2012 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

編號：010025

作品名稱

Ferrers diagram

得獎獎項

大會獎：二等獎

候補作品：1

作者姓名：王愷

就讀學校：臺北市立建國高級中學

指導教師：繆友勇、朱亮儒

關鍵字：Ferrers diagram、最小特徵圖、代表圖

作者簡介

大家好，我是王愷，現就讀建國中學三年級，平時愛好打排球。在學校總是穿運動服或便服出現在球場上，還因此被主任誤以為是體育班的。從國小就有在接觸數學，一路走來，更對數學情有獨鍾，這次作品是我第二個研究的作品，過去國際科展倒是已經有了兩次過了初審而根本沒得獎的經驗。

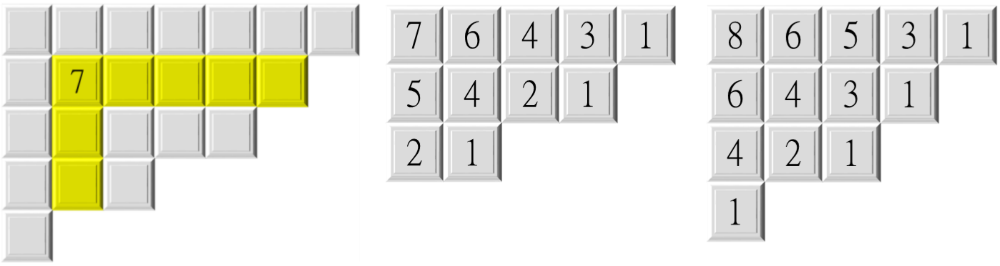
在研究過程中，非常感謝游教官的引導與朱教授不厭其煩的聽我天方夜譚，人在美國的賴學長不分日夜的和我 E-mail，當然還有導師兼數學老師的繆老師修改我的各種資料，和每天都在催我睡覺的父母親，以及現在正在觀看的你，真的非常感謝你們。

摘要

Ferrers diagram 是指在 n 個小方格中填入數字的圖表，且必須有：

(1)方格緊密堆積在一個矩形的左上角

(2)每個方格的值分別定義為：(正右方的方格數)+(正下方的方格數)+1(Hook length)



而所感興趣的問題是：如果有一個 Ferrers diagram，那麼至少需要知道多少幾個格子的位置與它們的值，則整個 Ferrers diagram 就可以被唯一的確定下來。

我們稱具有上述性值的格子所構成的“子圖”為**特徵圖**，顯然整個 diagram 也是一個特徵圖；那麼，特徵圖至少又需要有幾個格子呢？於是定義特徵圖中格子個數最少的為**最小特徵圖**，因此問題轉變成探討最小特徵圖的大小(即格子個數)。

我們的研究結果是最小特徵圖的大小跟原本 diagram 中值為“1”的方格數**(文內一般以 K 來表示值為“1”的方格數)**有密切關係，關係如下：

(1)最小特徵圖的大小 $\leq K+1$

(2)廣義最小特徵圖的大小 $\geq \dfrac{2K+1}{3}$

(3)狹義最小特徵圖的大小 $\geq \dfrac{3K+1}{4}$

同時，我們也有實例說明以上不等式的等號是可以成立的；換言之最小特徵圖的格子數之最小上界為 K+1，廣義最小特徵圖的格子數之最大下界為 $\dfrac{2K+1}{3}$，而狹義最小特徵圖的格子數之最大下界為 $\dfrac{3K+1}{4}$。

ABSTRACT

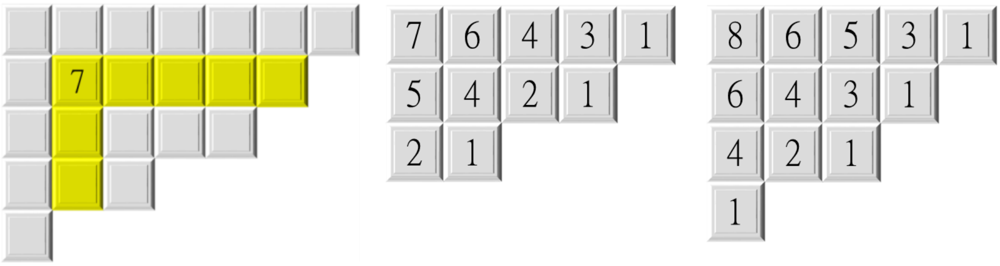
Ferrers diagram is a diagram of n squares with a number in each one such that the following properties are satisfied:

(1) The squares stay regular and accumulate on the upper-left side.

(2) The value of each square is defined to be:

<u>the number of squares which are on the right of it + the number of squares which are on the lower of it + 1 (represents itself)</u>

(So called the Hook-length)



What we are interested is: if there is a Ferrers diagram, then how much information do I need to represent this Ferrers diagram? And we confined that the information can only be a subdiagram of it. Here the subdiagram means some squares with their values of the initial Ferrers diagram.

We define the subdiagram having the property that can represent the initial as <u>representative subdiagram</u>. Then we try to find the smallest size of representative subdiagram of every fixed Ferrers diagram (size means the number of squares of a subdiagram).

The resent result is that the smallest size is strongly related to the number of squares with value “1”. And here we denote this number by “K”. In this study, we obtain the following results:

(1) the smallest size of representative subdiagram $\leq K+1$

(2) the smallest size of “generalized” representative subdiagram $\geq \frac{2K+1}{3}$

(3) the smallest size of “narrow-sense” representative subdiagram $\geq \frac{3K+1}{4}$

Further, there are examples showing the above equation holds. So those three inequalities can’t be improved.

壹、 前言

一、研究動機

在一次餐會時，教授介紹了 Ferrers diagram 給我，他希望我可以試著對這種 diagram 作研究，但他介紹完定義就此打住，因此那時我渾然不知 Ferrers diagram 其實是代數中重要的一個結構。

不過也因為我並不清楚 Ferrers diagram 至今的研究方向,況且主流的研究方向是需要使用到高等代數，在並沒有相當的基礎下，又由於當時心想只是自己做做有趣的研究，並沒有特別的去搜尋資料，因此也朝著一個特別的方向前進。

我主要是討論一個 Ferrers diagram 至少需要多少資訊量來表示它,當然這邊的資訊是有限定的，資訊只能由方格位置和由 Hook length 方法填入的值組成；就有點類似一個數獨遊戲，至少必須要留下幾個格子與其相對應的值，則可以唯一的推導出原圖。

研究中,我發現一個 Ferrers diagram 所需的資訊量和這個 Ferrers diagram 裡值為“1”的方格數,有相當大的關係,對此特別感興趣,所以針對這個方向進行探討。

二、研究目的

(一) 最小特徵圖的上界：至多需要多少資訊量

(二) 廣義最小特徵圖的下界：至少需要多少資訊量(在廣義情況下)

(三) 狹義最小特徵圖的下界：至少需要多少資訊量(在狹義情況下)

貳、　研究過程與方法

首先，定義本文中的幾個主要名詞

(一) Ferrers diagram 的定義：

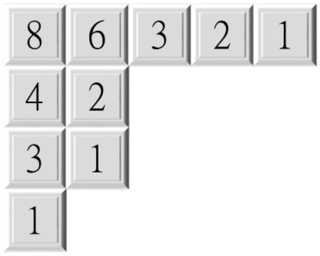
在 n 個小方格中填入數字的圖表，且必須有：

(1)方格緊密堆積在一個矩形的左上角

(2)每個方格的值分別定義為：(正右方的方格數)+(正下方的方格數)+1

(二) 定義最左上角的位置為(1,1)，而(a,b)表示由左而右的第 a 行，由上而下的第 b 列之位置。

(三) C(i)表示第 i 行的格子總數，R(j)表示第 j 列的格子總數；如右圖例：



C(1)=4, C(2)=3, C(3)=1, C(4)=1, C(5)=1, C(6)=0, …

R(1)=5, R(2)=2, R(3)=2, R(4)=1, R(5)=0, ...

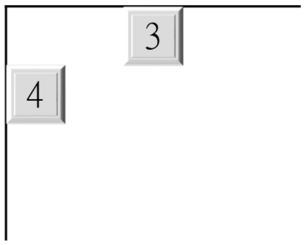
因此 Ferrers diagram 必須滿足 C 和 R 都是一遞減的函數。

(四) 子圖：子圖包含：

(a) 一個 diagram 中部分格子的位置

(b) 這些格子相對應的值

例：右圖就是一個上圖的子圖。



(五) 特徵圖：一個子圖 S 具有下列性質即稱為**特徵圖**：

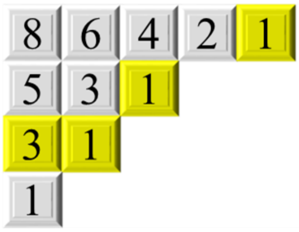
存在唯一的一個 Ferrers diagram 使得 S 為這個 diagram 的子圖。

也就是說可以經由推斷得到唯一的原圖，即為特徵圖。

(六) 最小特徵圖：特徵圖中大小(格子數)最少的稱為**最小特徵圖**。

如右圖的黃色部份即為其中一個最小特徵圖，

共有 4 個格子。



(七)本文中以 K 代表一個給定的 Ferrers diagram

中值為“1”的方格數。

如右圖，K=4。

參、　研究結果與討論

一、最小特徵圖大小的上界

給定一個 Ferrers diagram，若用 P 個資訊量就可以表示這個 diagram，則 P 就是最小特徵圖大小的一個上界，在這邊給出一個構造方法，使得對於任意有 K 個值為“1”的方格數的 diagram，則可以構造出大小為 K+1 的特徵圖，因此最小特徵圖的大小≦K+1

（一）縮排

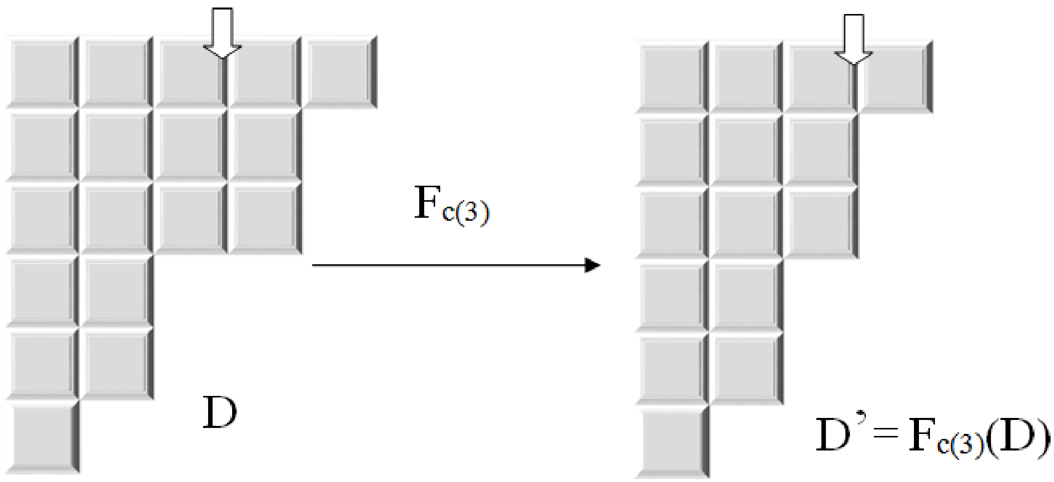
1. 縮排定義：

縮排定義為一個作用在 Ferrers diagram 上的操作 F: D → D’，其像亦為一個 Ferrers diagram。

其中符號 $F_{r(i)}$(D)表示把 diagram D 的第 i 列刪掉，其後的列向前遞移；而 $F_{c(j)}$(D)表示把 diagram D 的第 j 行刪掉，其後的行向前遞移。

進行縮排還需要 Ferrers diagram 滿足一個條件：如果要進行 $F_{r(i)}$(D)的縮排，則必須有 r(i)=r(i+1)；如果要進行 $F_{c(j)}$(D)的縮排，則必須有 c(j)=c(j+1)

白話地說，縮排就是把兩個等高的行或列黏合成一個。



2. 子圖縮排：

在縮排($F:D\to D'$)的操作下，定義 D 中一個子圖 S 在 F 的像。

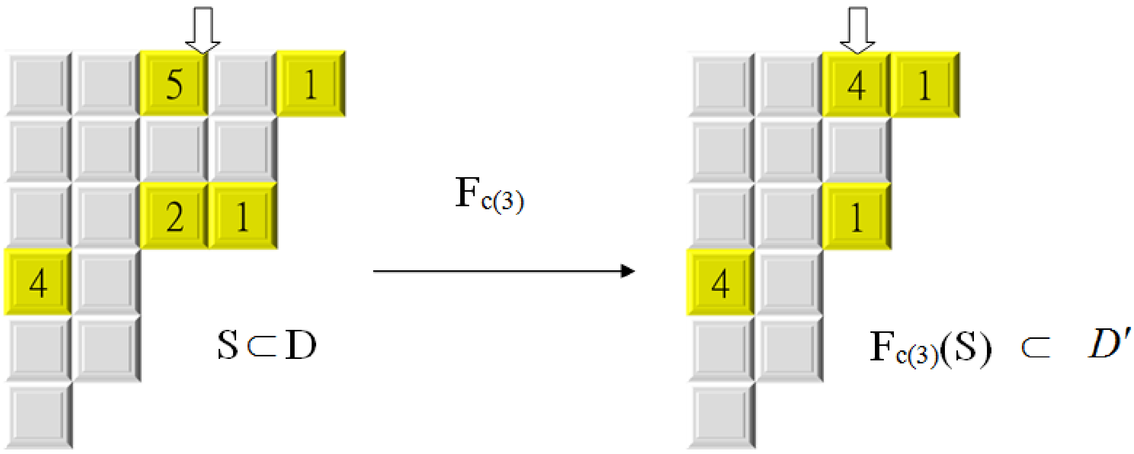
如果 $S\subset D$ 由 $\{(x_i,y_i)\}$ 這些格子與其在 D 中的值所組成，則(對第 k 行作縮排 $F_{c(k)}$時) $F_{c(k)}(S)=\{(x_i',y_i')\}\subset D'$ 與其在 D' 中的值，其中

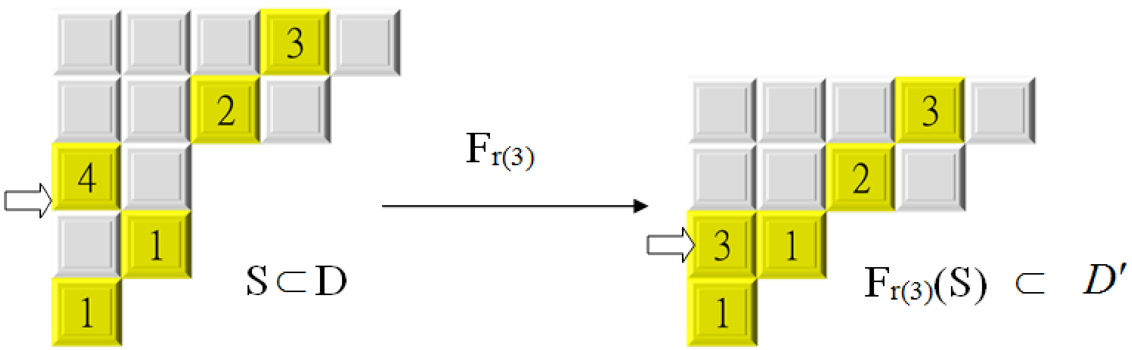
$$\begin{cases} x_i'=x_i, x_i\le k \\ x_i'=x_i-1, x_i>k \end{cases},\ y_i'=y_i$$

同樣的有 $F_{r(k)}(S)=\{(x_i',y_i')\}\subset D'$，與其在 D' 中的值，其中 $x_i'=x_i$，

$$\begin{cases} y_i'=y_i, y_i\le k \\ y_i'=y_i-1, y_i>k \end{cases}$$

簡單的來說，縮排會將子圖 S 在被刪去那行的元素保留在原位，而其餘的類似於縮排本身的平移而移動下標。





Remark: 子圖 S 是由原圖表 D 的一些格子與其值所組成，因此在 F(S)= $\{(x_i', y_i')\} \subset D'$ 裡，除了標號有以上之關係，其值亦有可能與原本的不同，並且 $\{(x_i', y_i')\}$ 中可能有重複的元素(則視為同一個)，由上面的兩個例子亦可看出，S 和 S’=F(S)的格子數不一定相等，且相對應格子的值亦未必相同。

3. 縮排性質

(1) $|S|$ 定義為子圖 S 中的格子數時，有 $|S| \ge |F(S)|$，亦即格子數會遞減。

(2) D 中值為“1”的方格數 = D' 中值為“1”的方格數 (K=K’)

以上兩個性質可由縮排定義很快地得到。

(3) 如果子圖 S 為 D 的特徵圖時，S' 亦為 D' 的特徵圖。

證明：

藉由分析子圖 S 與 C(i),R(j)的關係，來考慮是否為特徵圖。

S=$\{(x_i, y_i)\}$ 中格子 (x_i, y_i) 所給出的全部資訊就是：

$$\begin{cases} C(x_i) \ge y_i \\ R(y_i) \ge x_i \\ C(x_i) + R(y_i) = V_D(x_i, y_i) + x_i + y_i - 1 \end{cases}$$

(此處 $V_D(x_i, y_i)$ 表示格子 (x_i, y_i) 的值)

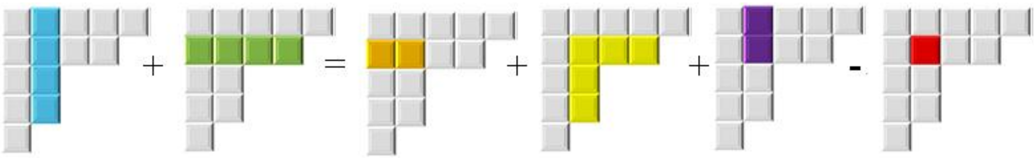
明確的說，以上三條分別對應著：

(a)第 x_i 行至少有 y_i 個格子(因為第 x_i 行的第 y_i 個格子即是(x_i,y_i))

(b)第 y_i 列至少有 x_i 個格子(同(a))

(c)第 x_i 行 + 第 y_i 列的格子數 = 值 $+ x_i + y_i - 1$

例：



可知(c)可由簡單的計數得到。

因此全部的(x_i, y_i)給出的資訊就是$\{(x_i, y_i)\}$所給出的資訊。

如果 S=$\{(x_i, y_i)\}$為特徵圖即代表{C(i)},{R(j)}有唯一的解，也就是說$\{(x_i, y_i)\}$所給出的資訊，只存在唯一的{C(i)},{R(j)}滿足它們，也就是可以解出{C(i)},{R(j)}。

同樣的，我們可以對於縮排後的S'進行分析：

$$\begin{cases} C(x_i') \ge y_i' \\ R(y_i') \ge x_i' \\ C(x_i') + R(y_i') = V(x_i', y_i') + x_i' + y_i' - 1 \end{cases}$$

這邊以S'=$F_{c(k)}(S) = \{(x_i', y_i')\} \subset D'$為例(列同理),並且假設對第 k 行縮排，且第 k 行有 m 個元素。

即有$\begin{cases} x_i' = x_i, x_i \le k \\ x_i' = x_i - 1, x_i > k \end{cases}$，$y_i' = y_i$

當 $x_i > k$ 時，可以得到(此時由 Ferrers diagram 性質知必有 $y_i \leqq m$)

$$\begin{cases} C(x_i - 1) \ge y_i \\ R(y_i) \ge x_i - 1 \\ C(x_i - 1) + R(y_i) = V_{D'}(x_i', y_i') + x_i + y_i - 2 \end{cases}$$

(這邊的$V_{D'}(x_i', y_i')$是指在D'中的值)

觀察可知這邊的$V_{D'}(x_i', y_i')$=$V_D(x_i, y_i)$ (前者在D'中，後者在 D 中)

即有$\begin{cases} C(x_i - 1) \ge y_i \\ R(y_i) \ge x_i - 1 \\ C(x_i - 1) + R(y_i) = V_D(x_i, y_i) + x_i + y_i - 2 \end{cases}$ ....(1)

當 $x_i \leqq k$ 時，可以得到$\begin{cases} C(x_i) \ge y_i \\ R(y_i) \ge x_i \\ C(x_i) + R(y_i) = V_{D'}(x_i', y_i') + x_i + y_i - 1 \end{cases}$

而$V_{D'}(x_i', y_i') = V_{D'}(x_i, y_i) = \begin{cases} V_D(x_i, y_i) & \text{if } y_i > m \\ V_D(x_i, y_i) - 1 & \text{if } y_i \le m \end{cases}$

則可將 $x_i \leqq k$ 的情況再分成 $y_i > m$ (左邊) , $y_i \leqq m$ (右邊)

$$\begin{cases} C(x_i) \ge y_i \\ R(y_i) \ge x_i \\ C(x_i) + R(y_i) = V_D(x_i, y_i) + x_i + y_i - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(x_i) \ge y_i \\ R(y_i) \ge x_i \\ C(x_i) + R(y_i) = V_D(x_i, y_i) + x_i + y_i - 2 \end{cases} \qquad \text{..................................(2)}$$

因此我們做一個代換

$$\begin{cases} A(i) = C(i) \ \ if \ \mathrm{i} \le \mathrm{k} \\ A(i+1) = C(i)\, if \ \ i \ge k \end{cases} \qquad \begin{cases} B(j) = R(j)\, if \ \ \mathrm{j} > \mathrm{m} \\ B(j) = R(j) + 1\, if \ \ j \le m \end{cases}$$

代入我們上面所得到的(1),(2)式，則統整得到：

$$\begin{cases} A(x_i) \ge y_i \\ B(y_i) \ge x_i \\ A(x_i) + B(y_i) = V_D(x_i, y_i) + x_i + y_i - 1 \end{cases} \qquad \text{..................................(1)'}$$

$$\begin{cases} A(x_i) \ge y_i \\ B(y_i) \ge x_i \\ A(x_i) + B(y_i) = V_D(x_i, y_i) + x_i + y_i - 1 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
A(x_i) \ge y_i \\
B(y_i) \ge x_i + 1 \ge x_i \\
A(x_i) + B(y_i) = V_D(x_i, y_i) + x_i + y_i - 1
\end{cases}
\qquad \text{..................................(2)'}
$$

可以合併成

$$
\begin{cases}
A(x_i) \ge y_i \\
B(y_i) \ge x_i \\
A(x_i) + B(y_i) = V_D(x_i, y_i) + x_i + y_i - 1
\end{cases}
\qquad \text{..................................(3)}
$$

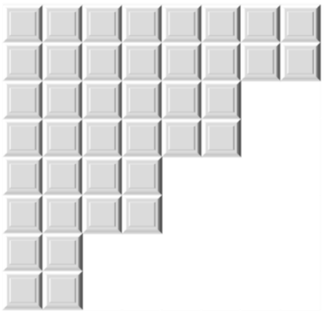
對所有 (x_i, y_i) 皆成立。

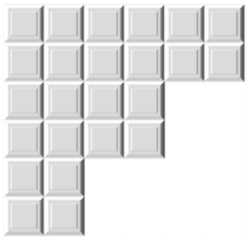
再拿這個資訊和未縮排的原資訊比較，則可知此資訊量是足夠解出{A(i)},{B(j)}的，因此再由 A,B 的定義，就可以唯一的得到 C(i),R(j)的值，所以可知 S' 為 D' 的特徵圖。

(二) 兩層階梯與多層階梯

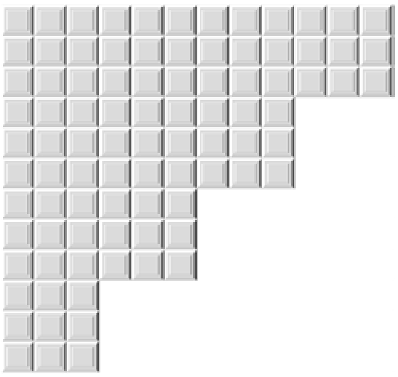
先介紹兩層階梯：

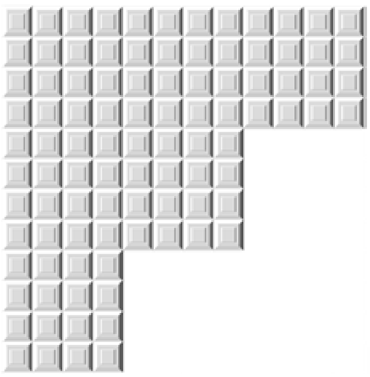
兩層階梯是指如右幾種類似階梯狀的 Ferrers daigram，其中每一層階梯的寬度皆為 2，因此稱之為兩層階梯。





同樣的，三層階梯、四層階梯等等的多層階梯也是類似的定義。





接著介紹所有的兩層階梯要如何構造特徵圖。

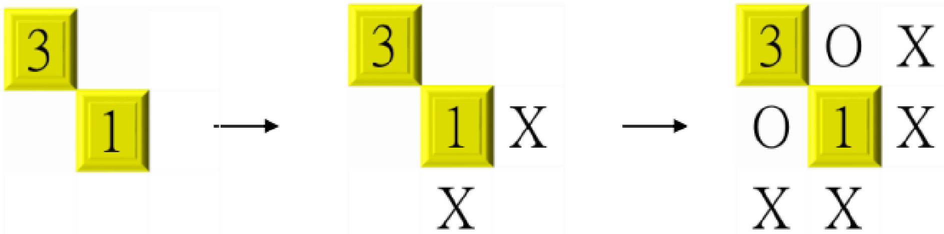
1. 所有的兩層階梯都存在大小為 K+1 的特徵圖

證明：我們直接構造出解來證明這個性質，下面先構造出兩層階梯的前四種情況。

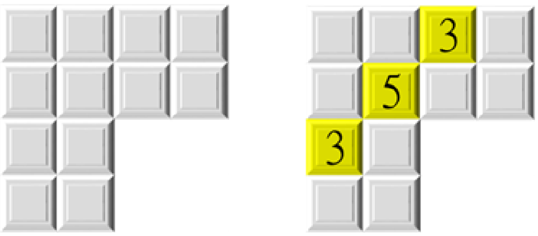
(1) 兩層階梯的第一種情況(K=1)，顯然下面的子圖(黃色格子)，即為一個特徵圖。(格子上面以“O”表示這個格子在原 diagram 裡被判斷為有方格的，“X”則表示沒有方格)

在這個情況 K=1，所以如圖的構造做出了大小為 2 的特徵圖，即為我們所要的。

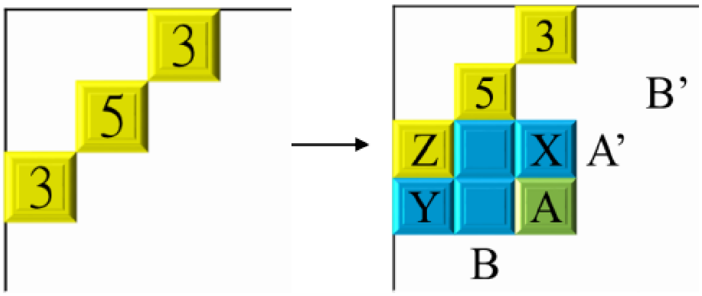
推導過程：



(2) 第二種情況(K=2)

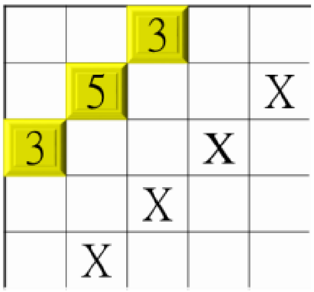


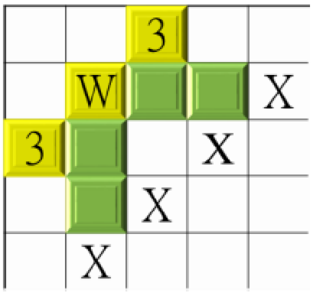
推導過程：



假設 A 的位置有格子，則由 Ferrers diagram 的性質知道藍色的部分都要有格子，但是這樣一來 Z 這個格子的值就至少為 4 (矛盾)

因此知道 A 沒有格子。同理 A’,B,B’皆沒有格子。

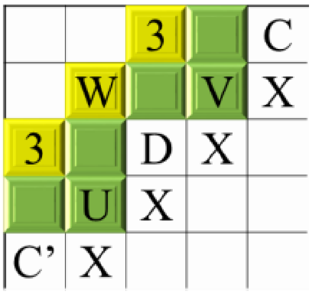




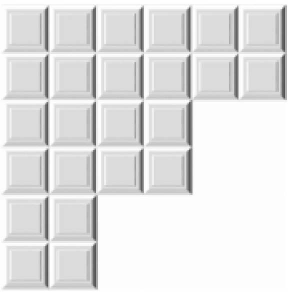
由於 W 的值為 5，所以上面綠色格子都必須要是有的。

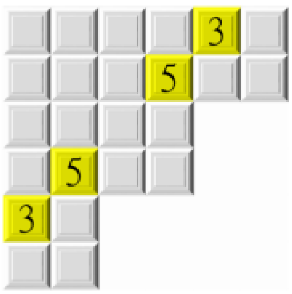
再由 Ferrers daigram 的性質與 U,V 兩個格子都是有的，可知右圖中所有綠色格子都是有的。

並且因為兩個已知格子的值為 3，所以 C,C’,D 都是沒有格子的，至此推出了原圖。

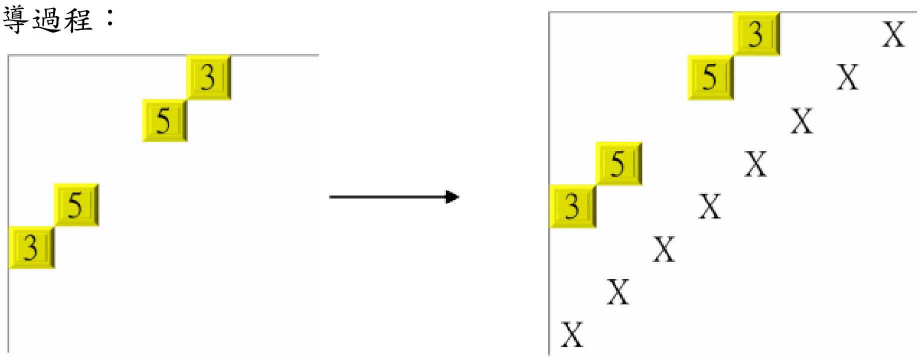


(3) 第三種情況(K=3)



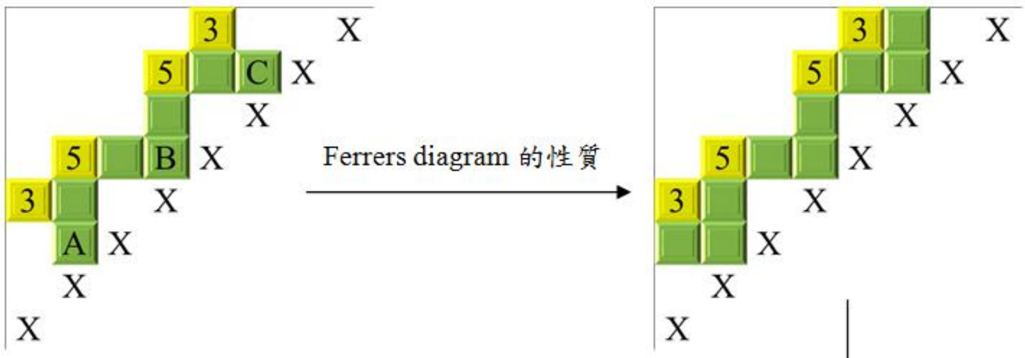


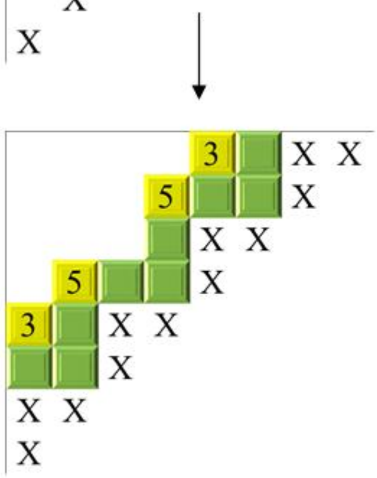
推導過程：



與前面所述相似，由值為 3 的格子可知道右圖畫有 X 的格子皆為沒有的。

再由值為 5 的格子，可知綠色格子階為有方格的。

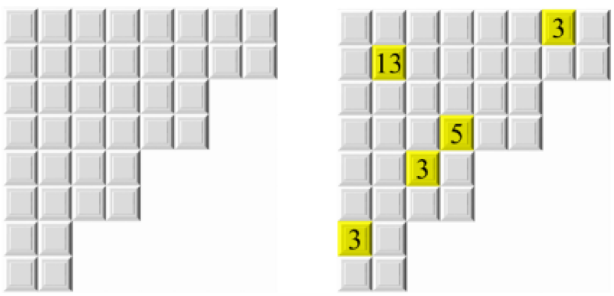




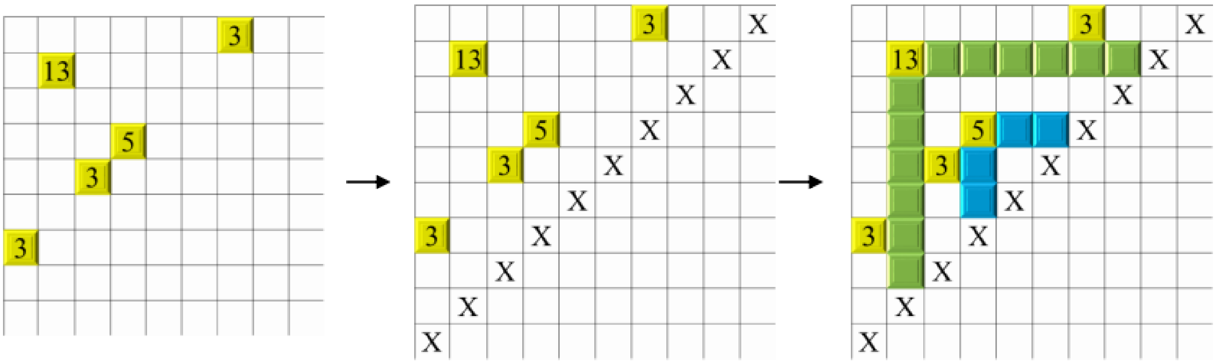
因此由值為 3 的格子可以知道剩下幾個不確定的格子皆為沒有的。

至此推出原圖。

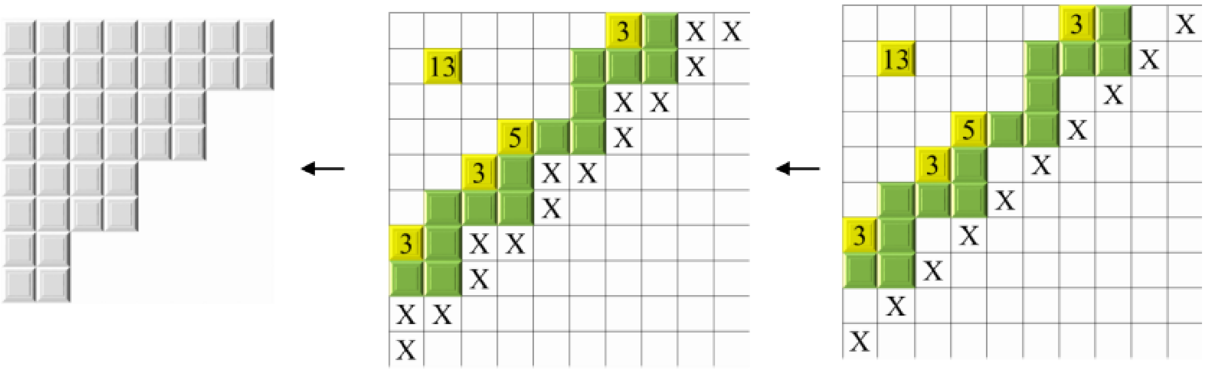
(4) 第四種情況(K=4)



由值為 3 的格子可以推出這些畫 X 的格子均為沒有的，並且由值為 13 和值為 5 的格子可以分別推出綠色和藍色的位置都是有格子的。

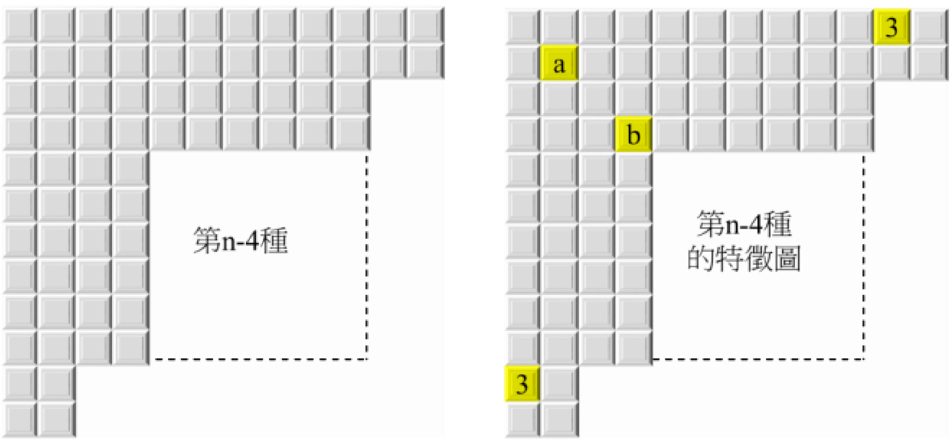


同樣由 Ferrers diagram 的性質，並且由值為 3 的格子即可推出原圖

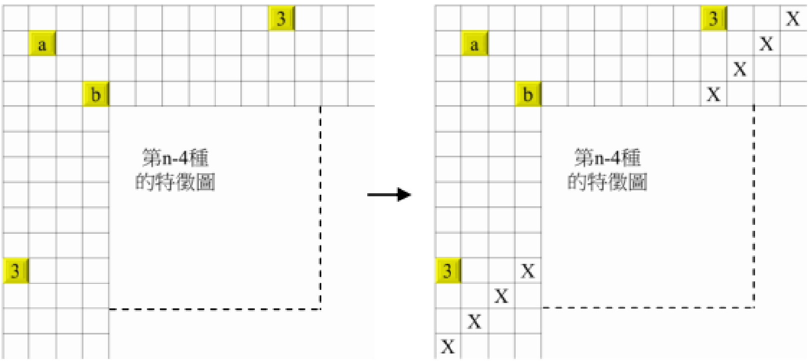


(5) 第 n 種情況 (K=n)

使用歸納法，對於第 n 種情況採用第 n-4 種情況的構造法再加上 4 個格子作為特徵圖，下面說明這種方法是可行的。

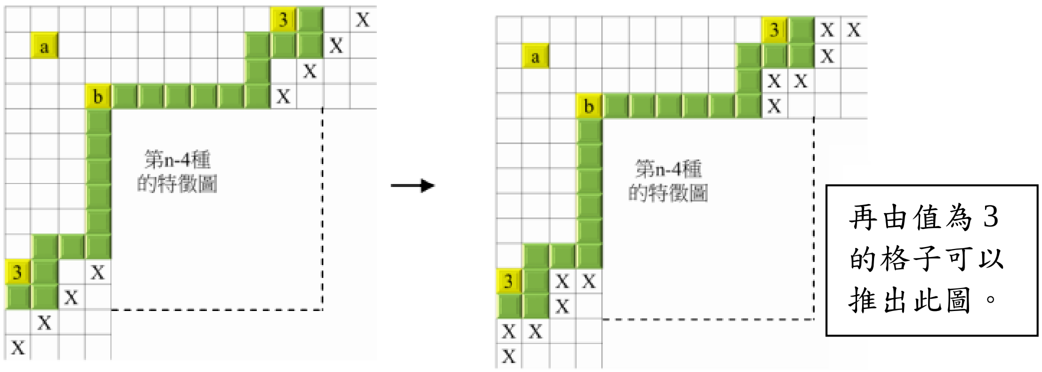


推導過程： (圖中之 a=4n-3,b=4n-7)



由值為 3 的方格，可以確定以上畫 X 的方格是沒有的。

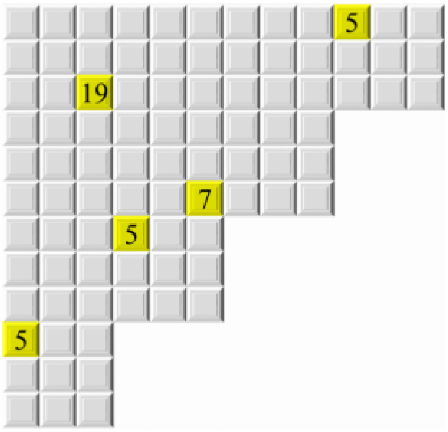
再由值為 a 和值為 b 的方格，與 Ferrers diagram 的性質可以推出以下方格皆是有的。



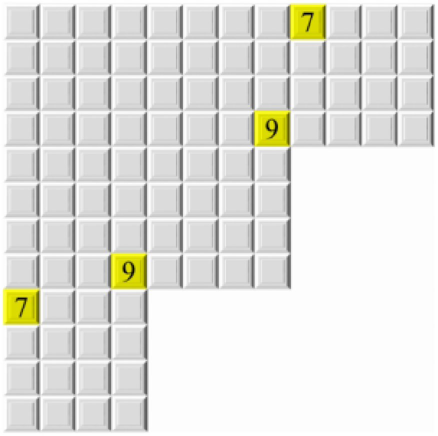
而由歸納假設，知內部第 n-4 種的特徵圖可以推出第 n-4 種的 diagram，因此整個 diagram 就被唯一的確定了。由此構造法可得到一個特徵圖，且其特徵圖大小為 4+n-4+1=n+1 (此時 K=n)

即為我們所想要的構造法，因此由歸納法知道所有的兩層階梯都存在大小為 K+1 的特徵圖。

事實上，同樣的構造法亦對多層階梯有效；下面僅列出幾個圖，證明與推導過程因為相似所以不多加列舉。



(K=4)



(K=3)

(三) 一般情況

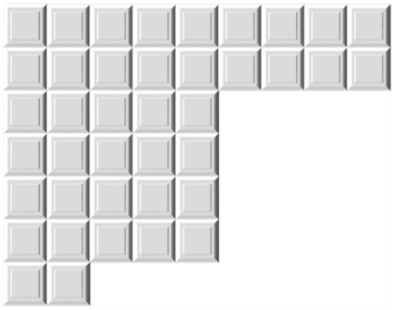
先定義寬度數列{s_i}；

給定一個 Ferrers diagram，此 diagram 相對應的寬度數列{s_i}是指從右上方來看：

s_1 為第一層階梯的高，s_2 為第一層階梯上的寬；

s_3 為第二層階梯的高，s_4 為第二層階梯上的寬；……依此類推。

如下圖，這個 diagram 的寬度數列為；{2,4,4,3,1,2}



上例中，K=3，而寬度數列長度為 6；一般而言，寬度數列的長度為 2K

且如果給定寬度數列，則可唯一決定原 diagram；兩者有一一對應的關係。

回到一般情況的特徵圖：

對於一個有 K 個值為 1 的方格的 diagram，求出寬度數列，並且令

$s=\max\{s_i\}$，然後取出一個第 K 種的 s 層階梯(即每個階梯寬度都為 s，

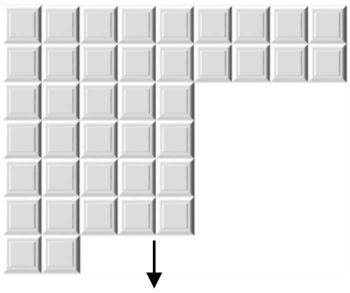
共有 K 層)與其對應的特徵圖(大小為 K+1)。

我們對這個s層階梯進行縮排，顯然在有限次可以縮排成原本的diagram，然後觀察 s 層階梯相對應的特徵圖進行縮排後的像，這個像為原 diagram 的子圖，且由縮排的性質，子圖的大小只會遞減，並且特徵圖的性質會保持，因此可知這個特徵圖(s層階梯的)縮排後的像也是特徵圖(原diagram 的)，並且其大小不超過 K+1，即達到了我們所要的。

至此我們對於一般圖形都可以構造出大小至多為 K+1 的特徵圖。

下頁為上述方法的例圖。

K=3 的例子：

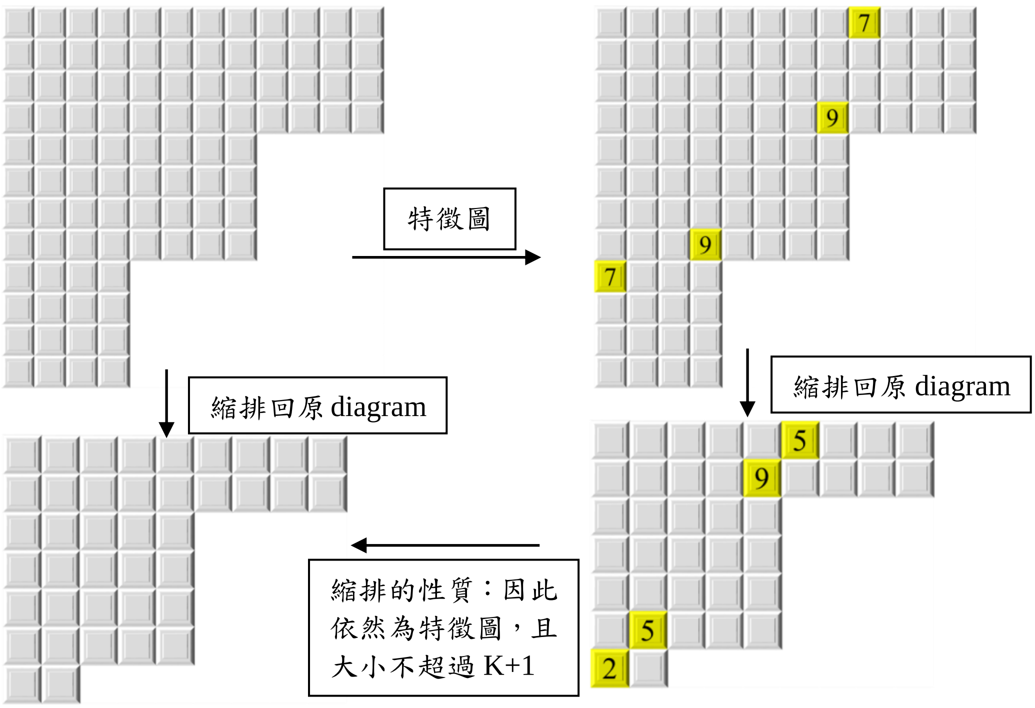


算出 diagram 對應的寬度數列：

$\{s_i\} = \{2,4,4,3,1,2\}$

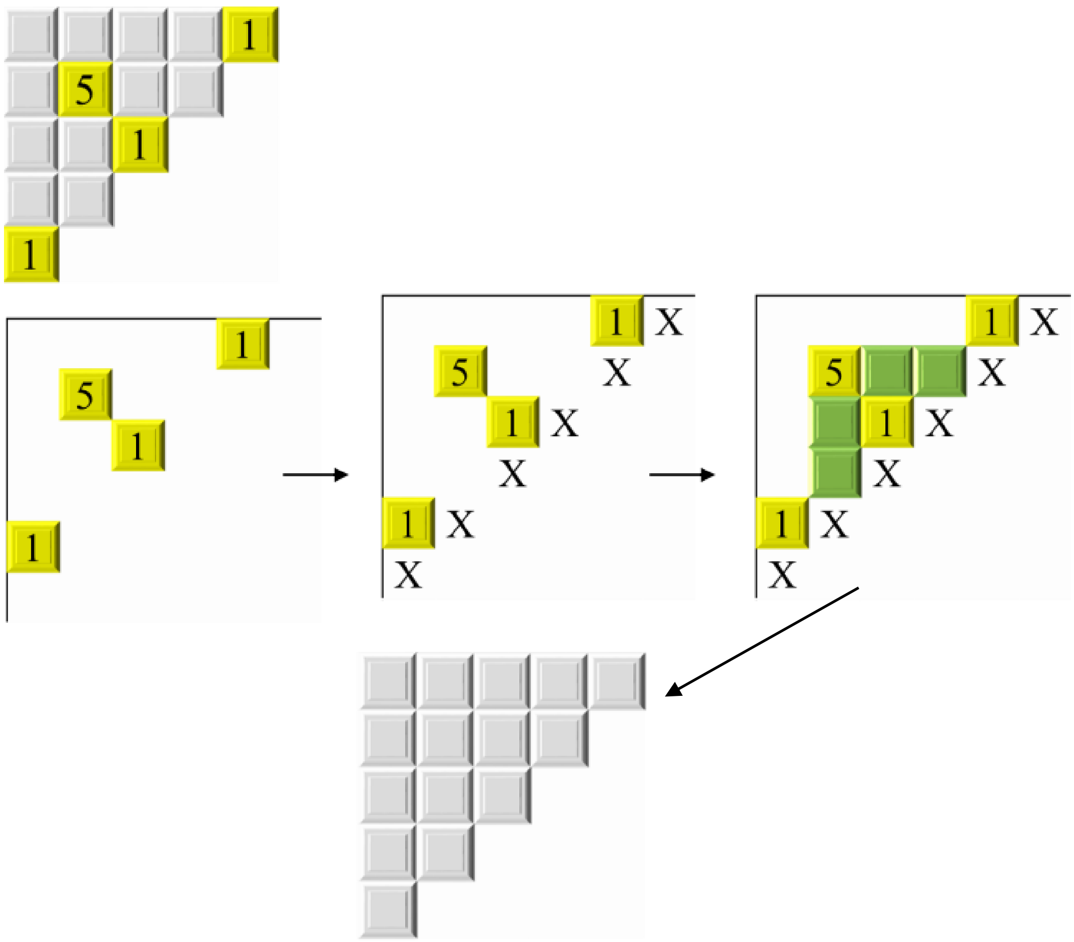
$s = \max\{s_i\} = 4$

構造出第 3 種的 4 層階梯與其特徵圖



二、最小特徵圖的下界

上面介紹完上界，接下來的目標就是要研究特徵圖大小的下界，原本在研究前預估下界會是 K，但後來發現了一個例子 K=5，但只需要 4 個格子的特徵圖(如下圖所示)，因此開始考慮修改猜想。



另外因為我們要求的是下界與K的關係式，如果給定一種有K個值為1的diagram，並且其特徵圖大小的下界為 A，即存在一個特徵圖其大小為 A。

則將其寬度數列中比 1 大的邊都縮排，因此得到一個一層階梯，並且這個特徵圖也同樣地進行縮排，而大小不增，如此得到的子圖(一層階梯的)大小也不超過 A，並且同樣保持特徵圖的性質。

令第 K 種一層階梯特徵圖大小下界為 B，則有 B≦所得到的特徵圖的大小≦A

所以我們關心的特徵圖大小之下界，實際上在 K 值相同時，最小值一定發生在一層階梯，也就是最簡化的情況，其餘有 K 個 1 的 diagram 下界 A 都不超過一層階梯的下界 B。

因此只需要考慮一層階梯的情況。

(一) 定義：

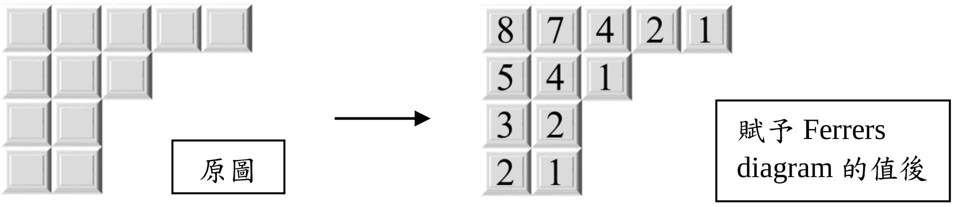
1. 廣義 Ferrers diagram 賦值：

將 Ferrers daigram 右下角並未在原 diagram 的格子同樣用類似方法定義值，其值為：

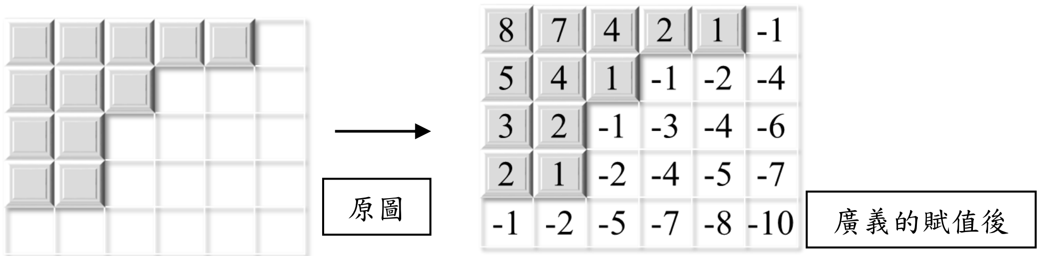
－(向正左方算的空格個數+向正上方算的空格個數+1)

圖例：

原本的賦值方法



廣義的賦值方法



2. 廣義特徵圖

如果子圖的選取不只限定於原 diagram，亦即可以取上述多加定義的格子

(值為負的)，則稱之為**<u>廣義子圖</u>**。

<u>廣義特徵圖</u>也就是指具有可以唯一判斷原 diagram 的性質的廣義子圖，因為新定義的廣義 Ferrers diagram 的性質和資訊量與原本的相似，因此，在廣義特徵圖中，縮排這個操作的性質依然是有的。

3. 關鍵格：

在廣義 Ferrers diagram 中，值為"1"或"-1"的格子。

後面為了方便起見，一般將值為"1"的關鍵格以藍色表示，將值為"-1"的關鍵格以綠色表示，以示區別。

8	7	4	2	1	-1
5	4	1	-1	-2	-4
3	2	-1	-3	-4	-6
2	1	-2	-4	-5	-7
-1	-2	-5	-7	-8	-10

又知值為"1"的格子有 K 個，值為"-1"的格子有 K+1 個，因此關鍵格共 2K+1 個。

事實上，就如名稱所示，這些格子對於判斷 diagram 來說相當的重要，而後面將會證明如果任何一個關鍵格沒有被直接確定，則整個 diagram 無法被唯一確定；而如果每個關鍵格都被確定了，則整個 diagram 就可以唯一的被確定。亦即兩者是等價的。

4. 代表圖(Graph) (代表圖只適用在一層階梯裡面)

對於給定一個 diagram 與其一個子圖，定義其代表圖 $G(V,E_1,E_2)$為：

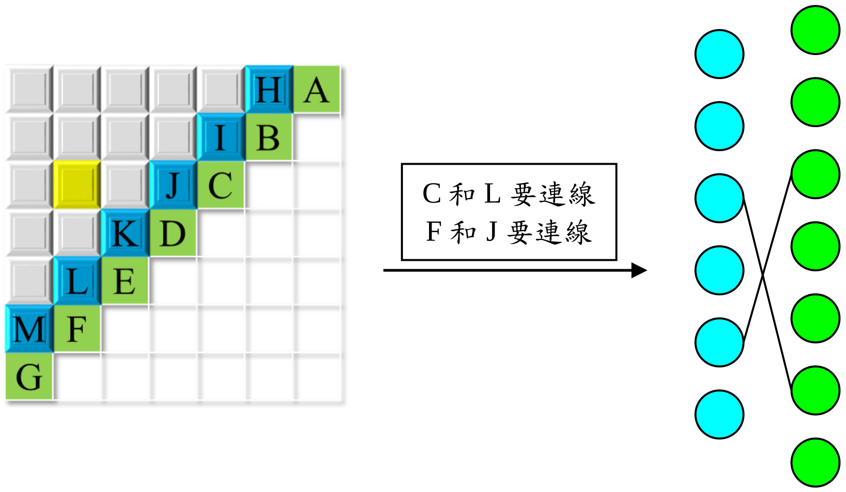
(1) 將所有的關鍵格視為這個圖(Graph)的頂點(Vertex)

並將值為"1"的關鍵格置於左邊，值為"-1"的關鍵格置於右邊。

(2) 定義兩種二分圖的邊(Edge)E_1,E_2：

E_1：若兩個關鍵格在 diagram 中的同一行或同一列，則以 E_1 的邊相連。

E_2：若兩個關鍵格分別為一個是值為"1"的關鍵格 A，一個是值為"-1"的關鍵格 B，並且存在一個子圖中的格子 C，使得 AC 同行、BC 同列，或者 AC 同列、BC 同行，則將 A,B 以 E_2 的邊相連。

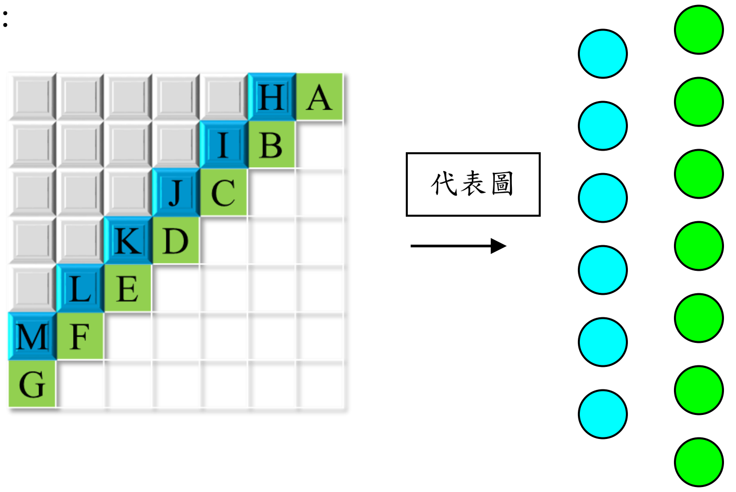


事實上在一層階梯裡，**每個子圖中的格子都恰會建立兩條 E_2 中的線**，且兩者必如左所示的交叉(如果格子是廣義格的話則會左右反過來)

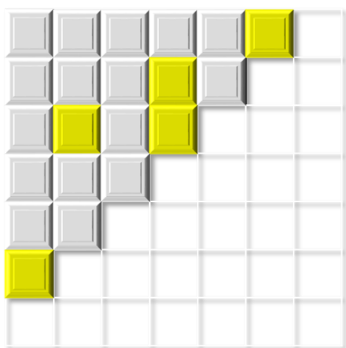
例：

一般為了區分 E_1, E_2，因此將 E_1 以橘色線代表，E_2 以黑色線代表。

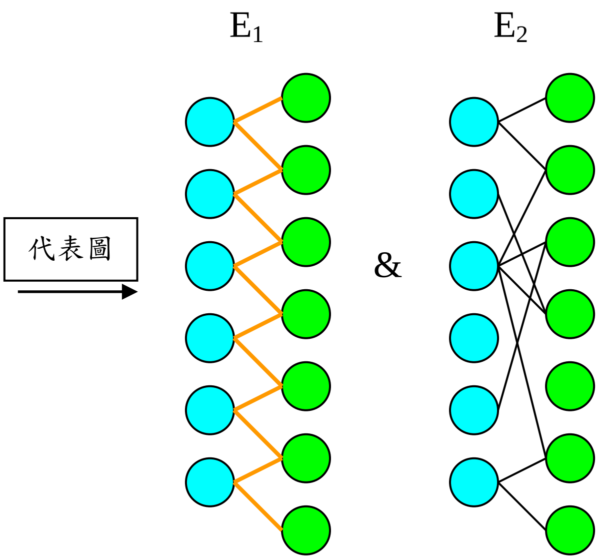
例圖：



代表圖中，右邊綠色的點由上到下分別代表 A~G，同樣左邊的藍色的點由上到下代表 H~M
這樣相當於只需要把原 diagram 逆時針轉 45°
比較方便於操作與觀察



帶有子圖的 diagram



後面將會介紹如何用代表圖建立一種判斷子圖是否為特徵圖的方法，這也就是下界的最主要部分。

5. “可以判斷”

在一個代表圖 G 中的每一個點賦上值“1”或“0”(這裡的值並非原 diagram 的值)，而“1”代表這個點是“有格子的”，“0”代表這個點是“沒有格子的”。

在圖 G 中僅有唯一的方式可以賦上“1”和“0”，使得 E_1,E_2 滿足一種隱含的關係(後面再多加介紹)，則稱圖 G 是可以判斷的圖；同樣的對於 G 的一個子圖(Subdiagram)“可以判斷”，也是同上相同的定義。

(二) 一些定理與性質

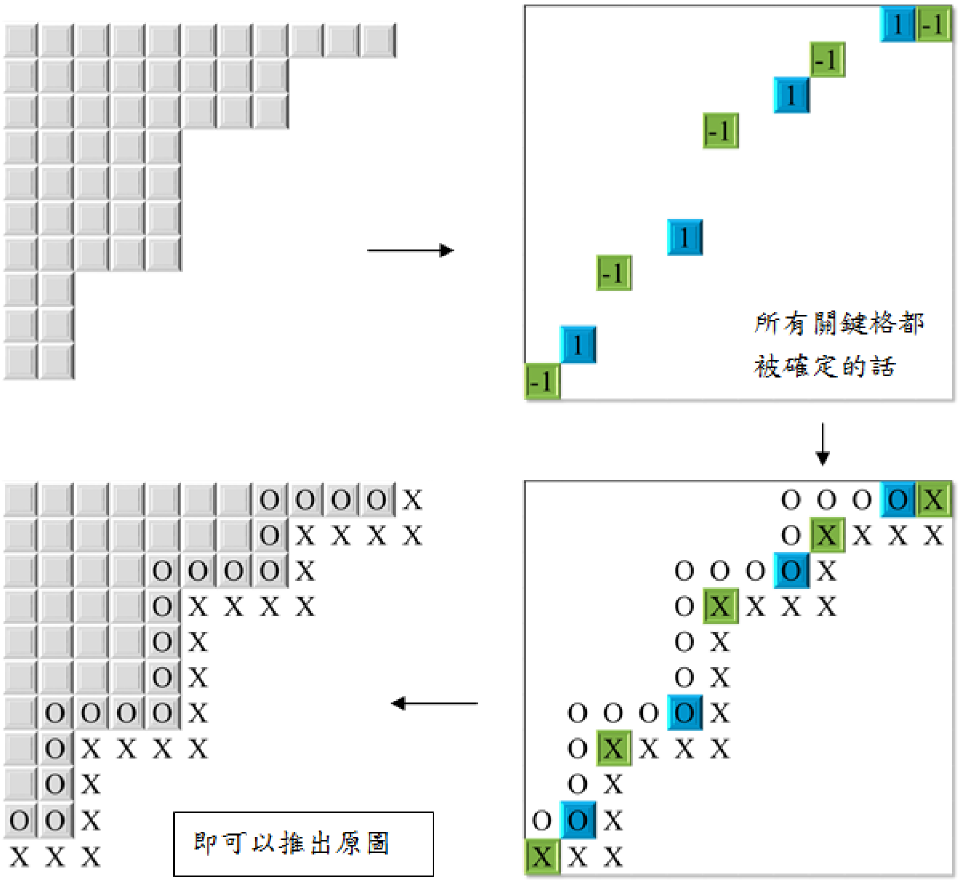
性質一：所有關鍵格都被確定 $\Leftrightarrow$ Ferrers diagram 唯一確定(及此子圖為特徵圖)

證明：

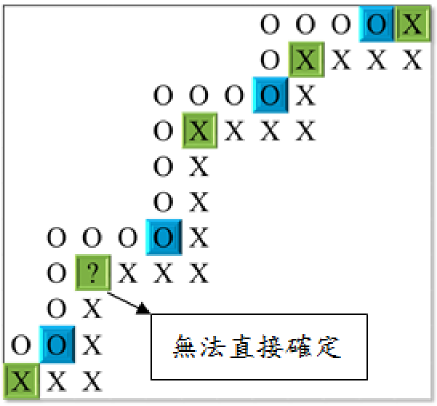
($\Rightarrow$) 由於關鍵格是定義為所有值為“1”或“-1”的格子，再由 Ferrers diagram 的定義可知：值為“1”的格子左邊與上面皆為有格子的，值為“-1”的格子右邊與下面皆為沒有格子的。

由這兩個性質與關鍵格的分布位置來判斷，顯然可以推出整個 diagram 的所有格子是否為有或沒有。

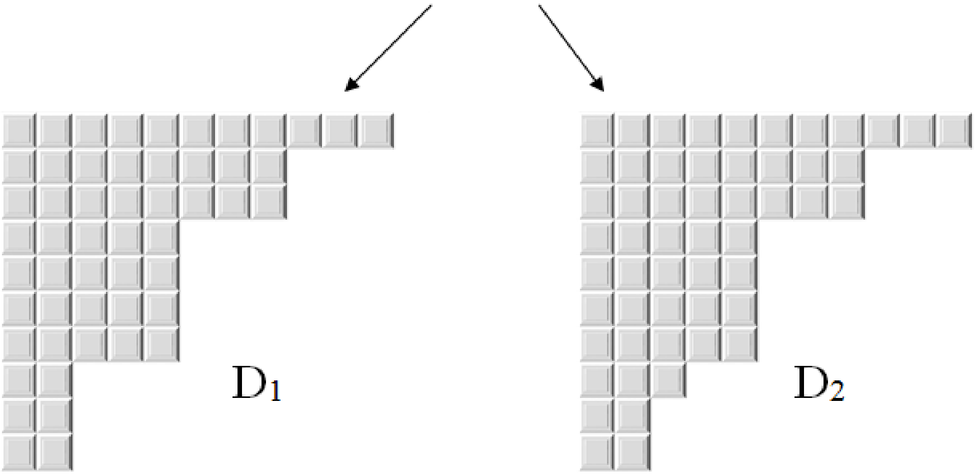
示意圖：



(⇐)假設有一個關鍵格 A 沒有被直接確定(或者說沒有任何一個選取的子圖的格子與 A 有關係)，以下圖為例，可知有兩種 diagram D_1,D_2，且彼此僅差了 A 這個格子(其餘皆與原 diagram 相同)，因此皆滿足所需之條件(這邊一般是指選取出的子圖所限定的條件)，因此無法唯一的確定 diagram。



這個性質的($\Leftarrow$)方向並非只是一種陳述方法的轉換而已，這性質的意思是指：
無論前面怎麼判斷，但剩下的最後一個是關鍵格，且這個關鍵格與選取出的子圖沒有任何同行或同列的關係，則無法唯一判斷。



一個應用的例子：寬度數列每項都≧2 的 diagram

在這種例子中，我們可以發現所有的關鍵格都不會在同一列或同一行(因為條件：寬度數列每項都≧2)，因此選取出的子圖中每個格子至多有兩個格子與之同行或同列，由上述性質，可知至少需要$\left\lceil \frac{2K+1}{2} \right\rceil = K+1$個格子才有辦法讓所有的關鍵格至少有可能被確定(否則有一個關鍵格並沒有被蓋到，則至少有兩種可能性)。

也就是說在這種例子(寬度數列每項都≧2 的 diagram)中，特徵圖的大小≧K+1

但是在上界部分，任意圖形都可以構造出一個大小為 K+1 的特徵圖，因此 K+1 為這種圖形的最小特徵圖大小(確切的)。

代表圖中的 E_1,E_2 與點(Vertex)的關係

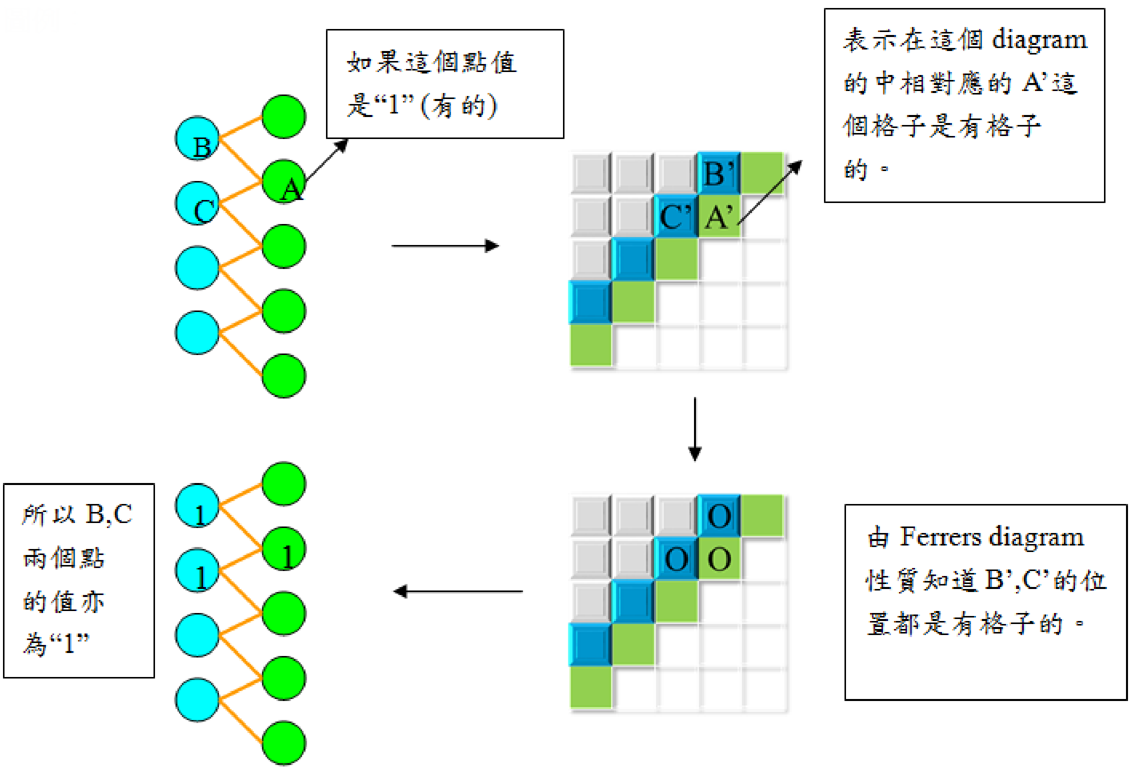
(1) 先介紹 E_1：由兩者同行或同列與 Ferrers diagram 的性質可知：

(i) 在代表圖中，當右邊的一綠色點 A(值為"-1"的關鍵格)是有的("1")時候，則在所有與之相連的藍色點(值為"1"的關鍵格且與 A 同行或同列)必也是有的("1")。

(ii) 在代表圖中，當左邊的一藍色點 B(值為"1"的關鍵格)是沒有的("0")時候，則在所有與之相連的綠色點(值為"-1"的關鍵格且與 A 同行或同列)必也是沒有的("0")。

以(i)為例，當右邊的一綠色點 A 是有的("1")時候，則所有與之相連的藍色點轉換回原 diagram 看時，皆是在 A 的上方或左方，因此由 Ferrers diagram 的定義可知這些點都是有的("1")。同理，(ii)的結果也是成立的。

圖例：

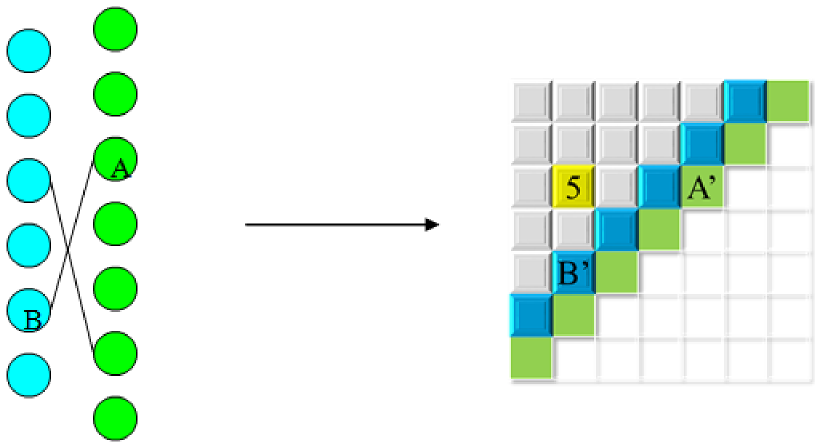


或者我們可以稱 E_1 為**修正關係線**，因為僅當代表圖中一個點的值，和原本 diagram 不相符時，這種關係線才會有用處；即當與之相鄰的藍色的點都是 1，綠色的點都是 0 時，則 E_1 的線都不會有效果。

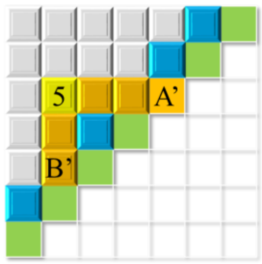
(2) E_2 的性質：

定義：若兩個關鍵格分別為一個是值為"1"的關鍵格 A，一個是值為"-1"的關鍵格 B，並且存在一個子圖中的格子 C，使得 AC 同行、BC 同列，或者 AC 同列、BC 同行，則將 A,B 以 E_2 的邊相連。

不過事實上由圖上來看，就沒有定義寫得如此複雜。



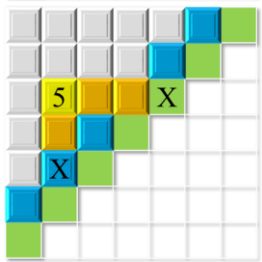
同樣以上面的例子來做介紹，如左圖中 A 與 B 相連，則可轉換成原 diagram 中的 A’,B’



(i) 如果 A’有方格，B’亦有方格，則如右圖所示：

此一子圖的格子的值至少為 6，矛盾。

因此如果 A’有方格，則 B’沒有方格；反之亦然。



(ii) 如果 A’沒有方格，B’亦沒有方格

則此一子圖的格子值至多為 4，矛盾。

因此如果 A’沒有方格，則 B’有方格；反之亦然。

也就是說如果代表圖中不論 A 為"0"或"1"，則 B 必為與 A 相反的那一個。

事實上，在一層階梯的情況下，每一個子圖所造出的 E_2 關係線恰有 2 條。

性質二：所有關鍵格被唯一確定$\Leftrightarrow$代表圖可以判斷

事實上代表圖裡面的 E_1,E_2 關係線即為所有原 diagram 的資訊量，因此只是把關鍵格換成代表圖中的點，而唯一確定和可以判斷其實是相同的意思，所以是等價的。

性質三：代表圖可以判斷$\Leftrightarrow$代表圖中由 E_2 所區分出的連通子圖(Component)皆是可以判斷的

定義：

子圖(Subgraph)是指：在圖 $G(V,E_1,E_2)$中的部分點，與這些點之間相連的所有線(無論 E_1,E_2)。

連通子圖(Component)是指在 $G(V,E_2)$中(只看 E_2 不管 E_1)，將 G 分成許多個子圖，且每個子圖皆是連通圖，並且任兩個子圖是不連通的。

證明：

($\Leftarrow$)如果全部的連通子圖都可以判斷，也就是在每一個連通子圖中只有一種唯一的放入“0”或“1”的方法，當然整個代表圖也只有一種放入“0”或“1”的方法，因此可以判斷。

($\Rightarrow$)假設有一個連通子圖是不可判斷的(即為有兩種以上的放入“0”或“1”的方法)則現在讓其他所有連通子圖都是“正確的”，即和原 diagram 是相符合的。

但是在這個連通子圖內部，兩種放法都沒有產生任何矛盾；而兩種放法與外部也是不會有任何矛盾。

(因為就 E_2 來說，連通子圖跟外界是不連通的，所以沒有任何關係；而就 E_1 來說，因為外界都是正確的，或者說與原 diagram 相符的，所以無論連通子圖內部怎麼填，都不會與外界產生矛盾)

這兩種填法都符合所有的關係線，因此，代表圖是不可判斷的。

性質四：一個連通子圖可以判斷$\Leftrightarrow$在這個連通子圖中，至少有一條 E_1 的關係線

($\Rightarrow$)假設這個連通子圖中沒有任何一條 E_1 的關係線，則因為 G 是二分圖，所以這個連通子圖也是一個二分圖(且為藍點綠點對分)。

因為黑色的 E_2 關係線是相反的關係，因此隨意挑選一個點填入“0”或“1”，則因為是連通的，所以所有的點都會被 E_2 關係線推導出來，但是就算有一個圈(Cycle)，則這個圈的長度也是偶數，而相反的關係在作用了偶數次後還是自己，因此不會有任何矛盾。

所以恰有兩種放法(隨便挑一個點放入“0”或“1”都可以)，即不可判斷。

($\Leftarrow$)假設至少有一條 E_1 的關係線

由上面所述，已知光是由 E_2 的關係線，就只有兩種可能性會留下(事實上一種是完全符合原 diagram 的，即左邊的點全部都是“1”，右邊全部都是“0”；一種是完全不符合原 diagram 的，即左邊的點全部都是“0”，右邊的點全部都是“1”)。

但是如果是完全不符合的那種情況，且連通子圖中又有一條 E_1 關係線，則這兩個相鄰的點必同為“0”或“1”，但兩個點必有一個在左邊一個在右邊，矛盾。

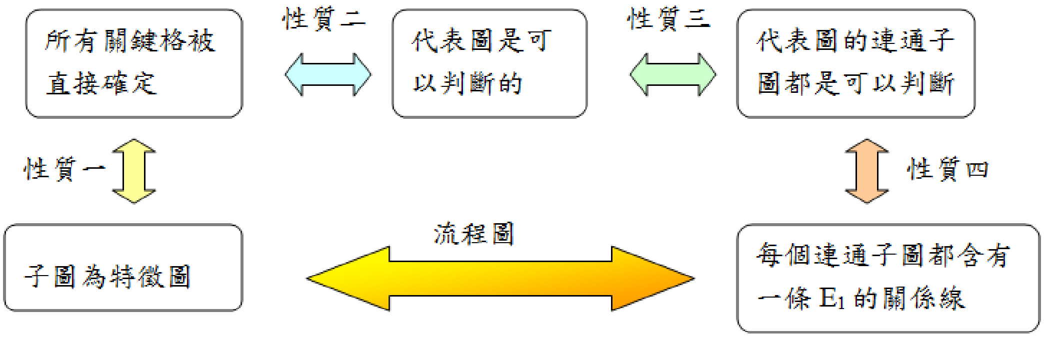
因此只剩下一種可能性，所以可以判斷。

千辛萬苦下，終於得到了一種判斷子圖(Subdiagram)是否為特徵圖的方法：

定理五：

一個子圖是否為特徵圖$\Leftrightarrow$此 diagram 和此子圖所構成的代表圖中，所有的連通子圖是否都含有一條 E_1 的關係線

如果結論為“是”，則此子圖為特徵圖；若為“否”，則不是特徵子圖。



(三) 在下界上的應用

1. 廣義最小特徵圖

先介紹廣義最小特徵圖的下界如何估計。

由定理五，我們將一個 diagram 與其子圖所構成的代表圖分成許多個連通子圖，然後來考慮每個連通子圖，都要含有一條 E_1 的關係線至少需要有甚麼條件。

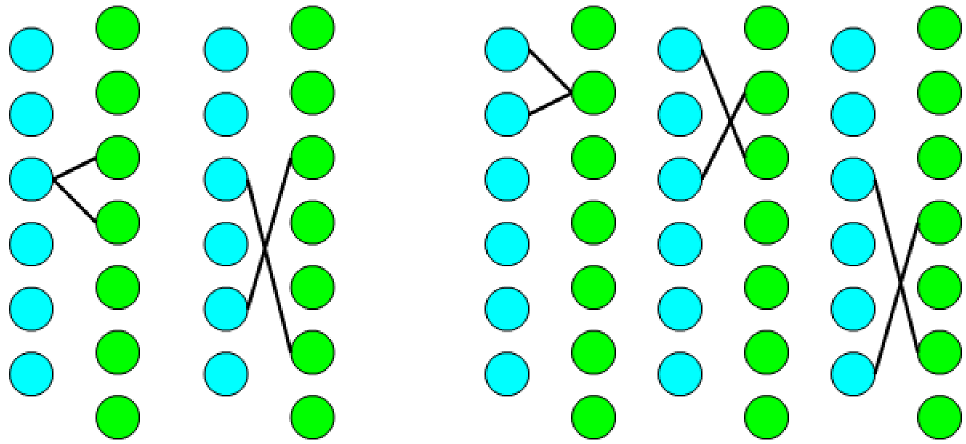
如果這個子圖是特徵圖，則每個連通子圖都要含有一條 E_1 的關係線。

假設共有 m 個連通子圖，並且設 $t_1,t_2,\ldots,t_m$ 分別為這些連通子圖的大小(連通子圖所含的點數)，則試著估計 t_i 的大小。

假設某個 $t_i=1$，則顯然在這個特徵子圖裡面沒有任何 E_1 的關係線(只有一個點且均為簡單圖)，矛盾，因此，每一個 $t_i\neq 1$。

假設某個 $t_i=2$，且又要有一條 E_1 的關係線，則這兩個點之間就得連一條 E_1、一條 E_2 關係線，所以這兩點在同行或同列上。

再來觀察特徵圖的格子所給出的 E_2 關係線，可以發現只有當特徵圖的格子在關鍵格時，所產生的關係線才會在同行或同列上。



每一個特徵圖格子所產生的關係線都類似上圖的 X 狀，而左側開口較小的 X 是由狹義特徵圖格子所產生的(左兩張圖)，右側開口較小的 X 是由廣義特徵圖格子所產生的(右三張圖)。
而僅當特徵圖格子在關鍵格時才會有同行同列的情況發生(第一張和第三張)。

但如上圖所示，如果這個產生這條 E_2 關係線的特徵圖格子在關鍵格上的話，則這個連通子圖至少有三個點，因此，每一個 $t_i \neq 2$。

所以對於所有 i，$t_i \geqq 3$

更進一步的，因為每個連通子圖對於 E_2 都是連通的，所以至少含有 t_i-1 條 E_2 關係線

$\dfrac{E_2\text{關係線數}}{\text{連通子圖大小}} \geq \dfrac{t_i - 1}{t_i} \geq \dfrac{2}{3}$，即 E_2 關係線數 $\geq \dfrac{2}{3} t_i$

又代表圖的點數等於關鍵格數(2K+1)，即 $\sum t_i = 2K + 1$，

所以關係線總數 $\geq \dfrac{2}{3} \sum t_i = \dfrac{4K+2}{3}$

另外一個特徵圖格子恰產生兩條關係線，因此特徵圖的格子數

$\geq \dfrac{\frac{4K+2}{3}}{2} = \dfrac{2K+1}{3}$

於是，我們得到了廣義最小特徵圖的下界：$\left\lceil \frac{2K+1}{3} \right\rceil$ 個格子。

2. 狹義最小特徵圖

跟上面一樣，也會有 E_2 關係線：連通子圖大小 $\geq \frac{t_i - 1}{t_i} \geq \frac{2}{3}$ 的性質，只是這樣仍不足以估到確切的值。

因為多加限制了特徵圖格子只能取在 diagram 內，因此還有其他用來修正的不等式。

連通子圖所有的假設與上面相同，然後我們要多加證明一個不等式。

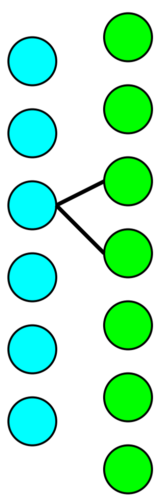
宣稱：在每個連通子圖中，一定包含兩個以上的綠色點(代表圖右邊的點)。

假設一個連通子圖沒有綠色的點，則因為 E_1 關係線是二分圖，所以不會有任何 E_1 關係線在這個連通子圖裡，矛盾，即每一個連通子圖中必有一個綠色的點。

假設一個連通子圖只有一個綠色的點，且又要有 E_1 關係線，因為 E_1 關係線是二分圖，所以唯一有可能會使這個連通子圖裡面有 E_1 關係線的情況，就是左邊的某個點與右邊這個點有連線，亦即此連通子圖存在兩個點同行或同列。

而由上面的論述，可知若有兩個點同行或同列又連有 E_2 關係線，則其來源的特徵圖格子並定是關鍵格。

但因為在狹義特徵圖裡面討論，所以關鍵格只有可能是值為“1”的格子，所以必會產生右圖之類的情況，且其中一條 E_2 關係線在這個連通子圖裡面，因此另外一條必定也在(因為是連通子圖)，而這說明了這個連通子圖裡面至少有兩個綠色的點(右邊的點)。



所以得到**在每個連通子圖中，一定包含兩個以上的綠色點(代表圖右邊的點)。**

因此藍色的點(左邊的點)至多有 t_i-2 個。

再來因為所有的連通子圖的聯集是整個代表圖(只看點的話)，所以

$K = \sum$連通圖中左邊的點數$\le \sum(\mathrm{t_i} - 2)$

而$\sum t_i = 2K + 1$，可推得：

$3K + 1 = K + 2K + 1 \le \sum(\mathrm{t_i} - 2) + \sum t_i = 2\sum(t_i - 1)$

所以，$\sum(t_i - 1) \ge \dfrac{3K+1}{2}$。

因為每個連通子圖中 E_2 關係線數$\ge t_i - 1$，

所以 E_2 關係線總數$=\sum$連通子圖中E_2關係線數 $\ge \sum(\mathrm{t_i} - 1) \ge \dfrac{3\mathrm{K}+1}{2}$，

而 2×特徵圖格子數＝E_2 關係線總數$\ge \dfrac{3K+1}{2}$，

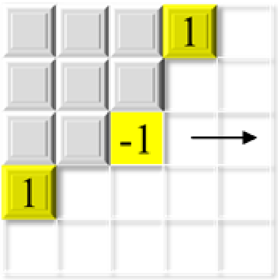
所以特徵圖格子數$\ge \dfrac{3K+1}{4}$，

即為狹義最小特徵圖的下界：$\left\lceil \dfrac{3K+1}{4} \right\rceil$。

3. 恰好達到下界的例子

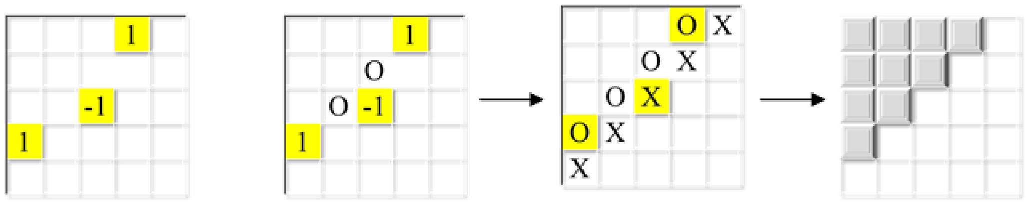
在廣義最小特徵圖的下界：$\left\lceil \dfrac{2K+1}{3} \right\rceil$時，下面類型的例子均可達到下界。

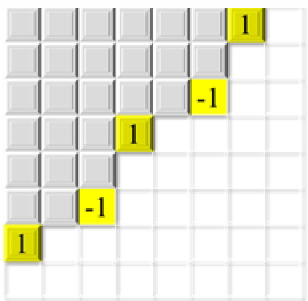
因此這種估計已經為最優，而不可更進一步修正的。



K=4

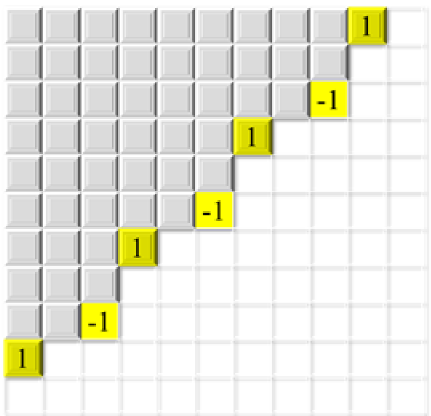
特徵圖格子數為 $3=\left\lceil \frac{2K+1}{3} \right\rceil$





K=7

特徵圖格子數為 $5=\left\lceil \frac{2K+1}{3} \right\rceil$



K=10

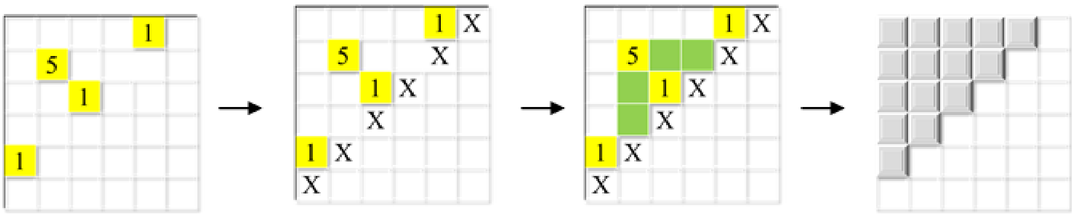
特徵圖格子數為 $7=\left\lceil \frac{2K+1}{3} \right\rceil$

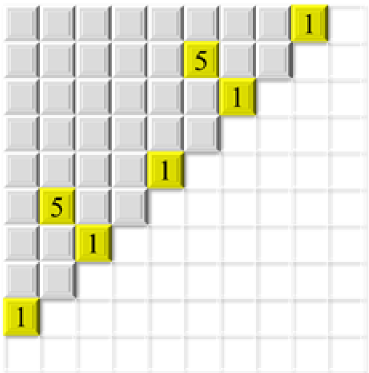
在狹義最小特徵圖的下界：$\left\lceil \frac{3K+1}{4} \right\rceil$時，下面類型的例子均可達到下界。

同樣這種估計已經為最優，而不可更進一步修正的。

K=5

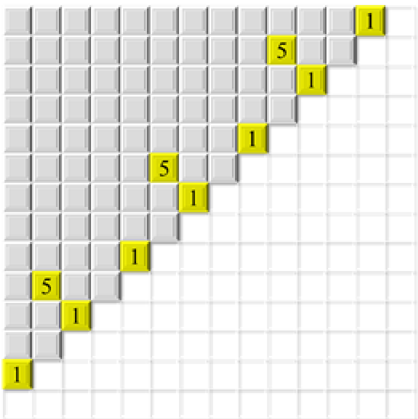
特徵圖格子數為 4=$\left\lceil \frac{3K+1}{4} \right\rceil$





K=9

特徵圖格子數為 7=$\left\lceil \frac{3K+1}{4} \right\rceil$



K=13

特徵圖格子數為 10=$\left\lceil \frac{3K+1}{4} \right\rceil$

肆、　結論與應用

一、結論

(一) 最小特徵圖上界：$K+1$

(二) 一層階梯特徵圖判斷方法

(三) 廣義最小特徵圖下界：$\left\lceil \frac{2K+1}{3} \right\rceil$

(四) 狹義最小特徵圖下界：$\left\lceil \frac{3K+1}{4} \right\rceil$

(五) 上界在寬度數列每項都≧2 的情況時已為確切的最小特徵圖大小，另外下界在一層階梯皆為確切的最小特徵圖大小。

二、應用

可以用來縮減傳遞所需要的訊息，例如需要表達一個 Ferrers diagram 時所需要的最少資訊量以及至多需要多少資訊量即可傳遞整個 diagram，又與“1”的個數相當有關，且許多情況甚至還比“1”的個數小，因此這種方法可能會比一般直接以整數分拆來表示 Ferrers diagram 的傳遞資訊方式來的佳。

伍、　參考文獻

Jacob Post (2001)　*COMBINATORICS OF ARC DIAGRAMS, FERRERS FILLINGS, YOUNG TABLEAUX AND LATTICE PATHS.*　B.Sc., Portland State University, 2001

評語

1. Ferrers Diagram 是組合學的重要工具。作者掌握到運用整齊畫一的二維平面圖像來進行分割問題的探索，展示出組合學除了得以利用代數作為運算工具之外，也能夠透過幾何圖形來協助數學實驗。

2. 作者對於研究主題認識深刻，表現出普遍中學生當中難得一見的數學成熟度。

3. 報告作品時作者能夠恰到好處的運用電腦展示數學實驗的步驟。如此的精心策劃使得聆聽者經歷一場精彩的數學秀。(當然，以防科技產品日益短促的半衰期，作者也可發展一套同樣引人入勝的紙牌秀。)