = k$  (參考圖(20))

$$H_4 - h_4 = k, H_5 - h_5 = k, \dots, H_{2n} - h_{2n} = k \quad (\text{參考圖(21)})$$

$$h_1 = k - H_1, h_3 = k - H_3, \text{ 而 } m > 3 \text{ 時, } h_m = H_m - k。$$



⑥綜合③④⑤的結果，可得奇數的高和

$$h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = (k - H_1) + (k - H_3) + (H_5 - k) + \dots + (H_{2n-1} - k)$$

$$= -H_1 - H_3 + H_5 + \dots + H_{2n-1} - (n-4)k$$

$$= -2(H_1 + H_3) + (H_1 + H_3 + \dots + H_{2n-1}) - (n-4)k$$

$$= -2(H_1 + H_3) + p - (n-4)k = -2k + p - (n-4)k = p - (n-2)k$$

$$\text{偶數的高和 } h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = k + (H_4 - k) + (H_6 - k) \dots + (H_{2n} - k)$$

$$= (H_4 + H_6 + \dots + H_{2n}) - (n-2)k = p - (n-2)k$$

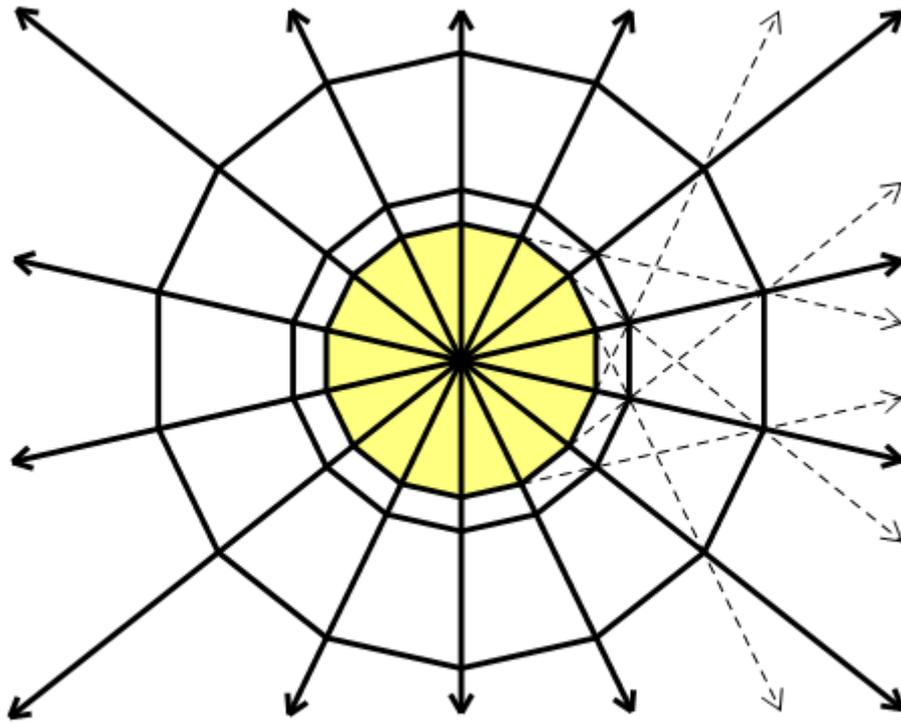
$$\Rightarrow h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = h_2 + h_4 + \dots + h_{2n}$$

$$\Rightarrow \triangle A_1 A_2 P + \triangle P A_3 A_4 + \dots + \triangle A_{2n-1} A_{2n} P = \frac{1}{2} a (h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1})$$

$$= \frac{1}{2} a (h_2 + h_4 + \dots + h_{2n}) = \triangle A_2 A_3 P + \triangle A_4 A_5 P + \dots + \triangle A_{2n} A_{2n+1} P, \text{ 故得證。}$$

(五) 修正 p.7(三) 的推測：

在 GSP 的輔助下，我們發現只要邊數增加，所得到符合  $\lambda=1$  的大  $2n$  邊形可能不只一個。所以原先的結果須修正為：一正  $2n$  邊形之外部點  $P$ ，使之符合  $\lambda=1$  之點  $P$  軌跡應該為數個正  $2n$  邊形及放射狀圖形。



圖(22)

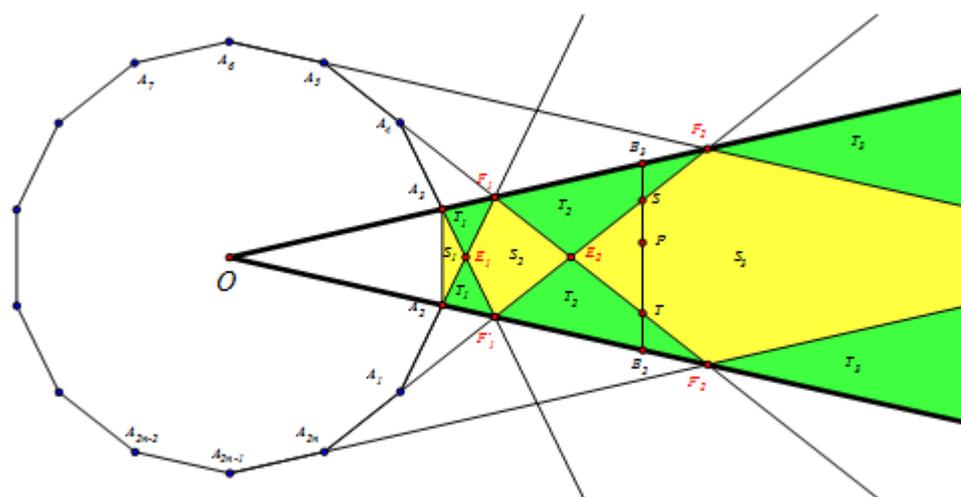
◎說明

圖(22)中的黃色區域為正  $2n$  邊形的內部，也就是先前證明之  $\lambda=1$  的部分。而黑色粗線則是指正  $2n$  邊形的外部  $\lambda=1$  的部分（藉由如虛線之延長方式，即可得到這些正  $2n$  邊形），證明方法類似第 12 頁的討論，在此不詳加說明。

三、當  $P$  點在正  $2n$  邊形外部時， $\lambda \neq 1$  之討論：

(一)未知數的定義

1. 該正多邊形  $A_1A_2\dots A_{2n}$  為正  $2n$  邊形，邊長為  $a$ 。
2. 過  $P$  點作與  $A_1A_2\dots A_{2n}$  共中心，每邊均平行於原正  $2n$  邊形對應邊的正  $2n$  邊形  $B_1B_2\dots B_{2n}$  邊長為  $at$ ， $t > 1$ ， $t$  即放大倍率。
3. 定義  $H_x$ 、 $h_x$ ，完整定義如 p.12 中所述。
4.  $p = H_1 + H_3 + \dots + H_{2n-1} = H_2 + H_4 + \dots + H_{2n}$
5.  $k$  為大正  $2n$  邊形到小正  $2n$  邊形的距離，即圖(23)中  $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{B_2B_3}$  的距離。
6. 如圖(23)，中間部分的交點為  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $E_3\dots$ 。兩側部分上方交點為  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3\dots$ ，下方交點為  $F'_1$ 、 $F'_2$ 、 $F'_3\dots$ 。
7. 如圖(23)，位於中間（黃色）的部分定義為  $S$  區域，而兩側（綠色）的部分定義為  $T$  區域，並依其位置編號  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3\dots$  以及  $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3\dots$ 。以後將針對  $P$  點位於  $S_i$  區域或  $T_j$  區域進行討論。（其餘詳見以下說明）



圖(23)

◎說明

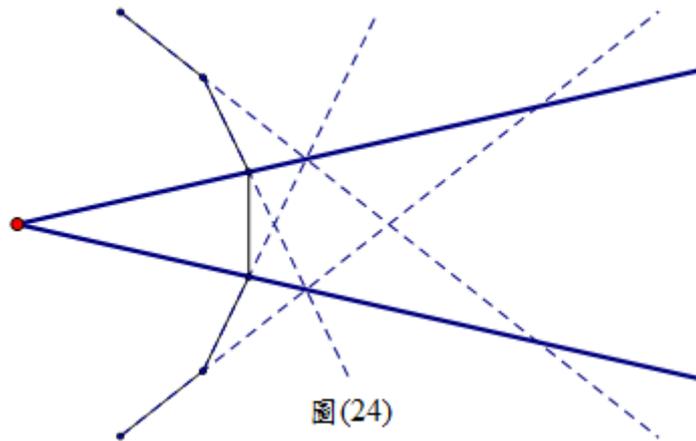
考慮  $P$  點的位置， $P$  點可能在  $S_1$  區域、 $S_2$  區域、 $S_3$  區域... (黃色) 或  $T_1$  區域、 $T_2$  區域、 $T_3$  區域... (綠色)。如圖(23)中， $P$  點在  $S_3$  區域內。

若  $P$  點在線段  $\overline{B_3S}$  或  $\overline{TB_2}$ ，則稱  $P$  點是在  $T_2$  區域。

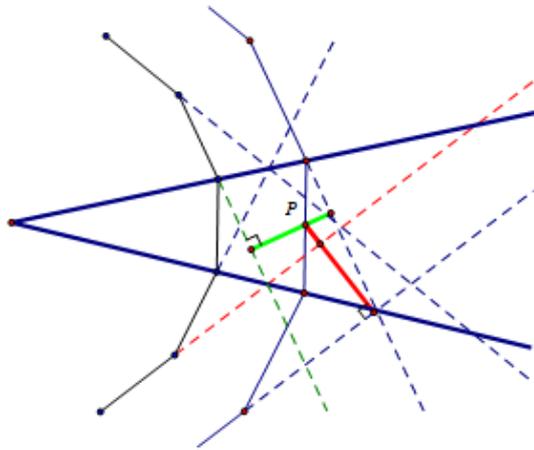
(二)  $H_x$ 、 $h_x$  轉換式的討論：

一開始，我們採用類似於 p.8 的證明方式進行推廣，然而，在  $P$  點沒有限制之情況下，狀況會變得複雜許多。於是，我們嘗試用 p.12 的證明方式。在 p.12 的證明中，可以看出  $H_x$ 、 $h_x$  的轉換關係式在此方法中是極為重要的一環。因此，其  $H_x$ 、 $h_x$  的轉換關係式就會隨著  $P$  點之移動而有些微的改變，以下討論便要找出何種狀況會造成  $H_x$ 、 $h_x$  轉換關係式的改變。

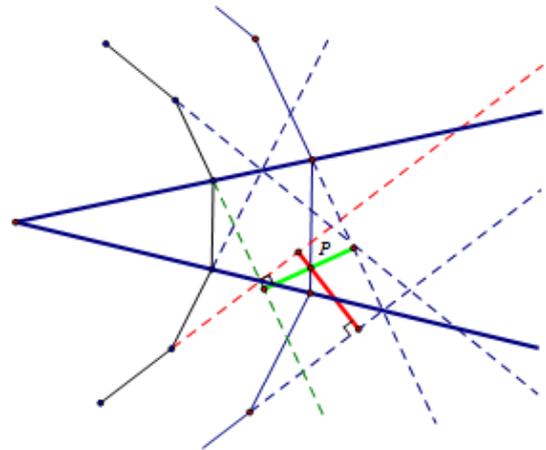
經過觀察及推導，發現會造成  $H_x$ 、 $h_x$  轉換關係式改變的最主要關鍵為  $P$  點是否通過延長線 (即圖(24)之虛線部分)。若  $P$  點跨過了該延長線，則將會使其轉換關係式由  $H_x - h_x = k$  變為  $H_x + h_x = k$ 。因此，即可從其延長線分割的情況定義出  $S_i$ 、 $T_j$  兩部分。經過整理，可以得其一般式。由於後面的篇幅會將更為完整的式子列出，故在此就不詳細說明。



◎實例說明：



圖(25,a)



圖(25,b)

圖(25,a)中，對紅色的高而言， $P$ 點尚未通過其對應之延長線（紅色），故紅色的高相減等於 $k$ 。但當 $P$ 點移過紅色延長線時（如圖(25,b)），紅色的高變為相加等於 $k$ 。而對綠色高而言， $P$ 點均已移過其對應的延長線（綠色），故不論是圖(25,a)或是圖(25,b)之情形，均為相加等於 $k$ 。

(三)所需數值之計算與討論：

1.  $p$  的值：

正  $2n$  邊形  $B_1B_2\dots B_{2n}$  面積  $= \Delta B_1B_2P + \Delta B_2B_3P + \Delta B_3B_4P + \dots + \Delta B_{2n}B_1P$

$$= \frac{1}{2} \overline{B_1B_2} \times H_1 + \frac{1}{2} \overline{B_2B_3} \times H_2 + \dots + \frac{1}{2} \overline{B_{2n}B_1} \times H_{2n}$$

$$= \frac{1}{2} \left( at \times \frac{1}{2} at \cot \frac{\pi}{2n} \right) 2n = \frac{1}{2} [at \times (H_1 + H_2 + \dots + H_{2n})]$$

$$\Rightarrow H_1 + H_2 + \dots + H_{2n} = 2p = atn \cot \frac{\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{2} atn \cot \frac{\pi}{2n}$$

2.  $k$  的值：

設  $M_1$ 、 $M_2$  分別為  $\overline{B_2B_3}$ 、 $\overline{A_2A_3}$  之中點，

$$k = \overline{OM_1} - \overline{OM_2} = \frac{1}{2}at \cot \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{2}a \cot \frac{\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}a(t-1) \cot \frac{\pi}{2n} .$$

3. 每一組高的和：

以下將要計算 $\Delta B_i B_{i+1} P$ 以 $\overline{B_i B_{i+1}}$ 為底的高，其中 $i=1,2,3,\dots,2n$ 。以 $\overline{B_2 B_3}$ 為中心，往兩邊算起， $\Delta B_1 B_2 P$ 與 $\Delta B_3 B_4 P$ 的高合稱為第1組高， $\Delta B_{2n} B_1 P$ 與 $\Delta B_4 B_5 P$ 的高合稱為第2組高， $\Delta B_{2n-1} B_{2n} P$ 與 $\Delta B_5 B_6 P$ 的高合稱為第3組高，依此類推。將每一組高之和都求出的作法如下（圖(26)、圖(27)、圖(28)、圖(29)為示意圖，假設 $\Delta B_1 B_{2n} P$ 、 $\Delta B_4 B_5 P$ 的兩高為第 $y$ 組高）：

令所求為第 $y$ 組高，且第 $y$ 組高和為 $x \Rightarrow$ 延長第 $y$ 組之兩高， $\overline{B_1 B_{2n}}$ 、 $\overline{B_4 B_5}$

交於一點 $D$ ，延長 $\overline{B_2 B_3}$ ，分

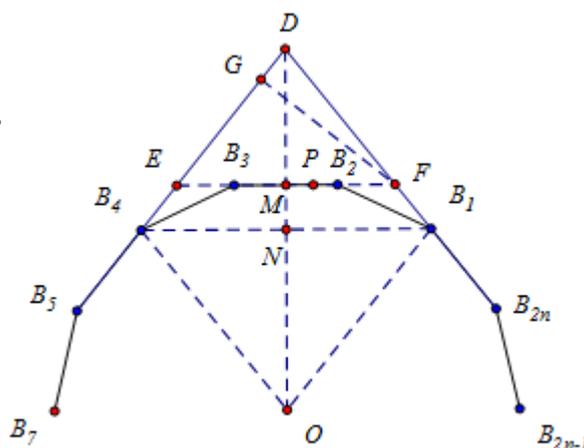
別交 $\overline{B_4 D}$ 與 $\overline{B_1 D}$ 於 $E$ 、 $F$ 兩點，

連接 $\overline{OB_1}$ 、 $\overline{OB_4}$ 、 $\overline{B_1 B_4}$ 、 $\overline{OD}$ ，

$\overline{OD}$ 分別交 $\overline{B_2 B_3}$ 、 $\overline{B_1 B_4}$ 於 $M$ 、

$N$ 兩點，過 $F$ 點，作 $\overline{FG} \perp \overline{B_5 D}$

於一點 $D$ 。



圖(26)

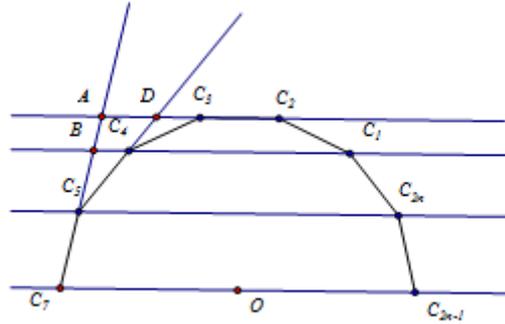
① 依對稱性，易知 $\Delta B_1 B_4 D$ 為一等腰三角形，又

$$\Delta B_1 B_4 D = \frac{x}{2} \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{DE} \cdot \overline{GF} \quad \hookrightarrow x = \overline{GF}$$

② 如圖(27)， $\angle AC_3 C_4 = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ ， $\angle DC_4 C_3 = \frac{\pi}{n} \Rightarrow \angle ADC_4 = \frac{2\pi}{n}$

又 $\overline{C_2 C_3}$ 平行於 $\overline{C_1 C_4}$   $\hookrightarrow \angle ADC_4 = \angle DC_4 C_1 = \frac{2\pi}{n}$ ，同理 $\Rightarrow \angle AC_5 C_{2n} = \frac{3\pi}{n}$

第  $y$  組延長後所得等腰三角形之底角為  $\frac{y\pi}{n}$ ，故知  $\angle DB_1B_4 = \angle DB_4B_1 = \frac{y\pi}{n}$



圖(27)

$$\frac{\pi}{n}$$

③ 一個邊對應之圓弧為  $\frac{\pi}{n}$ ，又第  $y$  組對應之邊數恰為  $2y-1$  組(如圖(28))

$$\angle B_1OB_4 = (2y-1)\frac{\pi}{n} \Rightarrow \angle B_1MO = \angle B_4MO = \frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}$$

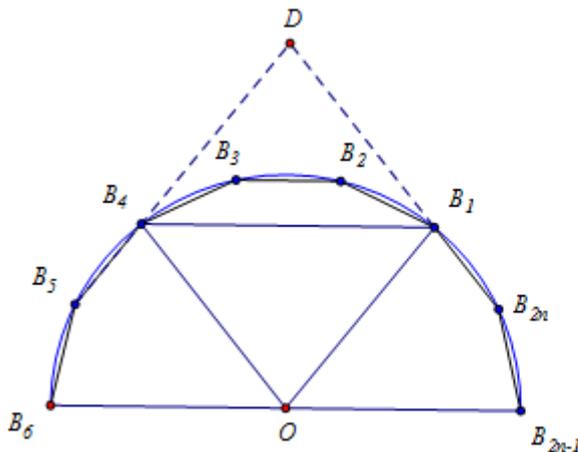
④ 令  $\overline{OB_1} = r$ ，由圖(29)知  $r = \frac{1}{2}a \csc \frac{\pi}{2n}$ ，又由圖(28)知，

$$\overline{B_1B_4} = 2r \sin\left(\frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) \quad \overline{MN} = \overline{MO} - \overline{ON} = \frac{1}{2}at \cot \frac{\pi}{2n} - r \cos\left(\frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)$$

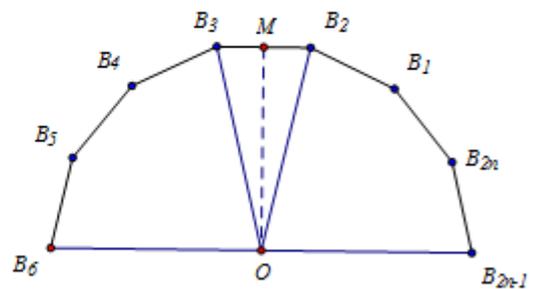
$$\overline{DN} = \overline{B_4N} \tan \frac{y\pi}{n} = r \sin\left(\frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) \tan \frac{y\pi}{n}$$

$$\overline{DM} = \overline{DN} - \overline{MN} = r \sin\left(\frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) \tan \frac{y\pi}{n} - \frac{1}{2}at \cot \frac{\pi}{2n} + r \cos\left(\frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}at \left(\sec \frac{y\pi}{n} - 1\right) \cot \frac{\pi}{2n}$$



圖(28)



圖(29)

$$\textcircled{5} \quad \overline{EF} = 2\overline{DM} \cot \frac{y\pi}{n} = at(\sec \frac{y\pi}{n} - 1) \cot \frac{\pi}{2n} \cot \frac{y\pi}{n} = at(\csc \frac{y\pi}{n} - \cot \frac{y\pi}{n}) \cot \frac{\pi}{2n}$$

$$\textcircled{6} \text{ 所求第 } y \text{ 組高的和 } x = \overline{FG} = \overline{EF} \sin \frac{y\pi}{n} = at(\csc \frac{y\pi}{n} - \cot \frac{y\pi}{n}) \cot \frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$= at(1 - \cos \frac{y\pi}{n}) \cot \frac{\pi}{2n}, \quad \text{又 } p = \frac{1}{2} atn \cot \frac{\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow x = at(1 - \cos \frac{y\pi}{n}) \cot \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2} at \cot \frac{\pi}{2n} (2 - 2 \cos \frac{y\pi}{n}) = \frac{p}{n} (2 - 2 \cos \frac{y\pi}{n})$$

結論(1)：第 1 組高  $\Rightarrow H_1, H_3$ ，第  $y$  組高 ( $y \geq 2$ )  $\Rightarrow H_{2n+2-y}, H_{y+2}$  第  $y$  組高的和

$$\Rightarrow at(1 - \cos \frac{y\pi}{n}) \cot \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2} at \cot \frac{\pi}{2n} (2 - 2 \cos \frac{y\pi}{n}) = \frac{p}{n} (2 - 2 \cos \frac{y\pi}{n})$$

(四)  $P$  點在  $S_i$  區域時  $\lambda$  值之討論：

1.  $t$  (放大倍率) 與  $i$  間的比例關係：

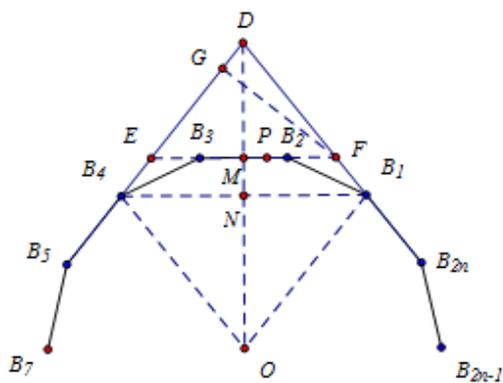
如圖(31)，所求的是  $\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{A_2A_3}}$  的值。 $\triangle B_2B_3O \cong \triangle A_2A_3O$ ， $\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{A_2A_3}} = \frac{\overline{OE_i}}{\overline{OM'}}$

$$\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{A_2A_3}} = \frac{\overline{OE_i}}{\overline{OM'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{MD} + \overline{MO}}{\overline{OM}} = 1 + \frac{\overline{MD}}{\overline{OM}} \text{ (圖(30))，由前之推導 } \overline{MD}$$

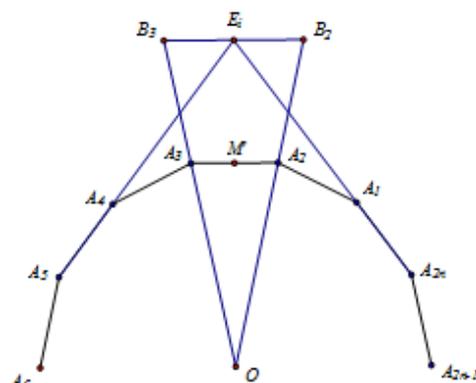
$$= \frac{1}{2} at(\sec \frac{y\pi}{n} - 1) \cot \frac{\pi}{2n} \overline{MO} = \frac{1}{2} at \cot \frac{\pi}{2n}$$

$$\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{A_2A_3}} = 1 + \frac{\overline{MD}}{\overline{OM}} = 1 + \frac{\frac{1}{2} at(\sec \frac{y\pi}{n} - 1) \cot \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{2} at \cot \frac{\pi}{2n}} = \sec \frac{y\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \sec \frac{(b-1)\pi}{n} < t \leq \sec \frac{b\pi}{n} \quad (b \in N, b < \frac{n}{2}) \text{ 時， } i = b \dots \text{ 結論(2)}$$



圖(30)



圖(31)

2.λ 值之討論：

由先前之討論，可得  $H_x$ 、 $h_x$  轉換之通式，分別帶入後，結果如下：

$$\begin{array}{l}
 \boxed{S_1} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - nk \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - (n-2)k \end{cases} \\
 \boxed{S_2} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3) - (n-4)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - (n-2)k \end{cases} \\
 \boxed{S_3} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3) - (n-4)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2(H_4 + H_{2n}) - (n-6)k \end{cases} \\
 \boxed{S_4} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3 + H_5 + H_{2n-1}) - (n-8)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2(H_4 + H_{2n}) - (n-6)k \end{cases} \\
 \vdots
 \end{array}$$

多減 2 高，多加 4k

多減 2 高，多加 4k

以此類推

由結論(2)，令  $\sec \frac{(i-1)\pi}{n} < t \leq \sec \frac{i\pi}{n}$ ，點  $P$  位於  $S_i$  區域，從上知，

$$h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2 \left( \left[ \frac{i}{2} \right] \text{組高} \right) - \left( n - 4 \left[ \frac{i}{2} \right] \right) k$$

$$h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2 \left( \left[ \frac{i-1}{2} \right] \text{組高} \right) - \left( n - (2 + 4 \left[ \frac{i-1}{2} \right]) \right) k$$

◎  $\left[ \frac{i}{2} \right]$  組高及  $\left[ \frac{i-1}{2} \right]$  組高之說明

1. 考慮  $h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2 \left( \left[ \frac{i}{2} \right] \text{組高} \right) - \left( n - 4 \left[ \frac{i}{2} \right] \right) k$  時

$\left[ \frac{i}{2} \right] = 1$ ，則代表第 1 組高

$\left[ \frac{i}{2} \right] = 2$ ，則代表第 1 組高及第 3 組高

亦即當  $\left[ \frac{i}{2} \right] = r$  時，則代表第 1 組高、第 3 組高……第  $(2r-1)$  組高

2. 考慮  $h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2 \left( \left[ \frac{i-1}{2} \right] \text{組高} \right) - \left( n - (2 + 4 \left[ \frac{i-1}{2} \right]) \right) k$  時

$\left[ \frac{i-1}{2} \right] = 1$ ，則代表第 2 組高

$\left[ \frac{i-1}{2} \right] = 2$ ，則代表第 2 組高及第 4 組高

亦即當  $\left[ \frac{i-1}{2} \right] = r$  時，則代表第 2 組高、第 4 組高……第  $2r$  組高

$$\zeta \lambda = \frac{\Delta A_1 A_2 P + \Delta A_3 A_4 P + \dots + \Delta A_{2n-1} A_{2n} P}{\Delta A_2 A_3 P + \Delta A_4 A_5 P + \dots + \Delta A_{2n} A_1 P} = \frac{p - 2 \left( \left[ \frac{i}{2} \right] \text{組高} \right) - \left( n - 4 \left[ \frac{i}{2} \right] \right) k}{p - 2 \left( \left[ \frac{i-1}{2} \right] \text{組高} \right) - \left( n - (2 + 4 \left[ \frac{i-1}{2} \right]) \right) k}$$

$$= \frac{p \left( 1 - \frac{4 \left[ \frac{i}{2} \right]}{n} \right) + \frac{4p}{n} \sum_{k=1}^{\left[ \frac{i}{2} \right]} \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} - \left( n - 4 \left[ \frac{i}{2} \right] \right) k}{p \left( 1 - \frac{4 \left[ \frac{i-1}{2} \right]}{n} \right) + \frac{4p}{n} \sum_{k=1}^{\left[ \frac{i-1}{2} \right]} \cos \frac{2k\pi}{n} - \left[ n - (2 + 4 \left[ \frac{i-1}{2} \right]) \right] k}$$

$$= \frac{p \left( 1 - \frac{4 \left[ \frac{i}{2} \right]}{n} \right) + \frac{4p}{n} \sum_{k=1}^{\left[ \frac{i}{2} \right]} \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} - \left( n - 4 \left[ \frac{i}{2} \right] \right) k}{p \left( 1 - \frac{4 \left[ \frac{i-1}{2} \right]}{n} \right) + \frac{4p}{n} \sum_{k=1}^{\left[ \frac{i-1}{2} \right]} \cos \frac{2k\pi}{n} - \left[ n - (2 + 4 \left[ \frac{i-1}{2} \right]) \right] k}$$

$$= \frac{n - 4 \left[ \frac{i}{2} \right] + 4t \sum_{k=1}^{\left[ \frac{i}{2} \right]} \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}}{2t + n - (2 + 4 \left[ \frac{i-1}{2} \right]) + 4t \sum_{k=1}^{\left[ \frac{i-1}{2} \right]} \cos \frac{2k\pi}{n}}$$

又依積化和差

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(\lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1)\pi}{n} = \frac{\sin \frac{2\lfloor \frac{i}{2} \rfloor \pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$\text{同理, } \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \cos \frac{2k\pi}{n} = \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor \pi}{n} = \frac{\sin \frac{(2\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor + 1)\pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} - \frac{1}{2}$$

分別將其代入，得

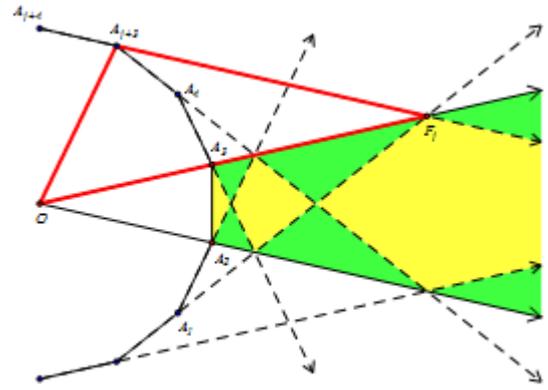
$$\lambda = \frac{n - 4\lfloor \frac{i}{2} \rfloor + 4t \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}}{2t + n - (2 + 4\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor) + 4t \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \cos \frac{2k\pi}{n}} = \frac{(n - 4\lfloor \frac{i}{2} \rfloor) \sin \frac{\pi}{n} + 2t \sin \frac{2\lfloor \frac{i}{2} \rfloor \pi}{n}}{[n - (2 + 4\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor)] \sin \frac{\pi}{n} + 2t \sin \frac{(2\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor + 1)\pi}{n}}$$

在  $S_i$  區域，如果  $t$  固定， $\lambda$  值是一個定值。

(五)  $P$  點在  $T_j$  區域時  $\lambda$  之討論：

1.  $t$  與  $j$  間的比例關係：

如圖(32)，分別延長  $\overline{A_{j+3}A_{j+4}}$ 、  
 $\overline{OA_3}$ ，兩射線交於點  $F_j$ 。



圖(32)

①經由推導，得  $\angle A_{j+3}OF_j = \frac{j\pi}{n}$ ，

$$\angle OA_{j+3}F_j = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \Rightarrow \angle OF_jA_{j+3} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{j\pi}{n}\right)$$

②在  $\triangle OA_{j+3}F_j$  中，依正弦定理可得  $\frac{\overline{OF_j}}{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n})} = \frac{\overline{OA_3}}{\sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2n} + \frac{j\pi}{n}))}$

$$\therefore \overline{OF_j} = \frac{a \cot \frac{\pi}{2n}}{2 \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{j\pi}{n})}$$

③把①②結果代入，可得  $t = \frac{\overline{OF_j}}{\overline{OA_3}} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{j\pi}{n} + 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{j\pi}{n} - 2 \sin \frac{j\pi}{n}}$

由於此式較為複雜，所以令  $f(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{x\pi}{n} + 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{x\pi}{n} - 2 \sin \frac{x\pi}{n}}$

若  $f(j-1) < t \leq f(j)$ ，則  $P$  點位於  $T_j$  區域。……結論(3)

2.  $\lambda$  值之討論：

所有未知數與  $S_i$  區域的討論相同。又因上下對稱，所以只討論該點出現在上側的情形。沿用 p.15 的結論，可列出下列通式：

$$\boxed{T_1} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2H_3 - (n-2)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - (n-2)k \end{cases}$$

$$\boxed{T_2} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3) - (n-4)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2H_4 - (n-4)k \end{cases}$$

$$\boxed{T_3} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3 + H_5) - (n-6)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2(H_4 + H_{2n}) - (n-6)k \end{cases}$$

$$\boxed{T_4} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3 + H_5 + H_{2n-1}) - (n-8)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2(H_4 + H_{2n} + H_6) - (n-8)k \end{cases}$$

⋮

以此類推

上面的規則與  $P$  在  $S_i$  區域之情形十分相似，就只差在多一個高與兩個  $k$ ，又從前之推論，易知每一組之高 ( $H$ ) 的和為一定值。從上可知， $h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1}$

與  $h_2+h_4+\dots+h_{2n}$  中所含之  $H$  個數必有一為奇數，所以必不能配成定值，亦即該比例與其中一組高的大小有關，而異於之前， $P$  在  $S_i$  區域時， $\lambda$  為定值。以下，便是  $P$  在  $T_j$  區域時  $\lambda$  的計算。

1. 當  $j$  為奇數時：

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\Delta A_1 A_2 P + \Delta A_3 A_4 P + \dots + \Delta A_{2n-1} A_{2n} P}{\Delta A_2 A_3 P + \Delta A_4 A_5 P + \dots + \Delta A_{2n} A_1 P} = \frac{h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1}}{h_2 + h_4 + \dots + h_{2n}} \\ &= \frac{p - 2H_{j+2} - 2\left(\left(\frac{j-1}{2}\right) \text{組高}\right) - (n-2j)k}{p - 2\left(\left(\frac{j}{2}\right) \text{組高}\right) - (n-2j)k} \\ &= \frac{a(2t+n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{(j-1)\pi}{n} - 4(1-\cos\frac{\pi}{n})H_{j+2}}{a(n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{j\pi}{n}}\end{aligned}$$

2. 當  $j$  為偶數時：

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\Delta A_1 A_2 P + \Delta A_3 A_4 P + \dots + \Delta A_{2n-1} A_{2n} P}{\Delta A_2 A_3 P + \Delta A_4 A_5 P + \dots + \Delta A_{2n} A_1 P} = \frac{h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1}}{h_2 + h_4 + \dots + h_{2n}} \\ &= \frac{p - 2\left(\left(\frac{j}{2}\right) \text{組高}\right) - (n-2j)k}{p - 2\left(\left(\frac{j}{2}-1\right) \text{組高}\right) - 2H_{j+2} - (n-2j)k} \\ &= \frac{a(n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{j\pi}{n}}{a(2t+n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{(j-1)\pi}{n} - 4(1-\cos\frac{\pi}{n})H_{j+2}}\end{aligned}$$

綜合 1.2. 所得的結果，當  $j$  分別為奇數及偶數時，所求得的  $\lambda$  值恰互為倒數關係，所以可以將奇偶數的結果合併，即  $\lambda$  為

$$\left[ \frac{a(n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{j\pi}{n}}{a(2t+n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{(j-1)\pi}{n} - 4(1-\cos\frac{\pi}{n})H_{j+2}} \right]^{(-1)^j}$$

(六)  $\lambda$  函數圖形討論

1. 圖形的討論及圖(22)為使  $\lambda=1$  之唯一解的證明：

將  $\lambda$  值之公式推導出來後，可對其圖形進行討論並且證明  $\lambda=1$  的點必定只會落在圖(22)所標示的線段上：

(1)  $P$  點位於  $S_i$  區域時的討論

將  $\lambda$ 、 $t$  交叉相乘後，可得  $a(\lambda-b)(t-c)=d, (a, b, c, d \in R)$ ，故每一個  $i$  所得之圖形，皆為一以鉛直線與水平線為漸近線 ( $L_1: \lambda=b, L_2: t=b$ ) 之雙曲線。我們即依不同之  $i$  取其中之一小段，並將圖拼起來。由於已經求出外部任一點的  $\lambda$ ，故可將用微分的方式，確認  $\lambda$  的圖形為遞增或遞減。

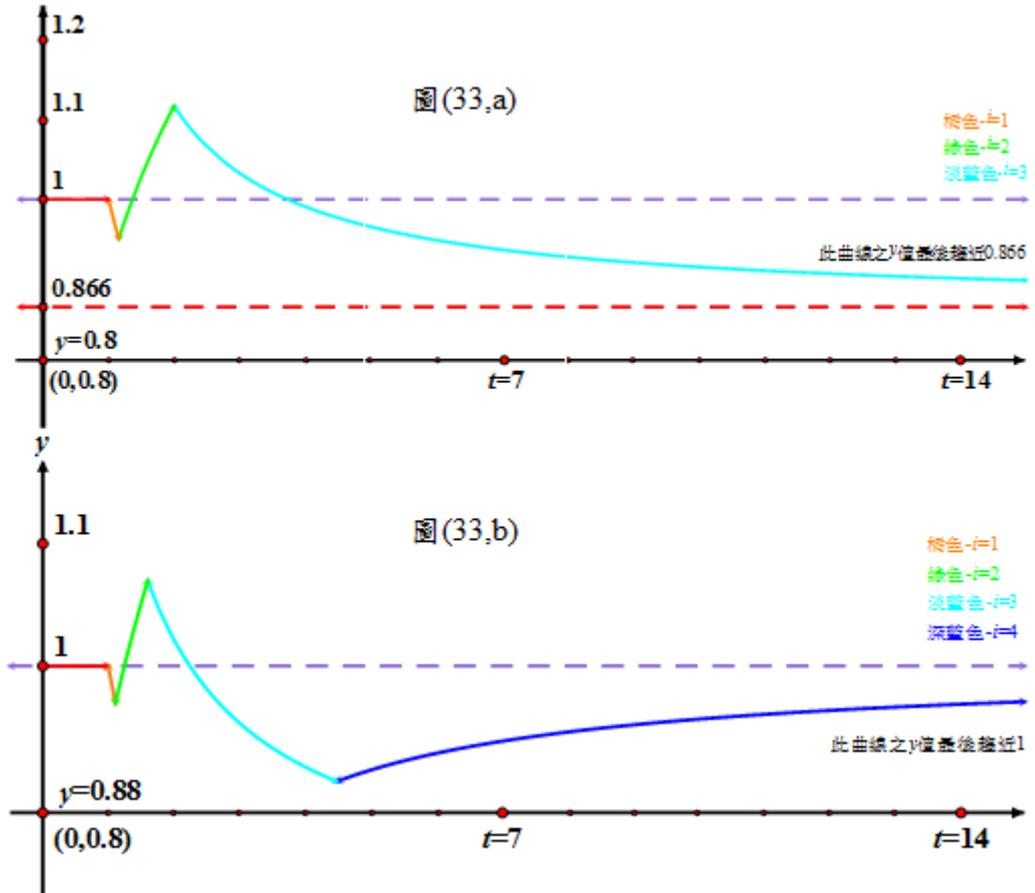
$$S_i \text{ 區域 } \lambda = \frac{(n-4[\frac{i}{2}])\sin\frac{\pi}{n} + 2t\sin\frac{2[\frac{i}{2}]\pi}{n}}{[n-(2+4[\frac{i-1}{2}])]\sin\frac{\pi}{n} + 2t\sin\frac{(2[\frac{i-1}{2}]+1)\pi}{n}}$$

$\lambda$  對  $t$  微分後可得：

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2\sin\frac{2[\frac{i}{2}]\pi}{n}[n-(2+4[\frac{i-1}{2}])]\sin\frac{\pi}{n} - 2(n-4[\frac{i}{2}])\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(2[\frac{i-1}{2}]+1)\pi}{n}}{\left\{ [n-(2+4[\frac{i-1}{2}])]\sin\frac{\pi}{n} + 2t\sin\frac{(2[\frac{i-1}{2}]+1)\pi}{n} \right\}^2}$$

將中央部份的  $\lambda$  對  $t$  微分後，因其分母為完全平方式，又分子為兩正弦函數值之差值，故易證在同一  $i$  值時，其  $\frac{d\lambda}{dt}$  之值不是大於 0，便是小於 0，表示在同一  $i$  值時，其  $\lambda$  值必為遞增或遞減。又易證  $i$  為奇數時，位於該區間之  $t$  值最小時，有最大之  $\lambda$  值，且  $\frac{d\lambda}{dt}$  必大於 0。而  $i$  為偶數時，於該區間之  $t$  值最小時，有最小之  $\lambda$  值，且  $\frac{d\lambda}{dt}$  必小於 0。故可得每一區均只

有一使 $\lambda=1$ 之 $t$ 值。(如圖(33,a)為 $n=6$ 之圖形，圖(33,b)為 $n=7$ 之圖形)



(2)  $P$  點位於  $T_j$  區域時的討論：

由公式可得，若我們定  $t$ 、 $n$ ，則  $\lambda$  僅受  $H_{j+2}$  影響，又隨著點由上往下移動， $H_{j+2}$  將越來越大。而  $\lambda$  值之公式中， $H_{j+2}$  可能出現於分子或分母（由  $j$  之奇偶性決定），故  $\lambda$  值也會隨之越來越大或越來越小。又已知邊界之兩側之  $\lambda$  恆為 1。故位於  $T$  區域之所有點之  $\lambda$  皆不為 1。

綜合(1)、(2)之結果，便能說明使  $\lambda$  為 1 的點，必定落在圖(22)所標示的線上，且不會有其他的點符合  $\lambda=1$  的條件。

2.  $P$  點位於  $S_i$  區域時  $\lambda$  極值的討論：

(1) 令  $n = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ )，當  $t \rightarrow \infty$  時其  $i=k$

① 假設  $k = 2q (q \in \mathbb{N})$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \frac{\sin \frac{2q\pi}{4q}}{\sin \frac{(2q-1)\pi}{4q}} = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = \sec \frac{\pi}{n}$$

② 假設  $k = 2q - 1 (q \in \mathbb{N})$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \frac{\sin \frac{2q-2}{4q-2} \pi}{\sin \frac{2q-1}{4q-2} \pi} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4q-2}\right)}{\sin \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{n}$$

(2) 令  $n = 2k - 1 (k \in \mathbb{N})$ ，當  $t \rightarrow \infty$  時其  $i=k$

① 假設  $k = 2q (q \in \mathbb{N})$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \frac{\sin \frac{2q\pi}{4q-1}}{\sin \frac{(2q-1)\pi}{4q-1}} = \frac{\sin \frac{2q}{4q-1} \pi}{\sin\left(\pi - \frac{2q\pi}{4q-1}\right)} = 1$$

② 假設  $k = 2q + 1 (q \in \mathbb{N})$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \frac{\sin \frac{2q\pi}{4q+1}}{\sin \frac{2q+1}{4q+1} \pi} = \frac{\sin \frac{2q\pi}{4q+1}}{\sin\left(\pi - \frac{2q\pi}{4q+1}\right)} = 1$$

由(1)(2)所得之結果可整理為：

①  $n$  為奇數時， $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = 1$

②  $n$  為偶數時，若  $n$  為  $4m (m \in \mathbb{N})$ ， $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \sec \frac{\pi}{n}$ ； $n$  為  $4m + 2 (m \in \mathbb{N})$ ，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \cos \frac{\pi}{n}$$

四、探討面積多次方和的比值：

(一)  $P$  點於正  $2n$  邊形內部，面積多次方和的比值：

完成面積比值的探討後，我們使用 GSP 嘗試找出面積多次方和的關係。若  $P$  點於正  $2n$  邊形內部時，我們發現對於正四邊形而言，交錯面積一次方和會相等。對正六邊形而言，交錯面積一次方及二次方和會相等。對正八邊形而言，交錯面積一次方、二次方及三次方和會相等...。所以推測：當  $P$  點位於正  $2n$  邊形  $A_1A_2...A_{2n-1}A_{2n}$  之內部（其中  $m \in \mathbb{N}$  且  $1 \leq m \leq n-1$ ），則會滿足以下等式：

$$(\triangle A_1A_2P)^m + (\triangle A_3A_4P)^m + \dots + (\triangle A_{2n-1}A_{2n}P)^m = (\triangle A_2A_3P)^m + (\triangle A_4A_5P)^m + \dots + (\triangle A_{2n}A_1P)^m$$

以下將證明我們的推論。

$P$  點於正  $2n$  邊形內切圓上之探討：

(1) 未知數的定義（如圖(34)）：

① 正  $2n$  邊形  $A_1A_2...A_{2n-1}A_{2n}$ ，其內切圓圓  $O$  半徑為  $R$ 。

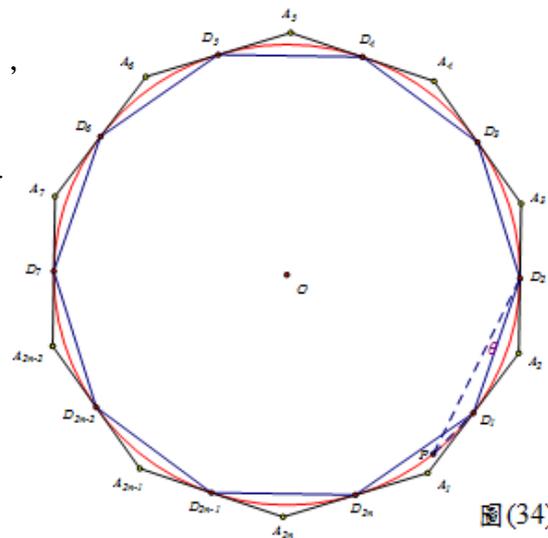
② 圓  $O$  分別切  $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ .....  $\overline{A_{2n}A_1}$  於  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$ .....  $D_{2n}$ 。

③  $P$  點在圓  $O$  上，令  $\angle PD_2D_1$  為  $\theta$ ，

且  $P$  至  $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ .....

$\overline{A_{2n}A_1}$  的垂足分別為

$C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ .....  $C_{2n}$ 。



圖(34)

(2)證明中所需之引理：

$$\text{引理一： } h_x = \overline{PC_x} = 2R \sin^2 \left( \theta + \frac{(x-1)\pi}{2n} \right), \quad x=1,2,\dots,2n。$$

(證明)

$$\textcircled{1} \widehat{PD_x} = \widehat{PD_1} + \widehat{D_1D_x} = 2\theta + (x-1)\frac{\pi}{n}$$

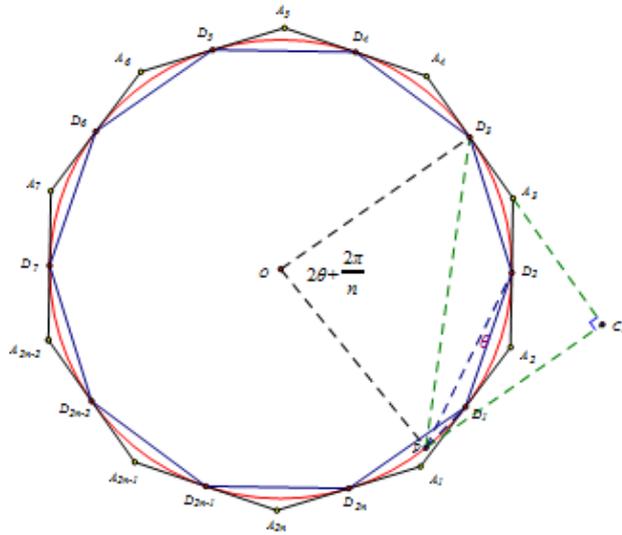
②由圖形可得  $h_x = \overline{PC_x} = \overline{PD_x} \sin \angle PD_x C_x$  (如圖(35)，該圖為  $x=3$  之例)

$$\because \overline{C_x D_x} \text{ 與圓 } O \text{ 相切}, \therefore \angle PD_x C_x = \frac{1}{2} \widehat{PD_x}$$

$$\Rightarrow h_x = \overline{PC_x} = \overline{PD_x} \sin \left( \theta + \frac{(x-1)\pi}{2n} \right)$$

$$\textcircled{3} \text{ 又 } \overline{PD_x} = 2R \sin \left( \frac{1}{2} \angle POD_x \right) = 2R \sin \left( \theta + \frac{(x-1)\pi}{2n} \right)$$

$$\therefore h_x = \overline{PC_x} = 2R \sin^2 \left( \theta + \frac{(x-1)\pi}{2n} \right), \text{ 得證}$$



圖(35)

引理二(a)：

$$\sum_{k=1}^n \cos m \left( \theta + \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) = \begin{cases} 0 & (n \text{ 是 } m \text{ 的因數}) \\ n \cos m\theta & (n \text{ 不是 } m \text{ 的因數}) \end{cases} \quad (\text{其中 } m, n \in \mathbb{N})$$

(證明)

$$\textcircled{1} \text{ 當 } n \text{ 是 } m \text{ 的因數時} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \cos m \left( \theta + \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) = \cos m \left( \theta + \frac{\pi}{n} \right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \cos m \left( \theta + \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) = n \cos m \left( \theta + \frac{\pi}{n} \right)$$

$$\textcircled{2} \text{ 當 } n \text{ 不是 } m \text{ 的因數時, 令 } \sum_{k=1}^n \cos m \left( \theta + \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) = Q$$

$\because n$  不是  $m$  的因數,  $\therefore \sin \frac{m\pi}{n} \neq 0$ 。依積化和差可得下式:

$$2 \sin \frac{m\pi}{n} Q = \sum_{k=1}^n 2 \cos m \left( \theta + \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) \sin \frac{m\pi}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[ \sin m \left( \theta + \frac{2k\pi}{n} \right) - \sin m \left( \theta + \frac{(2k-2)\pi}{n} \right) \right]$$

$$= -\sin m\theta + \sin(m\theta + 2m\pi) = 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \cos m \left( \theta + \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) = Q = 0, \text{ 得證}$$

引理二(b):

$$\sum_{k=1}^n \cos m \left( \theta + \frac{(2k-2)\pi}{n} \right) = \begin{cases} 0 & (n \text{ 是 } m \text{ 的因數}) \\ n \cos m\theta & (n \text{ 不是 } m \text{ 的因數}) \end{cases} \text{ (其中 } m, n \in \mathbb{N} \text{)}$$

(證明)

$$\textcircled{1} \text{ 當 } n \text{ 是 } m \text{ 的因數時} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \cos m \left( \theta + \frac{(2k-2)\pi}{n} \right) = \cos m\theta$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \cos m \left( \theta + \frac{(2k-2)\pi}{n} \right) = n \cos m\theta$$

②當  $n$  不是  $m$  的因數時，令  $\sum_{k=1}^n \cos m \left( \theta + \frac{(2k-2)\pi}{n} \right) = Q$

$\because n$  不是  $m$  的因數， $\therefore \sin \frac{m\pi}{n} \neq 0$ 。

依積化和差可得下式：

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{m\pi}{n} Q &= \sum_{k=1}^n 2 \cos m \left( \theta + \frac{(2k-2)\pi}{n} \right) \sin \frac{m\pi}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \sin m \left( \theta + \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) - \sin m \left( \theta + \frac{(2k-3)\pi}{n} \right) \right] \\ &= -\sin \left( m\theta - \frac{m\pi}{n} \right) + \sin \left( m\theta + \frac{m(2n-1)\pi}{n} \right) = 0 \\ \therefore \sum_{k=1}^n \cos m \left( \theta + \frac{(2k-2)\pi}{n} \right) &= Q = 0, \text{ 得證} \end{aligned}$$

引理三：對於所有正整數  $n$ ，均滿足  $\sin^{2n} \theta = 2^{-(2n-1)} [C_{n-1}^{2n-1} + \sum_{t=1}^n (-1)^t C_{n+t}^{2n} \cos 2t\theta]$

(證明)以數學歸納法證明

1.  $n=1$  時， $\sin^2 \theta = 2^{-1} [C_0^1 + (-1)C_2^2 \cos 2\theta] = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ ，成立

2. 令  $n=k$  時成立，則  $\sin^{2k} \theta = 2^{-(2k-1)} [C_{k-1}^{2k-1} + \sum_{t=1}^k (-1)^t C_{k+t}^{2k} \cos 2t\theta]$

3.  $n = k + 1$  時，

$$\begin{aligned} \sin^{2(k+1)} \theta &= \sin^{2k} \theta \cdot \sin^2 \theta = 2^{-(2k-1)} [C_{k-1}^{2k-1} + \sum_{t=1}^k (-1)^t C_{k+t}^{2k} \cos 2t\theta] \cdot \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \\ &= 2^{-2k} [C_{k-1}^{2k-1} + \sum_{t=1}^k (-1)^t C_{k+t}^{2k} \cos 2t\theta] \cdot (1 - \cos 2\theta) \\ &= 2^{-2k} \left\{ [C_{k-1}^{2k-1} + \sum_{t=1}^k (-1)^t C_{k+t}^{2k} \cos 2t\theta] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ -C_{k-1}^{2k-1} \cos 2\theta + \sum_{t=1}^k (-1)^{t+1} C_{k+t}^{2k} \cos 2t\theta \cos 2\theta \right] \Big\} \\
= & 2^{-2k} \left\{ [C_{k-1}^{2k-1} + \sum_{t=1}^k (-1)^t C_{k+t}^{2k} \cos 2t\theta] \right. \\
& \left. + \left[ -C_{k-1}^{2k-1} \cos 2\theta + \sum_{t=1}^k (-1)^{t+1} C_{k+t}^{2k} \left( \frac{\cos 2(t-1)\theta + \cos 2(t+1)\theta}{2} \right) \right] \right\} \\
= & 2^{-(2k+1)} \left\{ [2C_{k-1}^{2k-1} + \sum_{t=1}^k (-1)^t 2C_{k+t}^{2k} \cos 2t\theta] \right. \\
& \left. + \left[ -2C_{k-1}^{2k-1} \cos 2\theta + \sum_{t=1}^k (-1)^{t+1} C_{k+t}^{2k} (\cos 2(t-1)\theta + \cos 2(t+1)\theta) \right] \right\} \\
= & 2^{-(2k+1)} \{ (2C_{k-1}^{2k-1} + C_{k+1}^{2k}) - (2C_{k+1}^{2k} + 2C_{k-1}^{2k-1} + C_{k+2}^{2k}) \cos 2\theta \\
& + [\sum_{t=2}^{k-1} [(-1)^t 2C_{k+t}^{2k} + (-1)^t C_{k+t-1}^{2k} + (-1)^{t+2} C_{k+t+1}^{2k}] \cos 2t\theta \\
& + (-1)^k (2C_{2k}^{2k} + C_{2k-1}^{2k}) \cos 2k\theta + (-1)^{k+1} C_{2k}^{2k} \cos 2(k+1)\theta \} \\
= & 2^{-(2k+1)} \{ (2C_{k-1}^{2k-1} + C_{k+1}^{2k}) - (2C_{k+1}^{2k} + 2C_{k-1}^{2k-1} + C_{k+2}^{2k}) \cos 2\theta \\
& + [\sum_{t=2}^{k-1} (-1)^t (2C_{k+t}^{2k} + C_{k+t-1}^{2k} + C_{k+t+1}^{2k}) \cos 2t\theta] \\
& + (-1)^k (2C_{2k}^{2k} + C_{2k-1}^{2k}) \cos 2k\theta + (-1)^{k+1} C_{2k}^{2k} \cos 2(k+1)\theta \} \cdots \cdots (1)
\end{aligned}$$

依巴斯卡定理化簡係數：

$$\textcircled{1} 2C_{k-1}^{2k-1} + C_{k+1}^{2k} = 2C_{k-1}^{2k-1} + (C_k^{2k-1} + C_{k+1}^{2k-1}) = (C_{k-2}^{2k-1} + C_{k-1}^{2k-1}) + (C_{k-1}^{2k-1} + C_k^{2k-1}) = C_k^{2k+1}$$

$$\textcircled{2} 2C_{k+1}^{2k} + 2C_{k-1}^{2k-1} + C_{k+2}^{2k} = (2C_{k-1}^{2k-1} + C_{k+1}^{2k}) + (C_{k+1}^{2k} + C_{k+2}^{2k}) = C_k^{2k+1} + C_{k+2}^{2k+1} = C_{k+2}^{2k+2}$$

$$\textcircled{3} 2C_{k+t}^{2k} + C_{k+t-1}^{2k} + C_{k+t+1}^{2k} = (C_{k+t-1}^{2k} + C_{k+t}^{2k}) + (C_{k+t}^{2k} + C_{k+t+1}^{2k}) = C_{k+t}^{2k+1} + C_{k+t+1}^{2k+1} = C_{k+t+1}^{2k+2}$$

$$\textcircled{4} 2C_{2k}^{2k} + C_{2k-1}^{2k} = (C_{2k-1}^{2k} + C_{2k}^{2k}) + C_{2k}^{2k} = C_{2k}^{2k+1} + C_{2k+1}^{2k+1} = C_{2k+1}^{2k+2}$$

綜合(1)①②③④可得  $\sin^{2(k+1)}\theta = \sin^{2k}\theta \cdot \sin^2\theta$

$$\begin{aligned} &= 2^{-(2k+1)} \{ (2C_{k-1}^{2k-1} + C_{k+1}^{2k}) - (2C_{k+1}^{2k} + 2C_{k-1}^{2k-1} + C_{k+2}^{2k}) \cos 2\theta + [\sum_{t=2}^{k-1} (-1)^t (2C_{k+t}^{2k} + C_{k+t-1}^{2k} + C_{k+t+1}^{2k}) \cos 2t\theta] \\ &\quad + (-1)^k (2C_{2k}^{2k} + C_{2k-1}^{2k}) \cos 2k\theta + (-1)^{k+1} C_{2k}^{2k} \cos 2(k+1)\theta \} \\ &= 2^{-(2k+1)} \{ C_k^{2k+1} - C_{k+2}^{2k+2} \cos 2\theta + [\sum_{t=2}^{k-1} (-1)^t C_{k+t+1}^{2k+2} \cos 2t\theta] + (-1)^k C_{2k+1}^{2k+2} \cos 2k\theta + (-1)^{k+1} C_{2k+2}^{2k+2} \cos 2(k+1)\theta \} \\ &= 2^{-(2k+1)} [C_k^{2k+1} + \sum_{t=1}^{k+1} (-1)^t C_{(k+1)+t}^{2k+2} \cos 2t\theta] \text{ 亦成立} \end{aligned}$$

依數學歸納法， $\sin^{2n}\theta = 2^{-(2n-1)} [C_{n-1}^{2n-1} + \sum_{t=1}^n (-1)^t C_{n+t}^{2n} \cos 2t\theta]$  得證

(3)證明  $P$  點於正  $2n$  邊形內切圓上推論正確：

證明：當  $P$  點位於正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$  之內切圓圓  $O$  上時，則必滿足

$$\begin{aligned} &(\Delta A_1A_2P)^m + (\Delta A_3A_4P)^m + \dots + (\Delta A_{2n-1}A_{2n}P)^m \\ &= (\Delta A_2A_3P)^m + (\Delta A_4A_5P)^m + \dots + (\Delta A_{2n}A_1P)^m \end{aligned}$$

(其中  $m \in \mathbb{N}$  且  $1 \leq m \leq n-1$ )

(證明)

$$\textcircled{1} \text{ 由引理一，} \because P \text{ 點於內切圓圓 } O \text{ 上，} \therefore h_x = \overline{PC_x} = 2R \sin^2 \left( \theta + \frac{(x-1)\pi}{2n} \right)$$

②代入①之結果可得

$$h_1^m + h_3^m + \dots + h_{2n-1}^m = (2R)^m \cdot \left[ \sin^{2m}\theta + \sin^{2m} \left( \theta + \frac{2\pi}{2n} \right) + \dots + \sin^{2m} \left( \theta + \frac{(2n-2)\pi}{2n} \right) \right]$$

$$h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m = (2R)^m \cdot \left[ \sin^{2m} \left( \theta + \frac{\pi}{2n} \right) + \sin^{2m} \left( \theta + \frac{3\pi}{2n} \right) + \dots + \sin^{2m} \left( \theta + \frac{(2n-1)\pi}{2n} \right) \right]$$

③ 由引理三  $\sin^{2n} \theta = 2^{-(2n-1)} [C_{n-1}^{2n-1} + \sum_{t=1}^n (-1)^t C_{n+t}^{2n} \cos 2t\theta]$  化簡  $h_1^m + h_3^m + \dots + h_{2n-1}^m$  :

$$\begin{aligned} h_1^m + h_3^m + \dots + h_{2n-1}^m &= (2R)^m \cdot [\sin^{2m} \theta + \sin^{2m} \left( \theta + \frac{2\pi}{2n} \right) + \dots + \sin^{2m} \left( \theta + \frac{(2n-2)\pi}{2n} \right)] \\ &= (2R)^m \cdot 2^{-(2m-1)} \cdot [nC_{m-1}^{2m-1} - C_{m+1}^{2m} \sum_{q=1}^n \cos 2 \left( \theta + \frac{(2q-2)\pi}{2n} \right) + C_{m+2}^{2m} \sum_{q=1}^n \cos 4 \left( \theta + \frac{(2q-2)\pi}{2n} \right) \\ &\quad + \dots + (-1)^m C_{2m}^{2m} \sum_{q=1}^n \cos 2m \left( \theta + \frac{(2q-2)\pi}{2n} \right)] \\ &= 2^{-(m-1)} \cdot R^m \cdot [nC_{m-1}^{2m-1} - C_{m+1}^{2m} \sum_{q=1}^n \cos \left( 2\theta + \frac{(2q-2)\pi}{n} \right) + C_{m+2}^{2m} \sum_{q=1}^n \cos 2 \left( 2\theta + \frac{(2q-2)\pi}{n} \right) \\ &\quad + \dots + (-1)^m C_{2m}^{2m} \sum_{q=1}^n \cos m \left( 2\theta + \frac{(2q-2)\pi}{n} \right)] \end{aligned}$$

又  $\because 1 \leq m \leq n-1$  ,  $\therefore n$  必不為所有小於  $m$  之正整數的因數

$\Rightarrow$  由引理二可得：若  $1 \leq i \leq m$  , 則  $\sum_{q=1}^n \cos i \left( 2\theta + \frac{(2q-2)\pi}{n} \right) = 0$

$$\therefore h_1^m + h_3^m + \dots + h_{2n-1}^m = 2^{-(m-1)} C_{m-1}^{2m-1} n R^m$$

④ 同③之理化簡  $h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m$  :

$$\begin{aligned} h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m &= (2R)^m \cdot [\sin^{2m} \left( \theta + \frac{\pi}{2n} \right) + \sin^{2m} \left( \theta + \frac{3\pi}{2n} \right) + \dots + \sin^{2m} \left( \theta + \frac{(2n-1)\pi}{2n} \right)] \\ &= 2^{-(m-1)} \cdot R^m \cdot [nC_{m-1}^{2m-1} - C_{m+1}^{2m} \sum_{q=1}^n \cos \left( 2\theta + \frac{(2q-1)\pi}{n} \right) + C_{m+2}^{2m} \sum_{q=1}^n \cos 2 \left( 2\theta + \frac{(2q-1)\pi}{n} \right) \\ &\quad + \dots + (-1)^m C_{2m}^{2m} \sum_{q=1}^n \cos m \left( 2\theta + \frac{(2q-1)\pi}{n} \right)] \end{aligned}$$

又  $\because 1 \leq m \leq n-1$  ,  $\therefore n$  必不為所有小於  $m$  之正整數的因數

$\Rightarrow$  由引理二可得：若  $1 \leq i \leq m$  , 則  $\sum_{q=1}^n \cos i \left( 2\theta + \frac{(2q-1)\pi}{n} \right) = 0$

$$\therefore h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m = 2^{-(m-1)} C_{m-1}^{2m-1} n R^m$$

⑤綜合③④結果：對所有正整數  $m$ ， $1 \leq m \leq n-1$ ，則

$$h_1^m + h_3^m + \dots + h_{2n-1}^m = h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m = 2^{-(m-1)} C_{m-1}^{2m-1} n R^m$$

$$\begin{aligned} \therefore (\Delta A_1 A_2 P)^m + (\Delta A_3 A_4 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n-1} A_{2n} P)^m &= (\Delta A_2 A_3 P)^m + (\Delta A_4 A_5 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n} A_1 P)^m \\ &= 2^{-(2m-1)} C_{m-1}^{2m-1} a^m R^m, \text{ 得證} \end{aligned}$$

2. 由內切圓上，推廣至內部所有點：

(1) 輔助線作法及未知數定義（參考圖(36)）：

①正  $2n$  邊形  $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$  邊長為  $a$ ，其內切圓圓  $O$  半徑為  $R$ 。

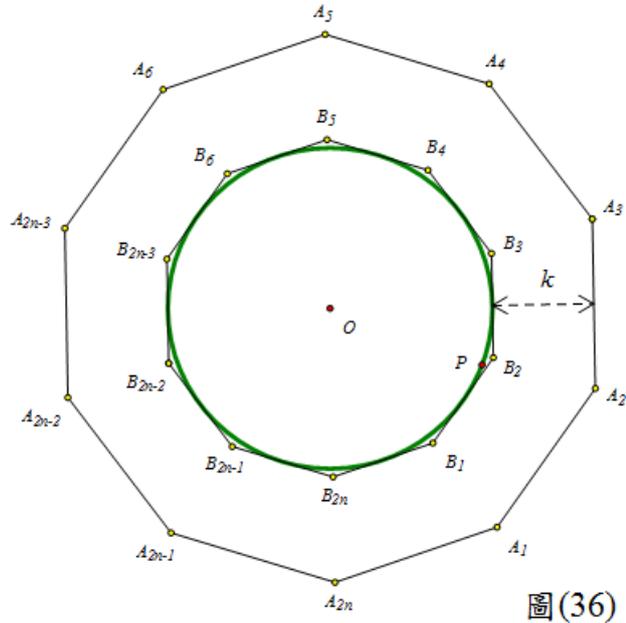
② $P$  為  $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$  內部一點，過  $P$  做一圓  $O'$ ，半徑為  $r$ ，並令  $r=Rt$

③作圓  $O'$  之外接正  $2n$  邊形  $B_1 B_2 \dots B_{2n-1} B_{2n}$ ，其中  $\overline{B_1 B_2} // \overline{A_1 A_2}$ 、 $\overline{B_2 B_3} // \overline{A_2 A_3} \dots$   
 $\overline{B_{2n} B_1} // \overline{A_{2n} A_1}$ ，且邊長為  $at$

④ $k$  為大正  $2n$  邊形到小正  $2n$  邊形的距離，即圖(36)中  $\overline{A_2 A_3}$ 、 $\overline{B_2 B_3}$  的距離。

⑤令  $\Delta P B_1 B_2$  以  $\overline{B_1 B_2}$  為底的高為  $H_1$ 、 $\Delta P B_2 B_3$  以  $\overline{B_2 B_3}$  為底的高為  $H_2$ 、 $\Delta P B_3 B_4$  以  
 $\overline{B_3 B_4}$  為底的高為  $H_3 \dots \Delta P B_{2n-1} B_{2n}$  以  $\overline{B_{2n-1} B_{2n}}$  為底的高為  $H_{2n-1}$ 、 $\Delta P B_{2n} B_1$  以  
 $\overline{B_{2n} B_1}$  為底的高為  $H_{2n}$

⑥令  $\Delta P A_1 A_2$  以  $\overline{A_1 A_2}$  為底的高為  $h_1$ 、 $\Delta P A_2 A_3$  以  $\overline{A_2 A_3}$  為底的高為  $h_2$ 、 $\Delta P A_3 A_4$  以  
 $\overline{A_3 A_4}$  為底的高為  $h_3 \dots \Delta P A_{2n-1} A_{2n}$  以  $\overline{A_{2n-1} A_{2n}}$  為底的高為  $h_{2n-1}$ 、 $\Delta P A_{2n} A_1$  以  $\overline{A_{2n} A_1}$   
為底的高為  $h_{2n}$



圖(36)

(2) 探討  $P$  於正  $2n$  邊形內部時， $H_x$ 、 $h_x$  之轉換關係式：

類似 p.17 之觀察可得：當  $0 < t < 1$  時， $h_x - H_x = k$ ， $x = 1, 2, \dots, 2n$

當  $t > 1$  時， $H_x - h_x = k$ ， $x = 1, 2, \dots, 2n$

(3) 證明  $P$  點於正  $2n$  邊形內部時推論正確：

證明：當  $P$  點位於正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$  之內部時，則必滿足以下等式：

$$\begin{aligned} (\Delta A_1A_2P)^m + (\Delta A_3A_4P)^m + \dots + (\Delta A_{2n-1}A_{2n}P)^m \\ = (\Delta A_2A_3P)^m + (\Delta A_4A_5P)^m + \dots + (\Delta A_{2n}A_1P)^m \end{aligned}$$

(其中  $m \in \mathbb{N}$  且  $1 \leq m \leq n-1$ )

1. 當  $0 < t < 1$  時

①由  $H_x$ 、 $h_x$  之轉換關係式，可得： $h_x = H_x + k$ ，分別帶入化簡：

$$h_1^m + h_3^m + \dots + h_{2n-1}^m = (H_1 + k)^m + (H_3 + k)^m + \dots + (H_{2n-1} + k)^m$$

$$= nk^m + C_1^m k^{m-1} (H_1 + H_3 + \dots + H_{2n-1}) + C_2^m k^{m-2} (H_1^2 + H_3^2 + \dots + H_{2n-1}^2) + \dots +$$

$$C_{m-1}^m k (H_1^{m-1} + H_3^{m-1} + \dots + H_{2n-1}^{m-1}) + C_m^m (H_1^m + H_3^m + \dots + H_{2n-1}^m)$$

$$h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m = (H_2 + k)^m + (H_4 + k)^m + \dots + (H_{2n} + k)^m$$

$$= nk^m + C_1^m k^{m-1} (H_2 + H_4 + \dots + H_{2n}) + C_2^m k^{m-2} (H_2^2 + H_4^2 + \dots + H_{2n}^2) + \dots +$$

$$C_{m-1}^m k (H_2^{m-1} + H_4^{m-1} + \dots + H_{2n}^{m-1}) + C_m^m (H_2^m + H_4^m + \dots + H_{2n}^m)$$

②由於圓  $O'$  為正  $2n$  邊形  $B_1 B_2 \dots B_{2n-1} B_{2n}$  內切圓，由 p.35 之證明，可得：

$$H_1^m + H_3^m + \dots + H_{2n-1}^m = H_2^m + H_4^m + \dots + H_{2n}^m = 2^{-(m-1)} C_{m-1}^{2m-1} nR^m$$

$$\text{帶入化簡 } h_1^m + h_3^m + \dots + h_{2n-1}^m = (H_1 + k)^m + (H_3 + k)^m + \dots + (H_{2n-1} + k)^m$$

$$= nk^m + C_1^m k^{m-1} (2^0 C_0^1 nr) + C_2^m k^{m-2} (2^{-1} C_1^3 nr^2) + \dots + C_{m-1}^m k (2^{-(m-2)} C_{m-2}^{2m-3} nr^{m-1}) +$$

$$C_m^m (2^{-(m-1)} C_{m-1}^{2m-1} nr^m)$$

$$= nk^m + n \sum_{i=1}^m 2^{-(i-1)} C_i^m C_{i-1}^{2i-1} k^{m-i} r^i$$

$$= nR^m [(1-t)^m + \sum_{i=1}^m 2^{-(i-1)} C_i^m C_{i-1}^{2i-1} t^i (1-t)^{m-i}]$$

③同②之理，化簡

$$h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m = (H_2 + k)^m + (H_4 + k)^m + \dots + (H_{2n} + k)^m$$

$$\text{亦可得 } h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m = nR^m [(1-t)^m + \sum_{i=1}^m 2^{-(i-1)} C_i^m C_{i-1}^{2i-1} t^i (1-t)^{m-i}]$$

2. 當  $t > 1$  時

由  $H_x$ 、 $h_x$  之轉換關係式，可得： $h_x = H_x - k$ ，分別帶入化簡，結果為

$$\begin{aligned} h_1^m + h_3^m + \dots + h_{2n-1}^m &= h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m \\ &= nR^m[(t-1)^m + \sum_{i=1}^m (-1)^i 2^{-(i-1)} C_i^m C_{i-1}^{2i-1} t^i (t-1)^{m-i}] \end{aligned}$$

3. 綜合 1.2. 結果：對所有正整數  $m$ ， $1 \leq m \leq n-1$ ，則

當  $0 < t < 1$  時

$$\begin{aligned} h_1^m + h_3^m + \dots + h_{2n-1}^m &= h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m \\ &= nR^m[(1-t)^m + \sum_{i=1}^m 2^{-(i-1)} C_i^m C_{i-1}^{2i-1} t^i (1-t)^{m-i}] \\ \therefore (\Delta A_1 A_2 P)^m + (\Delta A_3 A_4 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n-1} A_{2n} P)^m \\ &= (\Delta A_2 A_3 P)^m + (\Delta A_4 A_5 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n} A_1 P)^m \\ &= n\left(\frac{1}{2} aR\right)^m [(1-t)^m + \sum_{i=1}^m 2^{-(i-1)} C_i^m C_{i-1}^{2i-1} t^i (1-t)^{m-i}] \end{aligned}$$

當  $t > 1$  時

$$\begin{aligned} h_1^m + h_3^m + \dots + h_{2n-1}^m &= h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m \\ &= nR^m[(t-1)^m + \sum_{i=1}^m (-1)^i 2^{-(i-1)} C_i^m C_{i-1}^{2i-1} t^i (t-1)^{m-i}] \\ \therefore (\Delta A_1 A_2 P)^m + (\Delta A_3 A_4 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n-1} A_{2n} P)^m \\ &= (\Delta A_2 A_3 P)^m + (\Delta A_4 A_5 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n} A_1 P)^m \\ &= n\left(\frac{1}{2} aR\right)^m [(t-1)^m + \sum_{i=1}^m (-1)^i 2^{-(i-1)} C_i^m C_{i-1}^{2i-1} t^i (t-1)^{m-i}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{故 } (\Delta A_1 A_2 P)^m + (\Delta A_3 A_4 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n-1} A_{2n} P)^m \\ & = (\Delta A_2 A_3 P)^m + (\Delta A_4 A_5 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n} A_1 P)^m \end{aligned}$$

(4)證明  $m \geq n$ ， $P$  點於正  $2n$  邊形內部時推論不正確：

證明：若  $m \geq n$  時，當  $P$  點位於正  $2n$  邊形  $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$  內部，以下等式：

$$(\Delta A_1 A_2 P)^m + (\Delta A_3 A_4 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n-1} A_{2n} P)^m = (\Delta A_2 A_3 P)^m + (\Delta A_4 A_5 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n} A_1 P)^m$$

並不一定成立，亦即不再符合以上性質。

(證明)

1.考慮  $qn \geq m \geq n$  ( $q \in \mathbb{N}$ ) 且  $P$  點在正  $2n$  邊形  $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$  之內切圓上，由之前

結果：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & h_1^m + h_3^m + \dots + h_{2n-1}^m \\ & = 2^{-(m-1)} R^m \left[ n C_{m-1}^{2m-1} - C_{m+1}^{2m} \sum_{t=1}^n \cos \left( 2\theta + \frac{(2t-2)\pi}{n} \right) + \dots + (-1)^m C_{2m}^{2m} \sum_{t=1}^n \cos m \left( 2\theta + \frac{(2t-2)\pi}{n} \right) \right] \\ & = 2^{-(m-1)} R^m [n C_{m-1}^{2m-1} + n(-1)^n C_{m+n}^{2m} \cos n(2\theta) + n(-1)^{2n} C_{m+2n}^{2m} \cos 2n(2\theta) + \dots + \\ & n(-1)^{qn} C_{m+nq}^{2m} \cos nq(2\theta)] \\ & = 2^{-(m-1)} R^m n [C_{m-1}^{2m-1} + (-1)^n C_{m+n}^{2m} \cos n(2\theta) + (-1)^{2n} C_{m+2n}^{2m} \cos 2n(2\theta) + \dots + \\ & (-1)^{qn} C_{m+qn}^{2m} \cos qn(2\theta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} & h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m \\ & = 2^{-(m-1)} R^m n [C_{m-1}^{2m-1} - (-1)^n C_{m+n}^{2m} \cos n(2\theta) + (-1)^{2n} C_{m+2n}^{2m} \cos 2n(2\theta) - \dots - \\ & (-1)^{qn} C_{m+qn}^{2m} \cos qn(2\theta)] \end{aligned}$$

③ 假設  $P$  點在內切圓上時，此性質成立，則不論  $\theta$  為何值，① = ②

$$\text{即 } 2^{-(m-1)} R^m n \left[ 2(-1)^n \left( C_{m+n}^{2m} \cos n(2\theta) + C_{m+3n}^{2m} 3n(2\theta) + \dots + C_{m+qn}^{2m} qn(2\theta) \right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow C_{m+n}^{2m} \cos 2n\theta + C_{m+3n}^{2m} \cos 6n\theta + \dots + C_{m+qn}^{2m} \cos 2qn\theta = 0$$

$$\Rightarrow a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos^2 x + \dots + a_{2q} \cos^{2q} x = 0$$

$$\text{令 } y = \cos x, f(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{2q} y^{2q}$$

$$\therefore \forall x \in R, f(y) = 0 \quad \therefore y \text{ 的解為 } y \in R \text{ 且 } -1 \leq y \leq 1$$

但  $f(y)$  為一有理多項式且有理數、實數均具有稠密性，故無法表示為

$$f(y) = k(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_n) \text{ 的形式，矛盾。}$$

故  $P$  點位於正  $2n$  邊形  $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$  內切圓上時，此性質不成立。

2. 考慮  $P$  點為正  $2n$  邊形  $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$  內部一點時，可藉由 p.44 之轉換式轉換，

亦會產生以上之形式，即可說明  $m \geq n$  時，內部的點無法滿足

$$\begin{aligned} & (\Delta A_1 A_2 P)^m + (\Delta A_3 A_4 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n-1} A_{2n} P)^m \\ & = (\Delta A_2 A_3 P)^m + (\Delta A_4 A_5 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n} A_1 P)^m \end{aligned}$$

(二) 探討  $P$  點於正  $2n$  邊形外部面積多次方和的比值：

完成  $P$  點於正  $2n$  邊形內部面積多次方和的探討後，我們亦嘗試把  $P$  點移至外部並觀察其之間的比值，令我們訝異的是，對於正六邊形而言，外部所有點之交錯二次方和會相等。對正八邊形而言，外部所有點之交錯二次方和會相等。對正十邊形而言，外部所有點之交錯二次方及四次方和會相等...

所以推測：對所有正  $2n$  邊形  $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$  外部的點  $P$ ，均會滿足以下等式：

$$\begin{aligned}
& (\Delta A_1 A_2 P)^{2m} + (\Delta A_3 A_4 P)^{2m} + \dots + (\Delta A_{2n-1} A_{2n} P)^{2m} \\
& = (\Delta A_2 A_3 P)^{2m} + (\Delta A_4 A_5 P)^{2m} + \dots + (\Delta A_{2n} A_1 P)^{2m}
\end{aligned}$$

其中  $m \in \mathbb{N}$  且  $1 \leq 2m \leq n-1$ ，而以下將證明我們的推論。

1. 輔助線作法及未知數定義：

- (1) 輔助線作法：同前，請參考 p.38
- (2)  $S_i$  區域與  $T_j$  區域：同前，請參考 p.16
- (3) 其餘均與 p.38 相同，請參考 p.38

2.  $H_x$ 、 $h_x$  之轉換關係式：

經觀察，與 p.17 之結果相同，唯  $H_2$  不一定為 0

3. 證明推論為正確的：

證明：對所有正  $2n$  邊形  $A_1 A_2 \dots A_{2n-1} A_{2n}$  外部的點  $P$ ，均會滿足以下等式：

$$(\Delta A_1 A_2 P)^{2m} + (\Delta A_3 A_4 P)^{2m} + \dots + (\Delta A_{2n-1} A_{2n} P)^{2m} = (\Delta A_2 A_3 P)^{2m} + (\Delta A_4 A_5 P)^{2m} + \dots + (\Delta A_{2n} A_1 P)^{2m}$$

(其中  $m \in \mathbb{N}$  且  $1 \leq 2m \leq n-1$ )

(證明)

① 由  $H_x$ 、 $h_x$  之轉換關係式，不論  $P$  位於何處： $h_x = |H_x - k|$ ，分別帶入化簡：

$$\begin{aligned}
h_1^{2m} + h_3^{2m} + \dots + h_{2n-1}^{2m} & = (|H_1 - k|)^{2m} + (|H_3 - k|)^{2m} + \dots + (|H_{2n-1} - k|)^{2m} \\
& = nk^{2m} - C_1^{2m} k^{m-1} (H_1 + H_3 + \dots + H_{2n-1}) + C_2^{2m} k^{2m-2} (H_1^2 + H_3^2 + \dots + H_{2n-1}^2) + \dots +
\end{aligned}$$

$$(-1)^{2m-1} C_{2m-1}^{2m} k (H_1^{2m-1} + H_3^{2m-1} + \dots + H_{2n-1}^{2m-1}) + (-1)^{2m} C_{2m}^{2m} (H_1^{2m} + H_3^{2m} + \dots + H_{2n-1}^{2m})$$

$$h_2^{2m} + h_4^{2m} + \dots + h_{2n}^{2m} = (|H_2 - k|)^{2m} + (|H_4 - k|)^{2m} + \dots + (|H_{2n} - k|)^{2m}$$

$$= nk^{2m} - C_1^{2m} k^{2m-1} (H_2 + H_4 + \dots + H_{2n}) + C_2^{2m} k^{2m-2} (H_2^2 + H_4^2 + \dots + H_{2n}^2) + \dots +$$

$$(-1)^{2m-1} C_{2m-1}^{2m} k (H_2^{2m-1} + H_4^{2m-1} + \dots + H_{2n}^{2m-1}) + (-1)^{2m} C_{2m}^{2m} (H_2^{2m} + H_4^{2m} + \dots + H_{2n}^{2m})$$

②由於圓  $O'$  為正  $2n$  邊形  $B_1 B_2 \dots B_{2n-1} B_{2n}$  內切圓，由 p.35 之證明，可得：

$$H_1^m + H_3^m + \dots + H_{2n-1}^m = H_2^m + H_4^m + \dots + H_{2n}^m = 2^{-(m-1)} C_{m-1}^{2m-1} nR^m$$

$$\text{帶入化簡 } h_1^{2m} + h_3^{2m} + \dots + h_{2n-1}^{2m} = (|H_1 - k|)^{2m} + (|H_3 - k|)^{2m} + \dots + (|H_{2n-1} - k|)^{2m}$$

$$= nk^{2m} - C_1^{2m} k^{2m-1} (2^0 C_0^1 nr) + C_2^{2m} k^{2m-2} (2^{-1} C_1^3 nr^2) + \dots + (-1)^{2m-1} C_{2m-1}^{2m} k (2^{-(2m-2)} C_{2m-2}^{4m-3} nr^{2m-1})$$

$$+ (-1)^{2m} C_{2m}^{2m} (2^{-(2m-1)} C_{2m-1}^{4m-1} nr^{2m})$$

$$= nk^{2m} + n \sum_{i=1}^{2m} (-1)^i 2^{-(i-1)} C_i^{2m} C_{i-1}^{2i-1} k^{2m-i} r^i$$

$$= nR^{2m} (t-1)^{2m} + nR^{2m} \sum_{i=1}^{2m} (-1)^i 2^{-(i-1)} C_i^{2m} C_{i-1}^{2i-1} t^i (t-1)^{2m-i}$$

$$= nR^{2m} [(t-1)^{2m} + \sum_{i=1}^{2m} (-1)^i 2^{-(i-1)} C_i^{2m} C_{i-1}^{2i-1} t^i (t-1)^{2m-i}]$$

③同②之理，化簡

$$h_2^{2m} + h_4^{2m} + \dots + h_{2n}^{2m} = (|H_2 - k|)^{2m} + (|H_4 - k|)^{2m} + \dots + (|H_{2n} - k|)^{2m}$$

$$\text{亦可得 } h_2^m + h_4^m + \dots + h_{2n}^m = nR^{2m} [(t-1)^{2m} + \sum_{i=1}^{2m} (-1)^i 2^{-(i-1)} C_i^{2m} C_{i-1}^{2i-1} t^i (t-1)^{2m-i}]$$

④綜合②③結果：對所有正整數  $m$ ， $1 \leq 2m \leq n-1$ ，則

$$\begin{aligned}
h_1^{2m} + h_3^{2m} + \dots + h_{2n-1}^{2m} &= h_2^{2m} + h_4^{2m} + \dots + h_{2n}^{2m} \\
&= nR^{2m} [(t-1)^{2m} + \sum_{i=1}^{2m} (-1)^i 2^{-(i-1)} C_i^{2m} C_{i-1}^{2i-1} t^i (t-1)^{2m-i}] \\
&\therefore (\Delta A_1 A_2 P)^m + (\Delta A_3 A_4 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n-1} A_{2n} P)^m \\
&= (\Delta A_2 A_3 P)^m + (\Delta A_4 A_5 P)^m + \dots + (\Delta A_{2n} A_1 P)^m \\
&= n \left( \frac{1}{2} aR \right)^{2m} [(t-1)^{2m} + \sum_{i=1}^{2m} (-1)^i 2^{-(i-1)} C_i^{2m} C_{i-1}^{2i-1} t^i (t-1)^{2m-i}], \text{ 得證}
\end{aligned}$$

我們亦試圖探討奇數次方和的情況，但奇數次方和卻會留有數個高之多次方，而它們並沒有定值的關係。因此其比值一般式並不如一次方和之比值有意義，故我們沒有列出此一般式！而接下來，我們希望可以證明以上為滿足交錯面積多次方和相等之唯一解。此將為接下來我們努力的目標！

## 伍、研究結果

一、我們推廣出：一個正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$ ，若  $P$  點為此  $2n$  邊形邊上或內部任意一點，則

$$\triangle A_1A_2P + \triangle A_3A_4P + \dots + \triangle A_{2n-1}A_{2n}P = \triangle A_2A_3P + \triangle A_4A_5P + \dots + \triangle A_{2n}A_1P$$

二、若將此  $P$  點移到正  $2n$  邊形外部的話，則亦可找到符合

$$\triangle A_1A_2P + \triangle A_3A_4P + \dots + \triangle A_{2n-1}A_{2n}P = \triangle A_2A_3P + \triangle A_4A_5P + \dots + \triangle A_{2n}A_1P$$

亦證明：符合條件之  $P$  點軌跡為一放射狀圖形及  $[\frac{n}{2}] - 1$  個較原正  $2n$  邊形大的正  $2n$  邊形(圖(22))，且此為使  $\lambda$  值為 1 之唯一解。

三、我們推導出  $\lambda = \frac{\triangle A_1A_2P + \triangle A_3A_4P + \dots + \triangle A_{2n-1}A_{2n}P}{\triangle A_2A_3P + \triangle A_4A_5P + \dots + \triangle A_{2n}A_1P}$ ，公式如下：

(一)若  $P$  點在正  $2n$  邊形內或上，則面積比必為 1。

(二)若  $P$  點在正  $2n$  邊形外又分成兩種情況：

①若  $P$  點位於  $S$  區域，沿該點作的正  $2n$  邊形之邊長為原正  $2n$  邊形的  $t$  倍且

$t$  滿  $\sec \frac{(i-1)\pi}{n} < t \leq \sec \frac{i\pi}{n}$ ，則稱  $P$  點位於  $S_i$  區域，且其  $\lambda$  是一個定值， $\lambda$

$$\text{為 } \frac{(n - 4[\frac{i}{2}])\sin \frac{\pi}{n} + 2t \sin \frac{2[\frac{i}{2}]\pi}{n}}{[n - (2 + 4[\frac{i-1}{2}])]\sin \frac{\pi}{n} + 2t \sin \frac{(2[\frac{i-1}{2}] + 1)\pi}{n}} ;$$

②若  $P$  點位於  $T$  區域，沿該點作的正  $2n$  邊形之邊長為原正  $2n$  邊形的  $t$  倍且

$t$  滿足  $f(j-1) < t \leq f(j)$  ( $f(x)$ 之公式請參考 p.23)，則稱  $P$  點位於  $T_j$  區域，

且  $\lambda$  為

$$\left[ \frac{a(n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{j\pi}{n}}{a(2t+n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{(j-1)\pi}{n} - 4(1-\cos\frac{\pi}{n})H_{j+2}} \right]^{(-1)^j};$$

四、我們討論當  $P$  位於  $S_i$  區域的  $\lambda$  函數圖形，發現  $t$  趨近無限大時  $\lambda$  會趨近某個值。經過討論：當  $n$  為奇數時， $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = 1$ ，而  $n$  又可分成  $4q+1$ 、 $4q+3$  ( $q \in \mathbb{N}$ )。

當  $n=4q+1$  且  $t$  極大時， $\lambda$  恆大於 1；而若  $n=4q+3$  且  $t$  極大時， $\lambda$  恆小於 1。

若當  $n$  為偶數時，又可分  $n$  成  $4q$ 、 $4q+2$  ( $q \in \mathbb{N}$ )。當  $n=4q$  時， $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \sec\frac{\pi}{n}$ ；

而若  $n=4q+2$  時， $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \cos\frac{\pi}{n}$ 。(如圖(33,a)，圖中顯示之 0.866 即為  $\cos\frac{\pi}{6}$ )

五、當  $P$  點位於正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$  之內部時，則必滿足以下等式：

$$(\triangle A_1A_2P)^m + (\triangle A_3A_4P)^m + \dots + (\triangle A_{2n-1}A_{2n}P)^m = (\triangle A_2A_3P)^m + (\triangle A_4A_5P)^m + \dots + (\triangle A_{2n}A_1P)^m$$

(其中  $m \in \mathbb{N}$  且  $m \in \mathbb{N}$ )

① 當  $0 < t < 1$  時，其值  $n\left(\frac{1}{2}aR\right)^m [(1-t)^m + \sum_{i=1}^m 2^{-(i-1)} C_i^m C_{i-1}^{2i-1} t^i (1-t)^{m-i}]$

② 當  $t > 1$  時，其值為  $n\left(\frac{1}{2}aR\right)^m [(t-1)^m + \sum_{i=1}^m (-1)^i 2^{-(i-1)} C_i^m C_{i-1}^{2i-1} t^i (t-1)^{m-i}]$  而我們

亦證明： $m \geq n$  時，若  $P$  點位於正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$  內部，則以上性質不再成立。

六、對所有正  $2n$  邊形  $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$  外部的點  $P$ ，均會滿足以下等式：

$$\begin{aligned} & (\triangle A_1A_2P)^{2m} + (\triangle A_3A_4P)^{2m} + \dots + (\triangle A_{2n-1}A_{2n}P)^{2m} \\ & = (\triangle A_2A_3P)^{2m} + (\triangle A_4A_5P)^{2m} + \dots + (\triangle A_{2n}A_1P)^{2m} \end{aligned}$$

(其中  $m \in \mathbb{N}$  且  $1 \leq 2m \leq n-1$ )

$$\text{其值為 } n \left( \frac{1}{2} aR \right)^{2m} \left[ (t-1)^{2m} + \sum_{i=1}^{2m} (-1)^i 2^{-(i-1)} C_i^{2m} C_{i-1}^{2i-1} t^i (t-1)^{2m-i} \right]$$

## 陸、討論

### 一、面臨的問題與解決方法：

在本作品中，我們使用了許多方法。而這些方法不斷改進，一步一步解決所面臨之瓶頸，最後終於完整解決此相關問題。

在本作品一開始，我們很快得到當  $P$  在內部時， $\lambda$  是恆等於 1 的結果。接下來，我們將  $P$  移至外部，也經由解析法十分順利的得到一些推測。而在接下來的證明中，我們雖曾嘗試用解析作證明，但式子非常複雜，也因此我們決定採用歐氏幾何證明。

最初，我們想到了第 8 頁的方法，採用配對的方式，為我們省去了不少繁複的計算。也讓我們順利的證明出在正  $4n$  邊形時，我們的推論是正確的。此一方法中雖沒辦法完全解決我們的問題，但其配對的方法，為證明過程簡化許多計算，實為本作品中之一大突破！

然而此方法在  $4n+2$  時有使用上的限制，雖然可用如上之配對方法，但其配對就不如同在  $4n$  時，得到  $h_{2s+1} \pm h_{2t+1} = k$  以及  $h_{2s} \pm h_{2t} = k$ 。反而得到  $h_{2s} \pm h_{2t+1} = k$  或  $h_{2s+1} \pm h_{2t} = k$ ，如此一來，便造成式子化簡時，配對上的失敗。若仍使用這些式子做整理，最後會留有  $h$ 、 $k$ ，使得若要證明這些等式成立，則需要更多的關係式才能作出來。我們仍嘗試繼續作證明，但由於所需之關係式極多變化，十分複雜，所以最後決定變換一種更方便也更具推廣性的方式來證明使所有正  $2n$  邊形均成立的情況。

我們想到的另一種作法，如第 11 頁所示，可證明所有正  $2n$  邊形均成立。這個方法不僅使用到一開始「若一點  $P$  位於一正  $2n$  邊形內部時，則  $\lambda$  恆為 1」

的結論，亦改進了原方法之配對問題，使配對不再受奇偶性的影響，為本作品中極為重大亦精采的突破！

接下來，我們要討論  $\lambda \neq 1$  之情況了。然而一開始，我們考慮了許多方法，但其結果都極為複雜而難以討論，即因為  $P$  是毫無限制之動點，而造成情況變化性極高，而無法進行討論。最後，我們發現之前用來證明所有正  $2n$  邊形均成立的方法，可以解決了  $P$  毫無限制的問題。我們過  $P$  點所作的大正  $2n$  邊形，能夠把  $P$  點從毫無限制而固定在一正  $2n$  邊形上，縮小了  $P$  點之範圍，使得  $H$  好算許多。後來，我們只要做  $H$ 、 $h$  之轉換即可順利求出我們所需之結果。此一方法用歐氏幾何之方式，漂亮的避免掉許多其他方法所面臨之難處，並順利的解決此一複雜之問題，正是本作品中最具特色也最為精采的一部份！

至此，我們已完整討論至一個階段。而在查詢相關資料時，發現第 50 屆全國科展作品〈點到為止——由西姆松定理所衍生的極值與定值探討〉中討論高之和的定值問題。其中的定理表示：「當  $P$  點於正  $n$  邊形之內切圓上時， $P$  至各邊的高的一次方、二次方、四次方和為定值。」此定理引發了我們對於高的多次方和感到好奇，於是開啟了「面積多次方和之比值問題」的研究。我們藉由 GSP 得到些許推測。然而，此為一新的研究範疇，我們並未掌握高多次方和的討論方式。經思考，我們認為先找尋特殊解，再以類似本研究先前的方法擴展至所有點應是最可行的方法！經觀察，我們決定先證明  $P$  點於正  $2n$  邊形之內切圓上時推論正確。

於是我們參考〈點到為止——由西姆松定理所衍生的極值與定值探討〉中的方法(引理一)，依照類似的模式嘗試證明。但由於我們欲推廣至任意次方，證明中將出現  $\sin^{2n} \theta$  的連加。我們於處理  $\sin^{2n} \theta$  時，遇到了瓶頸，無法寫出化簡的通式。而最後經由係數的觀察及數學歸納法的協助下，我們成功找出化

簡的結果，也順利證明「內切圓上」推論正確。此部分的結論將成為接下來研究的基礎，所以成功化簡複雜的正弦多次方和並證明此結論，實為後半部研究中的重大突破！

而我們證明「內切圓上」推論正確的最主要目的，便是希望可以藉由此結論推廣至所有點。於是，我們採用類似本研究先前的方法，使  $H$  滿足以上結論，再由  $H$ 、 $h$  之轉換推廣至所有點。由此方法，我們成功地解決了面積多次方和的比值問題，使我們只須證明小部分的點滿足推論，便可推廣至所有點，大大的減低了研究的複雜性。此一部分的結果再次說明了此方法為研究正  $2n$  邊形高之相關問題時極具可行性也極為精彩的方法！

以上即為本作品中，曾經面臨的困難及最後解決的方法，其中有許多出乎意料的創新及結果，可以提供相關題材研究的參考。

## 二、本作品和參考資料之對照：

能力競賽解答只限於證明正六邊形內部的情況，有關正  $2n$  邊形以及外部的推廣，皆屬於本次研究的創新。此外，在推廣之前，我們曾經翻閱維維安尼定理，參考其討論高的定值問題之方法，但最後發現其延伸方向和我們所要的極為不同，故我們只採用了其基本概念。至於龍騰數亦優的部分，其使用複數的方法證明原題。但其僅限於六邊形，且其後推廣方向也與我們的作品有極大差異，因此它僅提供我們另一種證明原題的方法。在本作品的後方，討論面積多次方和的部分，第 50 屆全國科展作品〈點到為止—由西姆松定理所衍生的極值與定值探討〉提供了最初的思考方向，而我們最後的證明，即是以此資料繼續推廣而得的。

## 柒、結論

本次作品中我們所用來探討正  $2n$  邊形外部一點的作法，十分創新，也可以藉此避免許多複雜之問題，實可以做為正  $2n$  邊形外部其他面積相關問題探討時的參考。

## 捌、參考資料與其他

1. 九十八年花蓮區能力競賽複賽試題
2. 賴勇仁、吳孝仁，複數與三角形面積，龍騰數亦優第 11 期，p.17—p.23
3. 黃家禮 (95)，幾何明珠，九章出版社，維維安尼定理，p.157—p.166
4. 第 50 屆全國科展〈點到為止—由西姆松定理所衍生的極值與定值探討〉

## 評語

本作品經過多次參賽修正後，已漸趨完整成熟。最近加入的結果，成功的與西姆松原理加以連結並獲致不錯結論。其中  $P$  點位於正  $2n$  邊形內切圓並加以推廣至其他區域之分析，相當成功的改進原作品早期結論。交錯面積多次方和唯一解部分，是接下來可以努力之目標。