

2012 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

編號：010029

作品名稱

缺幾格大不同-從方格排列結構到路徑之探討

得獎獎項

大會獎：三等獎

作者姓名：李宜霖、程鼎元

就讀學校：高雄市立高雄高級中學

指導教師：鐘玉才、蔡哲淵

關鍵字：Ribbon Tableaux、Skew Young Diagram、
Motzkin Path

作者簡介



我是李宜霖(左)，來自高雄市，目前就讀高雄中學三年級。我喜歡閱讀科普書籍、科幻小說、打桌球，並思考一些數學問題。同時，這也是引起我作數學科展的最大動機，就一頭栽進這個世界中。今年第四度參與此盛會，國內外的好作品，齊聚在此相互交流，我也期望能在這個難得的機會中盡全力，享受做科展的樂趣，學到更多東西。

我是程鼎元(右)，就讀高雄中學三年級。平時除了做科展外，也很喜歡寫程式，思考與解決許多有趣的問題，有一些參加競賽的經驗。雖然研究過程非常辛苦，但是當發現問題的性質，進而找到巧妙而簡易的解決方法，是多麼令人喜悅又開心的事。而能夠與各地的好手進行學術交流，讓我感到十分興奮，希望能在這次的活動中讓自己認識更多朋友，也藉由這個難得的機會學習到更多平常學不到的東西。

摘要

本研究探討將方格填入Young Diagram之排列結構，考慮填入的順序並計算其方法數。已知Hook Length公式得以計算特定形狀的Young Tableau方法數，而本研究欲討論在給定各相連方格形式與其數量的情形下，一般化的排列圖形之性質及數量關係。首先發現骨牌的排列與「缺一格」形式之數量相同，進而深入觀察排列的結構以尋找兩者間的關聯性，並藉由對應關係(bijective relations)解釋這個特別的現象。接著，進一步的利用路徑表現此結構的相關性質，嘗試探討一般化的缺格情形，藉由路徑的對應，得知該排列方法數均為「廣義Motzkin數列」的線性組合。除此之外，更擴展至廣義的 r -Ribbons「多格相連」的排列結構，發現 r -Ribbons方格排列圖形在完整與「缺一格」的情況下可一一對應，若將 n 個 r -Ribbons填入高度為 H 的Young Diagram中，當 H 不超過 r 時，其總方法數為 H^n ，以各列編號相異的方格數量進行分類，其結果為在 H 維空間下的Pascal分佈。

Abstract

This project probes the situations using Ribbons (which consist of many unit squares) to fill into Young Diagram with specific rules and focus on its structures and the enumeration of the ways of tilings.

Hook Length Formula is the well-known function which can count the ways of Young Tableaux with restricted shape. Hence, we want to discuss the characteristics of general tilings by limiting its height and filling into skew shapes. Based on “SDT (Standard Domino Tableau)” and “GDT (Good Domino Tableau)”, we extended our scope to “Skew-SDT” and tried to find the relations between these structures. We started from the given skew shapes, discussed the general cases by means of bijection, and proved that the result is a linear combination of “Extended Motzkin Numbers”.

Moreover, this project also focused on the tilings and structures of Ribbon Tableaux, and the main results are summarized below:

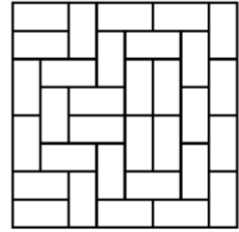
1. If the height is not a multiple of r , r -Ribbon tilings in complete shape (i.e. r -SYT) and skew shape $(1,0,\dots,0)$ (i.e. r -GYT) are one-to-one correspondence.
2. When the height(H) is not more than r , the number of tilings with n r -Ribbons is H^n dimensional Pascal distribution.

目錄

壹、研究動機.....	2
貳、研究目的.....	2
參、研究器材及設備.....	2
肆、名詞與定義.....	3
一、名詞解釋.....	3
二、符號定義.....	4
伍、研究內容.....	6
一、前言.....	6
(一) Standard Young Tableaux 相關研究結果介紹.....	6
(二) Standard Domino Tableaux 相關研究結果介紹.....	6
二、探討各種缺格的骨牌排列結構與路徑間的連結.....	9
(一) 缺格圖形數量的探討.....	9
(二) 缺格數量的生成函數與遞迴式.....	18
三、探討 Ribbons Tableaux 與「缺一格」結構的關聯性.....	21
(一) 簡介 r -Ribbons 構造的方式及相關想法.....	21
(二) 完整與「缺一格」的 r -Ribbons Tableaux 排列結構之間的探討.....	22
四、探討特定高度下 r -Ribbons Tableaux 之排列結構性質與數量關係.....	27
陸、結論.....	31
柒、未來展望.....	31
捌、參考資料.....	32
玖、附錄.....	33
一、 r -SYT 與 r -GYT 之對應列表.....	33

壹、研究動機

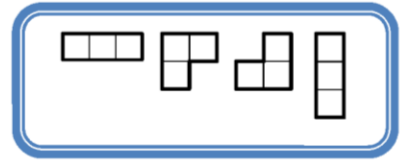
在2009年十月份的科學月刊中，我們讀到一篇關於骨牌排列問題(Domino Tiling)的介紹文章^[3]，文中提到一道數學問題：利用 1×2 的骨牌拼貼填滿 $2 \times n$ 的矩形、 $3 \times n$ 的矩形(其中 n 為自然數)，其方法數為何？並將問題擴展到利用 1×2 的骨牌拼滿 $2m \times 2n$ 的矩形之方法數(m, n 均為正整數)，如圖(1)。而此問題已由Kasteleyn^[10]完成，並得知其方法數為 $4^{mn} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n (\cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1})$ 。



圖(1)

已知由Hook Length公式^[12]得以計算Standard Young Tableau在特定形狀下的方法數，但不易計算一般情形下給定方格數量的方法數。而在參考資料^[1]中，初步得出特定條件下的骨牌排列結構以及各種排列方式與路徑的對應，並節錄與本研究相關的部分內容於報告中。

此外，Fomin和Lulov^[9]探討擴展至特定形狀的 r -Ribbons排列圖形之方法數。而Callahan等^[5]計算將3-Ribbons(如圖(2))填滿 $2 \times n$ 的矩形、 $3 \times n$ 的矩形的方法數。於是，我們希望進一步嘗試採用「多格相連」的 r -Ribbons填入Young Diagram中進行排列。觀察排列的結構與規律，並與路徑結合，探究關於該結構在缺格Young Diagram中的關係是否也有特別的性質？



圖(2)

貳、研究目的

- 一、探討各種缺格的骨牌排列結構與路徑間的連結。
- 二、探討 r -Ribbons Tableaux與其「缺一格」結構之間的關聯性。
- 三、探討特定高度下 r -Ribbons Tableaux之排列結構性質與數量關係。

參、研究器材及設備

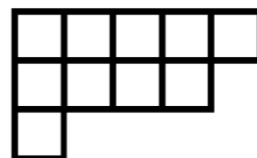
- 一、Microsoft Office Word 2003
- 二、 $\text{\LaTeX}$ 2_ε
- 三、Dia 0.97.1
- 四、Dev-C++ 4.9.9.2 with compiler GNU G++ 3.4.2
- 五、Mathematica 7.0
- 六、方格紙與紙筆
- 七、骨牌排列模型

肆、名詞與定義

一、名詞解釋

(一) Young Diagram :

此圖形為一種整數分拆的表達方式，將正整數 n 分割為 H 個正整數的總和，並記為 $W_1, W_2, \dots, W_H, (W_1 \geq W_2 \geq \dots \geq W_H > 0), \sum_{i=1}^H W_i = n$ 。第一列由左至右連續放置 W_1 個正方形方格，第二列由左至右連續放置 W_2 個正方形方格，依此類推，第 H 列由左至右連續放置 W_H 個正方形方格，稱此圖形的高度為 H ，如圖(3)所示，其中 $n = 10 = 5 + 4 + 1, W_1 = 5, W_2 = 4, W_3 = 1$ ，其高度為三。

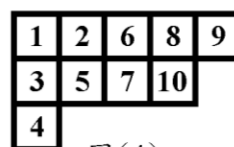


圖(3)

註：本研究中「高度限制 H 」指限制高度不超過 H 的Young Diagram排列圖形。

(二) SYT (Standard Young Tableau) :

在Young Diagram中填入正整數 $1, 2, \dots, n$ ，每行的數字依序向下遞增，每列的數字依序向右遞增的排列結構，如圖(4)。



圖(4)

(三) 骨牌 (Domino) :

由兩個相鄰單位方格所組成的圖形。可為水平放置，如圖(5)；或直立放置，如圖(6)共兩種排列方式。



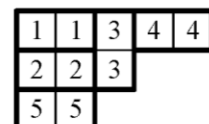
圖(5)



圖(6)

(四) SDT (Standard Domino Tableaux) :

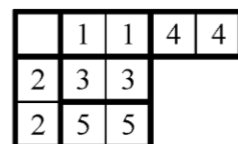
在Young Diagram圖形中依序填入編號分別為 $1, 2, \dots, n$ 的 n 張骨牌，同一骨牌上所標示的兩數相同，則每行方格所標示的數將依序向下單調遞增，每列方格所標示的數將依序向右單調遞增，如圖(7)。



圖(7)

(五) GDT (Good Domino Tableaux) :

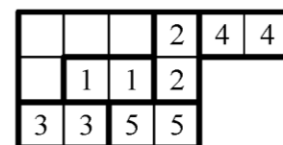
在移除左上角方格 (即「缺一格」) 的特殊Young Diagram圖形中依序填入編號為 $1, 2, \dots, n$ 的 n 張骨牌，同一骨牌上所標示的兩數相同。則每行方格所標示的數將依序向下單調遞增，每列方格所標示的數將依序向右單調遞增，如圖(8)。



圖(8)

(六) SSDT (Skew-Standard Domino Tableaux) :

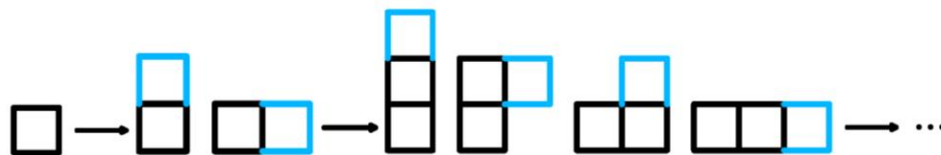
在Young Diagram圖形中移除較小的Young Diagram圖形 μ ，其餘部份依照與SDT相同的規則填入骨牌。可視為「缺幾格」的SDT，如圖(9)。



圖(9)

(七) r -Ribbons :

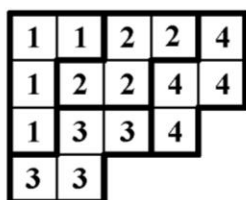
依特定規則構造之由 n 個連通的單位方格所組成的圖形。1-Ribbon即為單位方格，並遞迴定義： r -Ribbons由 $(r-1)$ -Ribbons的最右上方格向右或向上增加一個單位方格所組成，如圖(10)，前述之骨牌即為2-Ribbons。 r -Ribbons共有 2^{r-1} 種不同的組合情形。在本研究中， r -Ribbons特別規定 $r > 1$ 。



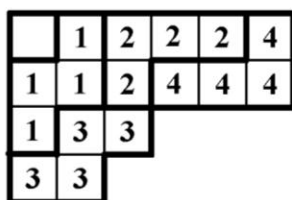
圖(10)

(八) r -SYT (Standard r -Ribbons Tableaux) :

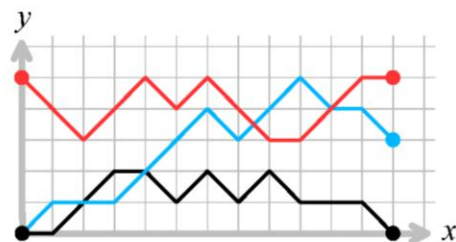
在Young Diagram的圖形中依序填入編號為 $1, 2, \dots, n$ 的 r -Ribbons，同一塊 r -Ribbons上所標示的數均相同，每行的數依序往下單調遞增，每列的數依序往右單調遞增。SDT即為2-SYT。類似地，若修改為「缺一格」的形式，即移除左上角方格的特殊Young Diagram圖形中填入 r -Ribbons的結構即為 r -GYT (Good r -Ribbons Tableaux)，如圖(11a)為4-SYT，而圖(11b)為4-GYT。



圖(11a)



圖(11b)



圖(12)

(九) 廣義 p -Motzkin路徑 (Extended p -Motzkin Path) :

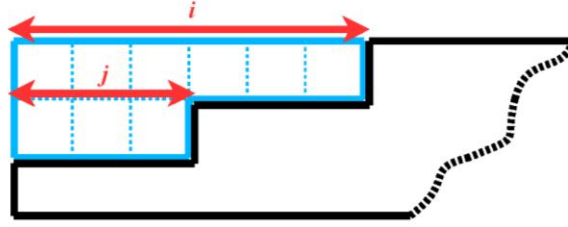
從坐標原點 $(0, p)$ 走到 (n, k) ，其中 n, p, k 為非負整數，規定走法為依循向量 $(1, 0)$ 、 $(1, 1)$ 或 $(1, -1)$ ，過程中不得通過 x 軸下方所形成的路徑(以紅色標示)，如圖(12)。

1. 若 $p = k = 0$ ，此類路徑(以黑色標示)的數量即為「Motzkin數列」，前10項數量為：1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, ...
2. 若 $p = 0$ ，此類路徑(以藍色標示)的數量即為「廣義Motzkin數列」，前10項數量為：2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123, 6046, 17303, ...

二、符號定義

(一) $\mu(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_H)$:

描述缺格圖形中缺格部分的組成：以序列 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_H$ 表示缺格部分圖形每列的長度，其中 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots \geq \mu_H$ 。如下圖(13)為 $\mu(i, j)$ 的缺格形式。



圖(13)

(二) ${}_{\mu}\text{YT}_{\leq H}^r(n)$:

表示由 n 塊 r -Ribbons組成的 r -SYT，缺格部分為 $\mu(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_H)$ ，其高度限制為 H 下所形成之圖形集合。以 $|{}_{\mu}\text{YT}_{\leq H}^r(n)|$ 表示其方法數。

1. 若 $\mu = (0)$ ，則特別以 $\text{SYT}_{\leq H}^r(n)$ 表示， $r = 1$ 時 r 可省略；而 $r = 2$ 時可以 $\text{SDT}_{\leq H}(n)$ 表示。
2. 若 $\mu = (1)$ ，則特別以 $\text{GYT}_{\leq H}^r(n)$ 表示， $r = 1$ 時 r 可省略；而 $r = 2$ 時可以 $\text{GDT}_{\leq H}(n)$ 表示。
3. 若 $r = 2$ ，則特別以 $\text{SSDT}_{\leq H}^r(n)$ 表示。

(三) $m_{n,p}$:

表示路徑長度為 n 的 p -Motzkin路徑方法數，其中 n, p 為非負整數。若 $p = 0$ ，則特別以 m_n 表示，為Motzkin數列第 n 項。

(四) $a_{n,p}$:

表示路徑長度為 n 的廣義 p -Motzkin路徑方法數，其中 n, p 為非負整數。若 $p = 0$ ，則特別以 a_n 表示，為廣義Motzkin數列第 n 項。

(五) $M_p(x)$:

表示路徑長度為 n 的 p -Motzkin路徑走法方法數所形成的生成函數。

(六) $A_p(x)$:

表示路徑長度為 n 的廣義 p -Motzkin路徑走法方法數所形成的生成函數。

(七) 以 V_0 表示向量 $(1, 0)$ ，以 V_1 表示向量 $(1, 1)$ ，以 V_2 表示向量 $(1, -1)$ 。

(八) $(_{E_1, E_2, \dots, E_n}^n) = C_{E_1}^n C_{E_2}^{n-E_1} \dots C_{E_n}^{n-\sum_{i=1}^{n-1} E_i}$ 。

伍、研究內容

一、前言

(一) Standard Young Tableaux 相關研究結果介紹

在參考資料^[2]中，作者從基本的單位方格之排列方法開始討論，在查閱網路資料及相關論文後得知：在 1900 年，Alfred Young^[12]提出 Young Tableaux 組合結構(詳見肆、名詞與定義)，目前已知 Hook Length 公式^[12]可以計算特定形狀的 Young Tableaux 排列數量，而對於給定方格數量的所有排列情形，由群論相關方法分析，可得出遞迴方程式^[12]： $f(n) = f(n-1) + (n-1)f(n-2)$, $f(0) = 1$ 。

除此之外，亦針對限制 Young Tableaux 的高度進行探討，當高度限制為 2 時，數量為 Central Binomial Coefficient；而當高度限制為 3 時，數量恰為 Motzkin 數列^{[6][13]}。在一般化的情形下，得知：當高度限制為 H 時，即為投票問題中 H 人之「一路領先」的情形，並構造 n 維 Motzkin 路徑與其產生對應。

關於缺格的排列圖形(Skew-Standard Young Tableaux)，Eu (2010)^[8]探討高度限制為 3 時缺格的 Young Tableaux 與 Motzkin 路徑間的對應情況，並以此解決由 Zeilberger^[7]所提出的猜想：當 Young Tableaux 高度限制為 3，缺 $\mu(2, 1, 0)$ 時，其排列方法數為 $m_{n-1} - m_{n-3}$ 。

(二) Standard Domino Tableaux 相關研究結果介紹

依特定規則的骨牌排列情形，稱之為 Domino Tableaux(詳見肆、名詞與定義)，同樣已有類似的公式^[9]計算其特定形狀的方法數。而 Domino Tableaux 在限制高度或圖形有缺格的情形下，關於一些性質與其現象已有初步的結果^[1]，在此節錄部分結論：

1. 「缺一格」的 GDT 與 SDT 的排列方法數相等，形成對應關係，對應流程如下。
若高度限制為奇數，則 SDT 與 GDT 的排列亦形成對應。

(1) GDT $\rightarrow$ SDT :

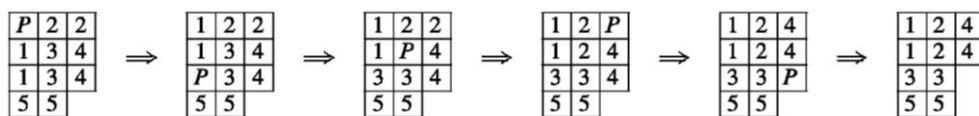
- a. 假設左上角缺格為 P ，考慮與缺格 P 相鄰的方格 X_a 與有相同數字的方格為 X_b 。
- b. 將 P 與 X_b 互換，且除目前的缺格部分外編號大小關係須符合 Domino Tableaux 的規則；否則，考慮其他的方格 X_b 。
- c. 重複以上操作，每次操作不得為前一次操作的逆規則，直到 P 的右方、下方沒有方格為止。

(2) SDT $\rightarrow$ GDT :

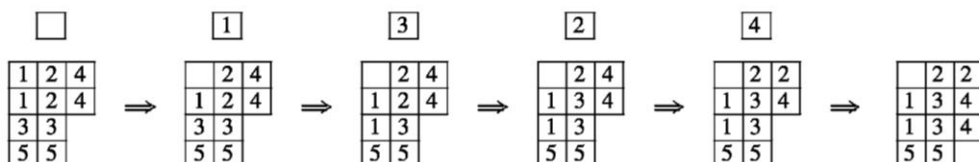
- a. 將左上角的方格 P 移至「暫存區」，考慮與其編號相同的方格之相鄰方格 X_a 。
- b. 將 P 與 X_a 互換，且除「暫存區」外編號大小關係須符合 Domino Tableaux 的規則；否則，考慮其他的方格 X_a 。
- c. 重複以上操作，每次操作不得為前一次操作的逆規則，直到方格 X_a 的右方、下方沒有方格為止。

(3) 對應範例：

a. GDT $\rightarrow$ SDT



b. SDT $\rightarrow$ GDT



2. 研究發現SDT在 $H \leq 3$ 時與Motzkin數列有密切的相關性，並構造出「廣義Motzkin路徑」，對於所有SDT在 $H \leq 3$ 的排列情形一一對應。而利用此對應將較為複雜的骨牌排列結構以路徑的形式呈現，其中路徑終點位置的 y 坐標恰為直立骨牌的數量，由路徑的性質計算出其方法數為： $\sum_{i=0}^n C_i^n C_{\lfloor i/2 \rfloor}^i$ 。並且，直立的骨牌的數量也在路徑中呈現特定的關係。以下說明SDT與「廣義Motzkin路徑」的對應操作，並分為三個步驟分別討論之：

(1) 前置操作：

- 操作 d ：對SDT而言，依照骨牌上標記的數字，按順序轉換成字串：將所有的直立骨牌記為 u ，水平骨牌位於第一列的記為 a ，第二列的記為 b ，第三列的記為 c 。
- 操作 d^{-1} ：對表示字串而言，由左而右依序轉換為骨牌排列，其順序即為骨牌上的數字編號：將所有的 u 換成直立骨牌， a 換成位於第一列的水平骨牌， b 換成位於第二列的水平骨牌， c 換成位於第三列的水平骨牌。

(2) SDT $\rightarrow$ 「廣義Motzkin路徑」：

a. 配組：(執行操作 d 後)

由左至右依序考慮 c ，往左尋找最近且未被標記的 b ，稱為 bc -配組，並將 b 標記；若無則稱為 oc 配組。由左至依序考慮 b ，往左尋找最近且未被標記的 a ，稱為 ab 配組，並給 b 一個標記。

b. 干擾：在各配組區間中的 u 視為該配組的干擾。考慮所有干擾中，最右邊的配組：

(a) 若此配組為 ab 配組，則將 b 與 u 置換。

(b) 若此配組為 bc 配組或 oc 配組，則將 c 與 u 置換， u 與 $\underline{c}$ 置換

c. 重複以上操作，直到沒有干擾配組。

從左至右依序考慮 c ，往左找最近的 b ，再往左找最近的 a ，將 a, b, c 分別的換成 V_1, V_0, V_2 ；從左至右依序考慮 b ，往左找最近的 a ，將 a, b 依序分別的換成 V_1, V_2 。將所有的 $a, \underline{c}$ 換成 V_0 ， u 換成 V_1 ，對應完成。

(3) 「廣義Motzkin路徑」→ SDT :

a. 配組：

重複由左至右依序考慮 V_2 ，往左尋找最接近且未被標記的 V_1 ，並給 V_1 一個標記，將所有未被標記的 V_1 置換成 u ；有被標記的 V_1 ，往右找最近的 V_0 或 V_2 。

(a) 如果是 V_0 ，再往右找最近的 V_2 ，將 V_1, V_0, V_2 依序分別置換成 a, b, c 。

(b) 如果是 V_2 ，將 V_2 分別置換成 a, b 。

b. 干擾：由左至右依序考慮各 u ，並記 u 的位置為 i ，考慮區間 $[1, i)$ 。經由 d^{-1} 操作後，是否為合法的SDT排列？

(a) 是，考慮下一個 u ，直到所有 u 都被考慮過，跳至步驟c。

(b) 否，在此區間中依序由左至右考慮 c ，往左找沒有標記的 u 或 b ，並給此 u 或 b 一個標記。針對此 u ，往左找最近的 V_0 或未被標記的 b 。

(I) 如果是 V_0 ，將 V_0 置換成 u ， u 置換成 c 。

(II) 如果是 b ，再往左找最近的 V_0 是否存在

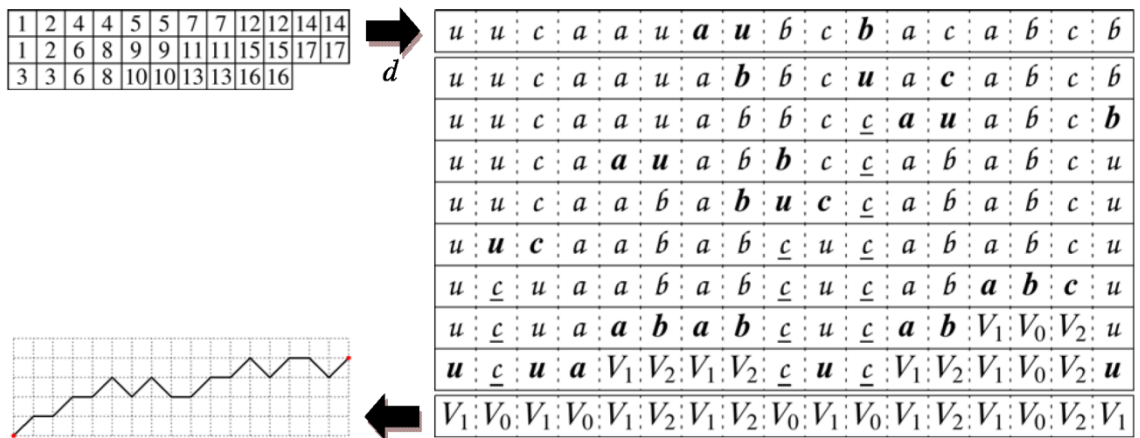
(i) 存在，則在 V_0 右邊找最近未被標記的 b ，將 V_0 與 b 互換。

(ii) 不存在，則將 u 與未被標記的 b 互換。

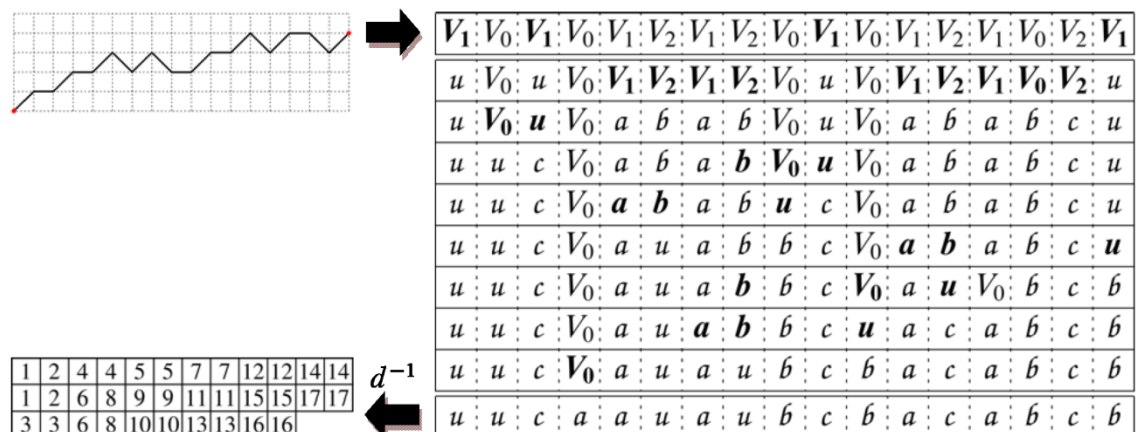
c. 將所有的 V_0 換成 a ，執行操作 d^{-1} ，對應完成。

(4) 對應範例：

a. SDT → 「廣義Motzkin路徑」：



b. 「廣義Motzkin路徑」→ SDT :



二、探討各種缺格的骨牌排列結構與路徑間的連結

(一) 缺格圖形數量的探討

1. 在SDT中至多三列，缺格形式為 $\mu(1, 1)$ 的情形

首先由列舉骨牌排列各情形(表(1a))與其數量(表(1b))開始，發現在限制放置範圍不超過三列(即高度限制為3)的情形下，SDT與缺格形式為 $\mu(1, 1)$ 的SSDT數量也恰好相同。觀察發現此現象與「缺一格」的GDT對應操作中的「骨牌移動」情形十分類似，因此嘗試以此對應操作想法為基礎，進行SDT與其缺格形式為 $\mu(1, 1)$ 的SSDT之對應。

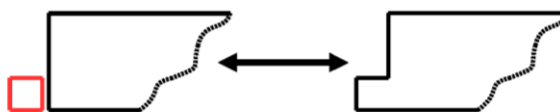
塊數	數量	例子 (SDT _{≤3} , $\mu = (1, 1)$)
1	2	
2	5	
3	13	

表(1a)

骨牌數量	1	2	3	4	5	6	7	8	9
方法數	2	5	13	35	96	267	750	2123	6046

表(1b)

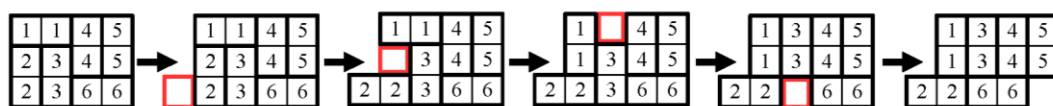
說明：考慮一個不超過三列的SDT，在第三列的左邊額外添加一個空方格，如圖(14)，並依照前述由「缺一格」的GDT排列由對應操作轉換為SDT排列之「骨牌移動」的對應流程，將額外的方格視為欲填滿的部分，則其所成的圖形即為SSDT, $\mu(1, 1)$ ；亦可同樣仿照由SDT排列轉換為「缺一格」的GDT排列之對應流程進行逆操作。因此，SSDT, $\mu(1, 1)$ 的方法數為「廣義Motzkin數列」，以下給出一個6塊骨牌排列之對應範例。



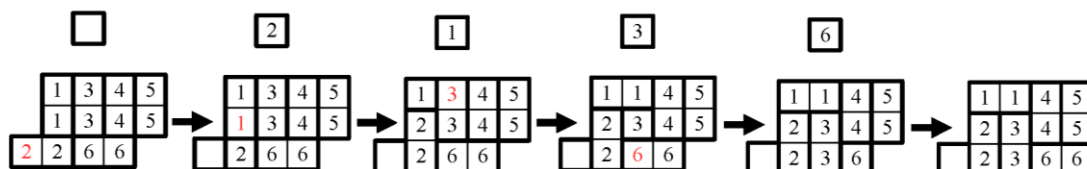
圖(14)

(1) 對應範例：

a. SDT $\rightarrow$ SSDT, $\mu(1, 1)$:



b. SSDT, $\mu(1, 1) \rightarrow$ SDT :



2. 各種缺格形式的骨牌排列情形

此原則擴展至更多缺格的骨牌排列(簡稱「缺格排列」)時，由於情形較複雜，無法利用「骨牌移動」的想法來進行討論。因此先列舉一些缺格排列的情形，考慮所使用的骨牌數量，並進行初步分類，列舉所形成的數列如表(2)：

缺格		數列	缺格		數列
i	j		i	j	
0	0	2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123...	5	0	3, 9, 26, 75, 216, 623, 1800, 5211...
1	0	2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123...	5	1	2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123...
1	1	2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123...	5	2	3, 8, 22, 61, 171, 483, 1373, 3923...
2	0	3, 8, 22, 61, 171, 483, 1373, 3923...	5	3	3, 8, 22, 61, 171, 483, 1373, 3923...
2	1	1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323...	5	4	2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123...
2	2	3, 8, 22, 61, 171, 483, 1373, 3923...	5	5	3, 9, 26, 75, 216, 623, 1800, 5211...
3	0	3, 8, 22, 61, 171, 483, 1373, 3923...	6	0	3, 9, 27, 80, 236, 694, 2038, 5981...
3	1	2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123...	6	1	2, 5, 12, 30, 76, 196, 512, 1353...
3	2	2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123...	6	2	3, 9, 27, 80, 236, 694, 2038, 5981...
3	3	3, 8, 22, 61, 171, 483, 1373, 3923...	6	3	3, 7, 17, 42, 106, 272, 708, 1865...
4	0	3, 9, 26, 75, 216, 623, 1800, 5211...	6	4	3, 9, 27, 80, 236, 694, 2038, 5981...
4	1	2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835...	6	5	2, 5, 12, 30, 76, 196, 512, 1353...
4	2	3, 9, 26, 75, 216, 623, 1800, 5211...	6	6	3, 9, 27, 80, 236, 694, 2038, 5981...
4	3	2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835...			
4	4	3, 9, 26, 75, 216, 623, 1800, 5211...			

表(2)

觀察此表發現：某些不同形式的缺格排列，其排列方法數所形成的數列仍然是一樣的！因此推測各缺格形式的骨牌排列結構之間有密切關係。將各「缺格排列」更詳細的分類，並特別標記其數列相同的部分，如次頁圖(15a)、圖(15b)。

說明：將缺格的形式以 $\mu(i, j)$ 表示，其中 i, j 為非負整數， $i \geq j$ ，並以 $|\mu(i, j)|$ 表示此缺格情形下的骨牌排列方法數。將骨牌排列方法數完全相同的部份以同一顏色標示，並以線段的連結標示出其位置的關係。

想法：在哪些缺格情形下，其骨牌排列方法數會相同，而彼此之間又有什麼關係？是否存在一些規律有助於觀察這些關係？

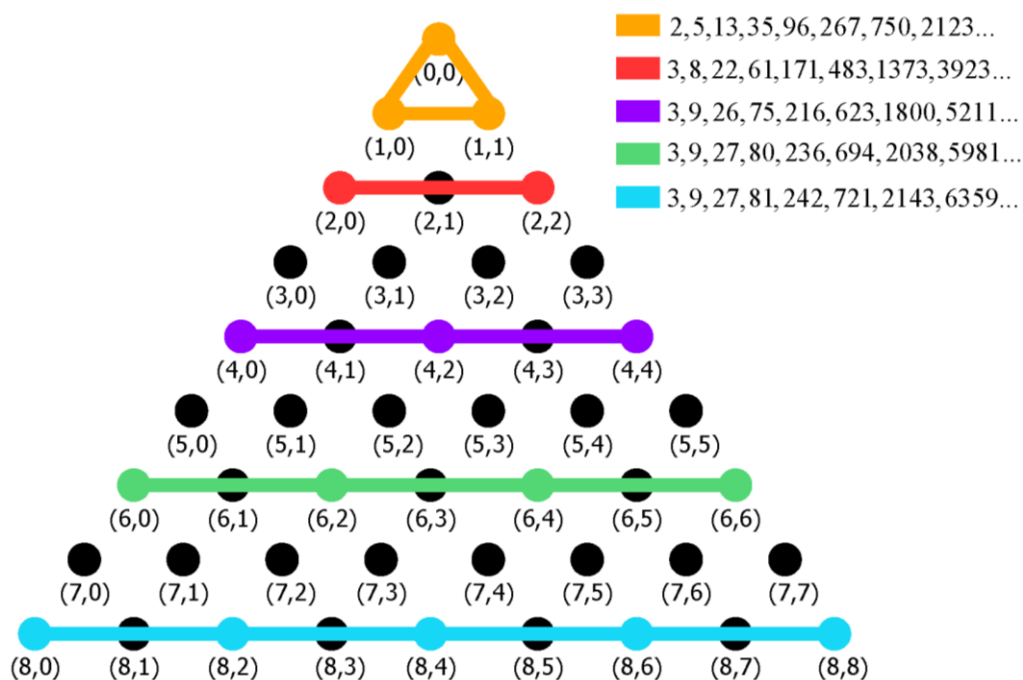


圖 (15a)

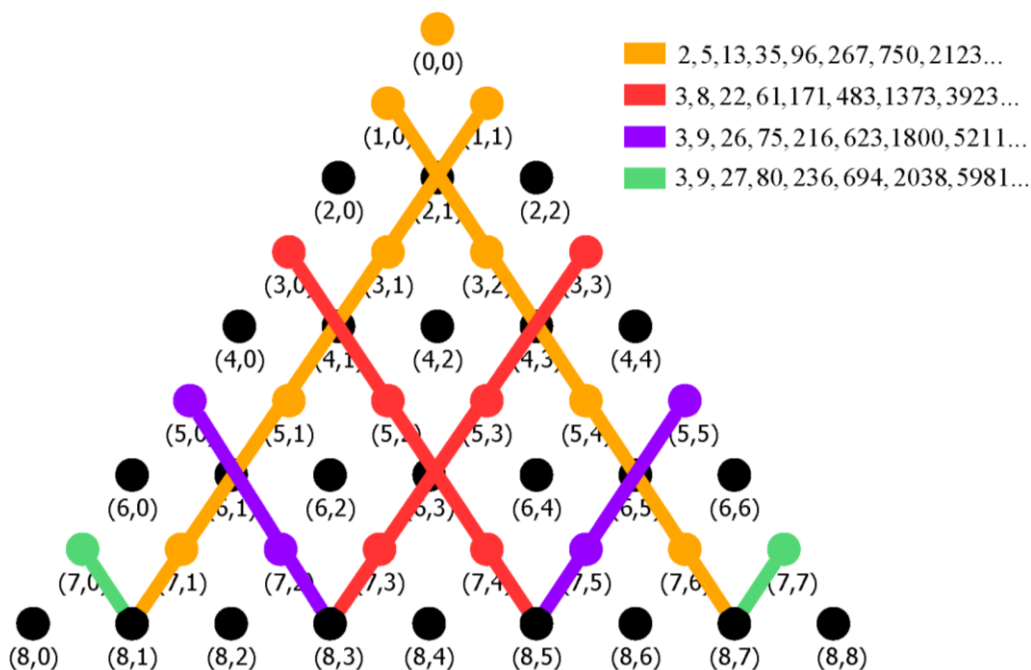


圖 (15b)

觀察：(其中，以 $|\mu(i, j)|$ 表示該情形下骨牌排列的方法數。)

(1) 此圖形滿足「左右對稱」的關係，因此猜測：

$$|\mu(i, j)| = |\mu(i, i - j)|, i \geq j$$

(2) 觀察在同一水平線段上的各項，其每間隔一項之數列相同，如：

$$|\mu(6, 0)| = |\mu(6, 2)| = |\mu(6, 4)| = |\mu(6, 6)|$$

(3) 觀察各斜向(由右上至左下)的直線，當 j 為奇數時，每隔一項之數列相同，如：

$$|\mu(3, 1)| = |\mu(5, 1)| = |\mu(7, 1)| = |\mu(9, 1)| = \dots$$

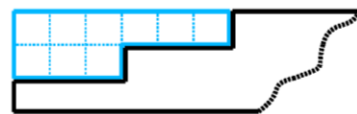
想法：嘗試利用缺格形式 $\mu(i, j)$ 中 i, j 的奇偶關係進行進一步的分類。並探討此奇偶關係是否影響著骨牌排列的相關結構與性質？

由於我們已大致了解完整以及「缺一格」的骨牌排列結構，因此可以將缺格部分看成已經預先填入「特定骨牌」的Young Diagram，則 i, j 的奇偶性影響著這些「特定骨牌」的擺放形式，也間接影響到骨牌排列整體的結構。

以下分類說明四種不同「奇偶關係」的缺格類型：

(1) 缺格形式 $\mu(i, j)$ ，其中的 i 為偶數， j 為奇數。

如圖(16)，在此類型缺格中的骨牌排列，由於第一列長度和第二列長度的差為奇數，骨牌無法在第一列和第二列之間以直立放置；又第二列長度和第三列長度的差亦為奇數，也不能放置直立骨牌。因此，此類情形的骨牌僅能以水平方式放置。考慮此類之各缺格情形均等價於缺格的SYT (即Skew-SYT)，而Eu^[8]使用對應方法處理此問題，並已完成相關結果，故此處不再重複討論。



圖(16)

(2) 缺格形式 $\mu(i, j)$ ，其中 i, j 均為偶數。

如圖(17)，將第一列的缺格部分以 $\frac{i}{2}$ 塊水平放置的骨牌填滿，而第二列的缺格部分以 $\frac{j}{2}$ 塊水平放置的骨牌填滿，共需 $\frac{i+j}{2}$ 塊骨牌。



圖(17)

(3) 缺格形式 $\mu(i, j)$ ，其中 i, j 均為奇數。

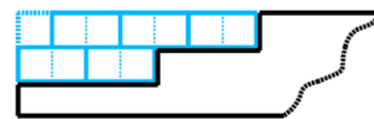
如圖(18)，由於 $i \geq j \geq 1$ ，先在第一列與第二列間放置一塊直立的骨牌，再將第一列剩餘的缺格部分以 $\frac{i-1}{2}$ 塊水平放置的骨牌填滿，而第二列剩餘的缺格部分以 $\frac{j-1}{2}$ 塊水平放置的骨牌填滿，共需 $\frac{i+j}{2}$ 塊骨牌。



圖(18)

(4) 缺格形式 $\mu(i, j)$ ，其中 i 為奇數， j 為偶數。

如圖(19)，由於缺格總數為奇數，故此類情形的缺格部分無法以骨牌完全填滿，但以另一個方向思考，以「缺一格」的GDT為基礎，再填入骨牌；由於已完成SDT與「缺一格」的GDT之間的對應，仍然可以利用此想法探討其結構。



圖(19)

考慮位於第一列的「缺格部分」共有 i 個，而結構GDT僅有一個空格。因此，只要再填入 $\frac{i-1}{2}$ 個水平放置的骨牌即可填滿第一列。依此類推，再填入 $\frac{j}{2}$ 個水平放置的骨牌即可填滿第二列，共需 $\frac{i+j-1}{2}$ 塊骨牌。經由預先填入骨牌的過程，可以將此類型轉換為類似GDT的結構進行探討。

3. 數量的分析

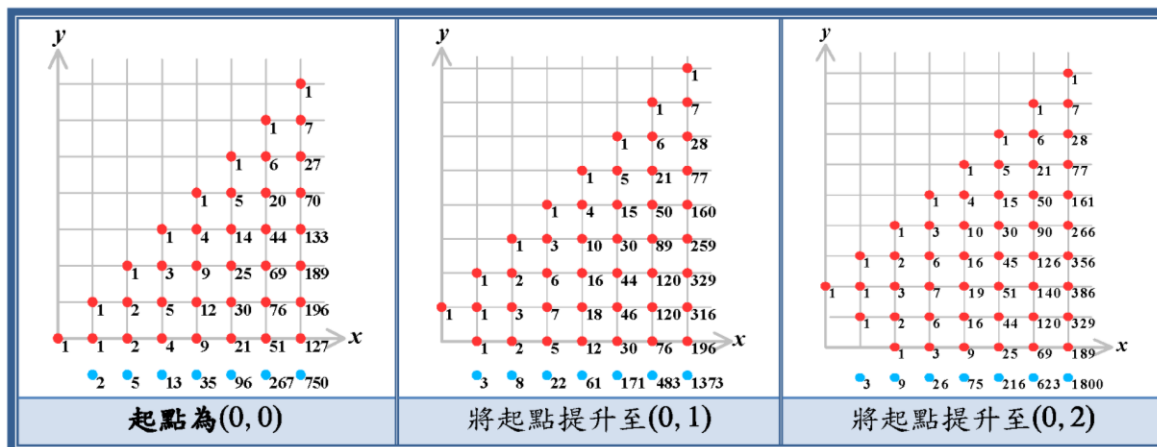
在前述的探討中，得知某些形式不同的缺格排列，其方法數所形成的數列也會完全相同！因此推測有些看似不同的缺格類型其實具有相同的結構。進一步的，藉由數量的歸納整理(如表(3))，猜測這些數量就是改變起點位置的「廣義Motzkin路徑」的方法數！

數列	1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798, 15511, ... (Motzkin數列)
公式	$m_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_{2k}^n C_k^{2k}$
數列	2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798, 15511, 41835...
公式	m_{n+1}
數列	2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123, 6046, 17303, 49721, ... (廣義Motzkin數列)
公式	$a_n = \sum_{k=0}^n C_k^n C_{\lfloor k/2 \rfloor}^k$
數列	3, 8, 22, 61, 171, 483, 1373, 3923, 11257, 32418, 93644, 271219...
公式	$a_{n+1} - a_n$
數列	3, 9, 26, 75, 216, 623, 1800, 5211, 15115, 43923, 127854, 372749...
公式	$a_{n+2} - 2a_{n+1}$
數列	3, 9, 27, 80, 236, 694, 2038, 5981, 17551, 51513, 151251, 444315...
公式	$a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$
數列	3, 9, 27, 81, 242, 721, 2143, 6359, 18847, 55815, 165210, 488865...
公式	$a_{n+4} - 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$
數列	3, 9, 27, 81, 243, 728, 2178, 6507, 19417, 57882, 172404, 513175...
公式	$a_{n+5} - 5a_{n+4} + 6a_{n+3} + 2a_{n+2} - 4a_{n+1}$

表(3)

我們發現由上表發現缺格情形的方法數與「廣義Motzkin路徑」的起點位置「提升」所得的數量相吻合，如下表(4)：

- (1) 「廣義Motzkin路徑」起點 $(0, 0)$ 的方法數為：2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123, ...
- (2) 「廣義Motzkin路徑」起點提升至 $(0, 1)$ 的方法數為：3, 8, 22, 61, 171, 483, ...
- (3) 「廣義Motzkin路徑」起點提升至 $(0, 2)$ 的方法數為：3, 9, 26, 75, 216, 623, ...



表(4)

想法：以上三種類型的缺格之骨牌排列與改變起點位置的「廣義Motzkin路徑」可以形成一對一且映成的對應關係，並給出一般化的對應結果。

4. $SSDT_{H \leq 3}$ 與廣義 p -Motzkin路徑的對應

依照前面的想法將SSDT依參考文獻^[1]中所提的「SDT與廣義Motzkin路徑」之轉換操作流程對應成路徑，但因為部分路徑是由「預先填入」缺格部分的骨牌所產生，且可能與後續之骨牌排列所產生的路徑形成「配組」之相關作用，必須依據這些骨牌在路徑中所表現的情形以及「直立」骨牌的放置位置關係，移除缺格部分產生的路徑；由於經此操作後的路徑可能產生不合法的情形，因此，必須在維持一對一且映成的前提下，將其作系統化的修正，以產生合法且相互對應的路徑。

(備註：以下的 p, q 皆為非負整數。其中對應函數如研究內容一、(二)所示。)

(1) $\mu = (i, j), i, j$ 皆為奇數 (為方便以 $\mu = (2p + 2q + 1, 2q + 1)$ 表示)

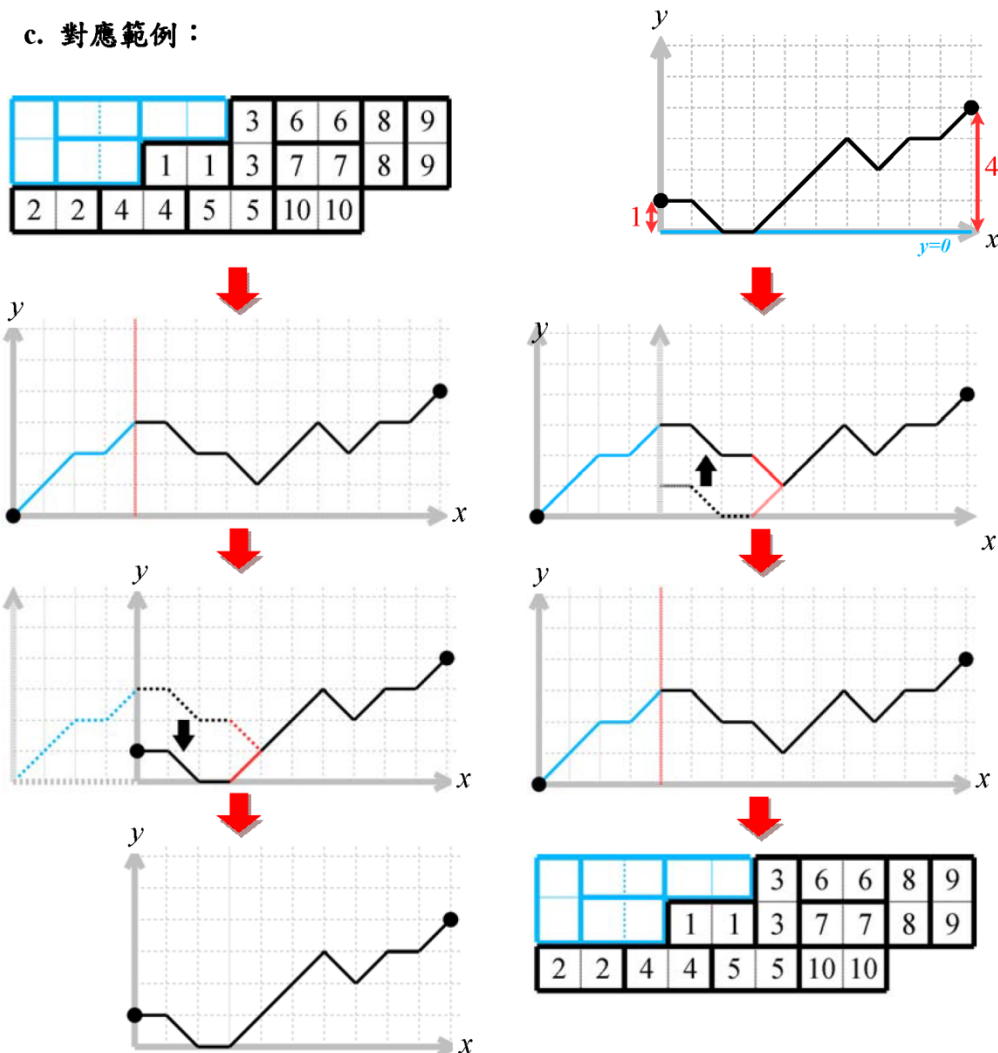
a. $SSDT_{\mu} = (2p + 2q + 1, 2q + 1)$ 對應到路徑流程：

- Step1. 將缺格預先以特定骨牌排列 $u \overbrace{abab \cdots ab}^q \overbrace{aa \cdots a}^p$ 填滿，形成SDT排列。
- Step2. 將此SDT排列以對應函數轉換為廣義Motzkin路徑。
- Step3. 考慮區間 $(2q + 1, p + 2q + 1]$ 中有多少個向量 V_1 ，記為 x ，並移除路徑前 $p + 2q + 1$ 步。
- Step4. 從右至左找尋路徑中第一個碰到 $y = 1$ 的點，由此往左尋找向量 V_1 ，再往左尋找未被標記的向量 V_1 ，給此向量一個標記，接著將 x 個未被標記的向量 V_2 從右往左置換成向量 V_1 。
- Step5. 將此路徑的起點移至 $(0, q)$ ，形成廣義 q -Motzkin路徑。

b. 路徑對應到SSDT, $\mu = (2p + 2q + 1, 2q + 1)$ 流程：

- Step1. 設路徑的最低點位於直線 $y = t$ 上，而路徑起點與此直線的差距為 $q - t$ ，路徑終點 (n, k) 與此直線的差距為 $k - t$ ，令 $T = \min(p, k - t)$ 。
- Step2. 重複由左至右尋找向量 V_1 ，再往右尋找未被標記的向量 V_2 ，標記此向量 V_2 ，接著依序由左而右計 T 個未被標記的向量 V_2 ，以向量 V_1 替換之。
- Step3. 在此路徑前依序增加 1 個向量 V_1 ， t 個向量 $V_1 V_2$ ， $q - t$ 個向量 $V_1 V_0$ ， $p - T$ 個向量 V_0 ， T 個向量 V_1 。
- Step4. 將此路徑的起點移至原點。
- Step5. 將路徑以對應函數轉換為骨牌排列，再移除預先填入的骨牌部分。

c. 對應範例：



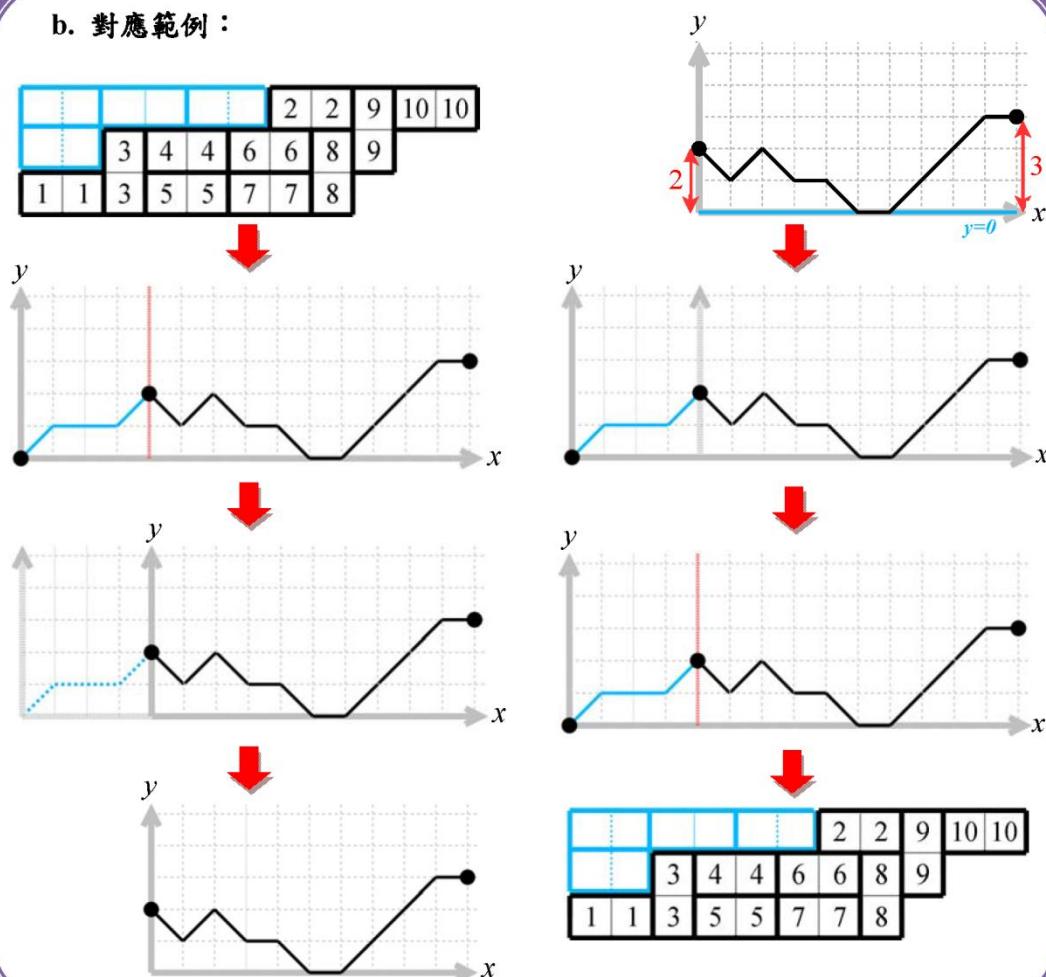
圖(20)

(2) $\mu = (i, j)$, i, j 皆為偶數 (為方便以 $\mu = (2p + 2q, 2q)$ 表示)。

a. SSDT, $\mu = (2p + 2q, 2q)$ 對應到路徑流程：

- Step1. 將缺格預先以特定骨牌排列 $\overbrace{abab \cdots ab}^q \overbrace{aa \cdots a}^p$ 填滿，形成SDT排列。
- Step2. 將此SDT排列以對應函數轉換為廣義Motzkin路徑。
- Step3. 考慮區間 $[1, 2q]$ 中是否有向量 V_2 。
- Step4. 如果無，直接移除前 $p + 2q$ 步；如果有，考慮區間 $[q, p + 2q]$ 中向量 V_1 的個數，記為 x ，移除前 $p + 2q$ 步。由右至左尋找向量 V_1 ，再往左尋找未被標記的向量 V_2 ，給此向量一個標記，接著將 x 個未被標記的向量 V_2 從右往左置換成向量 V_1 。
- Step5. 將此路徑的起點移至 $(0, p + q)$ ，形成廣義 $(p+q)$ -Motzkin路徑。

b. 對應範例：



圖(21)

c. 路徑對應到SSDT, $\mu = (2p + 2q, 2q)$ 流程：

- Step1. 假設路徑的最低點位在直線 $y = t$ 上，路徑起點與此直線的差距為 $p + q - t$ ，路徑終點 (n, k) 與此直線的差距為 $k - t$ ，我們規定以下 $T = \min(p, k - t)$ 。
- Step2. 重複由左至右尋找向量 V_1 ，再往右尋找未被標記的向量 V_2 ，標記此向量 V_2 ，接著依序由左而右計 T 個未被標記的向量 V_2 ，以向量 V_1 替換之。
- Step3. 若 $t - p \leq 0$ ，則在此路徑前依序增加 q 個向量 $V_1 V_0$ ， t 個向量 $V_1 V_2$ ， $p - t$ 個向量 V_1 ；若 $t - p > 0$ ，在路徑前依序增加 $t - p$ 個向量 $V_1 V_2$ ， $p + q - t$ 個向量 $V_1 V_0$ ， $p - T$ 個向量 V_0 ， T 個向量 V_1 。
- Step4. 將此路徑的起點移至原點。
- Step5. 將路徑以對應函數轉換為骨牌排列，再移除預先填入的骨牌部分。

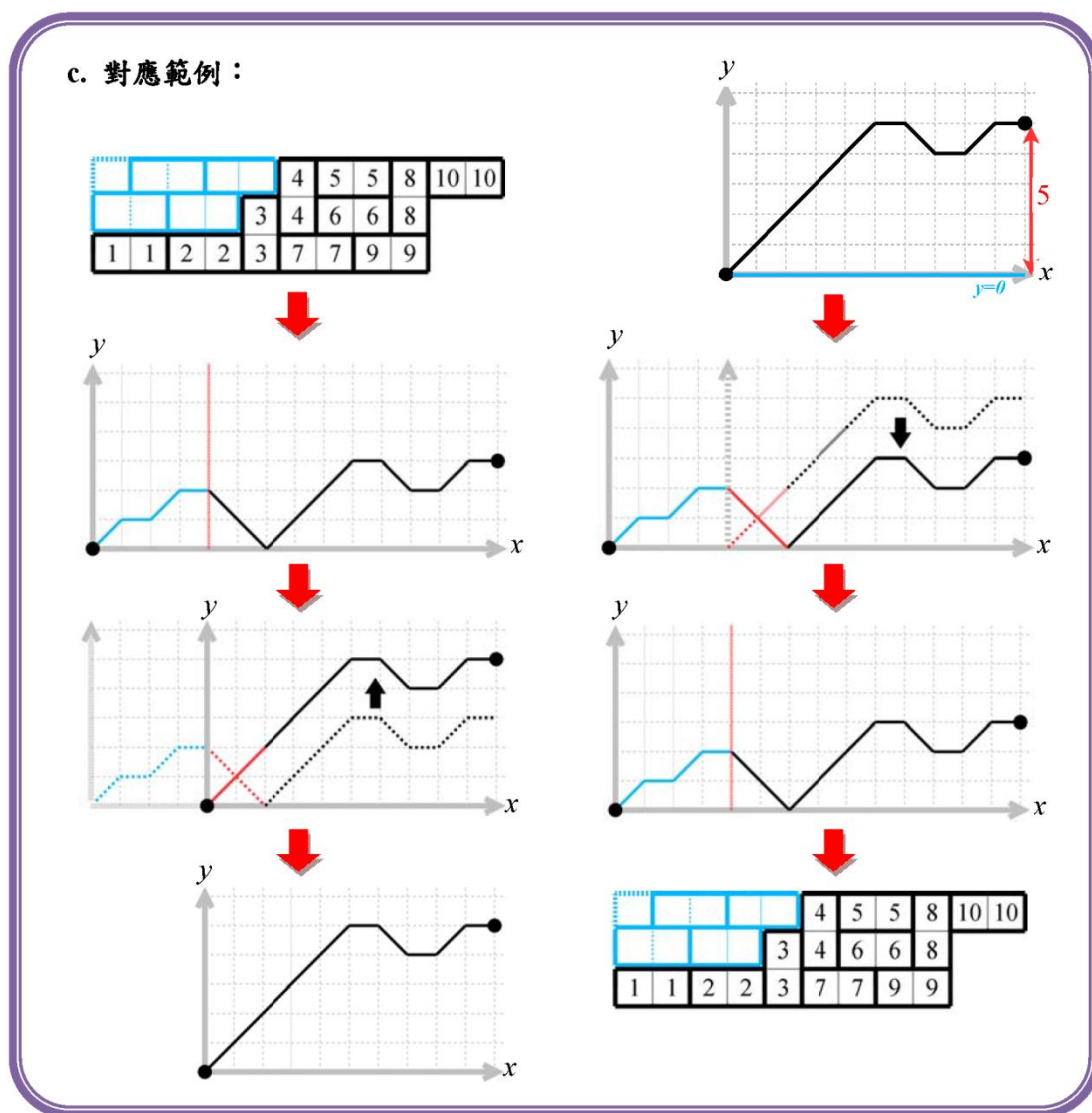
(3) $\mu = (i, j)$, i 為奇數, j 為偶數 (為方便以 $\mu = (2p + 2q + 1, 2q)$ 表示)。

a. SSDT, $\mu = (2p + 2q + 1, 2q)$ 對應到路徑流程：

- Step1. 將缺格預先以特定骨牌排列 $\overbrace{abab \cdots ab}^q \overbrace{aa \cdots a}^p$ 填滿，形成GDT排列。
- Step2. 先將此GDT排列轉換為SDT排列，接著再以對應函數轉換為廣義Motzkin路徑。
- Step3. 考慮區間 $[1, 2q]$ 中有多少個向量 V_0 ，記為 x ，並移除路徑前 $p + 2q$ 步。
- Step4. 找尋路徑中第一個碰到 $y = 0$ 的點，由右至左尋找向量 V_1 ，再往左尋找未被標記的向量 V_2 ，給此向量一個標記，接著將 x 個未被標記的向量 V_2 從右往左置換成向量 V_1 。
- Step5. 將此路徑的起點移至 $(0, p)$ ，形成廣義 p -Motzkin路徑。

b. 路徑對應到SSDT, $\mu = (2p + 2q + 1, 2q)$ 流程：

- Step1. 假設路徑的最低點位在直線 $y = t$ 上，路徑起點與此直線的差距為 $p - t$ ，路徑終點 (n, k) 與此直線的差距為 $k - t$ ， $T = \min(q, k - t)$ 。
- Step2. 重複由左至右尋找向量 V_1 ，再往右尋找未被標記的向量 V_2 ，標記此向量 V_2 ，接著依序由左而右計 T 個未被標記的向量 V_2 ，以向量 V_1 替換之。
- Step3. 在路徑前依序增加 $q - T$ 個向量 $V_1 V_2$ ， T 個向量 $V_1 V_0$ ， t 個向量 V_0 ， $p - t$ 個向量 V_1 。
- Step4. 將此路徑的起點移至原點。
- Step5. 將路徑以對應函數轉換為骨牌排列，再移除預先填入的骨牌部分。



圖(22)

(二) 缺格數量的生成函數與遞迴式

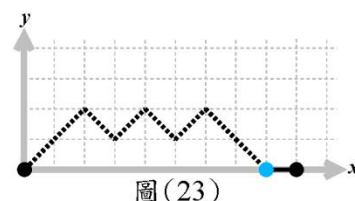
想法：得知缺格的骨牌排列與改變起點位置的「廣義 p -Motzkin路徑」有密切的關係，由於這些路徑均以「廣義Motzkin路徑」為基礎，因此思考其方法數是否可以藉由Motzkin數列或廣義Motzkin數列的線性組合表示之？

1. Motzkin數列與廣義Motzkin數列的遞迴式和生成函數

(1) Motzkin數列的遞迴式

考慮 n 步Motzkin路徑的最後一個向量，分別討論：

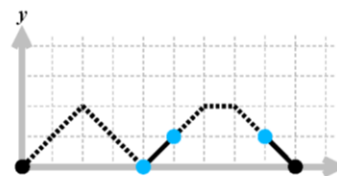
- 為 V_0 ，如圖(23)，則前 $n-1$ 步的方法數為 m_{n-1} 。
- 為 V_2 ，如圖(24)，則考慮前 $n-1$ 步由右往左找到的第一個在 $y=0$ 到 $y=1$ 之間的向量 V_1 ，由此處拆



圖(23)

開，則兩部份皆為Motzkin路徑。由此關係得出Motzkin數列的遞迴關係式：

$$m_n = m_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} m_i m_{n-i-2}, \quad m_0 = m_1 = 1。$$



(2) Motzkin數列的生成函數

令 $M(x) = m_0 + m_1x + m_2x^2 + \cdots + m_nx^n + \cdots = \sum_{n \geq 0} m_nx^n$ ，其中 $m_0, m_1, m_2, \dots, m_n$ 為 Motzkin 數列的各項，以下為相關推導過程：

$$\begin{aligned} M(x) &= \sum_{n \geq 0} m_nx^n \\ &= m_0 + m_1x + \sum_{n \geq 2} (m_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} m_i m_{n-i-2})x^n \\ &= 1 + x + x^2[(m_1 + m_0m_0)x^0 + (m_2 + m_1m_0 + m_0m_1)x^1 + \cdots \\ &\quad + (m_{n+1} + m_nm_0 + m_{n-1}m_1 + \cdots + m_0m_n)x^n + \cdots] \\ &= 1 + x + x^2[m_0(m_0 + m_1x + m_2x^2 + \cdots) + m_1x(m_0 + m_1x + m_2x^2 + \cdots) \\ &\quad + \cdots + m_nx^n(m_0 + m_1x + m_2x^2 + \cdots) + \cdots] \\ &= 1 + x + x^2(m_0 + m_1x + m_2x^2 + \cdots + m_nx^n + \cdots)^2 \\ &\quad + x^2(m_1x^0 + m_2x^1 + m_3x^2 + \cdots + m_nx^{n-1} + \cdots) \\ &= 1 + x + x^2(M(x)) + x^2(\frac{1}{x}M(x) - \frac{1}{x}) \\ &= 1 + xM(x) + x^2M^2(x) \\ \Rightarrow M(x) &= \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x^2} \end{aligned}$$

(3) 廣義Motzkin數列

a. 廣義Motzkin數列的遞迴式

由第14頁表(4)觀察得知：每行的任一個數皆由前一行的相鄰三個數加總而成，以此概念可推得： $m_n = 3a_n - a_{n+1}, a_0 = 1, a_1 = 2。$

b. 廣義Motzkin數列的生成函數

$$\text{令 } A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n \geq 0} a_nx^n,$$

$$3A(x) = 3a_0 + 3a_1x + 3a_2x^2 + \cdots + 3a_nx^n + \cdots = \sum_{n \geq 0} 3a_nx^n \quad \dots\dots\dots ①$$

$$\frac{1}{x}A(x) = \frac{a_0}{x} + a_1x^0 + a_2x^1 + \cdots + a_{n+1}x^n + \cdots = \sum_{n \geq 0} a_{n+1}x^n - \frac{a_0}{x} \quad \dots\dots\dots ②$$

$$① - ② : (3 - \frac{1}{x})A(x) = \sum_{n \geq 0} (3a_n - a_{n+1})x^n + \frac{a_0}{x} = \sum_{n \geq 0} m_nx^n + \frac{a_0}{x} = M(x) + \frac{1}{x}$$

$$\text{解得： } A(x) = \frac{xM(x) - 1}{3x - 1} = \frac{1 + 3x + \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x(3x - 1)}$$

2. 廣義 p -Motzkin路徑的遞迴式和生成函數

經由前述探討，得知SSDT和廣義 p -Motzkin路徑有密切關係。

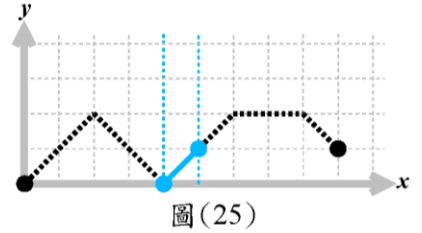
(1) 在 $y = 0$ 上的數列：

觀察到下列現象，詳見第13頁表(4)。

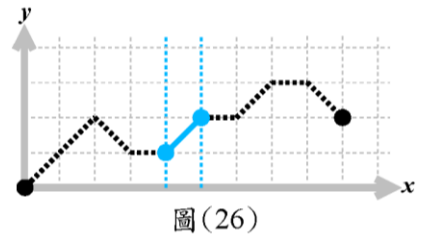
- 對於起點 $(0, p)$ ，每行的任一數依然由前一行相鄰三個數加總而成。因此會滿足： $m_{n,p} = 3a_{n,p} - a_{n+1,p}$ ，其中 p 為非負整數。
- 對於起點 $(0, p)$ ，在 $y = 0$ 上的數列恰與由起點為原點時 $y = p$ 上的數列相同。

(2) 不同起點生成函數的推導

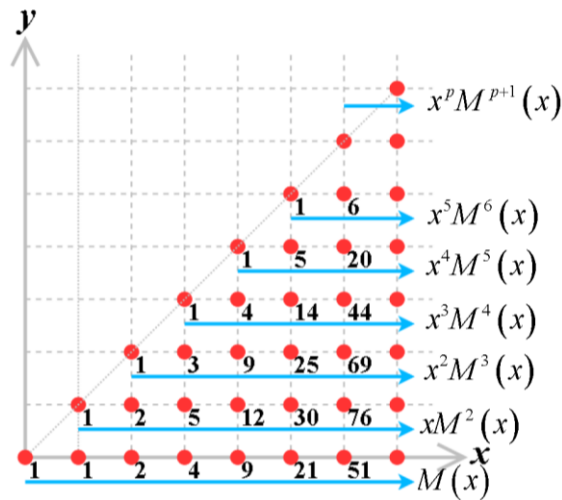
- 考慮起點 $(0, 0)$ ，終點為 $(n, 1)$ 的路徑，由右往左以「 V_2 往前與 V_1 配對」的方式找出單獨的向量 V_1 。如圖(25)，以此單獨的向量為分界，其前、後兩部份皆為合法的Motzkin路徑，故其遞迴式為 $\sum_{i=0}^{n-1} m_i m_{n-i-1}$ 表示，因此可推得其生成函數為 $xM^2(x)$ 。
- 考慮起點 $(0, 0)$ ，終點為 $(n, 2)$ 的路徑，原理同上，可分成由 $(0, 0)$ 到 $(i, 1)$ 以及 $(i+1, 2)$ 到 $(n, 2)$ ，如圖(26)，推得生成函數為 $x^2M^3(x)$ 。
- 依此類推，可用相同方式推導起點為 $(0, 0)$ ，終點為 (n, p) 的生成函數為 $x^p M^{p+1}(x)$ ，整理為圖(27)：



圖(25)



圖(26)



圖(27)

(3) 廣義 p -Motzkin Path

經由前述的探討及遞迴關係式： $m_{n,p} = 3a_{n,p} - a_{n+1,p}$ ，可推得從不同起點出發的「廣義 p -Motzkin數列」的生成函數為

$$A_p(x) = \frac{xM_p(x) - 1}{3x - 1},$$

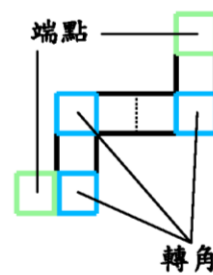
其中 $M_p(x) = x^p M^{p+1}(x)$ 。

三、探討Ribbons Tableaux與「缺一格」結構的關聯性。

(一) 簡介 r -Ribbons構造的方式及相關想法

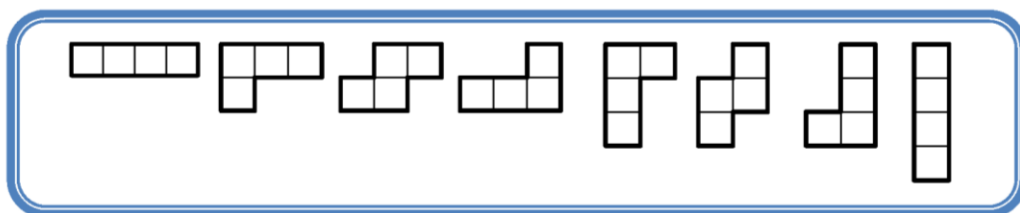
以骨牌排列為基礎，已知SDT與GDT (即2-SYT與2-GYT) 的排列方法數相同，且其中的關係可以藉由「移動骨牌」的方式說明。將骨牌擴展至「多格相連」的情形，發現雖然此結構的排列情形較骨牌複雜許多，但其缺格結構依然有許多相當有趣的特性。

然而，原先的骨牌排列結構為此「多格相連」結構的簡化情形，推測此結構的各種規律、性質等應與骨牌排列相似。因此，由骨牌排列結構開始擴展，並在原本的對應規則的架構下額外加入「轉角」、「端點」等想法，如圖(28)，歸納推導出「多格相連」的排列結構與其「缺一格」形式之間的對應操作流程，並以標號的方式說明一些特別的現象。



圖(28)

骨牌方格形狀即為2-Ribbons，並有水平及直立兩種不同的排列方式，3-Ribbons共有四種不同的排列方式，而4-Ribbons共有四種不同的排列方式，如圖(29)。 r -Ribbons共有 2^{r-1} 種不同的置放方式。



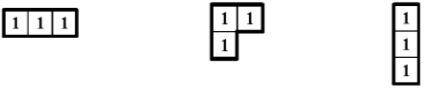
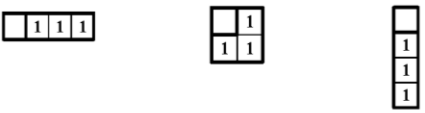
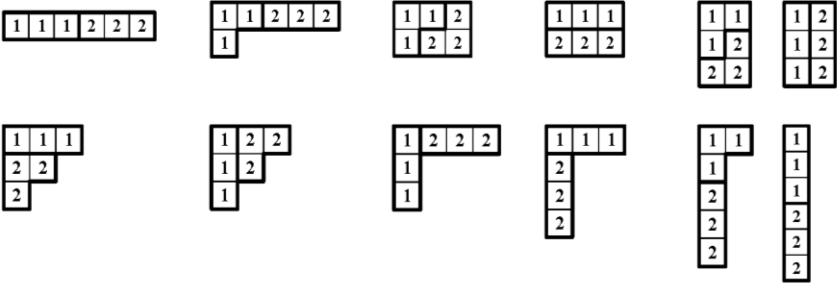
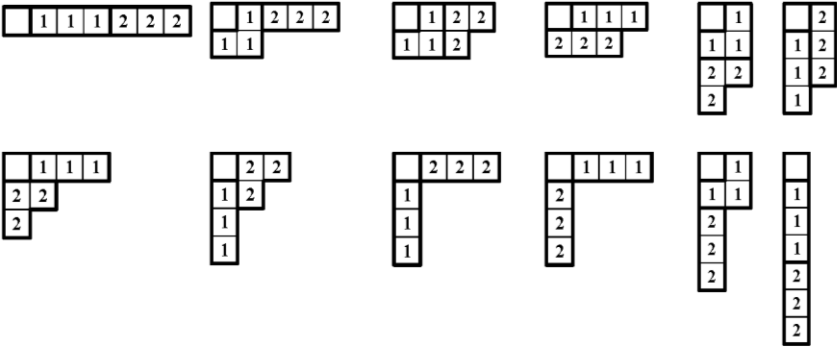
圖(29)

(二) 完整與「缺一格」的 r -Ribbons Tableaux排列結構之間的探討

嘗試擴展至利用3-Ribbons、4-Ribbons等方格，依特定規則填入Young Diagram中，並討論在限制高度、缺格圖形等條件下是否也有特別的規律？對於更多方格的排列是否也有類似的性質？

1. 探討Standard r -Ribbons Tableaux(r -SYT)與Good r -Ribbons Tableaux(r -GYT)的各排列方式

先以列舉的方式觀察其圖形及數量，如次頁表(5)為列舉3-SYT與3-GYT的排列方式以及其數量，表(6)為 r -SYT與 r -GYT的排列方法數所形成的數列，發現雖然排列的方式有很大的不同，其中卻又有些特殊的相關性，接著我們將陸續探討原始情形以及「缺一格」的排列情形之間的關係。

圖形	塊數	總數	排列方式
3-SYT	1	3	
3-GYT	1	3	
3-SYT	2	12	
3-GYT	2	12	

表(5)

r	r-SYT方法數, 無高度限制	r	r-GYT方法數, 無高度限制
2	2, 6, 20, 76, 312, 1384, 6512, ...	2	2, 6, 20, 76, 312, 1384, 6512, ...
3	3, 12, 54, 270, 1458, 8424, ...	3	3, 12, 54, 270, 1458, 8424, ...
4	4, 20, 112, 688, 4544, 31936, ...	4	4, 20, 112, 688, 4544, 31936, ...
5	5, 30, 200, 1450, 11250, 92500, ...	5	5, 30, 200, 1450, 11250, 92500, ...
6	6, 42, 324, 2700, 23976, 224856, ...	6	6, 42, 324, 2700, 23976, 224856, ...
7	7, 56, 490, 4606, 45962, 482944, ...	7	7, 56, 490, 4606, 45962, 482944, ...

表(6)

從表格中發現 r -SYT與 r -GYT的排列方法數一致，其中當 $r = 2$ 時即為骨牌排列。故嘗試延伸原先的「骨牌對應規則」以進行更深入的探討，接著將以對應關係探討其結構。

2. r -SYT與 r -GYT之間的對應方法

由 r -SYT經由對應方法轉換為 r -GYT之操作流程：

- (1) 增加一個額外的「暫存方格」，並於此標記 r -SYT左上角方格之編號，再移除 r -SYT左上角方格的編號。
- (2) 將「暫存方格」所標記的編號與唯一完全滿足下列(A)、(B)、(C)規則的方格交換。重複以上操作，若此滿足條件的方格未標記編號(位於原排列之右方或下方)，則移去「暫存方格」，對應操作結束。
 - (A) 不得與上一步的逆向操作相同。
 - (B) 操作後每列由左至右、每行由上至下的方格所標記之編號均單調遞增。
 - (C) 操作後標記相同編號的方格必須連通，且仍為 r -Ribbons形式。

由 r -GYT經由對應方法轉換為 r -SYT之操作流程：

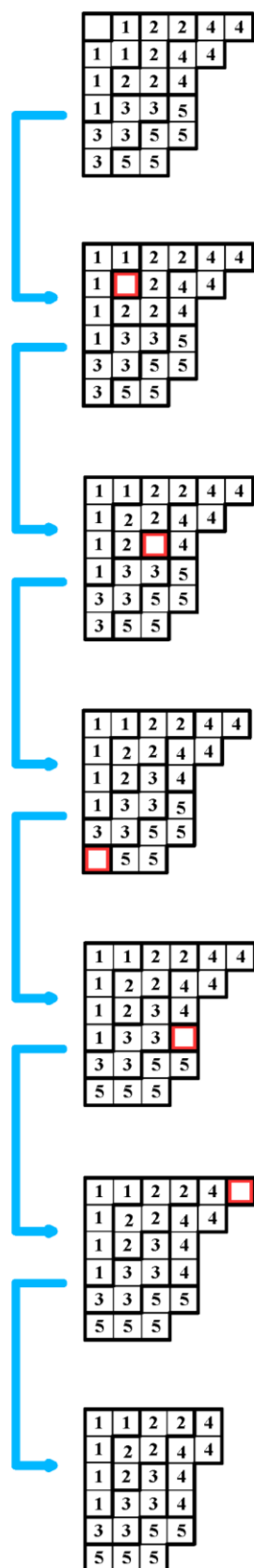
- (1) 考慮 r -GYT左上角未標記編號的方格，稱此為空格。
- (2) 將唯一完全滿足下列(A)、(B)、(C)規則的方格所標記的編號移動至空格，即產生新的空格。重複以上操作，若此空格的右方及下方均無任何已標記編號的方格，則移去空格，對應操作完成。
 - (A) 不得與上一步的逆向操作相同。
 - (B) 操作後每列由左至右、每行由上至下的方格所標記之編號均單調遞增。
 - (C) 操作後標記相同編號的方格必須連通，且仍為 r -Ribbons形式。

註：其對應操作規則中條件(C)：操作後標記相同編號的方格必須連通，且仍為 r -Ribbons形式，在此特別將可滿足此規則之詳細條件列舉如下：

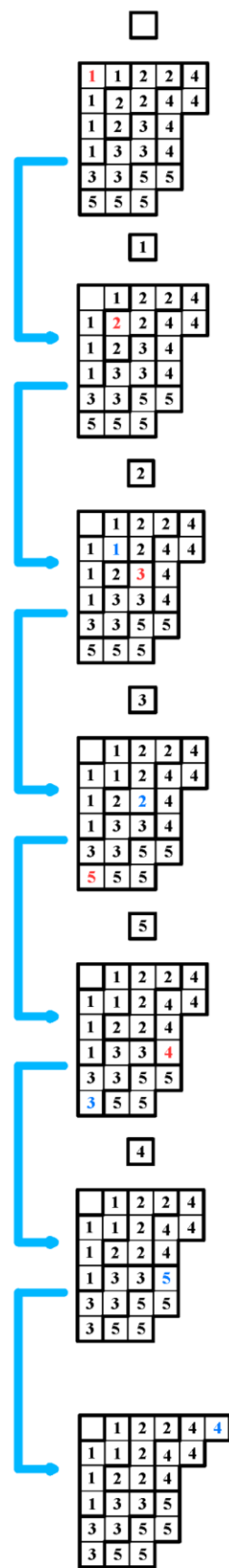
- (1) 避免操作後產生有任何「 2×2 」區域的方格，所標記的編號相同。
- (2) 不得移動與空格相鄰的方格。
- (3) 考慮有著與欲移動方格相同編號的方格中，必須存在至少一個與空格(移動後的目的地)相鄰。
- (4) 所移動的位置必為 r -Ribbon圖形的「端點」或「轉角」，其中「轉角」的移動以其對角線位置是空格時為限。

其中，在每一步的移動過程中，合法操作必定恰好一步。因此，依序執行各項操作即可得到相對應的結果。以下為對應範例，如次頁圖(30)。

$r\text{-SYT} \rightarrow r\text{-GYT}$



$r\text{-GYT} \rightarrow r\text{-SYT}$



圖(30)

3. r -SYT與 r -GYT數量在限制高度下的關係

依據上述的對應操作流程，我們發現有時 r -SYT排列圖形的高度在轉換為 r -GYT後會發生變化，由前言得知：SDT與GDT在高度限制為奇數時，其排列的方法數依然相同，於是我們探討 r -Ribbons排列在限制不同高度下的結構，觀察高度變化情形，並列出其排列方法數，如下表(7)至表(9)：(其中在高度限制為1時，各排列方法均只有一種，故此處不再列出。)

3-SYT 高度限制	數列	3-GYT 高度限制	數列
2	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...	2	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...
3	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ...	3	2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123, ...
4	3, 10, 35, 126, 462, 1716, ...	4	3, 10, 35, 126, 462, 1716, ...
5	3, 11, 43, 177, 751, 3263, ...	5	3, 11, 43, 177, 751, 3263, ...
6	3, 12, 51, 234, 1110, 5460, ...	6	3, 11, 44, 188, 842, 3911, ...
7	3, 12, 54, 270, 1458, 8424, ...	7	3, 12, 54, 270, 1458, 8424, ...
8	3, 12, 52, 245, 1211, 6253, ...	8	3, 12, 52, 245, 1211, 6253, ...
9	3, 12, 53, 256, 1312, 7066, ...	9	3, 12, 53, 257, 1326, 7223, ...
10	3, 12, 54, 267, 1413, 7899, ...	10	3, 12, 54, 267, 1413, 7899, ...

表(7)

4-SYT 高度限制	數列	4-GYT 高度限制	數列
2	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...	2	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...
3	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ...	3	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ...
4	4, 16, 64, 256, 1024, 4096, ...	4	3, 10, 35, 126, 462, 1716, ...
5	4, 17, 75, 339, 1558, 7247, ...	5	4, 17, 75, 339, 1558, 7247, ...
6	4, 18, 86, 428, 2192, 11468, ...	6	4, 18, 86, 428, 2192, 11468, ...
7	4, 19, 97, 523, 2926, 16849, ...	7	4, 19, 97, 523, 2926, 16849, ...
8	4, 20, 108, 624, 3760, 23480, ...	8	4, 19, 98, 538, 3092, 18433, ...
9	4, 20, 109, 639, 3936, 25269, ...	9	4, 20, 109, 639, 3936, 25269, ...
10	4, 20, 110, 654, 4112, 27078, ...	10	4, 20, 110, 654, 4112, 27078, ...

表(8)

5-SYT 高度限制	數列	5-GYT 高度限制	數列
2	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...	2	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...
3	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ...	3	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ...
4	4, 16, 64, 256, 1024, 4096, ...	4	4, 16, 64, 256, 1024, 4096, ...
5	5, 25, 125, 625, 3125, 15625, ...	5	4, 17, 75, 339, 1558, 7247, ...
6	5, 26, 139, 758, 4194, 23460, ...	6	5, 26, 139, 758, 4194, 23460, ...
7	5, 27, 153, 897, 5393, 33055, ...	7	5, 27, 153, 897, 5393, 33055, ...
8	5, 28, 167, 1042, 6722, 44500, ...	8	5, 28, 167, 1042, 6722, 44500, ...
9	5, 29, 181, 1193, 8181, 57885, ...	9	5, 29, 181, 1193, 8181, 57885, ...
10	5, 30, 195, 1350, 9770, 73300, ...	10	5, 29, 182, 1212, 8442, 60975, ...

表(9)

說明：以先前所構造的對應流程而言，不易討論其對應前後高度產生的變化。已知在特定的情形下，若 r -SYT的高度為 r 或其倍數， r -SYT會與高度為 $r + 1$ 的 r -GYT產生對應。因此，當所限制的高度為 r 的倍數時， r -SYT與 r -GYT之排列方法數並不相同。嘗試分析各種移動情形，在此討論高度變化的關係以及其成因。

想法：由於 r -Ribbons必須完整填入Young Diagram中，若在Young Diagram內進行特別的「標號」，即可藉此觀察各 r -Ribbons所需的空間分佈，進而解釋排列各位置間的相對關係。利用類似「染色」的方法，將Young Diagram中各位置的方格標記其「位置標號」。

其標記方式如下：將左上角的方格「位置標號」設為0，並規定在方格排列中，若向右一格，其「位置標號」增加1；向下一格，其「位置標號」增加 $r - 1$ 。最後以 r 除「位置標號」取其餘數，即位於第 i 列第 j 行方格的位置編號固定為： $(j - i) \bmod r$ 取正值。如圖(31)。

0	1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2	1
0	1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2	1
0	1	2	0	1	2	0	1	2

圖(31)

由以上標號的想法，對於每塊 r -Ribbons填入Young Diagram的過程中，我們發現滿足以下性質。

推論一：對於每塊 r -Ribbons必定恰包含標號0至 $r - 1$ 各一次。

說明：由於 r -Ribbons以遞迴方式構造形成，逐步由 $(r-1)$ -Ribbons圖形之右上角方格選擇向右或向上增加一個單位方格構成 r -Ribbons。然而，無論所選為向上或向右添加任一小方格，其新的方格之「位置標號」均較原始右上角方格增加1，由於共有 r 個方格形成 r -Ribbons，且1為此餘數循環的單位元素，因此，由 r 個小方格所組成的 r -Ribbons「位置標號」中必定包含編號0, 1, 2, ..., $r - 1$ 且不重複出現。

推論二：若限制 r -SYT與 r -GYT的高度為 H ，當 H 不為 r 的倍數時，其排列方法數相同。

說明：在 r -SYT與 r -GYT之間的對應操作中，須先將左上角的方格移去，此步驟必然會導致「位置標號」為0的方格數量減少一個(不含左上角的缺格，因為此缺格並非 r -Ribbons排列所產生)。然而，將 r -GYT的各排列方格仍滿足上述定理，其各「位置標號」出現次數相等。因此，在與其所對應的 r -GYT中，除 r -SDT所已排列的方格外，必須額外地增加1個「位置標號」為0的方格。而由此對應操作，已知每個方格至多僅會移動一次，對於與 r -SYT圖形右、下邊界相鄰之方格而言，除可能移動至此方格的右方外，當高度 $H = rk$ 時，其第 $rk + 1$ 列第1行的標號亦為0，故方塊也將可能被移動至此處。反之，由於新增一列必然會使用到其最左邊的方格，但其標號不為0，不能移動至此處，故高度維持不變。若此 r -SYT的高度 H 為 r 的整數倍，其相對應的 r -GYT排列之高度可能為 H 或 $H + 1$ ，因此，當高度限制於 r 的整數倍時， r -SYT與 r -GYT排列方法數並不相同。

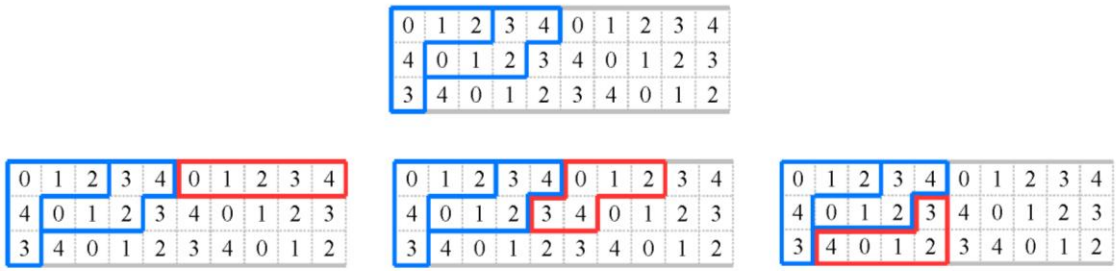
四、探討特定高度下 r -Ribbons Tableaux 之排列結構性質與數量關係

於一篇相關的研究^[1]中，可以得知骨牌(2-Ribbons)的排列方法數與廣義Motzkin數列有密切的關係。已知 $SDT_{\leq 2}(n)$ 的數量為 2^n ，而 $SDT_{\leq 3}(n)$ 與廣義Motzkin路徑形成對應。那利用 r -Ribbons Tableaux在特定高度下進行排列，其結果又會是如何呢？以下探討高度限制為 H 時 r -SYT的排列方法數。

想法：在 $SDT_{\leq 2}$ 的情形下，若均依照規則進行排列，無論目前的排列情形為何，骨牌皆恰有兩種放置方法，因此放置 n 塊骨牌的數量為 2^n 。

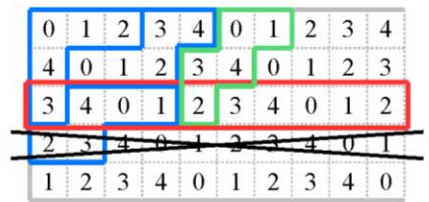
將此現象延伸至 r -Ribbons的排列情形，發現其組成較為複雜，必須討論各種排列情形，其類型卻高達 r^r 種，因此，必須以一般化的規則進行討論。在此以「標號」系統，藉由在Young Diagram上方格進行標記編號的動作，探討各種情況下 r -Ribbons可能排列的位置與相關性質。

推論三： r -SYT的高度限制為 H ，當 $H \leq r$ 時，若已填入部分均為合法的 r -Ribbons排列，則無論目前已知的排列情形為何，必定恰有 H 種添加一塊 r -Ribbons的方式，意即 r -SYT在此情形下的排列方法數為 H^n 。以 $r = 5, H = 3$ 為例，如圖(32)。



圖(32)

說明：將 r -Ribbons填入Young Diagram的過程中，增加下一塊 r -Ribbons的所在位置，使用到第 i 列但未使用到第 $i+1$ 列者($i = 1, 2, \dots, H, (H \leq r)$)，恰有一種放置方式，在此稱填入的 r -Ribbons之「位置」為 i 。以圖(33)為例，此為 $i = 3$ 的情形，其中綠色的5-Ribbons的所在位置使用到第三列(如紅色框)的空間，但未使用到第四列的空間。



圖(33)

接著，進一步的探討 r -Ribbons在Young Diagram中的排列位置。依序觀察每一列，對於第 i 列而言，設 X_i 為此列之尚未被骨牌所覆蓋的位置的最左邊者之標號。如次頁圖(34)、圖(35)所示，即 $X_1 = 0, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 4, X_5 = 1$ 。

0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	

圖(34)

0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	

圖(35)

由於Ribbons必須依規則連續置放，故在符合規則的情形下，可由數學歸納法簡單證明每添加任何一塊 r -Ribbons，集合 $\{X_i | i = 1, 2, \dots, r\}$ 仍然不變。只要是在合法的 r -Ribbons排列情形下， $\{X_i | i = 1, 2, \dots, r\} = \{0, 1, \dots, r-1\}$ ，即在 X_i 中，數值 $0, 1, \dots, r-1$ 均各出現一次。

想法：可以具體的藉由下列操作說明將 r -Ribbons填入Young Diagram的過程中構造所有可能的排列方式。

說明：任何排列情形，均可於第一列添加一塊由左而右增加 r 格形式的 r -Ribbons，即 W_1 的位置連續增加 r 格水平相連的 r -Ribbons，則所形成的 r -SYT仍然合法，完成放置位置 $i = 1$ 時的情形。接著，可以藉由「調整」的操作，依序構造 $i = 2, 3, \dots, H$ 時的 r -Ribbons形式。

r -Ribbons調整操作：

我們可以依此調整操作，由置放位置為 i 的 r -Ribbons形式構造出置放位置為 $i + 1$ 的該形式。而新的置放位置將會使用到下一列尚未被覆蓋部分的最左邊方格，其標號為 X_i ，由於每塊 r -Ribbons所使用到的標號恰為 0 至 $r-1$ 各一次，因此，此 r -Ribbons中必定存在恰好一塊編號同為 X_i 的方格。將此方格與後面的所有方格一起移動至下一列，考慮目前所形成的 r -Ribbons是否連通，若尚不連通，則繼續討論此列次一方格的標號，將 r -Ribbons標號與之相同者與其後面的所有方格一起移動至下一列，直到形成一個連通的圖形為止，則此圖形必定為 r -Ribbons。以下舉例說明 $r = 5, H = 5$ 的操作方法：

<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>.....</td></tr><tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>.....</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>.....</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>.....</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>.....</td></tr></table>	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3		4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2		3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1		2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0		1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4		此為 $i = 1$ 時的唯一Ribbons放置方式。
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3																																																															
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2																																																															
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1																																																															
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0																																																															
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4																																																															
<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>.....</td></tr><tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>.....</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>.....</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>.....</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>.....</td></tr></table>	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3		4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2		3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1		2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0		1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4		接著欲構造 $i = 2$ 時，Ribbons放置方式。觀察得 $X_2 = 3$ ，尋找目前Ribbons內方格標號同為3者，如加圈標記的數字部分。並連同後面的所有方格一起搬移至第二列。
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3																																																															
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2																																																															
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1																																																															
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0																																																															
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4																																																															
<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>.....</td></tr><tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>.....</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>.....</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>.....</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>.....</td></tr></table>	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3		4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2		3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1		2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0		1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4		移動後的Ribbons放置方式互相連通且滿足規則，故此為 $i = 2$ 時唯一合法的Ribbons放置方式。
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3																																																															
4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2																																																															
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1																																																															
2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0																																																															
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4																																																															

	接著欲構造$i = 3$時的Ribbons放置方式，由於$X_3 = 2$，如加圈標記之數字部分，尋找骨牌內標號為2的方格，仿照上述方式進行移動。
	移動後的Ribbons放置方式互相連通且滿足規則，故此為$i = 3$時唯一合法的Ribbons放置方式。
	接著欲構造$i = 4$時的Ribbons放置方式，由於$X_4 = 4$，如加圈標記之數字部分，尋找骨牌內標號為4的方格，仿照上述方式進行移動。
	移動後的Ribbons放置方式尚未互相連通，因此，考慮新的$X'_4 = 0$，尋找骨牌內標號為0的方格，並將此方格與其後面的所有方格一同移動至第4列。
	移動後的Ribbons放置方式互相連通且滿足規則，可得此為$i = 4$時唯一合法的Ribbons放置方式。
	接著欲構造$i = 5$時的Ribbons放置方式，由於$X_5 = 1$，如加圈標記之數字部分，尋找骨牌內標號為1的方格移動至第5列。
	移動後的Ribbons放置方式尚未互相連通，因此，考慮新的$X'_5 = 2$，尋找骨牌內標號為2的方格，並將此方格移動至第5列。
	移動後的Ribbons放置方式尚未互相連通，因此，考慮新的$X''_5 = 3$，尋找骨牌內標號為3的方格，並將此方格移動至第5列。
	移動後的Ribbons放置方式互相連通且滿足規則，可得此為$i = 5$時唯一合法的Ribbons放置方式。

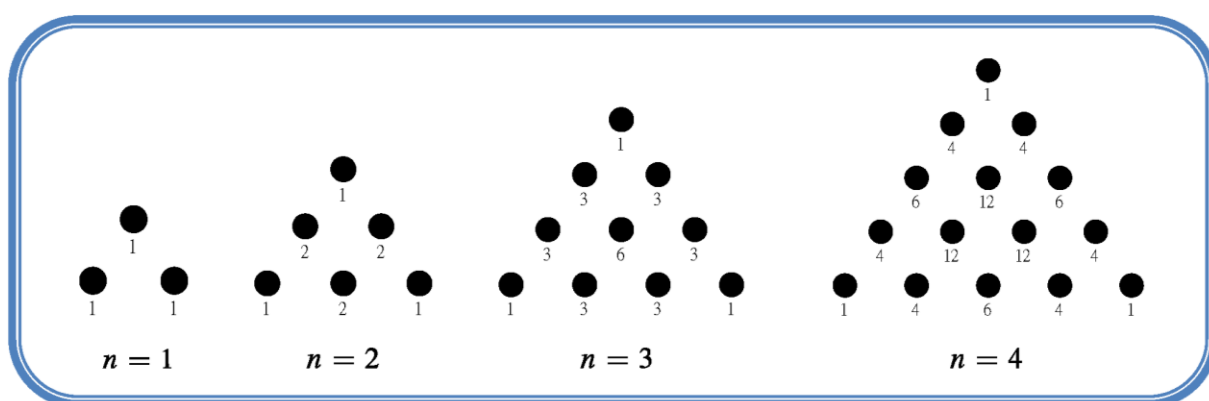
藉由「 r -Ribbons調整操作」方式，可以構造各「排列位置」介於1至 i 之間的 r -Ribbons唯一置放方式，而 $i = 1$ 時也恰有一置放方式。因此，對於任意 i , $1 \leq i \leq r$ ，均恰有一種合法的 r -Ribbons新增方式。因此，對於任意高度限制 H , $H \leq r$ 的Standard r -Ribbons Tableau而言，加入 r -Ribbons的放置方法恰有 H 種。

推論四：對於高度限制為 H 的 r -SYT，若 $H \leq r$ ，以各特定列區間的相異方格數進行分類，其結果為 H 維空間下的Pascal分佈。

說明：依序將編號為1至 n 的 r -Ribbons填入高度限制為 H , $H \leq r$ 的Young Diagram中，對於每一步而言，均恰有 H 種添加 r -Ribbons的方法，且其位置分別為1至 i 。可以針對各「位置」總共被使用的次數進行統計，統計方法如下：

對於第 i 列而言，定義 T_i 為列區間 $[i, H]$ 中的 r -Ribbons編號總數，此處相同者不重複計算。則無論原先的排列情形如何，若添加了一塊「位置」為 i 的 r -Ribbons，設新的統計量為 T'_i ，則有 $T'_i - T'_{i+1} = T_i - T_{i+1} + 1$ 。

n 維Pascal分佈的數量可由 $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ 表示，其中 $\sum_{i=1}^n E_i = n$ 。將其所使用到的各「位置」進行計數，並由列區間的相異方格數 T_i 關係分類， T_i 僅與所添加之Ribbons的「位置」有關。由定義與上述推論之排列組合性質，可說明其組合結果為 r 維空間下的Pascal分佈，如圖(36)分別為 r -Ribbon總數 $n = 1, 2, 3, 4$ 時的三維Pascal分佈。其中，第 i 列由左至右第 j 個點表示滿足 $T_2 = i, T_3 = j$ 的 r -Ribbon骨牌排列方法數。



圖(36)

陸、結論

一、對於高度限制為3的SSDT(Skew-SDT)，將缺格形式 $\mu(i, j)$ 依奇偶關係分成四類，利用骨牌在路徑中的表現性質，與「提升起點至 $(0, p)$ 的廣義Motzkin路徑」形成對應關係：(其中 i, j 皆為非負整數)

(一) i 為偶數， j 為奇數：僅能放置水平骨牌，可以簡單對應到Skew-SYT,

$\mu(\frac{i-2}{2}, \frac{j-1}{2})$ ，而Eu^[8]已完成此類情形的探討。

(二) i 為偶數， j 為偶數：對應由 $(0, \frac{i}{2})$ 出發的廣義 p -Motzkin路徑。

(三) i 為奇數， j 為奇數：對應由 $(0, \frac{j-1}{2})$ 出發的廣義 p -Motzkin路徑。

(四) i 為奇數， j 為偶數：對應由 $(0, \frac{i-j-1}{2})$ 出發的廣義 p -Motzkin路徑。

藉由上述關係，可得知缺格形式的骨牌排列方法數為「廣義Motzkin數列」的特定線性組合。並藉此計算各缺格形式之骨牌排列數量的生成函數：

$A_p(x) = \frac{(xM(x))^{p+1}-1}{3x-1}$ ，其中 $M(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}$ 為Motzkin數列的生成函數。

二、在 r -Ribbons的排列圖形中：

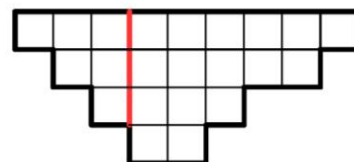
(一) 考慮Standard r -Ribbons Tableaux以及「缺一格」的Good r -Ribbons Tableaux，在無高度限制的情形下，可以藉由函數對應的方法說明其排列方法數相同；若其高度限制 H 不為 r 的整數倍時，則排列數量亦相同。

(二) 對於高度限制為 H 的 r -SYT，若 $H \leq r$ ，則填入 n 塊 r -Ribbons的方法數為 r^n 。以各特定列區間的相異方格數進行分類，其結果為 H 維空間下的Pascal分佈。

柒、未來展望

在本研究中已探討 r -Ribbons的排列情形中「完整」與「缺一格」的相關性及圖形結構、性質等。然而，在特定的高度限制下，此結構亦能與相關路徑形成對應，且各式缺格的排列情形事實上仍與路徑有密切關聯。接著希望能更加完整的研究、探討此結構以及所對應路徑的相關性質。

除此之外，Shifted Tableaux (如圖(37)) 也是近年組合數學研究的熱門題材。已知有類似的公式計算特定形式的Shifted Tableau排列方法數，期望未來能依照與本研究相關的類似想法，試著構造與路徑之對應方法，以探討此結構的各種性質及一般情形下的數量。



圖(37)

捌、參考資料

- [1] 李宜霖、程鼎元 (2011)。缺一格也可以—骨牌排列順序數量之探討。2011台灣國際科學展覽會優勝作品專輯。
- [2] 侯宗誠、許德瑋 (2010)。由蟲子問題衍生一路領先與Motzkin路徑之對應及推廣。2010台灣國際科學展覽會優勝作品專輯。
- [3] 游森棚 (2009)。游理數，數裡游—骨牌拼圖。科學月刊。第四十卷第十期。頁740-741。
- [4] T.-Y. Cheng, Y.-L. Lee, Tiling and Playing with Dominos, National ExpoCiencias 2011 Research Paper, (2011).
- [5] P. Callahan, P. Chinn, S. Heubach, Tiling With Trominoes, *Congressus Numerantium* 177, (2005).
- [6] R. Donaghey, L.W. Shapiro, Motzkin Numbers, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 23, 291-301, (1977).
- [7] S. B. Ekhad, D. Zeilberger, Proof of a conjecture of Amitai Regev about three-rowed Young tableaux, *The Personal Journal of Shalosh B.* (2006).
- [8] S.-P. Eu, Skew-standard tableaux with three rows, *Advances in Applied Mathematics*, (2010).
- [9] S. Fomin, N. Lulov, On the number of rim hook tableaux, *Journal of Mathematical Sciences, Vol. 87, No.6*, (1997).
- [10] P. W. Kasteleyn, The statistics of dimers on a lattice, I: The number of dimer arrangements on a quadratic lattice, *Physica* 27, p 1209-1225, (1961).
- [11] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (整數數列百科)
<http://oeis.org/>
- [12] Young Tableau 相關資訊
http://en.wikipedia.org/wiki/Young_tableau
<http://mathworld.wolfram.com/YoungTableau.html>
<http://oeis.org/A000085>
- [13] Motzkin Numbers 相關資訊
http://en.wikipedia.org/wiki/Motzkin_number
<http://mathworld.wolfram.com/MotzkinNumber.html>
<http://oeis.org/A001006>
- [14] Domino Tiling 相關資訊
http://en.wikipedia.org/wiki/Domino_tiling

附錄一、*r*-SYT 與 *r*-GYT 之對應列表

其中每列的奇數欄為 r -SYT 排列，而右邊為與之相對應之 r -GYT 排列，左上角的缺格以 # 號表示。

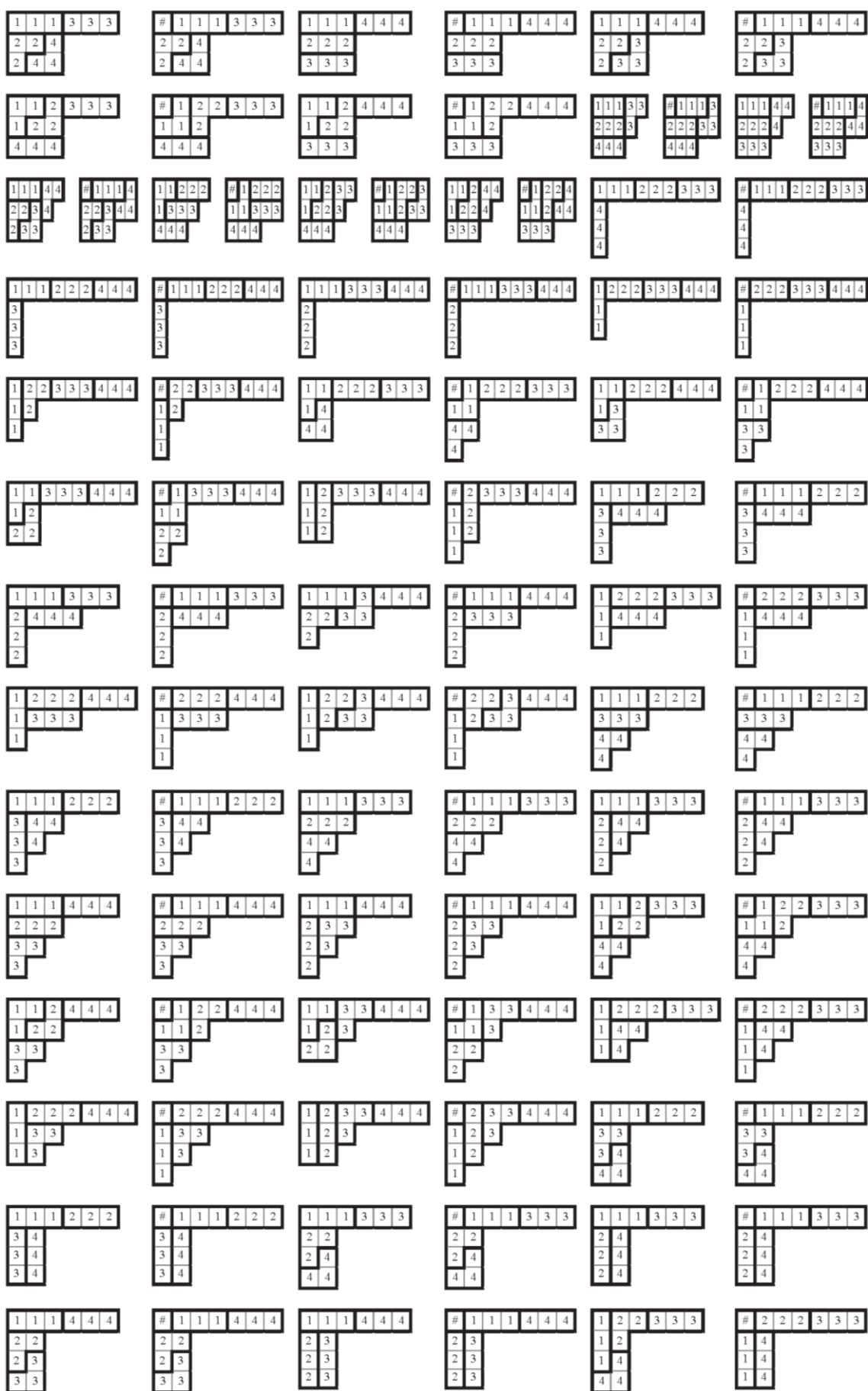
1 3-Ribbon

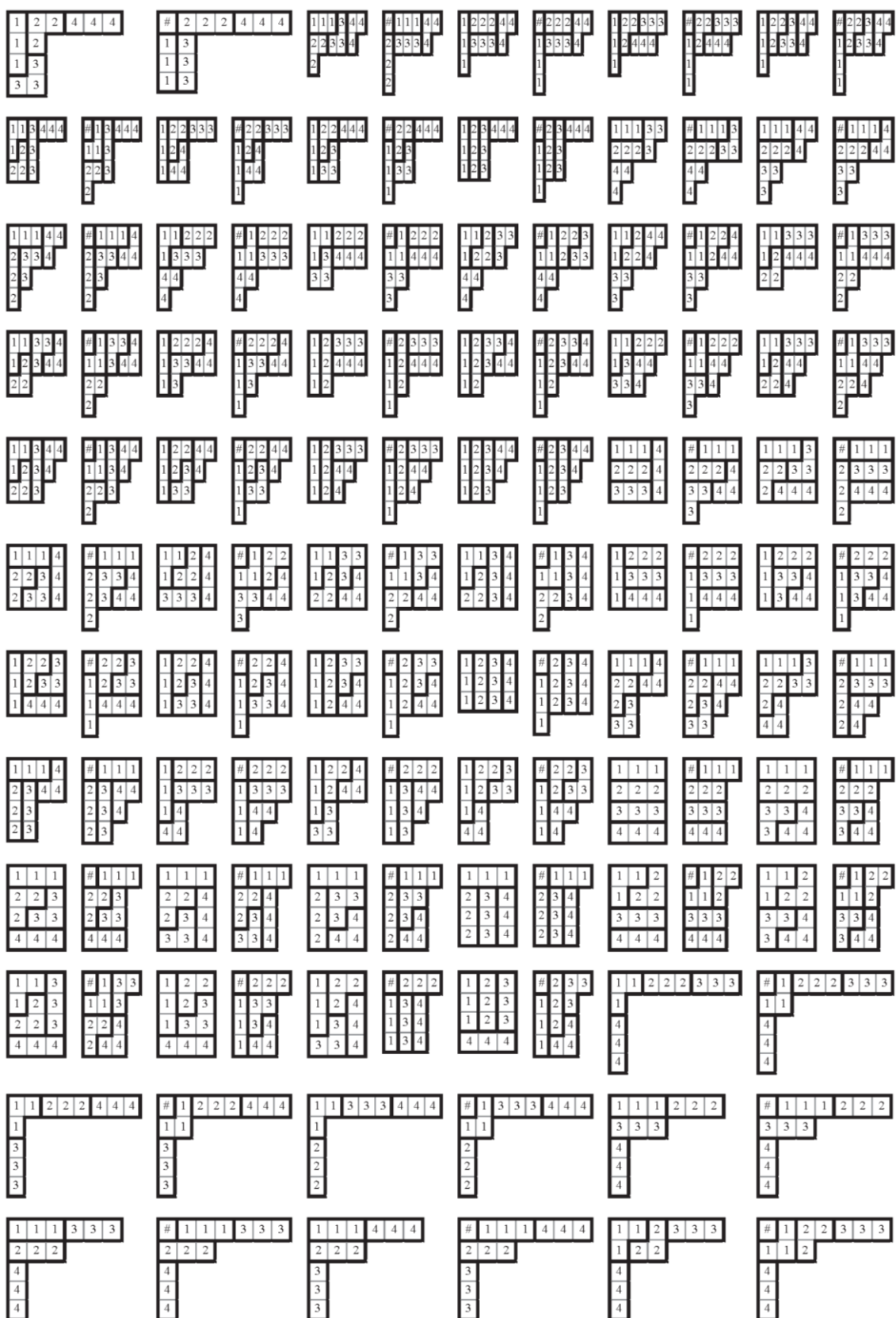
2 3-Ribbons

The figure displays 20 small 3x3 grids, each containing a unique arrangement of the symbols 1, 2, and #. The grids are organized into three rows: the first row contains 10 grids, the second row contains 10 grids, and the third row contains 2 grids. Each grid represents a different state or configuration of the symbols.

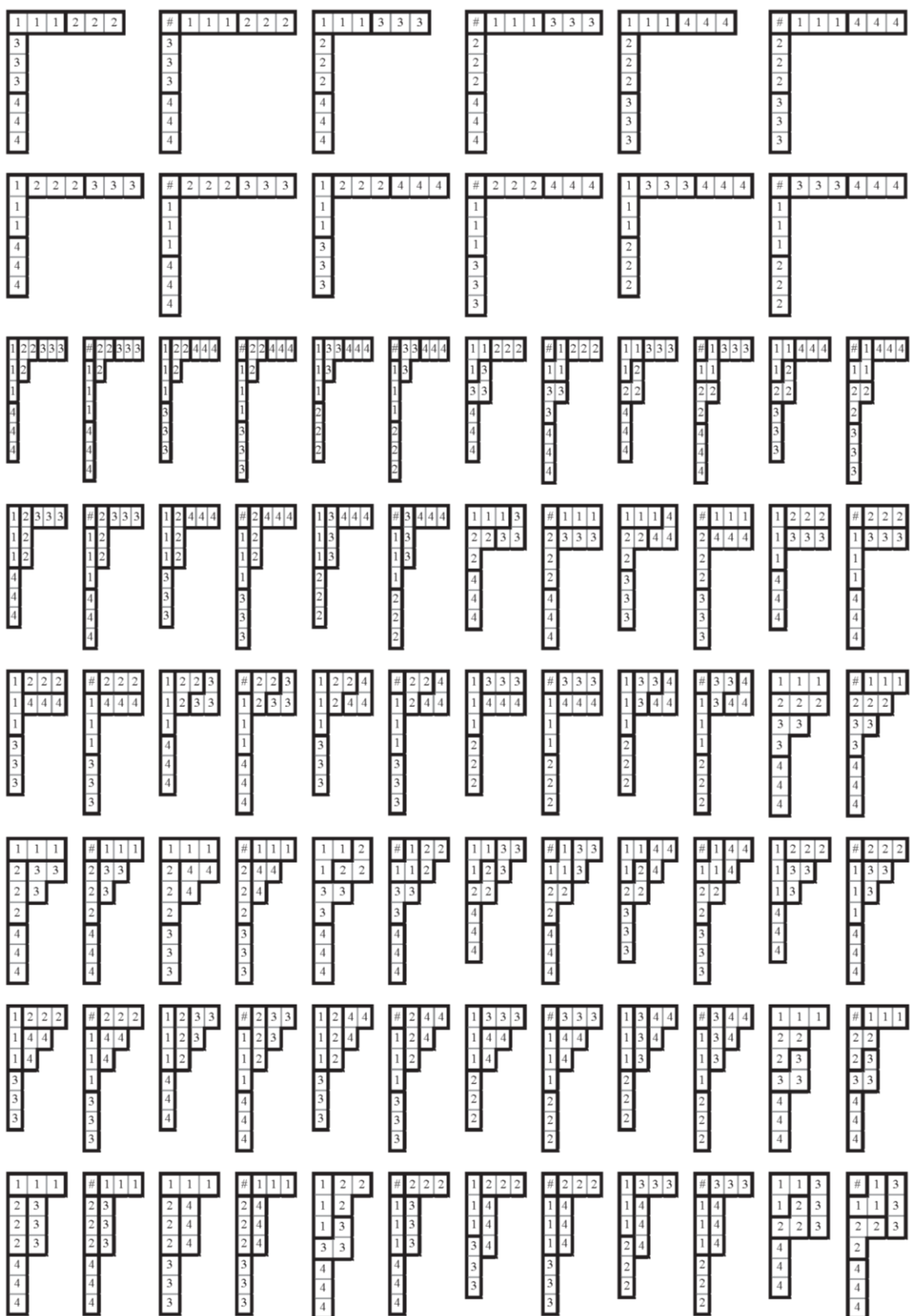
3 3-Ribbons

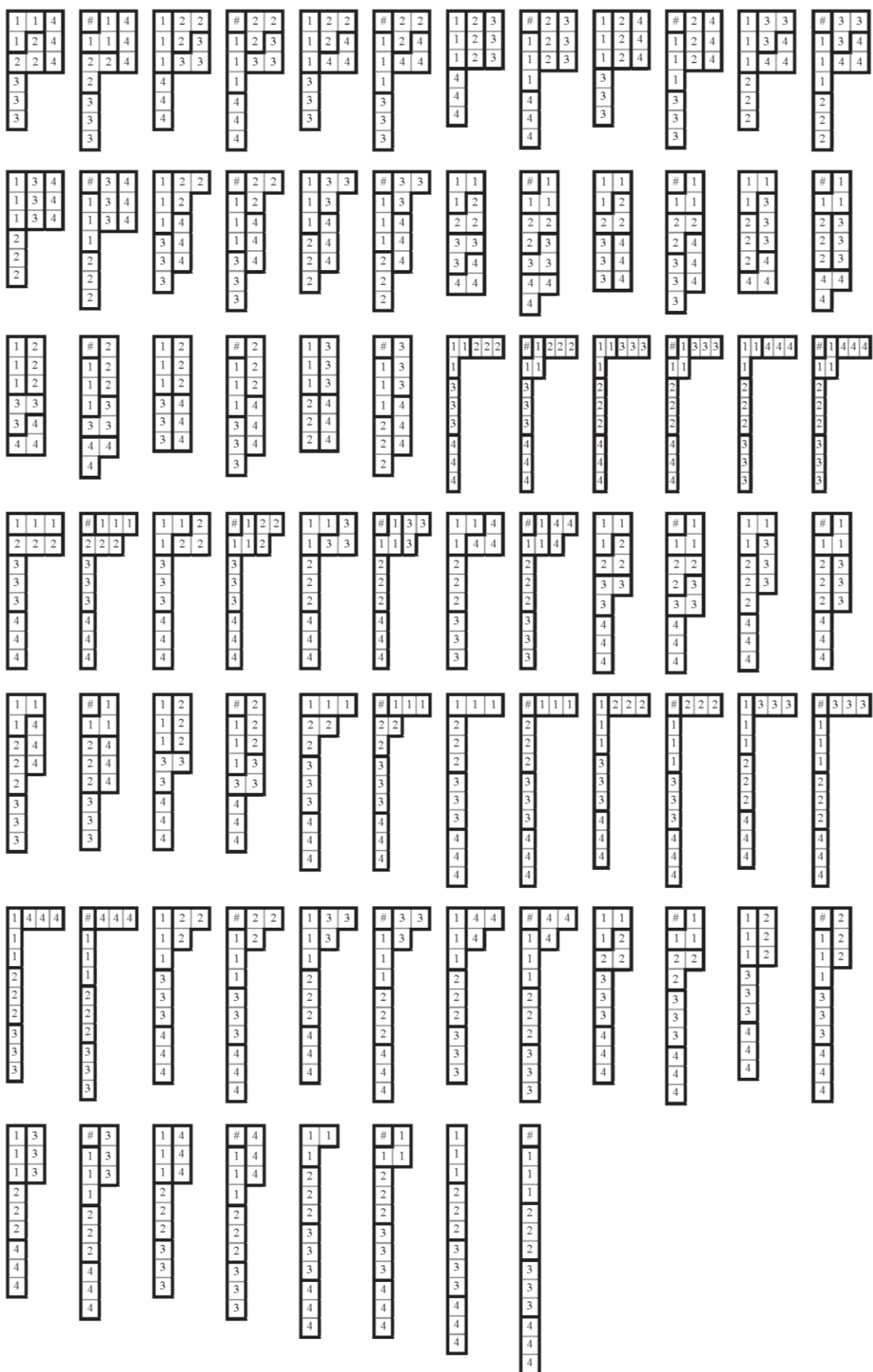








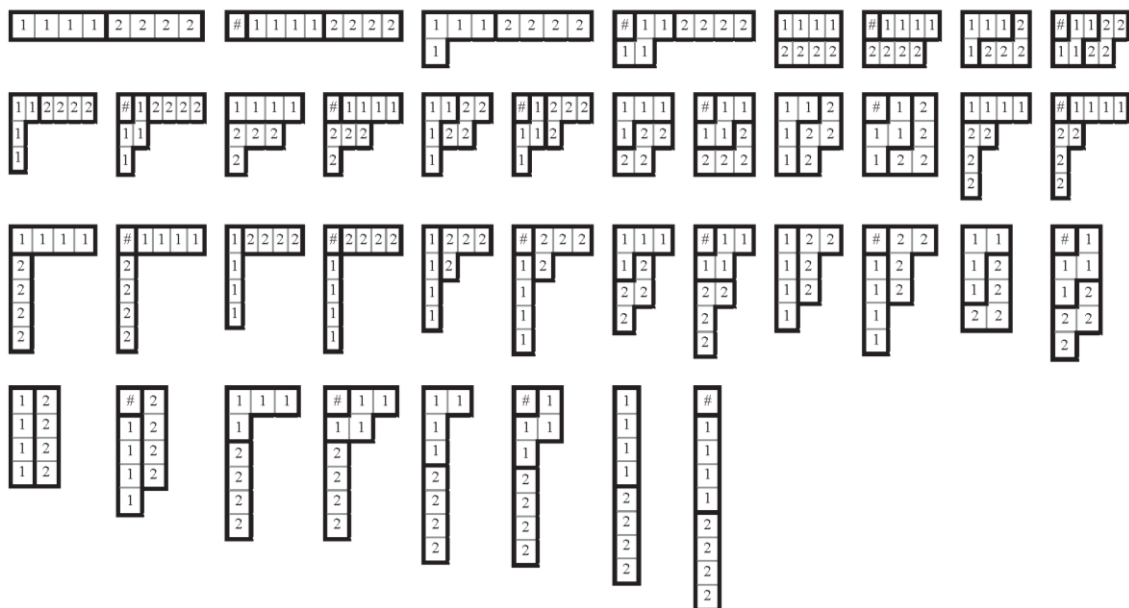




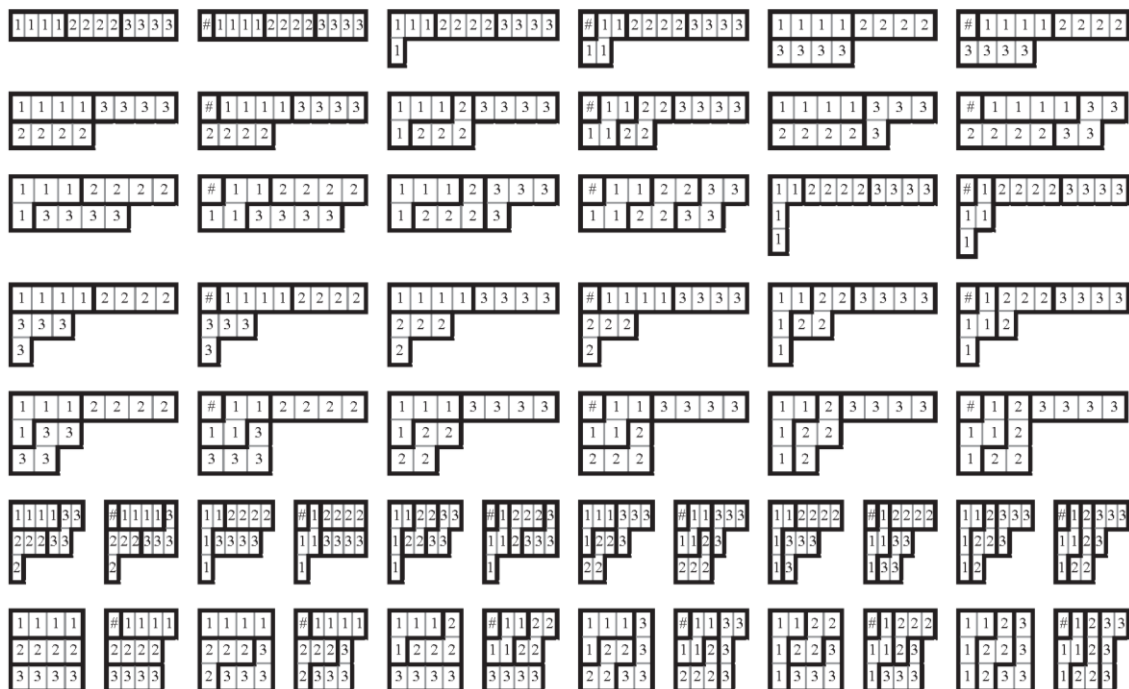
1 4-Ribbon

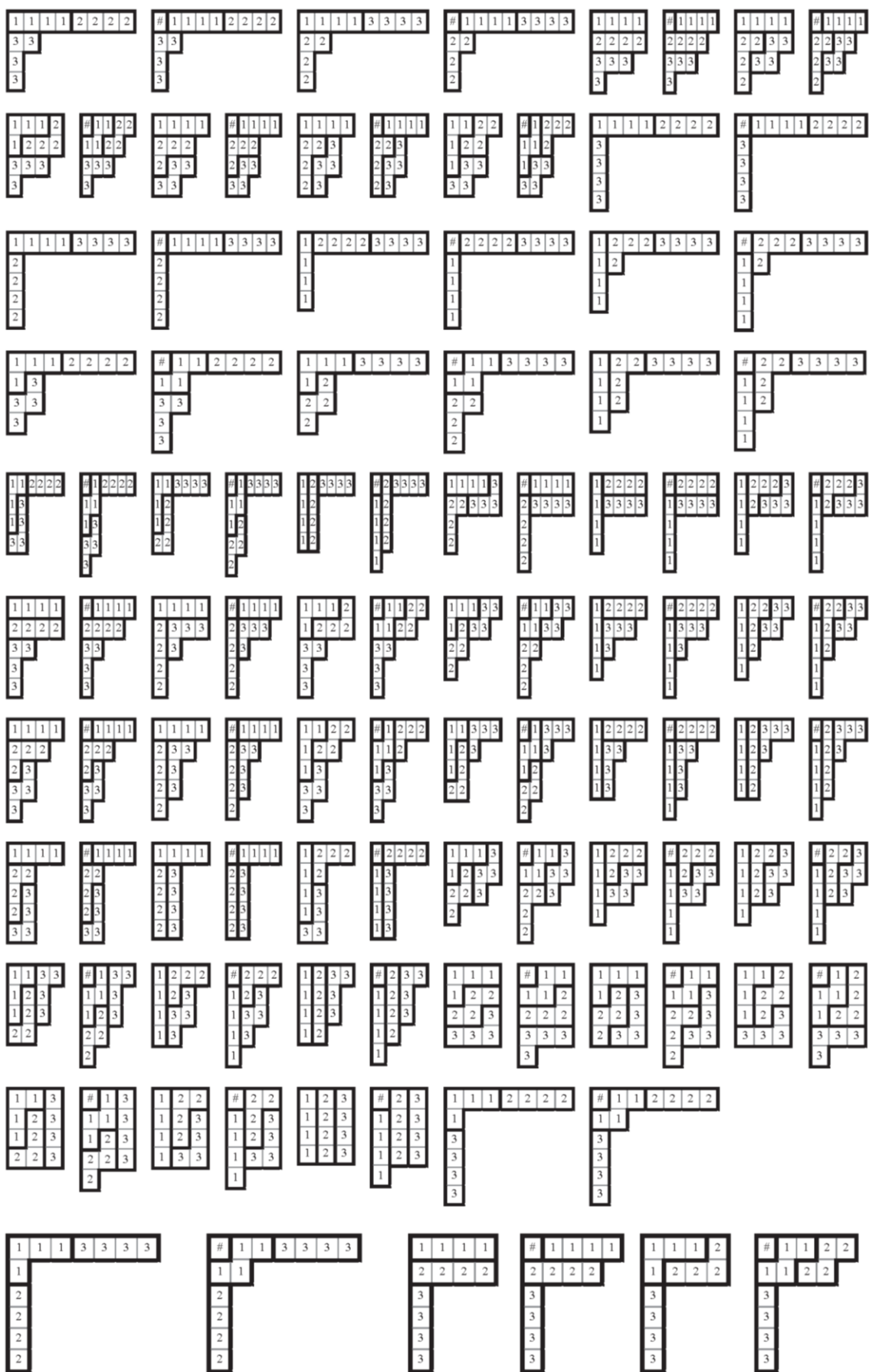


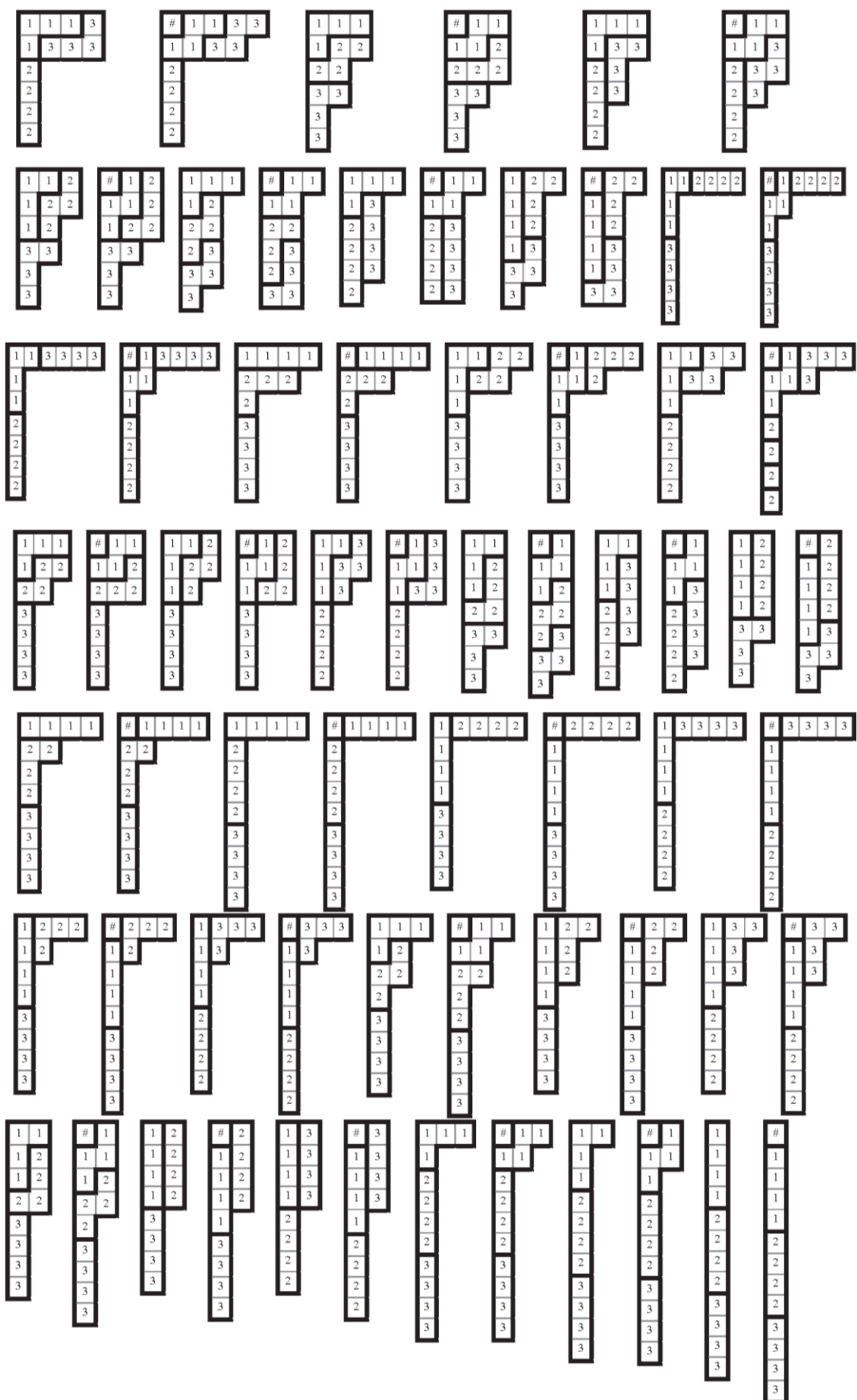
2 4-Ribbons



3 4-Ribbons







評語

本作品是一個將方塊作特殊結構的排列問題，簡單的說就是將 Young Diagram 作了空格(移除左上方的較小的 Young Diagram)，數字填入的方式也以 R-Ribbons 的方式進行。文中出現大量的名詞字義與符號，解說稍一不慎，易誘導讀者產生錯誤的理解。如何精簡說明是可以努力的方向。