

2012 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

編號：010021

作品名稱

阿里巴巴轉盤問題

得獎獎項

大會獎：三等獎

作者姓名：葉致寬、李冠運

就讀學校：臺北市立建國高級中學

指導教師：李宗熹

關鍵字：轉盤、估計與構造、質因式分解

作者簡介

李冠運(左下)(1993 - ?)，出生於臺北市，現就讀臺北市立建國高級中學高三。喜歡在戶外沐浴陽光，置身清風中，享受大自然的洗禮。同時，也樂於體驗世界各地的文化，增光自己的見識。但是人生中最大的樂趣就是學習廣大無窮的知識，而研究數學更是為其人生增添了許多快樂。曾經參加過各種比賽，屢獲肯定，但是並不以此為限，畢竟對其而言，人生就是一場精彩的冒險，不論結果如何，勇敢的挑戰自我才能顯現生命真正的價值！



葉致寬(右上)，熱愛數學的高中生，平常喜歡研究數學問題，而碰到困難的問題更喜歡努力研究並享受解題的樂趣。而接觸到環球城市數學競賽的題目更開啟了這個研究。也更增加了我對數學研究的興趣。

摘要

本作品為環球數學城市競賽的考題之推廣（International Mathematics Tournament of the Towns, Senior A-Level Paper, Fall 2009, No. 7），然而此題目本身比較接近Scientific American（Feb 1979）中 Martin Gardner 的文章 The Rotating Table 所提出的問題。

而此問題的多邊形版已被數學家解決(Ted Lewis & Stephen Willard, 1980, The Rotating Table, Mathematics Magazine, 53, Page 174-175.)。然而此份作品採用簡潔的初等數學歸納法證明了原本的多邊形情形，且專注於探討條件改變為 $m=n-1$ 時的多邊形情形。

$m=n-1$ 時的情形是前人所沒有做出結果的，且 $m=n-1$ 的情形遠遠比 $m=n$ 的情況來得複雜多變，其中估計上下界所使用的許多組合技巧相當特別。然而其中當 n 為 3 和 5 的倍數時有比較特殊的情況，這一個部分僅能給出目前得出的 k 值上界。而其他情況則能夠找出所有的 k 值。

Abstract

This study is a furtherance of a problem in the International Mathematics Tournament of the Towns (International Mathematics Tournament of the Towns, Senior A-Level Paper, Fall 2009, No. 7), while this study is more similar to the problem Martin Gardner posted in Scientific American (Feb 1979) .

The polygon version is already solved by the mathematician (Ted Lewis & Stephen Willard, 1980, The Rotating Table, Mathematics Magazine, 53, Page 174-175.). However, this study gave an brief solution of the original polygon version, and focuses on the polygon version while the condition is altered to $m=n-1$.

No results of the $m=n-1$ part have been published before, and the $m=n-1$ condition is far more complicated than the original $m=n$ condition. The combination technique used to estimate the upper and lower bound is very special. However, different situations occur while 3 or 5 is a factor of n , and only the upper bound of k can be given. In other cases, k can be determined. Furthermore, we have determined an upper bound for the case when $m=n-2$ using a special technique. Similarly, this part has never been published before.

一、前言

(一)研究動機與題目介紹

本題目的前身是 2009 年環球城市數學競賽第七題：

阿里巴巴寶庫的山洞入口有一圓形轉盤，它是開啟山洞門的機關。轉盤的圓周上有 n 個完全相同的桶子，任何相鄰桶子的距離都相等。在每一個桶子內各放置有一隻頭朝上或頭朝下的鯖魚。阿里巴巴每次操作都可以選擇任何位置、任何數量的桶子(數量從 1 個到 n 個)全部上下翻轉。當每次操作結束，圓盤立即開始轉動，如果所有桶內的鯖魚頭全部朝上或全部朝下，則山洞門就會打開。否則當圓盤停止轉動後，任何人都無法再辨認哪些桶子曾被翻轉過。無論這些鯖魚如何擺置，若阿里巴巴必有數學策略保證可以打開山洞門，請問所有可能的 n 值是什麼？

這一道題的解答方法非常特別，於是我們就打算對這道題進行推廣，試圖找尋更多奇妙的解答方法。但是，我們的題目對環球城市的這道題進行了一些修改，來提升題目的深度與廣度。下面是我們的題目與環球的題目的差異：

- (1) 我們在選取了 k 個桶子後，可以先行進行觀察，再決定是否對這些桶子內的金幣進行翻轉。
- (2) 環球的題目中，門的打開條件為所有的金幣都為正面或反面；我們的題目中，門的打開條件為有連續 m 個金幣為正面或反面。

而本作品目前的題目的中英文版本如下：

On Ali Baba's treasury box is a rotating table, the key to open the treasury box. There are n identical buckets around the peripheral of the table and every two buckets have the same distance. There is exactly one gold coin in every bucket, which is either head or tail, but we do not know the circumstances at the beginning. Each time Ali Baba

can choose any k buckets, and observe whether the coins are heads or tails. After the observation, he may choose to flip any coin he chose at the beginning. After each move, if m consecutive coins have the same side up, the treasury box opens. Otherwise, the rotating table starts spinning at a very high speed which no one could recognize where the bucket will stop. No matter how the coins are placed in the first place, if Ali Baba has a winning strategy, we call the k he chooses a “perfect k .” In all those “perfect k ,” we define the smallest k $k(n, m)$ while n and m are fixed numbers. What is the value of $k(n, m)$?

阿里巴巴的寶箱有一圓形轉盤，它是開啟寶箱的機關。轉盤的圓周上有 n 個完全相同的桶子，任何相鄰桶子的距離都相等。在每一個桶子內各放置正面或反面的金幣。阿里巴巴每次操作都可以選擇任何位置、總個數為 k 的桶子，並觀察這 k 個桶子內的金幣。在他觀察完以後，他可以選擇對這 k 個桶子內的金幣進行上下翻轉，每一個金幣都可以選擇翻或不翻。當每次操作結束，如果桶內有連續 m 個金幣全部都是正面或反面，則寶箱就會打開。否則圓盤就會立即開始轉動，它每一次轉動的角度都是隨機的，並且在一次轉動完以後，沒有人能分辨原本的桶子轉動之後會停在哪裡且是否被翻轉過。無論這些金幣如何擺置，如果阿里巴巴能有策略打開門，那麼稱此時所選取的 k 為「好 k 」。對於固定的 n 和 m ，定義 $k(n, m)$ 為「好 k 」這一個集合中最小的數。求 $k(n, m)$ 的值為何？

(二)研究目的

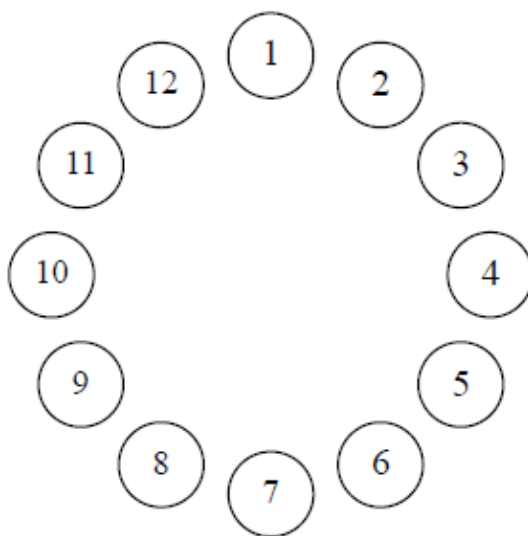
一、找出 $m = n$ 時， $k(n, m)$ 的值

二、找出 $m = n - 1$ 時， $k(n, m)$ 的值或上下界

二、研究方法或過程

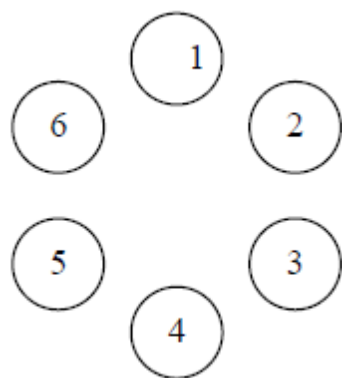
(一)名詞定義

因為對稱性，可以把任一個點當作 1，然後依順時針的方向開始標為 2,3,……, n 。又因為這樣的圖形轉了一圈以後又不變，所以容易知道 1 和 $1+kn$ 是一樣的。於是對於任何一個大於 n 的數，我們都以他除以 n 所得到的正餘數來表示。以 $n=12$ 為例，如下圖。



因為會經常用到因數相乘，設 a 、 b 為 n 的因數，當 $n=a \times b$ 時，有時會以長寬分別為 a 、 b 的矩陣的排列來表示圖形。這時並沒有矩陣的意義。從最左邊的那一行由 1 開始，依序填入 2、3 等，換行時從下一行的第一個開始。

以 $n=6$ 和 $n=9$ 為例，



可以表示為

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

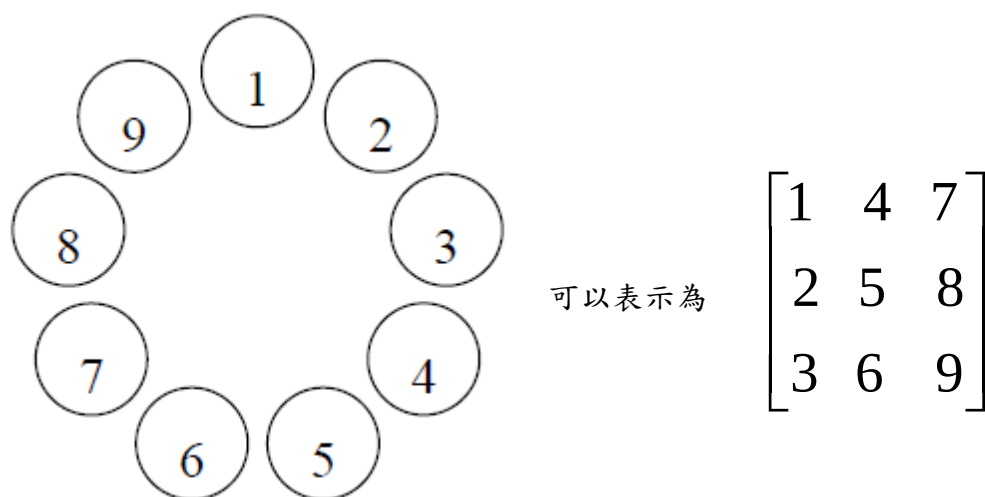
或

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

這看似沒有什麼意義，但是可以發現： $n=6$ 時， 1 和 4 不論轉盤怎麼旋轉，都還是在彼此的對面，因此，1 和 4 被分到同一列，可以看作同一組的。又因為對稱性，如果 1 和 4 變為 2 和 5，那也不會有任何的影響。但是在同一行的 1, 2, 3，由於旋轉以後可能變成是 2, 3, 4，因此在一行的數字並不看作一組，一列的數字才看作一組。

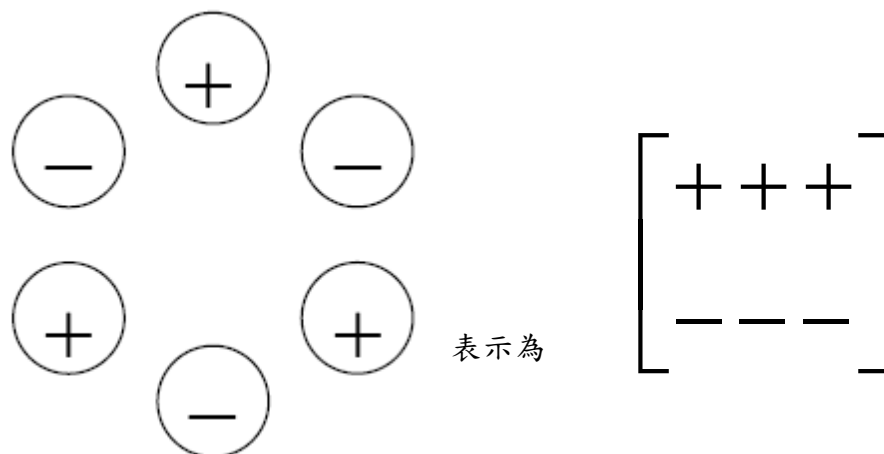
同樣的道理，也可以把 1, 3, 5 看作是一組， 2, 4, 6 看作是一組。因為這些組別是在轉盤旋轉之下的不變量所以特別重要，在下面的研究中有時會以這種形式表示。

運用類似的方法， $n=9$ 的情況可用下圖的方法表示：



再定義：金幣正面朝上的桶子為 +，反面朝上的桶子為 -。

這時就可以把



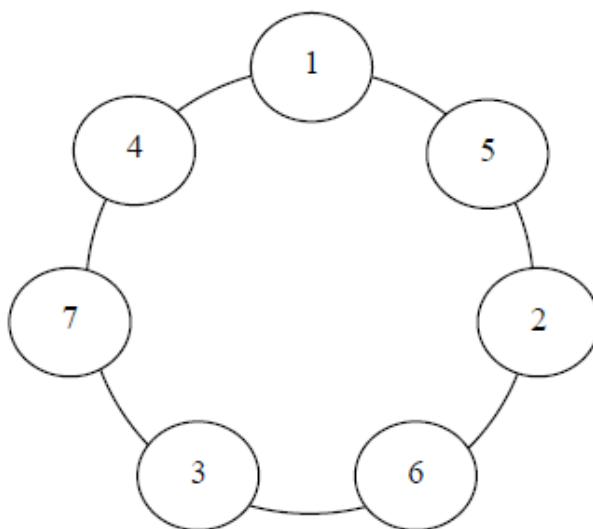
(二)研究過程

1.當 $m=n$ 的時候，令 $k(n,n)=k$ ，我們有如下的討論及分析：

Lemma1-1、當 n 為質數的時候， k 的最小值是 $n-1$

證明：首先考慮我們在翻動 k 個桶子時未翻到的 $n-k$ 個桶子。若將第一個桶子標號 1，第 $1+m$ 個桶子標為 2，……，第 $1+im$ ($i=0,1,\dots, n-1$) 個桶子標號為 $i+1$ ，則可構成一組模 n 的完全剩餘系。而且如果對於所有的 i 和 $i+1$ 都滿足 $1+im$ 和 $1+(i+1)m$ 符號相等，那麼排列 $1+im$ ($i=0,1,\dots,n-1$) 內的所有符號都相等，此時 1 到 n 的符號皆相同，那麼門便打開了。所以由反證法得到一定存在某組 i 和 $i+1$ 使得 $1+im$ 和 $1+(i+1)m$ 符號不相等。如果要順利打開門，顯然最後一次操作前的金幣排列有一種一定能夠打開門的方法。現在假設存在一種情況且存在一種操作方法可以在一步之內把門打開。由上述可以知道 $n-k$ 大於等於 2 時，在沒有選到的桶子中一定有兩個桶子內金幣的正反面是不相同的。因此假設不成立，也就是沒有辦法保證有一步做完以後門就打開了。因此當 $n-k$ 大於等於 2 時，門一定不會被打開。所以當 n 為質數的時候， $n-k=1$ ，即 k 的最小值就是 $k=n-1$ 的時候。

以 $n=7$ 作為例子：當間距等於 2 的時候，可以將圓桶標示為如下圖所示。



Lemma1-2、 $k(an, an) \geq a \times k(n, n)$

證明：把 an 分成 a 組，每一組都有 n 個桶子。假設 $k(an, an) < a \times k(n, n)$ ，那麼由鴿籠原理知道至少有一組取到的桶子數小於 $k(n, n)$ 。顯然如果此時門還可以打開，那麼便表示一次取少於 $k(n, n)$ 個桶子就可以將一個有 n 個桶子的轉盤內的金幣全部改為正面或反面，和 $k(n, n)$ 的最小性矛盾。由反證法得到 $k(an, an) \geq a \times k(n, n)$ 。

Lemma1-3、 $k \geq \frac{n}{2}$

證明：由 Lemma2 的結果可以發現對於任何一個 n ，對其因式分解有

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ ，不妨令 $p_m > p_{m-1} > \cdots > p_1$ ，那麼

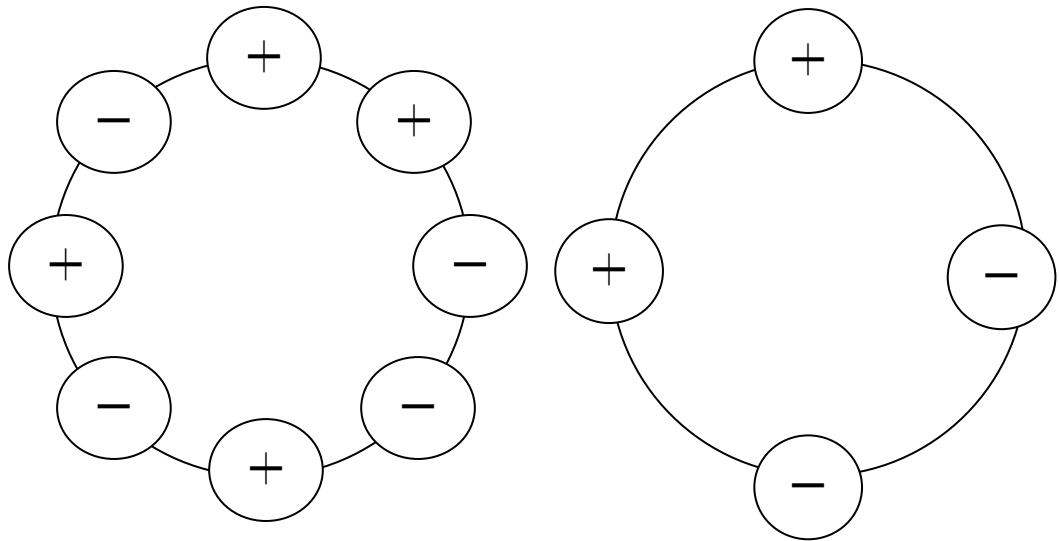
$k \geq \max[\frac{(p_i - 1) \times n}{p_i} = n - \frac{n}{p_i}]$ ，其中 i 屬於 $1, 2, \dots, m$ 中的數。最大值出現在 $i = m$

的時候，因此現在有 $k \geq n(1 - \frac{1}{p_m})$ （其中 p_m 是 n 的最大質因數），又由 $\frac{n}{p_m} \leq \frac{n}{2}$

知道 $k \geq \frac{n}{2}$ 。

Lemma1-4、 $k(2n, 2n) = 2k(n, n)$

證明：先定義在 n 的時候 k 的最小值為 k_n 。在有 $2n$ 個桶子的时候，把以圓心對稱的兩個桶子配對為一組，共有 n 組。讓 $2n$ 個桶子組成的圖稱為完整圖。對於完整圖中每一組的兩個桶子，如果兩個金幣的正反面一樣，那麼他就對應在一個有 n 個桶子的轉盤的相對位置上的正面金幣；反之，如果兩個金幣的正反面不一樣，那麼就讓這一組金幣對應的金幣為反面。Ex: $n=8$ 的時候，可以將下面左圖看作下面右圖：



我們將這個 n 的轉盤的金幣排列稱為對 $2n$ 的簡化圖。我們現在的目標就是要進行操作，使得完整圖中每一組內的兩個金幣轉變為兩個正面的金幣或者是兩個反面的金幣。

每作一步的操作以後要做一次「檢查」，檢查的方式就是對簡化圖進行操作。在改變的時候同時改變簡化圖上一個桶子對應到完整圖上的兩個桶子。例如，如果在處理有 n 個轉盤的時候需要翻動第 i 個桶，現在就同時翻動完整圖中第 i 組內的兩個桶子，直到做完一整次操作（一整次操作即為我們解決 n 個轉盤時所需要進行的一系列操作）。此時門打開則為檢查成功。如果檢查失敗的話，再把完整圖上連續 n 個桶子全部翻面(這樣簡化圖中一個金幣是負的情況就變成了是正的情況)，再重複檢查的動作(這裡要求的條件是 $k(n, n)$ 大於等於 $\frac{n}{2}$ ，但這是顯然的)。

這樣當做完一次操作之後完整圖中每一組內兩個金幣正反面全部相同的或是全部不同的兩種情況下門都會打開。如果在操作之後發現門還沒有開，就改變完整圖中相鄰的 n 個桶子，這樣就恢復成原本檢查以前簡化圖中的形式。這時要把完整圖中每一組內的兩個金幣變成正反面都是相同的或是都是不同的兩種情況和解決有 n 個轉盤時的情況相同，而且不會改變每一組的正負關係。

現在當在解決有 n 個轉盤時的情況中我們要翻動第 i 個桶子，此時在完整圖中就依然翻動第 i 個桶子，這時候簡化圖中的第 i 組金幣正反面會改變。因此如果在有 n 個盤子的情況下門可以保證打開，在完整圖中經過檢查之後門也會打開。這時候進行有 n 個轉盤下能保證門打開所做的操作，我們就可以利用上述方法保證在完整圖中可以將門打開，這樣就可以把對完整圖和有 n 個盤子時的操作做一個映射。

下面舉 $n=6$ 為例子。在做 $n=6$ 之前，先看 $n=3$ 時的情況

由 Lemma 1 知道 $n=3$ 的時候 $k=2$ ，

方法是先把其中兩個翻成正面，那麼另一個就一定是反面。

$$\begin{bmatrix} + \\ + \\ - \end{bmatrix}$$

再選其中兩個金幣，如果出現反面就把它翻成正面，如果兩個都是正面，就都改成反面，門還是打開了。

現在考慮 $n=6$ 的情形。我們將說明一次選取 4 個金幣可以保證將門打開。

先選其中兩組全都改成正，如下圖，可以知道下面兩個問號不全是 +，

$$\begin{bmatrix} + & + \\ + & + \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

這時候再選取其中的兩組，如果出現負號就全部改成正號，門就開了

如果翻到兩組都是正號，就全部改成負號，如下圖

$$\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

這時候易知上圖的兩個問號也不是——，所以一定是+-。

$$\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \\ + & - \end{bmatrix}$$

這時候 $n=6$ 所對應到的 $n=3$ 的圖形就是

$$\begin{bmatrix} + \\ + \\ - \end{bmatrix}$$

在 $n=3$ 的情況之下這時候要翻開其中兩個桶子，所以在 $n=6$ 的時候翻開其中兩組桶子。

在 $n=3$ 時取到+-改成++，++改成——，對 $n=6$ 的簡化圖的操作亦然。

如果選到正號就改成負號，門就開了，如果取到兩組都是負號，就都把其中一個負號改成正號，變成下圖：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ E & F \end{bmatrix}$$

其中 $A \neq B$ ， $C \neq D$ ， $E \neq F$ 。

它所對應到的 $n=3$ 圖形就是：

$$\begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}$$

然後再隨機翻動相鄰的三個桶子，

會變成下圖

$$\begin{bmatrix} G & G \\ H & H \\ I & I \end{bmatrix}$$

對應到 $n=3$ 時就是

$$\begin{bmatrix} + \\ + \\ + \end{bmatrix}$$

這時候進行所謂檢查的工作，先選取其中兩組，都改成++

那沒翻到的兩個一定都是--，如下頁圖

$$\begin{bmatrix} + & + \\ + & + \\ - & - \end{bmatrix}$$

再選取其中兩組，-- 改成++

都是++就都改成--，門都會打開。

因此假設在 n 的時候 k 的最小值為 k_n ，在 $2n$ 的時候， $k_{2n} \leq 2k_n$ 。又從 Lemma1-3 知道 $k_{2n} \geq 2k_n$ ，所以 $k_{2n} = 2k_n$ 。

此時已經解決了所有形如： $n = 2^x \times p$ (p 為質數) 之情況，現在考慮形式如 $n = 2^x \times p \times q$ (p 為質數) 的數。

Lemma1-5、當 $n = p \times q$ (p 為大於 2 的質數， q 為大於等於 p 的若干質數的乘積)，

$k_n \leq p \times k_q$ 證明：這時分為 p 組，每一組有 q 個桶子。由 Lemma1-3 得到

$kq \geq q - a$ (a 是異於 q 最大的因數)，又 $q \geq pa$ (p 小於等於 q 非 1 的最小因數)，所以得到

$$p(q - a) \geq (p - 1)q \rightarrow q - a \geq \frac{p-1}{p} \times q \rightarrow kq \geq \frac{p-1}{p} \times q \rightarrow pkq \geq (p-1) \times q$$

那麼就可以先把 $p-1$ 組全部改成正面。

$$\begin{bmatrix} + & + & + & + & \dots & + \\ + & + & + & + & \dots & + \\ \dots & & & & & \\ ? & ? & ? & ? & \dots & ? \end{bmatrix}$$

這時每一組選出 k_q 個桶子，這時候考慮不確定的那 q 個。

欲證: q 個桶子中翻動 k_q 個可以確定其中 $q-1$ 個為正:

q 為質數的時候顯然成立。

若 q 為合數，那就把最小的質因數 a 提出來，令 $q = a \times b$ ，

令 b 最大的因數為 c ，則 $b \geq ac \rightarrow ab - ac \geq ab - b \rightarrow$

$$(a-1) \times b \leq a \times (b-c) \leq a \times k_b \leq k_q$$

這表示可以把其中 $a-1$ 排變成全部都是+。

因此題目等價於選出 k_b 個桶子，要把 b 個中的 $b-1$ 個確定為+。

這時候再重複上面的操作，直到只剩下一個質因數為止。

所以可以把其中的 $q-1$ 個改為+，最後一個自然是-了

這時候會變成:

$$\begin{bmatrix} + & + & + & + & \dots & + \\ + & + & + & + & \dots & + \\ \dots & & & & & \\ + & + & + & \dots & + & - \end{bmatrix}$$

這時候再選取其中的 $p-1$ 組，如果有-就改成+門就開了

如果全部都是+就全部改成-。

這時會變成

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - & \dots & - \\ - & - & - & - & \dots & - \\ \dots & & & & & \\ + & + & + & \dots & + & - \end{bmatrix}$$

這時候每一組都各選取 k_q 個桶子。如果全部都是-號的組別就不要改變，進

行 $n = q$ 的時候的操作。這時候要計算+和-的數量，當發現-的數量超過了 k_q

的話，就把上面 $p-1$ 組的-全部改成+，如果+的數量也超過 k_q ，那麼+和-

的總和就 $\geq 2k_q$ ，也就是 $k_q \leq \frac{n}{2}$ 。等號成立的時候 q 為 2 的冪次。

但是 q 是奇數，也就是等號並不會成立。因此只要依照在 $n=q$ 的時候的操作即可。

Theorem1. $k(n, n) = (p_m - 1) \times \frac{n}{p_m} = n - \frac{n}{p_m}$

由以上可以得知，如果 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ ，那麼令當 $m > r$ 時， $p_m > p_r$ ，

則由 $k_{p_m} = p_m - 1$ 、 $n \leq \frac{n}{p_m}(p_m - 1)$ 及 Lemma1-2 中的 $n \geq \frac{n}{p_m}(p_m - 1)$

知道 $k(n, n) = (p_m - 1) \times \frac{n}{p_m} = n - \frac{n}{p_m}$

2. 當 $m = n-1$ 的時候，令 $k(n, n-1) = k_n$ ，我們有如下的討論及分析：

Lemma2-1、 $k(n, n-1) \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ($n \geq 6$)

首先我們證明，如果一次選取的桶子數少於總桶子數 n 的一半，在這個轉盤中就會存在一組距離為 k 的桶子未被選取到。

1. $\gcd(n, k) = 1$

第一步，將這 n 個桶子按照下列的方法進行編號：

將某一個桶子標為 1，將順時針方向上與標號為 1 的桶子距離 k 的桶子標為 2，將順時針方向上與標號為 2 的桶子距離 k 的桶子標為 3，以此類推。我們便得到了一組數字 $1, 2, \dots, n$ ，其中每兩個標號相鄰的桶子距離都是 k 。

若 n 是偶數，不妨設 $n = 2t$ ，那麼由上述標號方法知道

$(1, 2), (3, 4), \dots, (2t-1, 2t)$ 這 t 組中每組都要至少取到一個桶子，此時我們總

共至少選取了 t 個桶子。如果我們選取了少於 t 個桶子，那麼由鴿籠原理知道至少有一組裡面沒有選取到桶子，即這組中的兩個桶子滿足條件。

若 n 是奇數，不妨設 $n = 2t + 1$ ，那麼由上述標號方法知道 $(1, 2), (3, 4), \dots, (2t-1, 2t)$ 中的 t 個組中都至少要取到一個桶子。下面我們證明一次選取 t 個桶子時將有兩個桶子滿足題目情況。此時 $(1, 2), (3, 4), \dots, (2t-1, 2t)$ 中每組都只有一個桶子。不妨設 $(1, 2)$ 中被選取到的桶子是 1，則 3 一定要被選取到，否則 $(2, 3)$ 就滿足條件了。因此我們可以知道 $1, 3, \dots, 2t-1$ 這 t 個桶子都要被選取到。於是我們就有一組 $(2t, 2t+1)$ 滿足條件。

2. $\gcd(n, k) = t$

首先，我們將這 n 個桶子進行如前文所述之分類法分為 t 組，此時所有距離為 k 的桶子組都分別在這 t 組裡面，而且如果將這 t 組分開來作為新的轉盤，那麼原本距離為 k 的兩個桶子在這個新的轉盤上的距離就變為 $\frac{k}{t}$ 了。因為 $\gcd(\frac{n}{t}, \frac{k}{t}) = 1$ ，所以由上述討論，每個新的轉盤都至少要選取不少於半數個桶子才會不存在距離是 k 的兩個桶子，故整體若選取少於 $\frac{n}{2}$ 個桶子，那麼由鴿籠原理知道這些新轉盤中至少有一組未取到半數個桶子，由上述討論知道會存在兩個距離是 k 的桶子未被選取，滿足題目條件。

下面證明原題。

1. n 是奇數。

不妨設 $n = 2t + 1$ ，我們將證明 $k(n, n-1) \geq t+1$ 。

不妨設我們可以在一次取 t 個桶子的時候保證將門打開。在進行我們將門打開的最後一個步驟前，如果轉盤上至少有 $t+2$ 個正面金幣，我們由上述的

討論知道，原先就存在的一組反面金幣組有機會不被選取到。因為我們無法保證一定取得到這兩個反面金幣之一，所以不能保證打開門，與最後一個步驟矛盾。而此時就算選取到了 t 個正面金幣並將其改為反面，還是有至少2個正面的金幣無法選取到，無法打開大門，與最後一個步驟矛盾。因此在有至少 $t+2$ 個正面金幣， $t-1$ 個反面金幣的條件下，我們無法保證進行一次操作就將門打開。

於是我們的情況就只剩下最後步驟為 $t+1$ 個正面金幣與 t 個反面金幣。由於我們選取的金幣數目為 t 個，所以為了使門打開，只有下述三種可能的方法：

(1)選取到 t 個正面金幣，並將他們改為反面金幣。

(2)選取到 $t-1$ 個反面金幣，並將他們改為正面金幣。同時也選取到一個正面金幣。

(3)選取到 t 個反面金幣。

由於轉盤有自動旋轉的作用，所以由轉盤轉動的任意性有 n 種不同的可能情況。如果在這 n 種情況中有一種無法使門打開，那麼就與這種情況為可以保證打開門的最後步驟矛盾。所以這 n 種情況都屬於(1)，(2)或(3)。

我們假設有 $n-a$ 種情況為(1)， x 種情況為(2)， y 種情況為(3)，且 $x+y=a$ 。

因為我們一次取到的金幣數為 t ，且我們走完了 n 次不同情況，所以每個反面金幣都被選取到了 t 次，所以我們有關係式：

$$t^2 = (t-1) \cdot x + t \cdot y$$

所以我們有不等關係：

$$(t-1) \cdot a \leq t^2 \leq t \cdot a$$

於是我們得到不等關係：

$$t \leq a \leq t+1$$

即 $a=t$ 或 $a=t+1$

若 $a=t$ ，此時 $x=0$ ， $y=t$ ，即所有 n 種情況都是選取到正面的金幣，即 n 個金幣皆為正面金幣，顯然矛盾。

因此， $a=t+1$ 。解聯立方程

$$x+y=a=t+1$$

$$(t-1) \cdot x + t \cdot y = t^2$$

得到 $x=t$ ， $y=1$ ， $a=t+1$ 。

故我們知道滿足(1)的個數為 $(2t+1)-(t+1)=t$ 組，即其中有 t 組全是正面的金幣。

將 $2t+1$ 個金幣依序標號為 $1, 2, \dots, 2t+1$ 。設 $t+1$ 個正面金幣的標號依序為 $(a_1, a_2, \dots, a_{t+1})$ 。由於有 t 組全是正面的金幣，所以我們得到下列的關係式：

設 $c_i = a_i - a_{i+1}$ ，則 $(c_1, c_2, \dots, c_t + c_{t+1})$ ， $(c_1, c_2, \dots, c_{t-1} + c_t, c_{t+1})$ ， $\dots$ ， $(c_1 + c_2, c_3, \dots, c_{t+1})$ 這 $t+1$ 組之中有 t 組全等，當 $t \geq 3$ 可以由此得到， $c_1, c_2, \dots, c_{t+1}$ 是全部相等的。

但是 $c_1 + c_2 + \dots + c_{t+1} = 2t+1$ ，而且 $t+1$ 不整除 $2t+1$ ，所以得到矛盾。

2. n 是偶數

不妨設 $n = 2t$ ，我們將證明 $k(n, n-1) \geq t$ 。

假設一次選取 $t-1$ 個轉盤可以保證將門打開。於是如 n 是奇數的情況類似，知道有一個最後步驟可以打開門。如果在最後一個步驟前有至少 $t+1$ 個正面金幣，則一次取 $t-1$ 個金幣時，至少有兩個反面金幣取不到。如果全部都取正面金幣，也將至少有兩個正面金幣無法取到。因此這種情況不可能為使門打開的最後步驟。因此我們知道，在最後步驟前，有 t 個正面和 t 個反面。

現在如果考慮轉盤自由轉動所造成 n 個不同組，為了使門可以打開，這 n 各組都必須要滿足下列條件：

- (1) 一次取到 $t-1$ 個正面金幣，並將他們轉成反面金幣。
- (2) 一次取到 $t-1$ 個反面金幣，並將他們轉成正面金幣。

若符合(2)的條件的組數比符合(1)中的組數多，則 n 個不同組中，至少有一半的組別為(2)，即符合(2)的組數至少為 t 。

將 $2t$ 個金幣依序標號為 $1, 2, \dots, 2t$ 。設 t 個正面金幣的標號依序為 $(a_1, a_2, \dots, a_t)$ 。由於有至少 t 組全是正面的金幣，所以我們得到下列的關係式：

設 $c_i = a_i - a_{i+1}$ ，則 $(c_1, c_2, \dots, c_{t-1} + c_t)$ ， $(c_1, c_2, \dots, c_{t-2} + c_{t-1}, c_t)$ ， $\dots$ ， $(c_1 + c_2, c_3, \dots, c_t)$ 這 t 組之全等，當 $t \geq 3$ 可以由此得到， $c_1, c_2, \dots, c_t$ 是全部相等的。因為 $c_1 + c_2 + \dots + c_t = 2t$ ，所以我們知道 $c_1 = c_2 = \dots = c_t = 2$ ，即可以作為最後步驟前的轉盤的唯一可能的排列為正、反面金幣相間。

然而，如果我們要讓一個有 $2t$ 個金幣的轉盤含有這樣的排列，那麼我們一次要取的金幣數至少要是 $2k(t, t) \geq t$ ，因為我們在前面已經證明過

$k(t, t) \geq \frac{t}{2}$ 了。然而 $t > t-1$ ，所以得到矛盾。

綜上，我們證明瞭，當我們一次取少於總金幣數一半的金幣時，我們是無法打開門的。所以 $k(n, n-1) \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ，得證。

另外，因為 $t \geq 3$ ，所以這個可以解釋為什麼 $k(4, 3) = 1$ 與 $k(5, 4) = 2$ 這兩個數這麼與眾不同了。

Lemma2-2、當 p 為質數時， $k = \frac{p+1}{2}$ ($p \geq 7$) 時可以打開門。

由於初始條件中門未打開，所以至少有兩個金幣是與大眾不同（不妨令之為負）的。對於任意兩個負的金幣，假設他們兩個中間的距離是 m ，則可以通過下面的操作使得兩個金幣中至少有一個被翻出而調成正面。

首先，將圓盤依序標示為 $1, 2, \dots, p$ 。

接著，翻開標號為 $(1, 1+2m, \dots, 1+(p-1)m)$ 的箱子。其中，各數所代表的圓盤為其除以 p 所得之餘數。例如，對於 $p=7, n=2$ 的情形，翻開標示為 $(1, 5, 9, 13)$ 的圓盤，即翻開標示為 $(1, 5, 2, 6)$ 。

最後，由於 p 為質數，知道 $(1, 1+2m, \dots, 1+(p-1)m)$ 構成一個模 p 的完全剩餘系，故 $(1, 1+2m, \dots, 1+(p-1)m)$ 中各數模 p 之餘數相異。而此時沒有被選取到的分別是 $(1+m, \dots, 1+(p-2)m)$ 而且此時這一個組別裡面每一個標號的左方 m 或是右方 m 個都在前面被選取到的集合裡，也就是說，沒有兩個沒有被選取到的數字的距離是 n 。這時候把選取到的符號全部改為 $+$ ，對於每一組距離是 m 的兩個數都可以有一種選取方式使得其中有一個變成正。

對 $m=1$ 到 $\frac{p+1}{2}$ 的情況都操作一次，也就是不存在距離為 1 到 $\frac{p+1}{2}$ 的兩個負號，這時候只會剩下一個負號，其他都是正號，這時共有 $m-1$ 個正號，

門自然會打開。

Lemma2-3、 當 $n = 2^s$ ($s \geq 3$) 時，一次翻動 2^{s-1} 個桶子可以保證打開門。

如果存在距離為奇數的桶子，則可以通過 Lemma2-2 的方法將其中至少一個桶子內的金幣翻成正面。因此可以確定所有反面的金幣之間的距離為偶數。當有一組反面的金幣的距離為 $2^{t \times b}$ ，其中 b 為奇數時，將 n 個桶子分為 2^t 小組，每小組中相鄰兩個桶子的距離都是 2^t 。此時可以將每小組當作一個新的圓盤，上面有 2^{s-t} 個桶子，為使每小組都不存在距離為 b 的桶子，下面證明每小組使用 2^{s-t-1} 個桶子即可。

將轉盤上的桶子標示為 $1, 2, \dots, 2^{s-t}$ ，選取 $(1, 1+2b, 1+4b, \dots, 1+(2^{s-t}-1) \times 2b) \pmod{2^{s-t}}$ 共 2^{s-t-1} 個桶子。剩下未取到的 2^{s-t-1} 個桶子兩兩距離皆為偶數，與 b 為奇數不合，故得證。

因此，所有小組選取的桶子數總和為 $2^{s-t-1} \times 2^t = 2^{s-1}$ 。

Lemma2-4、 $k(ta, ta-1) \geq tk(a, a-1)$

將 ta 個桶子分為 t 個 a 元組，若 $k(ta, ta-1) \geq tk(a, a-1)$ 不成立，那麼由鴿籠原理，一定有其中一組被翻到的桶子數小於 $k(a, a-1)$ 。因為 $k(a, a-1)$ 為 a 個桶子中可以保證有 $a-1$ 個連續相同面的金幣的最小數目，所以如果有一組沒有翻到 $k(a, a-1)$ 個桶子，那麼就沒有策略可以保證這一組裡面只有一個與其他 $a-1$ 個桶子正反不同的金幣，矛盾。因此可知 $k(ta, ta-1) \geq tk(a, a-1)$ 。

Lemma2-5、 設 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ ，且 $p_1 > p_2 > p_3 > \dots > p_k \geq 7$ 則

$$k(n, n-1) = \frac{n}{p_k} \cdot \frac{p_k + 1}{2}$$

首先，由 Lemma2-4，知道

$$k(n, n-1) \geq p_i k\left(\frac{n}{p_i}, \frac{n}{p_i} - 1\right) \geq p_i p_j k\left(\frac{n}{p_i p_j}, \frac{n}{p_i p_j} - 1\right) \geq \dots, \text{ 故知道}$$

$$k(n, n-1) \geq \max_{i=1,2,\dots,k} \left\{ \frac{n}{p_i} \cdot k(p_i, p_i-1) \right\} = \frac{n}{p_k} \cdot \frac{p_k+1}{2}。$$

其次，利用 Lemma2-2 的方法可以將所有與 $p_1, p_2, \dots, p_k$ 互質的距離的反面金幣組消除。

再來，我們將依次利用下述的方法將距離為 $p_1, p_2, \dots, p_k$ 的倍數的反面金幣依序消除。同時，我們將證明一次取 $\frac{n}{p_k} \cdot \frac{p_k+1}{2}$ 可以保證有可以打開門的策略。

首先，對於距離為 p_i 的倍數的反面金幣，可以將 n 個桶子依序編號，將其分為 p_i 組，每組 $\frac{n}{p_i}$ 個桶子，其中 $1, 1+p_i, \dots, 1+p_i(\frac{n}{p_i}-1)$ 為一組，
 $2, 2+p_i, \dots, 2+p_i(\frac{n}{p_i}-1)$ 為一組，以此類推。我們可以在每一組中取 $\frac{p_i+1}{2}$ 個桶子，因為 $\frac{n}{p_i} \cdot \frac{p_i+1}{2} \leq \frac{n}{p_k} \cdot \frac{p_k+1}{2}$ 。進行操作後，可以將 n 個桶子轉化為每組皆有一個反面金幣，故不存在距離為 p_i 的反面金幣組。因此，我們再利用類似的操作，將距離為 $p_1, p_2, \dots, p_k$ 的反面金幣組依序消除，最後再利用 Lemma2-2 的方法就可以將剩下的反面金幣組消除，使門打開。

$$\text{因此 } k(n, n-1) = \frac{n}{p_k} \cdot \frac{p_k+1}{2}, \text{ 得證。}$$

Lemma2-6、 $k(2n, 2n-1) = 2k(n, n-1) (n \geq 6)$

首先把 $2n$ 兩兩相間分成兩組，奇數和偶數分別分開，現在因為

$k(2n, 2n-1) = 2k(n, n-1) \geq n$ ，所以可以把其中一組改成全部都是正號(或負號)。會變成

$$\begin{bmatrix} + & + & \dots & \dots & + \\ ? & ? & \dots & \dots & ? \end{bmatrix}$$

現在兩組都取 $k(n, n-1)$ 個並全部改成正號，會變成

$$\begin{bmatrix} + & + & \dots & \dots & + \\ + & + & \dots & \dots & ? \end{bmatrix}$$

其中有 $k(n, n-1)$ 個正號

現在選取其中的一組，如果存在負號，就改成正號就行了。如果全部都是正號，就全改成負號。會變成

$$\begin{bmatrix} - & - & \dots & \dots & - \\ + & + & \dots & \dots & ? \end{bmatrix}$$

這時候兩個組別都選取 $k(n, n-1)$ 個，因為其中一組正號比較多，至少會取到一個正號，

而另一組一定會全部取到全部都是負號。

這時候可以辨別兩組的異同，然後進行對 n 的操作。

現在如果有一次的操作取到兩組都完全一樣(不妨假設全正號)，那就選取其中一組，一定會取到全部都相同的那一組，並全部都改掉(變全負號)。

那這時候沒有被更改的那一組裡面至少有 $k(n, n-1)$ 個正號，下一次在兩組都取 $k(n, n-1)$ ，肯定不會取到全部都是負號或是正號，也就可以繼續進行對 n 的操作。

因此 $k(2n, 2n-1) \leq 2k(n, n-1)$ ，又由 Lemma2-4 知道

$k(2n, 2n-1) \geq 2k(n, n-1)$ ，有 $k(2n, 2n-1) = 2k(n, n-1)$ 。

下面我們將說明 n 為 3 或 5 的倍數時的特殊情況。

因為 $k(3, 2) = 0$, $k(5, 4) = 2$, 而對於其他的質數 p , 有 $k(p, p-1) = \frac{p+1}{2}$,

所以我們不能夠輕易運用前述的方法來解決 $k(3n, 3n-1)$ 及 $k(5n, 5n-1)$ 的情況。

首先我們將題目條件進行簡化來尋求解答。在之前的開門條件為 n 個轉盤中的金幣有連續 $n-1$ 個正面或反面的金幣，現在我們將條件簡化，使得開門條件轉變為必須是由連續 $n-1$ 個正面的金幣才能夠打開門。在這種特殊情況下我們可以設 $k'(n, n-1)$ 為可以保證門打開的一次可以選取的最小金幣數。由於 $k'(n, n-1)$ 的情況是原本題目的一個特別的情況，易知 $k'(n, n-1) \geq k(n, n-1)$ 下面來證明 $k'(n, n-1)$ 的值是 $\frac{n}{p} \cdot \frac{p+1}{2}$ ，其中 p 是 n 最小的一個奇質因數。

Lemma2-7、 Lemma2-2 至 Lemma2-5 中的所有「 k 」改成「 k' 」都成立。

我們在 Lemma2-2 至 Lemma2-7 中所有的證明過程都是以存在 $n-1$ 個正面金幣為最後結束時的狀態，且我們大部分的證明過程中都是將某一組反面金幣組的一個反面改成正面，即正面的金幣越來越多而不會出現新的反面金幣。所以說，我們對這些 Lemma 的證明都符合新的條件下的狀況。

Lemma2-8、 $k'(3, 2) = 2$ 且 $k'(5, 4) = 3$, Lemma2-2 到 Lemma2-5 所有的 $p \geq 7$ 條件都改成 $p \geq 3$

證明：首先討論 $n=3$ 的狀況。顯然一次選取 2 個金幣可以將門打開，因為只要任選兩個圓筒並將裏面的反面金幣都改成正面即可。如果一次只選取 1 個金幣，那麼當 3 個金幣中存在一個正面的金幣時，我們無法保證我們選取到的那一個金幣不是這個正面的金幣，也就是無法保證打開門。接著討論 $n=5$ 的狀況，顯然一次取 3 個金幣可以打開門，因為我們只要選取連續 3 個金幣將他們改成正面，再選取兩個連續的金幣及一個不與這兩個金幣相連

的金幣將他們改成正面即可。若只選取2個金幣，因為在5個金幣中至少有2個反面金幣，所以我們在選取這2個金幣的時候無法保證一定選到那兩個反面金幣之一，即無法保證打開門。

由此可知，此時的 $n=3$ 與 $n=5$ 情況滿足 Lemma2-2 中 p 的要求，即符合所有 Lemma2-2 至 Lemma2-5 的 p 。

設 $n = p_1^{\alpha^1} p_2^{\alpha^2} \cdots p_m^{\alpha^m}$ ，且 $p_1 > p_2 > p_3 > \cdots > p_k \geq 3$ ，則

$$k'(n, n-1) = \frac{n}{p_k} \cdot \frac{p_k + 1}{2}$$

因為 $n=3$ 與 $n=5$ 都符合此時的 p ，所以類似於 Lemma2-5 的方法可以知道此式顯然成立。

Lemma2-9、 $k'(2n, 2n-1) = 2k'(n, n-1)$

由 Lemma2-4 有 $k'(2n, 2n-1) \geq 2k'(n, n-1)$

現在把排列在奇數位子上的數和排列在偶數位子上的數分別分成兩組。分別使用對有 n 個轉盤的時候的操作，如此可以把兩組都操作剩下一個負號，其餘都是正號。現在證明 $2k'(n, n-1) \geq n$ 。

這時候不妨假設 $2n = 2^k \cdot t$ (t 為奇數)。

當 $t=1$ 的時候由 Lemma2-3 知道 $2k'(n, n-1) = n$ 。

當 t 為奇數的時候有 $2k'(n, n-1) \geq 2^k \cdot k'(t, t-1) \geq n$ ，得證。

由此可知現在可以選取其中一組並將這一組內的金幣改成正號，那麼全部就只會剩下一個負號，門就會打開。

Lemma2-10、設 $n = p_1^{\alpha^1} p_2^{\alpha^2} \cdots p_m^{\alpha^m}$ ，且 $p_1 > p_2 > p_3 > \cdots > p_k \geq 3$ 則

$$k'(n, n-1) = \frac{n}{p_k} \cdot \frac{p_k + 1}{2}$$

結合 Lemma2-7 道 Lemma2-10 的證明，我們可以得到這個結果。由於這一個式子和 $k(n, n-1)$ 有某種程度上的相像，所以也給予了我們解決 $k(n, n-1)$ 的一個方向。

Lemma2-11、 $k(3n, 3n-1) \leq 2n-2$ ，（ $n \geq 10$, 或 $n=7$ 又 3 不整除 n ）

首先說明當 n 是大於等於 7 質數的情況：

首先利用 Lemma2-4 可以知道 $k(3p, 3p-1) \geq 3k(p, p-1) = 3 \cdot \frac{p+1}{2}$

下面證明一次取 $3 \cdot \frac{p+1}{2}$ 可以消除所有距離為 3 的倍數的反面金幣組。

將 $3p$ 個桶依序編號並且分為 3 組，令 $1, 1+3, \dots, 1+3(p-1)$ 為一組，
 $2, 2+3, \dots, 2+3(p-1)$ 為一組， $3, 3+3, \dots, 3+3(p-1)$ 為一組。將這 3 組看成是獨立的小轉盤，同時對這 3 組進行操作，則可以使每組都只剩下一個翻面的金幣，且任兩個金幣間的距離都不是 3 的倍數。故所有的距離為 3 的倍數的反面金幣組都被消除了。

另外，我們可以將 $3p$ 個桶子分為 p 組，其中 $1, 1+p, 1+2p$ 為一組，
 $2, 2+p, 2+2p$ 為一組，以此類推。下面證明可以一次取 $2p-2$ 個桶子將距離為 p 的反面金幣組消除。

首先進行 Lemma2-2 的方法，將所有距離與 3， p 互質的反面金幣組消除，這時 p 組內一定只有一組有兩個或三個反面金幣。否則，如果有兩組滿足這個條件，則分別取兩組中的金幣各一個，他們兩個的距離不是 p 的倍數，也不是 3 的倍數，故知道在利用 Lemma2-2 的方法時已經將他們這一組去除，矛盾。接著，再在這 p 組中各取一個數，如果全部都取到正面的金幣，則不做操作。如果取到反面的金幣，則將其改為正面，此時可以確

定 p 組中只有一組有反面的金幣，且剛好有兩個反面金幣。

現在在 $p-1$ 組中各取 2 個，如果取到有反面金幣的那一組，則將反面金幣翻轉成正面後門即打開。如果沒有取到有反面金幣的那一組，則將所有取到的金幣都由正面轉為反面。此時共有 $p-1+1=p$ 個正面金幣，且此時沒有兩個正面金幣的距離是 p 的倍數，再用前面所敘述的方法，可以由一次取 $3 \cdot \frac{p+1}{2}$ 個桶子將所有距離為 3 的倍數的正面金幣組消除，然後再利用 Lemma2-2 的方法便可以滿足 $3p$ 個金幣中只有 1 個是正面的，故門會打開。

如果 n 是合數採用類似的方法，先分成三組，每一組用和前面類似的方法，每一組翻動 $k'(n, n-1)$ 個金幣，把距離是三的倍數的反面金幣消除。

然後在分成 n 組使用上面操作的第二部分，就可以順利的把門打開。

由於 $p \geq 7$ 時， $2p-2 \geq 3 \cdot \frac{p+1}{2}$ ，可以確定一次取 $2p-2$ 有保證打開門的方法，而 $n \geq 10$ 的時候， $2n-2 \geq 3 \cdot \frac{3n}{5} \geq 3k'(n, n-1)$ ，故當 $p \geq 7$ 或 $n \geq 10$ 又 3 不整除 n 時可知道 $k(3p, 3p-1) \leq 2p-2$ ，得證。

Lemma2-12、 $k(9n, 9n-1) = 6n$ ($n \geq 2$)

因為 $9n = 3 \cdot 3n$ ，所以現在要消除距離是 3 的兩個反面桶子。把它分成三組，距離是三的倍數的桶子全在一組之中。如果一組的個數大於三個，那要使每一組改成至多一個反面桶子所需要的數量是 $3k'(3n, 3n-1) = 6n$ 。

又 $6n > 6n-2$ ，所以接下來的步驟都和 Lemma2-13 後面總結中的步驟相同。

因此 $k(9n, 9n-1) = 6n$ 。

Lemma2-13、 $k(5n, 5n-1) \leq 3n$ (3 不整除 n)

因為 $k'(5n, 5n-1) = 3n$ ，又我們知道 $k(5n, 5n-1) \leq k'(5n, 5n-1) = 3n$ ，
得證。

總結上面的 Lemma2-1 到 Lemma2-15，只要 $3, 5$ 都不整除 n ，那麼
 $k(n, n-1) = k'(n, n-1)$ 。剩下沒被討論出的 n 只需要把 $n = 3, 5, 6, 9, 10, 15$ 討論完畢，那麼所有 3 的倍數和 5 的倍數的奇數之 k 值都討論完畢。 $2^k \cdot 3$ 和 $2^k \cdot 5$ 只需討論 $n = 6$ 和 $n = 10$ 的情況及可。那麼對於這六個數的 $k(n, n-1)$ 的值分別會在附錄裡面一一討論。

3. $k(n, n-2)$ 的上界

首先，介紹一種思考的方法。我們假設一個轉盤上的 n 個桶子裡，有 3 個反面金幣及 $n-3$ 個正面金幣。此時，我們要找出 k 值，使得無論這 3 個反面金幣在轉盤上位於什麼位置，我們每次思考後選取 k 個桶子都可以找到這 3 面金幣的至少一個。舉例而言，假設現在 $n=9$ 。將轉盤上的桶子依序標為 $1, 2, \dots, n$ 。假設現在盤子上面有 3 個反面金幣，分別在標示為 $1, 2, 4$ 的桶子裡面。此時，我們只要選取三個桶子，使得兩兩的間距依序為 $1, 4, 1, 3$ 。此時，無論轉盤如何旋轉，我們都會選取到下列九種桶子組之一：

$(1, 5, 6, 9), (2, 6, 7, 1), (3, 7, 8, 2), (4, 8, 9, 3), (5, 9, 1, 4), (6, 1, 2, 5), (7, 2, 3, 6), (8, 3, 4, 7), (9, 4, 5, 8)$

由此可見，無論轉盤如何旋轉，我們都已定可以取到這 3 個反面金幣的其中一個。當然，我們此時尋求的 k 值，是要使得這 3 面金幣無論位置在哪裡，我們都有方法必然取到其中之一，因此，在上述的例子中， k 不一定等於 4 ，因為我們只解決了反面金幣為 $1, 2, 4$ 排列時的情形。此時，我們需要證明 $k=4$ 一定可以打開寶箱。

下面我們將介紹一種選取的方法，使得對任意的 n ，我們都可以找到一個 k 值，

可以讓我們在有計劃的選取了 k 個桶子後，一定可以找到寶箱上 3 個反面金幣中的其中一個，將其翻為正面，並打開寶箱，進而縮小 $k(n, n-2)$ 的上界。

為什麼如此可以打開寶箱呢？因為只要有計劃的選取桶子，我們可以在試過所有的桶子組合後，不受轉盤轉動的影響，而可以將反面金幣一個一個翻為正面，最後剩下 2 個反面金幣，此時寶箱就會打開了。

事實上，我們隨著轉盤的轉動，每次都有可能選取到不同的組合，比方說，我們可能會選取到 $(1, 3, 4, 6, 9)$ 或者是 $(2, 4, 5, 7, 10)$ ，這不是我們可以決定的。所以，我們需要考慮所有的組合。比方說，若 $n=11$ ，那麼我們在做選取時就要考慮 $(1, 3, 4, 6, 9)$ 、 $(2, 4, 5, 7, 10)$ 、 $(3, 5, 6, 8, 11)$ 、 $(4, 6, 7, 9, 1)$ ……等共 11 種可能。

其實，我們也可以從另一個方向來作思考：先前，我們是考慮反面金幣不動，而我們所選取的桶子作“旋轉”。然而，我們也可以把這個問題看作是反面金幣在作“旋轉”，而我們所選取的桶子是不變的。這只是看問題的角度不同，本質卻是一樣的。但是，這樣的看法更有助於我們找到我們所要的 k 值，並擬定選取桶子的方法。

n 為奇數

現在，觀察這 n 個桶子中，3 個反面金幣旋轉的可能位置。我們首先討論 7 不整除 n 的情況。下面我們都以 $n=11$ 來作介紹，而這 3 個反面金幣排列的方式有以下幾種可能性：

- (1) 這 3 個反面金幣的間距兩兩不同
- (2) 這 3 個反面金幣的間距有兩組相同
- (1) 這 3 個反面金幣的間距兩兩不同

此時，在旋轉過程中，反面金幣輪換一圈後，每個位置的桶子都被接觸到 3

次。比方說，倘若此時反面金幣在(1,2,4)，那麼，(1,2,4)、(2,3,5)、(3,4,6)、(4,5,7)、(5,6,8).....中，“4”被接觸到 3 次，同理，每個桶子都被接觸到 3 次，即每個桶子都屬於反面金幣組輪換一圈的組中的 3 組。

下面我們要決定究竟要選取多少個桶子。

由於桶子 1 此時在 3 個尚未被選取到的反面金幣組中，我們稱桶子 1 的數字為“3”。我們首先任意選取一個桶子，比方說，桶子 1。那麼，當我們選取到桶子 1 時，我們就刪除了一個“3”。此時，由於桶子 2 在 2 個尚未被選到的反面金幣組中，我們稱桶子 2 此時的數字為“2”。而在選取了數個桶子後，倘若某一個桶子只屬於一組，那麼我們稱這個桶子的數字為“1”。最後，如果一個桶子不在任何尚未被選到的組中，那麼就稱這個桶子的數字為“0”。

容易知道，起初選取“3”桶子對我們是有利的，因為只要選取了一個“3”，我們就同時解決了反面金幣選轉的各組中的 3 組。

舉 $n=11$ 為例，假設反面金幣組為(1,2,4)，那麼我們選取第 4 個桶子，此時，(1,2,4),(2,3,5),(3,4,6)... 中因 4 屬於三組，我們就解決了這 3 組的情況。

接著，我們選取第 8 個桶子，因為這個桶子也是“3”桶子，於我們有利。

下一步，就不能夠再選擇“3”桶子了，因為不存在“3”桶子，我們就只能選取“2”桶子。連續選擇了三個“2”桶子後，就只能選“1”桶子，共選一個。

總結而言， $n=13$ 時，我們選擇的順序為：3，3，2，2，2，1。事實上，對於 $n=13$ ，我們都可以這樣選擇，而打開寶箱。先選“3”桶子，再選“2”桶子，最後選“1”桶子。我們總共選取了 6 個桶子。

當我們刪除了所有的“3”桶子後，剩下來的都是“2”桶子與“1”桶子了。接下來，要刪除“2”桶子時，由於“2”桶子都屬於兩個還沒有選到的組，故每個“2”桶子都會有下列的可能性：

第一組另兩個桶子的數字	第二組另兩個桶子的數字	所有桶子中“1”桶子變化	所有桶子中“2”桶子變化	所有桶子中“0”桶子變化
2, 2	2, 2	+4	-5	+1
2, 2	2, 1	+2	-4	+2
2, 2	1, 1	0	-3	+3
2, 1	2, 1	0	-3	+3
2, 1	1, 1	-2	-2	+4
1, 1	1, 1	-4	-1	+5

注意到，上表中{所有桶子中“2”桶子變化}及{所有桶子中“0”桶子變化}中都包含了我們所選取的那一個“2”桶子。

同時也注意到，我們總共可以選取 $\lfloor (n-1)/7+1 \rfloor$ 個“3”桶子，由於7不整除n，所以當我們選取這些“3”桶子時，這些“3”桶子所屬的組中一定存在一個“1”桶子，否則因為每次選取“3”桶子時，都將影響到 $1+(3-1)\times 3=7$ 個桶子，會有兩種情況：(1)所有起於這些桶子都恰好與3個“3”桶子同組，顯然矛盾，因為一組只有3個桶子；(2)“3”桶子中的7個桶子都與其它的“3”桶子的7個桶子都不重複，但這將使7整除n，矛盾。因此，在選完了所有“3”桶子後，一定存在“1”桶子。

接下來證明：我們在刪除“2”桶子時，平均將製造至少兩個“0”桶子。

這是因為由上述知在刪除完“3”桶子後，就已經存有“1”桶子，在刪除“2”時，不可能皆為2, 2的情形。事實上，每次有一個兩組皆為2, 2的情形，就會有一個一組為1, 1，另一組為2, 1或1, 1的情形，而如此一來，製造“0”桶子的平均就不小於2了。由此也可以知道，刪除“3”桶子時，只能製造一個“0”桶子，因為任意桶子最多與兩個“3”桶子同組，我們製造的“0”桶子即為我們所選取的“3”桶子。

下面說明當 $n=7t+2$ 時的取法。

由上述可知，“3”桶子需取 $t+1$ 個。現在開始刪除“2”桶子。有上述可知，每刪除一個“3”桶子，可製造一個“0”桶子；每刪除一個“2”桶子，平均製造至少兩個“2”桶子。現在我們一定可以選取到 $(3t-1)/2$ 個“2”桶子。先考慮最後一個“2”桶子。因為 $(7t+2)-(t+1)-2 \times [(3t-1)/2] = 3t+2$ ，而此時剩下 t 個桶子，每個桶子只能貢獻 3，而 $3t+2 > 3t$ ，所以由鴿籠原理知道至少有一個桶子重複計算超過 3 了，即表示我們可以取“2”桶子至此，故我們一定可以選取到 $(3t-1)/2$ 個“2”桶子。

最後，剩下的 t 個桶子就都是“1”桶子了，而我們也依序刪除這些“1”桶子。

至於其它 7 不整除 n 的情形，用與上述同樣的方法來做，就可以打開寶箱了。

下面是一表格，記載著 $n=3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ 的選取方法。

n=3	3								
n=5	3	2							
n=7	3	2	2						
n=9	3	3	2	1					
n=11	3	3	2	2	1				
n=13	3	3	2	2	2	1			
n=15	3	3	3	2	2	1	1		
n=17	3	3	3	2	2	2	1	1	
n=19	3	3	3	2	2	2	2	1	1

由上表可以觀察到，有下表中的特性：

	“3”的個數	“2”的個數	“1”的個數	選取桶子數
$7t+1$	$t+1$	$(3t-2)/2$	t	$7t/2$
$7t+2$	$t+1$	$(3t-1)/2$	t	$(7t+1)/2$
$7t+3$	$t+1$	$3t/2$	t	$(7t+2)/2$
$7t+4$	$t+1$	$(3t+1)/2$	t	$(7t+3)/2$
$7t+5$	$t+1$	$(3t+2)/2$	t	$(7t+4)/2$
$7t+6$	$t+1$	$(3t+3)/2$	t	$(7t+5)/2$

因此，我們分別都只選取了 $(n-1)/2$ 個桶子，就保證一定可以打開寶箱了。

(2) 7 整除 n ，設 $n=7k$

下面證明，我們可以選取 $(7k-1)/2$ 個桶子，就可以打開寶箱了。

我們可以選取 $k+1$ 個“3”桶子，這是 $n=7k$ 的特色。刪除了“3”桶子後，就一定會產生“1”桶子，因為假如選取 k 個“3”桶子，就剛剛好不會有“1”桶子，而我們卻選取了四個“3”桶子，如此一來，就一定有桶子與兩個“3”桶子同組。如此一來，我們就可以選擇 $(3k-3)/2$ 個“2”桶子，因為我們只須要考慮最後一個“2”桶子，由於 $7k-(k+1)-2 \times [(3k-3)/2]=3k+2$ ，而此時有 k 個桶子，所以因為 $3k+2 > 3k$ ，我們知道我們可以刪除“2”桶子至此。而剩下 k 個“一”桶子，我們就一個一個刪除。

此時，我們總共選取了 $(k+1)+(3k-3)/2+k=(7k-1)/2$ 個桶子，並可以打開寶箱。

n 為偶數

此時有兩種情況：

(1) $k(4n+2, 4n) \leq 2n$

(2) $k(2n+2, 2n) \leq n$

(1) 此時只要把這 $4n+2$ 分為兩組，每組 $2n+1$ 個，而分組的方法就是把轉盤上的桶子依序標為 $1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2$ ，此時 1 為一組，2 為一組。利用奇數的方法可以使這兩組分別只剩下兩個反面金幣。這是再選取任意一組的所有金幣，將那兩個反面金幣翻成正面，那麼總共就只剩下兩個反面金幣了，而寶箱也會打開。

(2) 下面一樣，我們將 n 表示為 $7t+s$ 的情形。

我們將證明，當 $n=7t+1$ ，可以取到 $(3t-2)/2$ 個“2”桶子。

如前述，我們可以取到 $[(7t+1-1)/7+1]=t+1$ 個“3”桶子。事實上，假設我們不能夠取到 $(3t-1)/2$ 個“2”桶子，那麼剩下來的一定都是“1”桶子，共有 $t-1+2=t+1$ 組要一個一個來選取。這 $t+1$ 組總共含有 $3(t+1)=3t+3$ 個桶子。但是我們前述共刪除的是 $(t+1)+2 \times (3t-3)/2=4t-2$ 個桶子，而剩下 $(7t+1)-(4t-2)=3t+3=3t+3$ 。所以我們無法用鴿籠原理如奇數情況解決。這時，我們再考慮第 $(3t-3)/2$ 個“2”桶子。假設它是“1”桶子，所以剩下 $t-1+2 \times 2=t+3$ 組，而這些組共有 $3(t+3)=3t+9$ 個桶子，然而，此時剩下能夠選的，只有 $(7t+1)-(t+1)-2 \times (3t-5)/2=3t+5$ 個桶子。這說明“2”桶子至少還有 4 個。

(1) 如果“2”桶子還有至少 6 個，那麼因為一次最多只能刪除 5 個“2”桶子（由前述表中可知），一定可以再取到兩次“2”桶子，此時就可以取到 $(3t-1)/2$ 個“2”桶子了。

(2) 如果“2”桶子有 5 個，那麼，不可能有兩個“2”桶子，使得這兩個“2”桶子分別所屬的兩個未選取到的組中共四組是 2, 2 的桶子。亦即，這兩個“2”桶子中，一定有一個所屬的兩個組別裡面，有一個“1”桶子。這是因為，假設有 3 個“2”桶子在一組，那麼剩下的兩個自然不可能組成一個由 3 個“2”桶子組

成的組了。此時，選取不在由“2”桶子組成的組中的“2”桶子，則最多只能刪除 4 個“2”桶子，而留有至少一個“2”桶子，故我們可以再取到兩個“2”桶子，而可以取到 $(3t-1)/2$ 個“2”桶子了。

- (3) 如果“2”桶子有 4 個，事實上，不可能每一個“2”桶子所屬的那兩組中，都是分別有 2 個“2”桶子與 1 個“2”桶子。這很容易證明，因為如果有三個“2”桶子在同一組，那麼剩下那一個桶子自然不能夠在一個由 3 個“2”桶子組成的組中。因此，對於那一個桶子而言，選取他就好了。而倘若不存在三個“2”桶子在一組，那任選一個“2”桶子即可。此時，最多只能刪除 3 個“2”桶子，而留下至少一個“2”桶子。因此，我們還能夠選取兩個“2”桶子，而最後可以取到 $(3t-1)/2$ 個“2”桶子了。

因此，我們可以取到 $(3t-1)/2$ 個“2”桶子， $t+1$ 個“3”桶子，與 $t-1$ 個“1”桶子，共選取了 $(7t-1)/2$ 個桶子。此時，作如此的選擇就可以保證打開寶箱了。

事實上，對於其他情形的偶數，我們都可以打開寶箱，選取述如下表。

	“3”的個數	“2”的個數	“1”的個數	選取桶子數
$7t$	$t+1$	$(3t-2)/2$	$t-1$	$(7t-2)/2$
$7t+1$	$t+1$	$(3t-1)/2$	$t-1$	$7t-1/2$
$7t+2$	$t+1$	$3t/2$	$t-1$	$(7t)/2$
$7t+3$	$t+1$	$(3t+1)/2$	$t-1$	$(7t+1)/2$
$7t+4$	$t+1$	$(3t+2)/2$	$t-1$	$(7t+2)/2$
$7t+5$	$t+1$	$(3t+3)/2$	$t-1$	$(7t+3)/2$
$7t+6$	$t+1$	$(3t+4)/2$	$t-1$	$(7t+4)/2$

綜上，我們找到了 $k(n, n-2)$ 的上界。即，當 n 為奇數時， $k(n, n-2) \leq (n-1)/2$ ；當 n 為偶數時， $k(n, n-2) \leq n/2 - 1$ 。

三、研究結果與討論

(一)當 $m=n$ 時，發現以下之優美性質：

Lemma1-1、當 n 為質數的時候， k 的最小值是 $n-1$

Lemma1-2、 $k(an, an) \geq a \times k(n, n)$

Lemma1-3、 $k \geq \frac{n}{2}$

Lemma1-4、 $k(2n, 2n) = 2k(n, n)$

Lemma1-5、當 $n = p \times q$ (p 為大於 2 的質數， q 為大於等於 p 的若干質數的乘積)，

$$k_n \leq p \times k_q$$

最終結果：

$$k(n, n) = (p_m - 1) \times \frac{n}{p_m} = n - \frac{n}{p_m} \quad , \text{ 其中 } p_m \text{ 為 } n \text{ 的最大質因數。}$$

(二)當 $m=n-1$ 時，發現以下之優美性質：

Lemma2-1、 $k(n, n-1) \geq [\frac{n+1}{2}]$ ($n \geq 6$)。

Lemma2-2、當 n 為質數時， $k = \frac{p+1}{2}$ ($p \geq 7$) 時可以打開門。

Lemma2-3、當 $n = 2^s$ ($s \geq 3$) 時，一次翻動 2^{s-1} 個桶子可以保證打開門。

Lemma2-4、 $k(ta, ta-1) \geq tk(a, a-1)$ 。

Lemma2-5、設 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ ，且 $p_1 > p_2 > p_3 > \cdots > p_k \geq 7$ 則

$$k(n, n-1) = \frac{n}{p_k} \cdot \frac{p_k+1}{2}$$

Lemma2-6、 $k(2n, 2n-1) = 2k(n, n-1)$ ($n \geq 6$)

Lemma2-7、 Lemma2-2 至 Lemma2-5 中的所有「 k 」改成「 k' 」都成立。

Lemma2-8、 $k'(3, 2) = 2$ 且 $k'(5, 4) = 3$

Lemma2-9、 $k'(2n, 2n-1) = 2k'(n, n-1)$

Lemma2-10、 設 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ ，且 $p_1 > p_2 > p_3 > \cdots > p_k \geq 3$

$$\text{則 } k'(n, n-1) = \frac{n}{p_k} \cdot \frac{p_k + 1}{2}$$

Lemma2-11、 $k(3n, 3n-1) \leq 2n-2$ ， ($n \geq 10$, 或 $n=7$ 又 3 不整除 n)

Lemma2-12、 $k(9n, 9n-1) = 6n$ ($n \geq 2$)

Lemma2-13、 $k(5n, 5n-1) \leq 3n$ (3 不整除 n)

(三)當 $m=n-2$ 時，發現以下之優美性質：

當 n 為奇數時， $k(n, n-2) \leq (n-1)/2$ ；

當 n 為偶數時， $k(n, n-2) \leq n/2-1$ 。

最後結果：

n 是質數時

$n=2$ 或 3 時， $k(n, n-1) = 0$

$n=5$ 時， $k(n, n-1) = 2$

當 $n \geq 7$ 時， $k(n, n-1) = \frac{p+1}{2}$

n 是奇數且不是質數時

(1) 當 3 不整除 n 時， $k(n, n-1) = \frac{n}{p} \cdot \frac{p+1}{2}$ ，其中 p 為 n 的最小質因數

(2) 當 3 整除 n 時且 9 不整除 n 時，又 $n \geq 30$ 或 $n = 21$ 有 $k(n, n-1) \leq \frac{2n}{3} - 2$

(3) 當 9 整除 n 時， $k(n, n-1) = \frac{2n}{3} (n \geq 18)$

(4) 當 5 整除 n 時，但 3 不整除 n 時， $k(n, n-1) \leq \frac{3n}{5}$ 。此時的 $k(n, n-1)$ 值可由上述幾點與(5)來求得。

(5) 剩下 $n = 9$ ， $k(9, 8) = 5$ 。 $n = 15$ ， $k(15, 14) = 9$ ，證明詳見附錄。

n 是偶數時

(1) $n = 4$ 時， $k(n, n-1) = 1$

(2) $n = 3 \cdot 2^t$ ， $k(n, n-1) = 3 \cdot 2^{t-1} (t \geq 1)$

(3) $n = 5 \cdot 2^t$ ， $k(n, n-1) = 5 \cdot 2^{t-1} (t \geq 1)$

(4) n 為其他偶數時，令 $n = 2^t \cdot m$ ，則 $k(n, n-1) = 2^{t-1} \cdot k(m, m-1)$ ， m 為某奇數。

(三)附錄:

1. $n = 3$ ， $k = 0$

顯然由鴿籠原理，一定存在一種正反面大於等於 2。

2. $n = 4$ ， $k = 1$

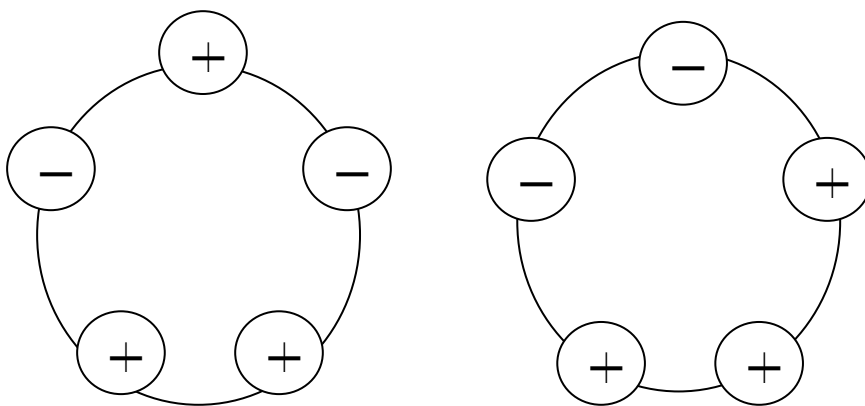
這時候顯然有兩個正面和兩個反面，這時候只要把正面改成反面或反面改成正面就行了。

3. $n = 5$ ， $k = 2$

第一步，將相鄰兩圓筒內的金幣翻為正面。

第二步，選擇一組距離為 2 的圓桶，將其翻為正面，此時可得如下圖所示。

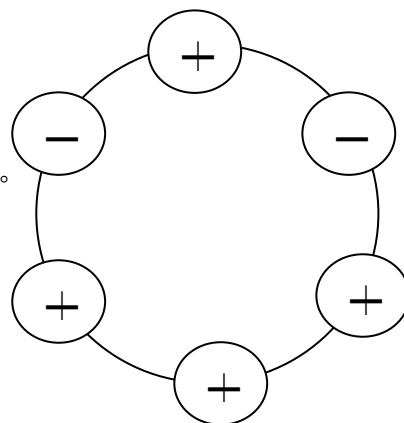
第三步，對相鄰兩圓筒內的金幣進行如下操作：若兩金幣皆為正面，則將兩個金幣都翻成反面；若兩金幣為一正一反，則將反面的金幣改為正面；若兩金幣皆為反面，則將兩金幣皆翻為正面。此時門必打開。



4. $n=6, k=3$

第一步，將相鄰三桶子內的金幣改為正面。

第二步，將兩兩相距2的桶子內的金幣作如下操作：若出現反面則改為正面，若出現正面即不變。此時會出現兩種情況：第一種，門將打開；第二種，會出現如右圖所示的情形。



第三步，翻開相鄰三桶子。如果出現反面，則將其改為正面。若三個都是正面，則將其全部改為反面。若只出現一個或兩個正面，則不對正面做操作。此時門將打開。

5. $n=9, k=5$

$k(9,8)$ 由 Lemma2-1，可以知道 $k(9,8) \geq 5$ 。

現在證明 $k(9,8)=5$ 。

分成三組，每一組都有三個金幣，採用 Lemma2-13 後面總結中的方法可以把

門打開，得證。

6. $n=10$ ， $k=5$

首先由 Lemma2-1 知道 $k(10,9) \geq 5$ 。

下面證明 $k(10,9)=5$ 。

先以奇偶性把全部分成兩組，其中一組全部都改成正面。

然後在兩組都選取距離分別為 1 和 2 的兩組都改為正號。現在情況會變成：

$$\begin{bmatrix} + & + & + & + & + \\ + & + & + & ? & ? \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} + & + & + & + & + \\ + & + & ? & + & ? \end{bmatrix}$$

現在再選取其中的一組，一定會選到全部都是正面的那一組，並把它全部都改成負號。這時候會變成：

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ + & + & + & ? & ? \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ + & + & ? & + & ? \end{bmatrix}$$

這時候兩組再分別選取兩個及三個金幣。考慮翻出三個金幣的情況，如果翻出：

- (1) 三個反面，那另兩個金幣肯定翻到三個正面的那一組，同 $n=5$ 的情況，可以把門打開。
- (2) 兩個反面，那都改成正面，這時候兩組分別是全正和全負，顯然能夠把門打開。
- (3) 一個反面，把兩個正面改成反面，這樣門就打開了。

7. $n=15$ ， $k=9$

這時候的情況考慮當 $k \geq 8$ 的時候可以削去距離和 3 和 5 互質的桶子。現在來考慮距離是 3 和 5 的反面桶子。

距離是 3 的倍數的桶子分成 3 組，每一組需要至少 $k'(5,4)=3$ ，因此 $k \geq 9$ 。

距離是 5 的倍數的桶子分成 5 組，需要至少 $5k'(3,2)-2=8$ ， $k \geq 8$ 。

綜合以上的情況討論，知道 $k=9$ 可以保證打開門。

四、結論與應用

(一)結論

本作品除了前人已做出的 $m=n$ 部分外，另外給出了 $m=n-1$ 的結果

n 是質數時

$$n=2 \text{ 或 } 3 \text{ 時, } k(n, n-1)=0$$

$$n=5 \text{ 時, } k(n, n-1)=2$$

$$\text{當 } n \geq 7 \text{ 時, } k(n, n-1) = \frac{p+1}{2}$$

n 是奇數且不是質數時

$$(1) \text{ 當 } 3 \text{ 不整除 } n \text{ 時, } k(n, n-1) = \frac{n}{p} \cdot \frac{p+1}{2}, \text{ 其中 } p \text{ 為 } n \text{ 的最小質因數}$$

$$(2) \text{ 當 } 3 \text{ 整除 } n \text{ 時且 } 9 \text{ 不整除 } n \text{ 時, 又 } n \geq 30 \text{ 或 } n=21 \text{ 有 } k(n, n-1) \leq \frac{2n}{3} - 2$$

$$(3) \text{ 當 } 9 \text{ 整除 } n \text{ 時, } k(n, n-1) = \frac{2n}{3} (n \geq 18)$$

$$(4) \text{ 當 } 5 \text{ 整除 } n \text{ 時, 但 } 3 \text{ 不整除 } n \text{ 時, } k(n, n-1) \leq \frac{3n}{5}。 \text{ 此時的 } k(n, n-1) \text{ 值可由}$$

上述幾點與 (5) 來求得。

$$(5) \text{ 剩下 } n=9, k(9,8)=5。 n=15, k(15,14)=9, \text{ 證明詳見附錄。}$$

n 是偶數時

$$(1) n=4 \text{ 時, } k(n, n-1)=1$$

$$(2) n=3 \cdot 2^t, k(n, n-1)=3 \cdot 2^{t-1} (t \geq 1)$$

$$(3) n=5 \cdot 2^t, k(n, n-1)=5 \cdot 2^{t-1} (t \geq 1)$$

(4) n 為其他偶數時，令 $n = 2^t \cdot m$ ，則 $k(n, n-1) = 2^t \cdot k(m, m-1)$ ， m 為某奇數。

(二)應用

本作品中證明 $m=n-1$ 情況中使用組合計算與估計與構造等方法來找出 k 值的上下界，在此類型題目中的上下界尋找中皆能有所參考。

五、參考文獻

- (一) 2009 年環球城市數學競賽第七題

http://www.chiuchang.org.tw/download/tt/2009/2009SA_sol.pdf

- (二) The Rotating Table Author(s): Ted Lewis and Stephen Willard

Source: Mathematics Magazine, Vol. 53, No. 3 (May, 1980), pp. 174-179

- (三) Richard Ehrenborg & Chris M. Skinner, 1995, The Blind Bartender's Problem,

Journal of Combinatorial Theory, Series A, 70, Page 249-266.

評語

作者報告時條理清楚，表現優異，本文對 $k(n, n-1)$ 做了突破有好的結果。這類問題過去已有不少研究報告，主題較缺新鮮感。整體而言，本文算是完整、成熟的作品，但內容尚有一些錯誤或書寫方式不當或不清楚的情形，例如：p.24 n 的質因數分解式、p.25 $n \leq 10$ ，或 $n=7$ 又 3 不整除 n ，……等等。中英摘要細節上也有些疏失，建議全面檢查修改，會有更好的成效。