2012 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

編號：010016

作品名稱

電梯問題

得獎獎項

大會獎：四等獎

作者姓名：王永光、吳博生

就讀學校：新北市立光復國民中學、

臺北市立北投國民中學

指導教師：俞佳伶、黃國斌

關鍵字：排列組合、全能建築、完美建築

作者簡介

我是王永光，

就讀光復國中九年級，

平時喜歡思考一些有趣的數學問題。

在小學五年級時，參加了九章數學愛好者聯誼會，

在四年的過程中獲益匪淺，

同時也認識了這次科展的合作對象：吳博生。

我曾經參加過數次國內科展，

研究主題包括摺紙與一些數學遊戲，

這次決定以「電梯問題」為主題參加國際科展。

我是吳博生，

就讀北投國中九年級，

擅長的科目是數學，

曾經參加九章數學營，

於印尼青少年數學國際城市邀請賽獲得團體總季軍。

已參加過一次國內科展並獲得創意獎，

這次在孫文先老師的協助下做跨校的國際科展。

摘　要

本研究主要是研究「電梯問題」：

令某棟建築內任兩層樓都至少有一部電梯連接的建築稱為全能建築，若某棟建築內有 m 部電梯，每部電梯停 n 層，$\boldsymbol{f(m, n)}$為使這棟建築成為全能建築的最高層數。對於不同的 m, n，$\boldsymbol{f(m, n)}$的值為何？

本研究一開始先以一些參考資料為基礎，試著整理出其中未完成的部份。接著，我們針對了一些個別的 $\boldsymbol{f(m, n)}$，具體求出其值。令某棟建築內任兩層樓都恰有一部電梯連接的建築稱為完美建築，我們引入了一個新的函數 $\boldsymbol{g(n, k)=m}$，得到了一個與完美建築有關的定理。另外，我們還利用一些構造方法，求出了所有 $\boldsymbol{g(3, k)}$的值。

在這次的研究中，我們成功運用了各種不同的構造手法，得到了一些相關的結果。至於是否能將這些構造方法運用在求出一般的 $\boldsymbol{f(m, n)}$之值？這是我們將繼續探究的課題。

ABSTRACT

Our research topic is "The Elevator Problem":

We call a building that every two floors are connected by at least an elevator a convenient building. There's a building with m elevators. Each of the elevators stop at n floors, and $\boldsymbol{f(m, n)}$ is the maximum number of floors that a building can have if it is convenient. What is the value of $\boldsymbol{f(m, n)}$ while choosing different value of m, n?

Our research starts from analyzing some references, and find out the parts that were not finished. After that, we find out the exact values of some specified $\boldsymbol{f(m, n)}$. We call a building that every two floors are connected by exactly an elevator a perfect building. We prove a theorem about the perfect buildings by using another function $\boldsymbol{g(n, k) = m}$. Besides, we use some constructing methods to figure out all of the values of $\boldsymbol{g(3, k)}$.

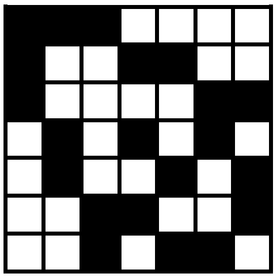
In our research, we use a lot of different ways to find out the results. Can we use the constructing methods in our research to figure out the general values of $\boldsymbol{f(m, n)}$? We will keep working on this problem in the future.

壹、研究動機

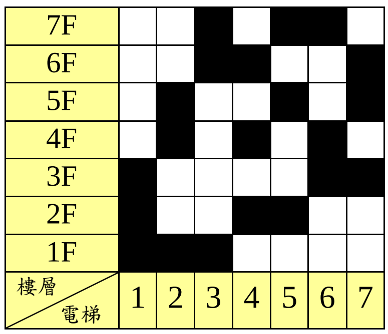
2011 青少年數學國際城市邀請賽隊際賽第 9 題：

9. 請從 7×7 方格表的 49 個小方格中選擇 21 個塗上顏色，使得任意四個已塗色的小方格無法構成某個長方形（其中長方形的所有邊都在格線上）的四個角落。

我們做出的答案為：



在比賽結束後，我們赫然發現這題的答案與我們之前所聽過的「電梯問題」有著異曲同工之妙：「當共有 7 部電梯，且每部電梯可停靠 3 層樓時，該建築物可擁有的最多樓層數：$f(7, 3) = 7$。」



因此，我們決定試著研究此類題目的一般情況。

貳、研究目的

一、分析既有的結果，找出未完成的部分

二、針對個別的 $f(m, n)$，具體求出其值

三、引入函數 $g(n, k)=m$，求出更多的 $f(m, n)$值

參、名詞定義

一、$f(m, n) = k$：當共有 m 部電梯，且每部電梯可停靠 n 層樓時，該建築物可擁有的最多樓層數。

二、$g(n, k) = m$：當每部電梯可停靠 n 層樓，且該建築物共有 k 層樓時，所需的最少電梯數量。

三、全能建築：在一棟建築中，若任兩層樓都至少有一部電梯連接，則稱此建築為全能建築。

四、完美建築：在一棟建築中，若任兩層樓都恰有一部電梯連接，則稱此建築為完美建築。

五、Case k：在一棟全能建築中，若每層樓皆被 k+1 部電梯停靠，且至少有一層樓不被 k+2 部電梯停靠，則該情況屬於 Case k。

肆、研究方法與過程

一、分析既有的結果，找出未完成的部分

在開始研究之前，我們先介紹一些基本的引理，並不再加以證明：

(相關證明請見參考資料中的「電梯問題」)

引理 1：$\boldsymbol{f(m+1, n) \geqq f(m, n)}$

引理 2：$\boldsymbol{f(m, n+1) \geqq f(m, n)+1}$

引理 3：$\boldsymbol{f(m, kn) \geqq kf(m, n)}$

另外，根據在「The Commuter Bus Problem」中提到的方法，我們將所有的電梯問題歸類為 k 種不同的情況(Case k，詳見該份資料中相關定義的部分)。

下表為截至目前為止，所有已經求出的 $\boldsymbol{f(m, n)}$值：

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24
4	1	3	5	6	8	10	11	13	15	16	18	20	21	23	25	26
5	1	3	5	7	9	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	28
6	1	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
7	1	4	7		11	14		18	21		25	28		32	35	
8	1	4	7	9												
9	1	4	7	10												
10	1	5	7	10	13	16										
11	1	5	8	11	13	16	19	22		28						
12	1	5	9	12		18		24	27			36			45	48
13	1	5	9	13				26				39				52

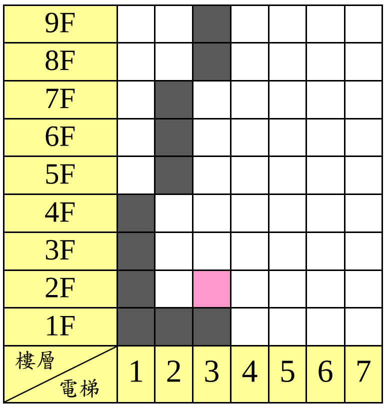
我們發現表中仍有相當大的部分並未列出具體的 $f(m,n)$值。因此，我們決定試著求出一些 $f(m,n)$值，並試著找出這些數據之間的關聯。

二、針對個別的 $\boldsymbol{f(m,n)}$，具體求出其值

(一)、討論 $\boldsymbol{f(7,4)=8}$ 的情形

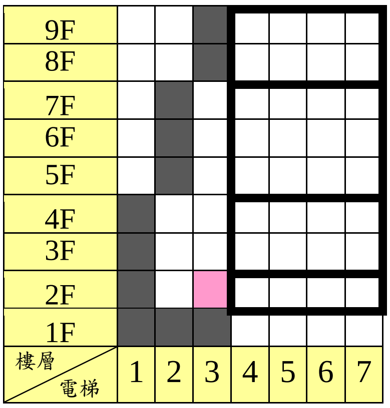
1.先考慮若 $f(7,4)=9$，此狀況屬於 Case II，所以必有其中一樓層只有三部電梯通過。

假設 1F 只有三部電梯通過，則另外 8 層樓各被這三部電梯至少停靠 1 次。可設這三部電梯停靠樓層為(1,2,3,4)、(1,5,6,7)、(1,2,8,9)：



2.以樓層的配對方式而言，共有 $C_2^9=36$ 條路徑，而 7 部電梯可製造 $7\times C_2^4=42$ 條路徑，其中的差距最多可浪費 6 條路徑；而扣除一開始第三部電梯所浪費的 1F~2F，只剩 5 條路徑可浪費。

3.將除了 1F、2F 的樓層分成 (3,4)、(5,6,7)、(8,9)三類，剩下的四部電梯必須設在(3,4)、(5,6,7)、(8,9)之間，以及 2 與(5,6,7)之間：



但發現，無論剩下的四部電梯怎麼設，都至少重複一條；

除此之外，由於 2 樓還需與 5、6、7 樓連接，而若有一部電梯停留在(2,5,6,7)，則此部電梯浪費了(5,6) (5,7) (6,7)三條路徑。

但若沒有(2,5,6,7)，則表示剩下的四部電梯有至少兩部與 2 樓連接，可發現這兩部電梯都至少會浪費兩條路徑。

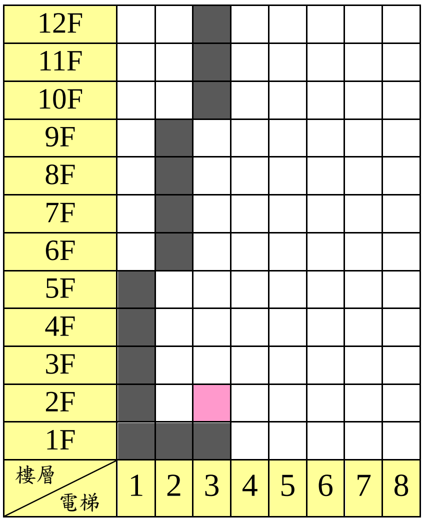
這些情況共浪費 2+2+1+1=6 條，與第二點敘述不符合，所以 $f(7,4)=9$ 不可行。

4.由引理 2 可以推知 $f(7,4) \geq f(7,3) + 1 = 8$。

(二)、討論 $\boldsymbol{f(8,5)=11}$ 的情形

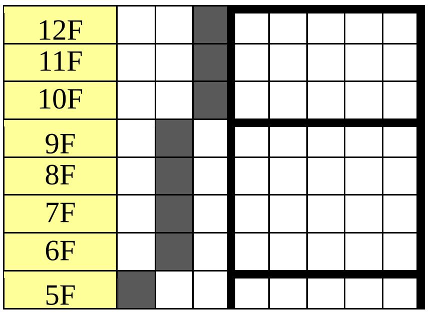
1.先考慮若 $f(8,5)=12$，此狀況屬於 <u>Case II</u>，所以必有其中一樓層只有三部電梯通過。

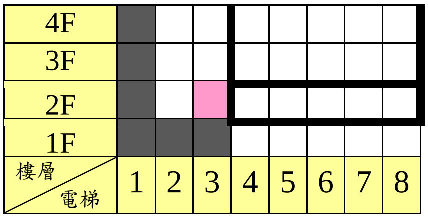
假設 1F 只有三部電梯通過，則另外 11 層樓各被這三部電梯至少停靠 1 次。可設這三部電梯停靠樓層為(1,2,3,4,5)、(1,6,7,8,9)、(1,2,10,11,12)：



2.以樓層的配對方式而言，共有 $C_2^{12}=66$ 條路徑，而 8 部電梯可製造 $8\times C_2^5$ $=80$ 條路徑，其中的差距最多可浪費 14 條路徑，而扣除一開始第三部電梯浪費的 1F~2F，只剩 13 條路徑可浪費。

3.將除了 1F、2F 的樓層分成(3,4,5)、(6,7,8,9)、(10,11,12)三類，剩下的 5 部電梯必須設在(3,4,5)、(6,7,8,9)、(10,11,12) 之間，以及 2 與(6,7,8,9)之間：

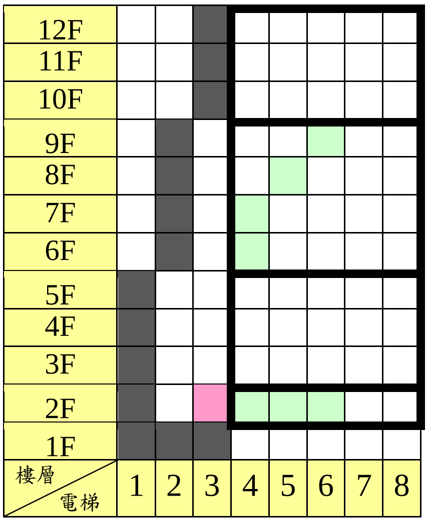




但發現，無論剩下的 5 部電梯怎麼設，每部都至少重複 2 條路徑；除此之外，由於 2 樓需與 6,7,8,9 樓連接，若有一部電梯為(2,6,7,8,9)，則此部浪費了 6 條路徑。

這些狀況共浪費：1＋6＋2×4＝15 條路徑，與第二點敘述不合。

可以推得沒有一部電梯會停靠 (2,6,7,8,9)，則表示剩下的 5 部電梯有至少兩部與 2 樓連接；若有至少 3 部電梯與 2 樓連接，則這三部電梯將浪費 11 條路徑 (2,6,7,x,x)、(2,8,x,x,x)、(2,9,x,x,x)：



其中與 2 樓連接浪費了 8 條，(6,7)浪費了 1 條，後 2 部電梯的(x,x,x)將各浪費 1 條。這些狀況共浪費：1＋11＋2×2＝16 條路徑，亦不合，故剩下的 5 部電梯恰有兩部與 2 樓連接。

若兩部電梯為(2,6,7,8,x)、(2,9,x,x,x)，將浪費 8 條路徑，一共浪費：1＋8＋2×3＝15 條路徑，不合，故兩部電梯必為(2,6,7,x,x)、(2,8,9,x,x)，浪費 6 條路徑。

∵6~9F 至少還各需要一部電梯停靠，且只剩三部電梯

∴必有兩層樓需要共用一部電梯

∵6~9F 至少還各有 4 層樓與之尚未連接

∴共用電梯的兩層樓將無法與 4 層樓全部連接，不合

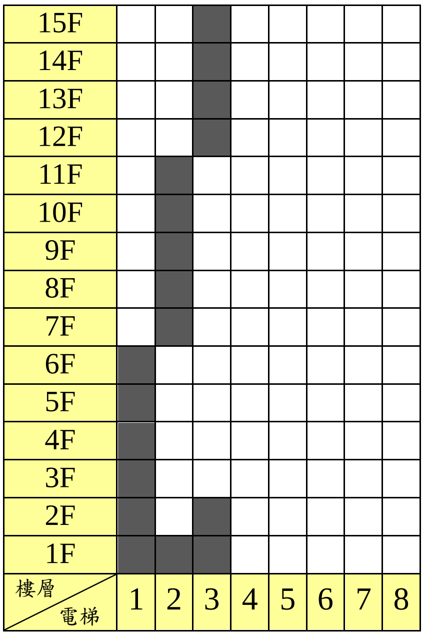
∴ $f(8,5)=12$ 不可行

4.由引理 1 可推知 $f(8,5) \geq f(7,5) = 11$。

(三)、討論 ***f*** **(8,6)=14** 的情形

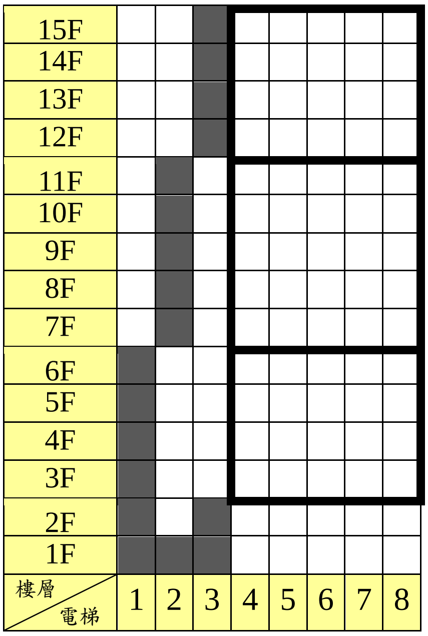
1.先考慮若 $f(8,6)=15$，此狀況屬於 <u>Case II</u>，所以必有一樓只有三部電梯通過。

假設 1F 只有三部電梯通過，則另外 14 層樓各被這三部電梯至少停靠 1 次。可設這三部電梯停靠樓層為(1,2,3,4,5,6)、(1,7,8,9,10,11)、(1,2,12,13,14,15)：



2.以樓層的配對方式而言，一共有 $C_2^{15}=105$ 條路徑，而 8 部電梯可製造 $8\times C_2^6=120$ 條路徑，其中的差距最多可浪費 15 條路徑。

3.將除了 1,2F 的樓層分成三類：(3,4,5,6)、(7,8,9,10,11)、(12,13,14,15)，剩下的 5 部電梯必須設在(3,4,5,6)、(7,8,9,10,11)、(12,13,14,15)之間，以及 2 與(7,8,9,10,11)之間：

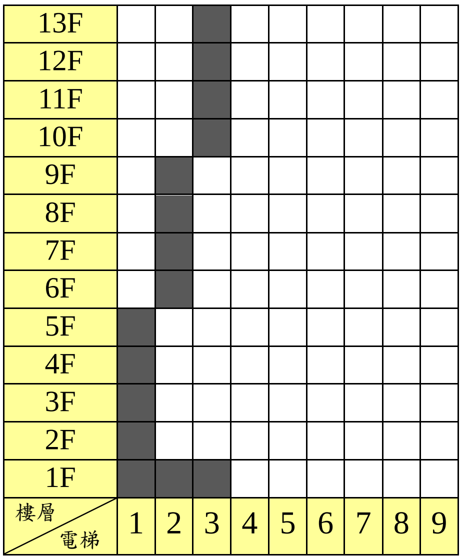


但發現，無論剩下的 5 部電梯怎麼設，每部都至少重複 3 條路徑，一共浪費：$1+3\times5=16$ 條路徑，與第二點敘述不符合，因此 $f(8,6)=15$ 不可行。

4.由引理 1 可推知 $f(8,6)\geq f(7,6)=14$。

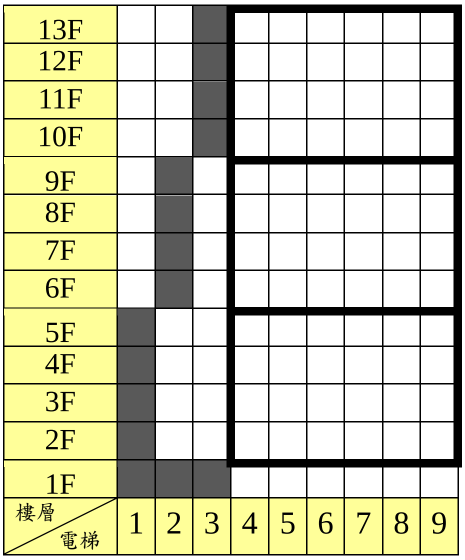
(四)、討論 ***f* (9,5)=12** 的情形

1.先考慮若 *f* (9,5)=13，此狀況屬於 <u>Case II</u>，所以必有一樓只有三部電梯通過。假設 1F 只有三部電梯通過，則另外 12 層樓各被這三部電梯共停靠 1 次。可設這三部電梯停靠樓層為(1,2,3,4,5)、(1,6,7,8,9)、(1,10,11,12,13)：



2.以樓層的配對方式而言，一共有 $C_2^{13}=78$ 條路徑，而 9 部電梯可製造 $9\times C_2^5=90$ 條路徑，其中的差距最多可浪費 12 條路徑。

3.將除了 1F 的樓層分成三類(2,3,4,5)、(6,7,8,9)、(10,11,12,13)，剩下的六部電梯必須設在(2,3,4,5)、(6,7,8,9)、(10,11,12,13)之間：



但發現，剩下六部電梯都至少浪費 2 條路徑(其中兩類停兩層，另一類停一層)。所以，這六部電梯都必須在其中兩類停兩層，另一類停一層，並不允許再浪費路徑。

假設其中一部停在(2,3,6,7,10)，所以 2F 需再與 8,9,11,12,13F 連接。

但剩下的五部電梯中連接 2F 的電梯一次只能和 8,9,11,12,13F 連接 3 或 4 條路徑，所以 2F 連接 8,9,11,12,13F 必會有路徑需重複，與不允許再浪費路徑矛盾。

可以得知 $f(9,5)=13$ 不可行。

4.討論 $f(9,5)=12$ 方法 (由 $f(9,4)$擴充)：

(1,2,4,5,10) (1,2,7,8,11) (4,5,7,8,12) (1,3,4,6,12) (1,3,7,9,10)

(4,6,7,9,11) (2,3,5,6,11) (2,3,8,9,12) (5,6,8,9,10)

12F			■	■				■	
11F		■				■	■		
10F	■				■				■
9F					■	■		■	■
8F		■	■					■	■
7F		■	■		■	■			
6F				■		■	■		■
5F	■		■				■		■
4F	■		■	■		■			
3F				■	■		■	■	
2F	■	■					■	■	
1F	■	■		■	■				
樓層／電梯	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(五) 討論 $f(9,8)=20$ 的情況

1.若 $f(9,8)=21$，可不失一般性假設前三部電梯為：

(1, 2~8), (1, 9~15), (1, 2, 16~21)

因為此建築共有 $C_2^{21}=210$ 條路徑，所有電梯共可提供 $9\times C_2^{8}=252$ 條路徑，所以至多可浪費 42 條路徑。

2.而剩下的 6 部電梯每部至少浪費：3+3+1=7 條路徑，

加上第三部電梯所浪費的 1 條，一共浪費 43 條路徑，不合。

故 $f(9,8)=21$ 不可行。

3.由引理 3 可推知 $f(9,8)\geq 2f(9,4)=20$。

(六) 討論 $f(12,5)=14$ 的情況

1.先考慮若 $f(12,5)=15$，此狀況屬於 <u>Case III</u>。

$\because m\cdot n \ge t\cdot k \quad \Rightarrow 12\cdot 5 \ge 4\cdot 15$

$\therefore$每層樓都恰有四部電梯停靠

2.以下分成四種情況討論：

(1)有停靠 1F 的電梯所停靠的樓層為(1,2,3,4,5)、(1,6,7,8,9)、(1,10,11,12,13)、(1,2,3,14,15)：

此時 2,3F 皆剩兩部電梯可以停靠，且皆仍須與 6~13F 連結，所以這四部電梯中，分別有兩部電梯停靠 6~13F，且 6 ~ 13F 皆未與 4,5,14,15F 連結。

此時 6 ~ 13F 各剩一部電梯可停靠，且各有 4 層樓與之無電梯連結，可得至少還需要：$8\times1=8$ 部電梯，超過剩下的 $12-4-4=4$ 部電梯，不合。

(2)有停靠 1F 的電梯所停靠的樓層為(1,2,3,4,5)、(1,6,7,8,9)、(1,2,10,11,12)、 (1,6,13,14,15)：

此時 2F 仍須與 6~9,13~15F 連結，6F 仍須與 2~5,10~12F 連結。

考慮同時停靠 2,6F 的電梯，此電梯尚可停靠三層樓，但這三層樓中，至少有二層樓與 6F 早已連結過，此時剩下一部電梯可停靠 6F，卻還有 5 層樓與之無電梯連結，不合。

(3)有停靠 1F 的電梯所停靠的樓層為(1,2,3,4,5)、(1,6,7,8,9)、(1,2,10,11,12)、 (1,2,13,14,15)：

此時 2F 仍須與 6~9F 連結，故必須有一部電梯為(2,6,7,8,9)。

但 6F 尚需與 3~5,10~15F 連結，卻剩兩部電梯可以停靠，不合。

(4)有停靠 1F 的電梯所停靠的樓層為(1,2,3,4,5)、(1,6,7,8,9)、

(1,2,10,11,12)、 (1,10,13,14,15)：

利用(1)、(3)的結果，可以證明此情況亦不合。

3.討論 $f(12,5)=14$ 方法：

(1,2,3,4,5) (1,6,7,8,9) (1,10,11,12,13) (1,2,3,4,14) (2,6,7,10,11)

(2,8,9,12,13) (3,6,7,12,13) (3,8,9,10,11)(4,5,6,7,14) (4,5,8,9,14)

(4,5,10,11,14) (4,5,12,13,14)

14F				■					■	■	■	■
13F			■			■	■					■
12F			■			■	■					■
11F			■		■			■			■	
10F			■		■			■			■	
9F		■				■		■		■		
8F		■				■		■		■		
7F		■			■		■		■			
6F		■			■		■		■			
5F	■								■	■	■	■
4F	■			■					■	■	■	■
3F	■			■			■	■				
2F	■			■	■	■						
1F	■	■	■	■								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

(七) 討論 $f(9,7)=17$ 的情況

1.若 $f(9,7)=18$，可不失一般性假設前三部電梯為：

(1, 2~7), (1, 8~13), (1, 2, 14~18)

因為至少應有 9 層樓只有三部電梯停靠，(否則 3×8+4×10>9×7=63，

不合) 所以除了 1,2F 外，至少還有 7 層樓只有 3 部電梯停靠。

2.由抽屜原理知：在三組樓層(3~7), (8~13), (14~18)中，

必有一組樓層包含至少 3 個只有 3 部電梯停靠的樓層。

設這三個樓層為 3~5F(其餘狀況可類似考慮)，

先考慮 3, 4F 是否可以只用 3 部電梯，就與所有樓層連完。

若可，則 3, 4F 將共用一部電梯，而另外兩部電梯則將連接到相同的

樓層。

3.考慮所浪費的總路徑數，因為此建築共有 C_2^{17}=153 條路徑，

所有電梯共可提供 9× C_2^7=189 條路徑，

所以至多可浪費 36 條路徑。

但剩下的 6 部電梯一共至少浪費：C_2^6+5×(3+1+1)=40 條路徑，

加上第三部電梯所浪費的 1 條，一共浪費 41 條路徑，不合。

4.故 3~5F 一共必須用 6 部電梯，此時 8~18F 皆已被停靠 4 次，

不可能為只有 3 部電梯停靠的樓層，

所以 7 個只有 3 部電梯停靠的樓層應為 3~7F，不合。

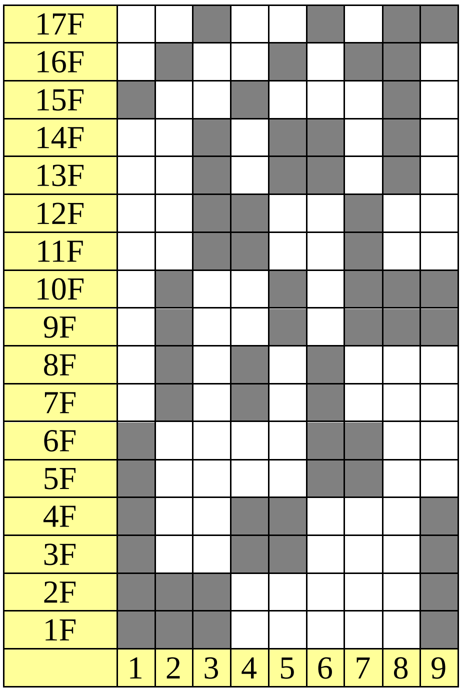
故 $f(9,7)=18$ 不可行。

5.討論 $f(9,7)=17$ 方法：

(1,2,3,4,5,6,15) (1,2,7,8,9,10,16) (1,2,11,12,13,14,17) (3,4,7,8,11,12,15)

(3,4,9,10,13,14,16) (5,6,7,8,13,14,17) (5,6,9,10,11,12,16)

(9,10,13,14,15,16,17) (1,2,3,4,9,10,17)



(八) 討論 $f(10,7)=18$ 的情況

1.若 $f(10,7)=19$，可不失一般性假設前三部電梯為：

(1, 2~7), (1, 8~13), (1, 14~19)

因為至少應有 6 層樓只有三部電梯停靠,(否則 $3\times5+4\times14>10\times7=70$，不合)所以除了 1F 外，還有 5 層樓只有 3 部電梯停靠。

2.由抽屜原理知：在三組樓層(2~7), (8~13), (14~19)中，

必有一組樓層包含至少 2 個只有 3 部電梯停靠的樓層。

設這兩個樓層為 2, 3F，則除了第一部電梯外，

有停靠 2, 3F 的 4 部電梯應包含 2 組 8~19F。

(即停靠 2F 的兩部電梯共停了 8~19F 各一次，停靠 3F 的兩部電梯亦同)

3.再加上由第 2, 3 部電梯所形成的一組，可得 8~19F 皆已出現 3 次。

但 8~19F 皆尚未與 4F 連接，故 8~19F 皆至少需有 4 部電梯停靠。

所以另外 3 個只有 3 部電梯停靠的樓層應為 4~7F 中的三層，

但這樣將會需要至少：$3+2\times5=13$ 部電梯，不合。

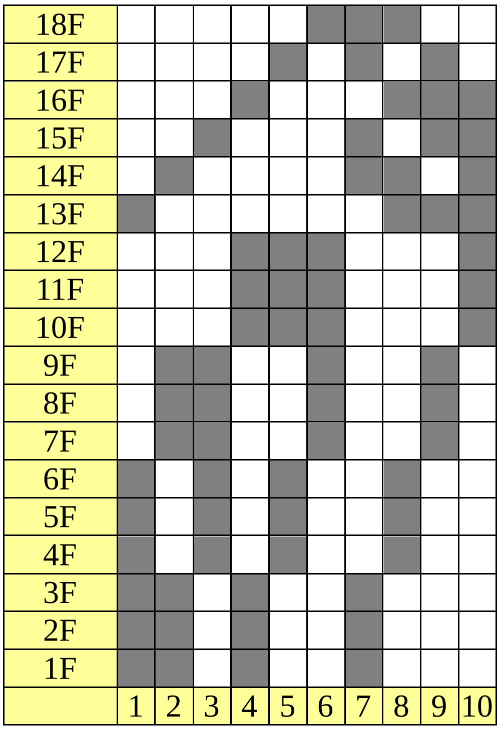
故 $f(10,7)=19$ 不可行。

4.討論 $f(10,7)=18$ 方法：

(1,2,3,4,5,6,13) (1,2,3,7,8,9,14) (4,5,6,7,8,9,15) (1,2,3,10,11,12,16)

(4,5,6,10,11,12,17) (7,8,9,10,11,12,18) (1,2,3,14,15,17,18)

(4,5,6,13,14,16,18) (7,8,9,13,15,16,17) (10,11,12,13,14,15,16)



(九) 討論 $f(10,10)=26$ 的情況

1.若 $f(10,10)=27$，可不失一般性假設前三部電梯為：

(1, 2~10), (1, 11~19), (1, 2, 20~27)

因為至少應有 8 層樓只有三部電梯停靠，(否則

3×7+4×20>10×10=100，不合)

所以除了 1F 外，至少還有 7 層樓只有 3 部電梯停靠。

2.若 2F 為只有三部電梯停靠的樓層，考慮所浪費的總路徑數，

因為此建築共有 C_2^{27}=351 條路徑，所有電梯共可提供 10× C_2^{10}=450 條

路徑，所以至多可浪費 99 條路徑。

3.此時將有(2, 11~19)這部電梯，浪費 45 條路徑；

剩下的 6 部電梯將浪費：6×(6+3+3)=84 條路徑，

加上第三部電梯所浪費的 1 條，一共浪費 130 條路徑，不合。

所以 3~27F 中至少還有 7 層樓只有 3 部電梯停靠。

4.由抽屜原理知：在三組樓層(3~7), (8~13), (14~18)中，

必有一組樓層包含至少 3 個只有 3 部電梯停靠的樓層。

設這三個樓層為 3~5F(其餘狀況可類似考慮)，

由浪費路徑數的計算可知 3~5F 一共必須用 6 部電梯。

此時 11~27F 皆已被停靠 4 次，

不可能為只有 3 部電梯停靠的樓層，

所以另外 4 個只有 3 部電梯停靠的樓層應為 6~10F 中的四層，

但這樣將會需要至少：3+2×7=17 部電梯，不合。

故 $f(10,10)=27$ 不可行。

5.由引理 3 可推知 $f(10,10) \geq 2f(10,5) = 26$。

(十) 討論 $f(10,12)=32$ 的情況

1.若 $f(10,12)=33$，可不失一般性假設前三部電梯為：

(1, 2~12), (1, 13~23), (1, 2, 24~33)

因為至少應有 8 層樓只有三部電梯停靠，(否則

3×7+4×25>10×12=120，不合)

所以除了 1F 外，至少還有 7 層樓只有 3 部電梯停靠。

2.若 2F 為只有三部電梯停靠的樓層，考慮所浪費的總路徑數，

因為此建築共有 C_2^{33}=528 條路徑，所有電梯共可提供 10× C_2^{12}=660 條

路徑，所以至多可浪費 132 條路徑。

3.此時將有(2, 13~23)這部電梯，浪費 55 條路徑；

剩下的 6 部電梯將浪費：6×(6+6+6)=108 條路徑，

加上第三部電梯所浪費的 1 條，一共浪費 164 條路徑，不合。

所以 3~33F 中至少還有 7 層樓只有 3 部電梯停靠。

4.由抽屜原理知：在三組樓層(3~12), (13~23), (24~33)中，

必有一組樓層包含至少 3 個只有 3 部電梯停靠的樓層。

設這三個樓層為 3~5F(其餘狀況可類似考慮)，

由浪費路徑數的計算可知 3~5F 一共必須用 6 部電梯。

此時 13~33F 皆已被停靠 4 次，

不可能為只有 3 部電梯停靠的樓層，

所以另外 4 個只有 3 部電梯停靠的樓層應為 6~12F 中的四層，

但這樣將會需要至少：$3+2\times7=17$ 部電梯，不合。

故 $f(10,12)=33$ 不可行。

5.由引理 3 可推知 $f(10,12)\geq 2f(10,6)=32$

(十一)討論 $f(10,9)=23$ 的情況

1.若 $f(10,9)=24$，可不失一般性假設前三部電梯為：

(1, 2~9), (1, 10~17), (1, 2, 18~24)

因為至少應有 6 層樓只有三部電梯停靠,(否則 $3\times5+4\times19>10\times9=90$，

不合)所以除了 1, 2F 外，至少還有 4 層樓只有 3 部電梯停靠。

2.由抽屜原理知：在三組樓層(3~9), (10~17), (18~24)中，

必有一組樓層包含至少 2 個只有 3 部電梯停靠的樓層。

設這 2 個樓層為 3, 4F(其餘狀況可類似考慮)，

先考慮 3, 4F 是否可以只用 3 部電梯，就與所有樓層連完。

3.若可，則 3, 4F 將共用一部電梯，而另外兩部電梯則將連接到相同的

樓層。考慮所浪費的總路徑數，因為此建築共有 $C_2^{24}=276$ 條路徑，

所有電梯共可提供 $10\times C_2^9=360$ 條路徑，

所以至多可浪費 84 條路徑。

而剩下的 7 部電梯一共至少浪費：$C_2^8+2\times C_2^4+5\times(3+3+3)=85$ 條路徑，

加上第三部電梯所浪費的 1 條，一共浪費 86 條路徑，不合。

4.故 3, 4F 一共必須用 4 部電梯，此時 10~24F 皆已被停靠 3 次，

但 10~24F 皆尚未與 5F 連接，故 10~24F 皆至少需有 4 部電梯停靠，

不可能為只有 3 部電梯停靠的樓層。

所以另外 2 個只有 3 部電梯停靠的樓層應為 5~9F 中的兩層，

但這樣將會需要至少：3+2×4=11 部電梯，不合。

故 $f(10,9)=24$ 不可行。

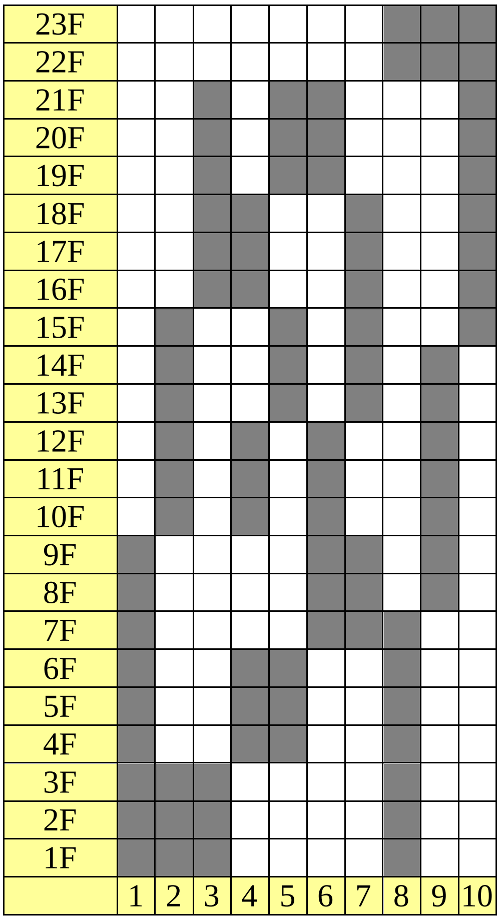
5.構造 $f(10,9)=23$ 方法：

(1,2,3,4,5,6,7,8,9) (1,2,3,10,11,12,13,14,15) (1,2,3,16,17,18,19,20,21)

(4,5,6,10,11,12,16,17,18) (4,5,6,13,14,15,19,20,21)

(7,8,9,10,11,12,19,20,21) (7,8,9,13,14,15,16,17,18) (1,2,3,4,5,6,7,22,23)

(8,9,10,11,12,13,14,22,23) (15,16,17,18,19,20,21,22,23)



(十二)討論 $f(11,12)=33$ 的情況

1.若 $f(11,12)=34$，可不失一般性假設前三部電梯為：

(1, 2~12), (1, 13~23), (1, 24~34)

因為至少應有 4 層樓只有三部電梯停靠，(否則

$3\times3+4\times31>11\times12=132$，不合)

所以除了 1F 外，至少還有 3 層樓只有 3 部電梯停靠。

2.假設有 2 層樓在同一組中，可設其為 2, 3F，

則除了第一部電梯外，有停靠 2, 3F 的 4 部電梯應包含 2 組 13~34F，

再加上由第 2, 3 部電梯所形成的一組，可得 13~34F 皆已出現 3 次。

但 13~34F 皆尚未與 4F 連接，故 13~34F 皆至少需有 4 部電梯停靠，

所以另外 1 個只有 3 部電梯停靠的樓層應為 4~12F 中的一層。

3.設該層樓為 5F，因為 13~34F 皆有與 5F 連接，

可得 13~34F 至此已經出現 4 次。

但 13~34F 皆尚未與 6F 連接，故 13~34F 皆至少需有 5 部電梯停靠。

此時樓次的數量至少為：$3\times12+5\times22>11\times12=132$，不合。

所以只有 3 部電梯停靠的 3 層樓都在不同組中。

4.設這三層樓為 2, 13, 24F，考慮 13, 24F 與 2F 連接之狀況：

若 13, 24F 與 2F 是以同一部電梯連接，

因 13, 24F 皆不可與樓層重複連接，

故該部電梯不可包含 14~23F、25~34F 的任一層樓，不合。

若 13, 24F 與 2F 是以不同的電梯連接，

則包含 2F 的兩部電梯必為：(2, 13, 25~34), (2, 24, 14~23)。

因為此建築共有 C_2^{34}=726 條路徑，所有電梯共可提供 11× C_2^{12}=561 條

路徑，所以至多可浪費 165 條路徑。

而包含 2F 的兩部電梯浪費：2× C_2^{9}=90 條路徑，

再加上剩下的 6 部電梯每部至少浪費：6+6+6=18 條路徑，

一共浪費 198 條路徑，不合。

故 $f(11,12)$=34 不可行。

5.由引理 3 可推知 $f(11,12) \geq 3 f(11,4) = 33$。

三、引入函數 ***g* (*n*, *k*)=*m***，求出更多的 ***f* (*m*, *n*)**值

為了求出更多的 ***f* (*m*, *n*)**值，我們決定引入一個新的函數 ***g* (*n*, *k*)=*m***(定義請見名詞定義的部分)。藉由這個函數的使用，我們給出了一個與完美建築有關的定理，並求出了所有 ***f* (*m*, 3)**的值。

(一)與完美建築有關的定理

令 ***g* (*n*, *k*)=*m*** 是一個完美建築，以下考慮 ***g* (*n*, *k*)=*m*** 與 ***g* (*n*, *k*+1)=*m*** 之間的關係：

設 t 是 ***g* (*n*, *k*)=*m*** 時每層樓電梯停靠的數量，

$\because$ 對每一層樓而言，都有 $k-1$ 層樓與該樓有電梯相連；

對每部電梯而言，都有 $n-1$ 層樓與該樓有電梯相連

$$\therefore t=\frac{k-1}{n-1}$$

$\because t\cdot k$ =停靠的樓次，$m\cdot n$ =停靠的樓次

$$\therefore t\cdot k=m\cdot n$$

考慮 ***g* (*n*, *k*+1)=m_1**，

$\because$ ***g* (*n*, *k*+1)=m_1** 不是完美建築

$$\therefore m_1\cdot n>(t+1)(k+1)$$

$$\Rightarrow m_1>\frac{(t+1)(k+1)}{n}$$

$$\Rightarrow m_1>m+\frac{t+k+1}{n}$$

$$\Rightarrow m_1 > m + \frac{\frac{k-1}{n-1} + k + 1}{n}$$

$$\Rightarrow m_1 > m + \frac{kn + n - 2}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow m_1 > m + \frac{k + (1 - \frac{2}{n})}{n-1}$$

$$\Rightarrow m_1 \geq m + \left\lceil \frac{k}{n-1} \right\rceil$$

將第 k+1 樓每次與原本 k 層樓中的 n-1 層樓相連，直到連完為止，

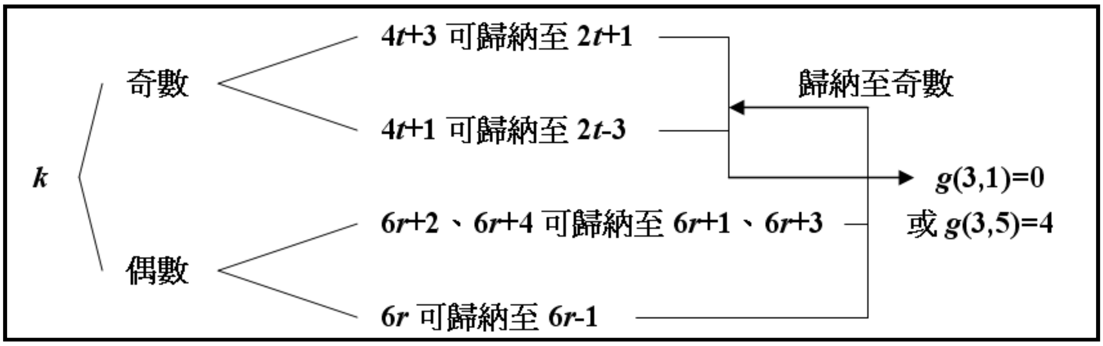
可得：$m_1 \leq m + \left\lceil \frac{k}{n-1} \right\rceil$。

根據上述的證明，我們得到：

> 令 $\boldsymbol{g\ (n, k)=m}$ 是一個完美建築，若 $\boldsymbol{g\ (n, k)=m}$ 與 $\boldsymbol{g\ (n, k+1)=m_1}$，
>
> 則 $m_1 = m + \left\lceil \frac{k}{n-1} \right\rceil$

(二) g (3, k)的值與其構造方法

$$g(3,k)=\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil \times k}{3} \right\rceil$$



(1) 4t+3 可歸納至 2t+1：

將 4t+3 拆為 2t+1 和 2t+2，2t+1 用 g(3,2t+1)自相連完。

剩下的電梯皆於 2t+1 選一層樓，於 2t+2 選兩層樓，並把兩方全部路徑連完 (註 a.)，須注意剩下的電梯互不重複路徑，才能達到最大值。

(2) 4t+1 可歸納至 2t-3：

將 4t+1 拆為 2t-3 和 2t+4，並在 2t+4 中自連 2t+4 部電梯，

2t-3 用 g(3,2t-3)自相連完。

剩下的電梯皆於 2t-3 選一層樓，於 2t+4 選兩層樓，並把兩方全部路徑連完 (註 b.)，須注意剩下的電梯互不重複路徑，且剩下的電梯不能與 2t+4 中自連的電梯重複路徑，才能達到最大值。

以上兩種，當 k≡1, 3(mod 6)時，歸納至 g(3,1)=0；

當 k≡5(mod 6)時歸納至 g(3,5)=4。

(3) $6r+2$、$6r+4$ 可歸納至 $6r+1$、$6r+3$：

將 $6r+1$ 的結果加上以下 $3r+1$ 部電梯：

$(6r+2,1,2)$ $(6r+2,3,4)$ $(6r+2,5,6)\ldots(6r+2,6r-1,6r)$ $(6r+2,6r+1,x)$

類似的，$6r+3$ 加上 $3r+2$ 部電梯。

◎此即「與完美建築有關的定理」的應用。

(4) $6r$ 可歸納至 $6r-1$：

由於 $g(3,6r-1)$可歸納至 $g(3,5)$，因此必有$(1,2,3)$的電梯。

將 $6r-1$ 的結果去掉$(1,2,3)$後加上以下 $3r$ 部電梯：

$(6r,1,3)$ $(6r,2,3)$ $(6r,4,5)\ldots(6r,6r-4,6r-3)$ $(6r,6r-2,6r-1)$

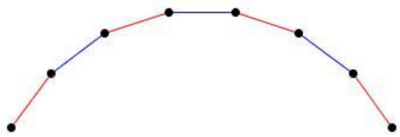
(註 a.)

將 2t+2 層樓視為一個圓內接正 2t+2 邊形的頂點，此問題即相當於將這 2t+2 個點連成的完全圖的所有線段分成 2t+1 組，其中每組共 t+1 條線段的端點須包含全部 2t+2 個點。

定義劣弧 AB 所跨過的邊數為跨度，

以下以 t=9 為例(正 20 邊形)：

(1)將跨度為 1 的所有弦連起來，會得到一個二十邊的迴圈。

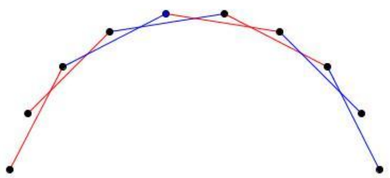


再從其中一端點紅藍交錯塗弦，將紅色邊做為一組，藍色邊做為一組。

跨度 3、7、9 方法相同。

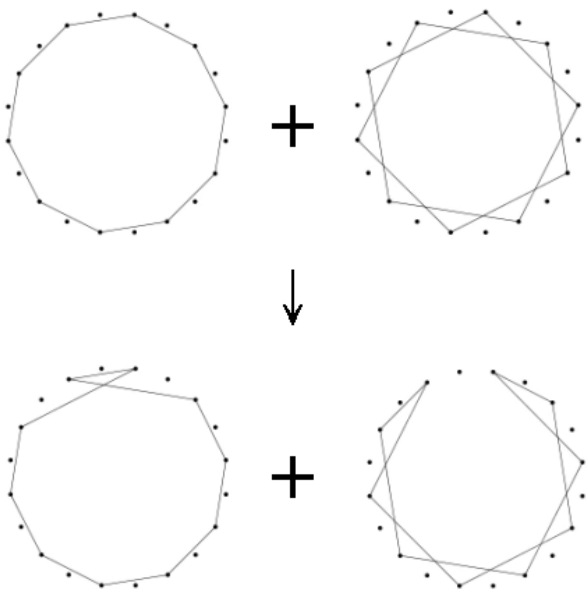
(2)將跨度為 2 的所有弦連起來，會得到兩個十邊的迴圈。

再從兩條迴圈的各一端點紅藍交錯塗弦，同樣得到兩組。



跨度 6 方法相同，跨度 5 時為五個為四邊的迴圈同理。

(3)但在跨度 4 時，得到四個為五邊的迴圈，不能紅藍交錯塗，因此做如下圖之處理：



即與跨度 2 交換兩條弦，可將兩條迴圈併為一條。

跨度 8 可與跨度 6 交換兩條弦。

(4)所有跨度 10 的弦自為一組，即分完了 19 組。

我們將上述方法稱為跨度分組，其一般方法為：

使 $\frac{2t+2}{2^n}$ 為奇數的 2^n 的倍數跨度，與其減 2^{n-1} 的跨度換弦。跨度為 t+1 的弦自為一組，其餘的弦交錯塗色分組。

∵電梯數量為：

$$\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{(2t+1)-1}{2} \right\rceil \times (2t+1)}{3} \right\rceil + (2t+1)\frac{2t+2}{2} = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{(4t+3)-1}{2} \right\rceil \times (4t+3)}{3} \right\rceil$$

∴恰可連完。

(註 b.)

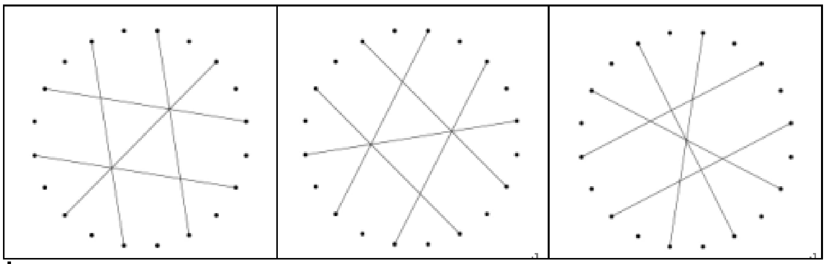
方法與 a.類似，但要於 $2t$+4 的部分先構造 $2t$+4 個三角形，並且接下來的分組不得與三角形的邊重複。

考慮奇數 $\frac{2t+4}{2^n}$：

(1)若 $\frac{2t+4}{2^n}$=1，則所有三角形使用跨度為 1、2、3 的同向三角形，其餘的弦使用跨度分組。

(2)若 $\frac{2t+4}{2^n}$=3，則所有三角形使用跨度為 1、2^n、2^n+1 的同向三角形，其餘的弦用跨度分組。

(3)若 $\frac{2t+4}{2^n}$=5，則所有三角形使用跨度為 2^{n-1}、$2\times 2^{n-1}$、$3\times 2^{n-1}$ 的同向三角形，並且其中三組分組如下圖所示：(每個正十邊形子圖)



其餘的弦使用跨度分組。

(4)若 $\frac{2t+4}{2^n}$≧7，則所有三角形使用跨度為 2^n、2×2^n、3×2^n 的同向三角形，其餘的弦使用跨度分組。

∵電梯數量為：

$$\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{(2t-3)-1}{2} \right\rceil \times (2t-3)}{3} \right\rceil + (2t-3)\frac{2t+4}{2} + 2t + 4 = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{(4t+1)-1}{2} \right\rceil \times (4t+1)}{3} \right\rceil$$

∴恰可連完。

至此，我們已經解決了 ***g* (3, *k*)** **(**即 ***f*(*m*, 3))**的情況。

但對於任意的 ***f* (*m*, *n*)**，是否有一般的求值方法？這是我們要繼續研究的課題。

伍、研究結果與討論

一、$f(m, n)$的值

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	1	3	**4**	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24
4	1	3	**5**	6	8	10	11	13	15	16	18	20	21	23	25	26
5	1	3	**5**	7	9	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	28
6	1	4	**6**	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
7	1	4	**7**	8	11	14		18	21		25	28		32	35	
8	1	4	**7**	9	11	14										
9	1	4	**7**	10	12		17	20								
10	1	5	**7**	10	13	16	18		23	26		32				
11	1	5	**8**	11	13	16	19	22		28		33				
12	1	5	**9**	12	14	18		24	27			36			45	48
13	1	5	**9**	13				26				39				52

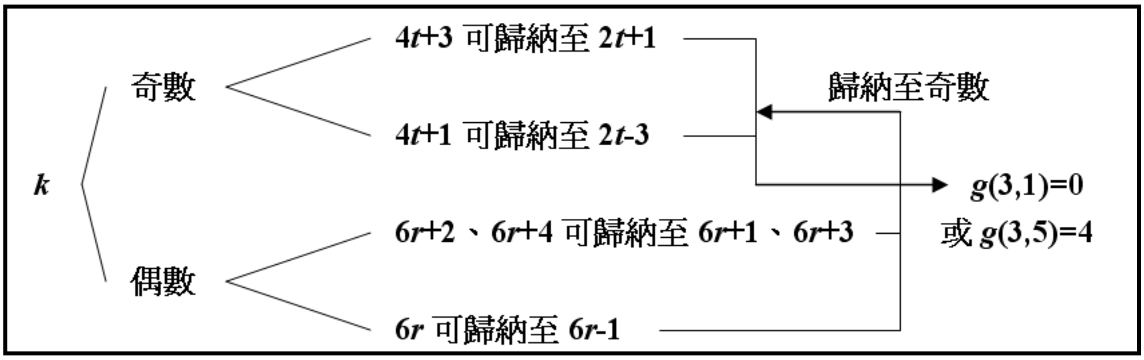
二、與完美建築有關的定理

令 $g(n, k)=m$ 是一個完美建築，若 $g(n, k)=m$ 與 $g(n, k+1)=m_1$，

則 $m_1 = m + \left\lceil \frac{k}{n-1} \right\rceil$

三、$g(3, k)$的值與其構造方法

$$g(3,k) = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil \times k}{3} \right\rceil$$


k
奇數
偶數
4t+3 可歸納至 2t+1
4t+1 可歸納至 2t-3
6r+2、6r+4 可歸納至 6r+1、6r+3
6r 可歸納至 6r-1
歸納至奇數
g(3,1)=0
或 g(3,5)=4

陸、結論與應用

本次研究針對了一些 m, n 值較小的情況，討論了其 $\boldsymbol{f(m, n)}$的值。另外，還利用了另一個函數 $\boldsymbol{g(n, k) = m}$，得到了一個與完美建築相關的定理，並推出了所有的 $\boldsymbol{f(m, 3)}$的值。我們希望能將本研究中的構造與證明方法加以推廣，應用在求 $\boldsymbol{f(m, n)}$的一般情況。

柒、參考文獻

一、九章數學教育基金會。講義：電梯問題。

二、Mathematical Wizardry for A Gardner. AK Peters. P165~171. 2009.

三、Anthony Burden. 2010. The commuter bus problem. G4G9 Exchange Book.

評語

本作品討論電梯問題，探討配置電梯停靠樓層使各樓可以方便連結，這類問題對應到組合學中的 Commuter Bus Problem，以往有不少的文獻探討過這類的問題。作者在這個方向有部分進一步的討論與結果，整體而言是相當不錯的作品。較為可惜的是取材本身就已經是大家都已經熟知的問題，如果在呈現方面能夠有更多創意會更好。