

2012 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

編號：010015

作品名稱

Seeing Dots.

得獎獎項

大會獎：二等獎

香港正選代表：香港第 45 屆聯校科學展覽會

作者姓名：楊宗諺、陳玟旭

就讀學校：國立屏東高級中學

指導教師：張宮明、傅東山

關鍵字：質因數、尤拉函數、 π 函數

作者簡介



我是屏東高中二年十七班的陳致旭。就對我而言，數學是一個吸引我的科目，從幼稚園吧！學學心算和珠算，雖然不是很專精，不過對數字建立起良好靈敏度。國小這股熱情沒有消退的跡象，反而更打好與數學的默契。國中和高中都背負著升學的壓力，學的東西也一層層的往上加難，有時似乎快被自己的最愛給打垮，也因此而佩服他，更想要踏上那座高峰。所以不選擇逃避數學，在高中時除了課程內的部分更把握住了機會參加了數學科展競賽。充實自己。



大家好，我是來自屏東高中數理資優班二年十七班的楊宗諺。位在國境之南的屏東，太陽依舊耀眼，薰風微微地拂過臉頰，正在書寫數學證明的我，暑氣頓時全消。數學，是科學之母。若沒有數學這塊領域，那有今日的便利。且若說高中課業是一場攀爬峭壁比賽的話，對我來說，數學則是過程中休息喘氣之處。儘管研究過程是多麼的艱辛，但看到自己的研究作品一天一天的豐富，心情頓時豁然開朗。數學家高斯曾說：「給我最大的快樂的，不是已有的東西，而是不斷地獲取。」引用這句話對自己勉勵。

中文摘要：

一樂隊表演，攝影師站在這樂隊的外圍拍攝。由於樂隊排列的位置，攝影師必須在外圍移動才能拍攝完整個樂隊。現在將樂隊移至直角座標中整數格子點上。攝影師依序在原點， x 軸， y 軸整數上的拍攝點拍攝位於平面上 $m \times n$ ($n \rightarrow \infty$) 的陣列。但有些點會被其他的點擋住，而無法拍攝到，討論如何用拍攝點拍攝到全部的陣列的方法探討其點數。

要解決這問題需要其他的點去輔助。隨著 $m \times n$ 的陣列變大需要越多的拍攝點才可以看完。想要用最少的拍攝點拍攝，需要固定且有理論的方法。

經過研究，找到 $m \times n$ 陣列 ($1 \leq m \leq 100, n \rightarrow \infty$) 的結果，若 y 軸上取一個拍攝點，其結果會使拍攝點個數都是優於先前文獻之結果。由於拍攝點點數是全新的數列，我們使用數學方式預測。

由二維平面拓展到三維空間，其二維平面結果仍適用於三維空間。可探討天文望遠鏡拍攝恆星間的關係。

英文摘要：

A photographer wants to take some pictures of a musical band so that every member of the band is in at least one of the pictures. The band is considered as an $m \times n$ ($n \rightarrow \infty$) array of dots in the plane, whose coordinates are positive integers. The positions at which the photographer takes pictures are called shooting spots. The shooting spots are restricted to the origin and the positive integral points of the x -axis and the y -axis. Since some members of the band will be blocked in view by others, the photographer needs to choose several shooting spots to see all of the members. A dot B is visible from a shooting spot A if there is no other dots in the line segment between A and B . Our purpose is to determine the least number of shooting spots that can see all of the dots in the $m \times n$ array.

More shooting spots are required as the array gets large. It needs a theoretic method to construct a minimal set of shooting spots.

In this report, for the $m \times n$ arrays ($1 \leq m \leq 100, n \rightarrow \infty$), we give a construction of the minimal set of shooting spots. Moreover, our results are better than the previously known results under the condition that one shooting spot is on the y -axis.. This method can be generalized to three-dimensional arrays.

一、前言

在某次數學讀書會上，數學老師給了各種不同數學問題供我們思考。其中，我們對一個數學問題特別感到興趣，其題目內容敘述如下：

將一個樂隊放在座標平面第一象限正整數格子點上，攝影師在原點、 x 軸、 y 軸正整數點上拍攝，則最少需要幾個拍攝點才能將所有人都拍攝完畢？依據現有參考文獻來看，將攝影師限制在原點與 x 軸（或 y 軸），造成所需的拍攝點較多，因此，我們想考慮攝影師的位置可以同時包含更 x 軸與 y 軸上的點，深入探討下列問題：

我們稱樂隊成員所在的點為目標點，稱攝影師所在的點為拍攝點。以符號 N 表示正整數所成的集合。對於 $m \in N$ ，以符號 $V(m)$ 表示下列目標點所成的集合

$$V(m) = \{(i, j) \mid i, j \in N, 1 \leq j \leq m\},$$

(注意， $V(m) \subset N \times N$ 是在第一象限內向 y 軸正向無限延伸的帶狀點集)。

我們將拍攝點限制在原點及 x 軸， y 軸上的正整數點。對於拍攝點 a 與目標點 b 而言，若線段 ab 上沒有其他目標點，則稱 b 點為 a -可見(visible)。同理，對於拍攝點集 A 與目標點集 $B \subseteq V(m)$ 而言，若對每一點 $b \in B$ 存在一點 $a \in A$ 使得 b 點為 a -可見，則我們稱集合 B 為 A -可見。

參考文獻[4]探討對於目標點集 $V(m)$ ，拍攝點限制在 x 軸點集合 $\{(i, 0) \mid 0 \leq i \leq m+1\}$ 範圍內，計算 $V(m)$ -可見的最小拍攝點數，得到結論是當 m 是 4 的倍數時，最小拍攝點數為 $m/2$ ，當 m 不是 4 的倍數時，最小拍攝點數為 $[m/2] + 1$ ，其中符號 $[x]$ 表示高斯函數。我們放寬此限制條件，發現只要允許在 y 軸上取一個拍攝點就能使所需的拍攝點數大幅降低。

在本報告中，我們考慮在下列限制條件下建構最小拍攝點集 S 使得目標點集

$V(m)$ 為 S -可見的問題。

(一) 限制 x 軸上拍攝點落在集合 $\{(i, 0) \mid 0 \leq i \leq m+1\}$ 範圍內，拍攝點集 S 包含原點，並允許 y 軸上的正整數點。

(二) 若目標點集增加第二、三、四象限的帶狀點集，則最小拍攝點數與(一)之間關係為何？

(三) 若將拍攝點集 S 限制在直線 $y=x$ 上的正整數格子點(k 為正整數)，並允許 y 軸上的正整數點。

二、研究方法過程和結果

將整個樂隊隊伍搬至座標平面第一象限上拍攝，以數學的定義描述如下：

對於正整數 m 而言，考慮目標點集 $V(m)=\{(i,j) \mid i,j \in N, 1 \leq j \leq m\}$ ，以符號 X^+, Y^+ 分別表示 x 軸， y 軸上的正整數點所成的集合，即

$$X^+=\{(i, 0) \mid i \in N\}$$

$$Y^+=\{(0, j) \mid j \in N\}$$

建構滿足下列條件的最小拍攝點集 S 使得 $V(m)$ 為 S -可見。

$$(1) S \cap X^+ = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (m+1, 0)\},$$

$$(2) (0, 0) \in S,$$

$$(3) \text{允許 } S \text{ 包含部份 } y \text{ 軸上的正整數點。}$$

另外，假設攝影機並無拍攝角度之限制。

仔細觀察這些看不到點的現象，發現有下列基本性質(參閱參考文獻[3])：

引理 1. 以原點 $(0,0)$ 為拍攝點，觀察目標點 $C(x, y)$ ，則 C 點為 $(0, 0)$ -可見若且唯若 $\gcd(x, y)=1$ 。

證明：設 $\gcd(x, y) = d$ ， $x = ad$ ， $y = bd$ ，則 $a, b \in N$ 。令點 $A = (0, 0)$ ，點 $B = (a, b)$ ，則

$$AB \text{ 直線的斜率為 } \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}$$

$$AC \text{ 直線的斜率為 } \frac{y-0}{x-0} = \frac{bd}{ad} = \frac{b}{a}$$

所以線段 AB 的斜率等於線段 AC 的斜率，故兩直線重疊，若 $d=1$ 即 $B=C$ ，此

時 C 點為 $(0, 0)$ -可見。若 $d > 1$ ，則 B 點在線段 AC 之上，此時 C 點不是 $(0, 0)$ -可見。

□

上述這些被其他點擋住而不能從原點看到的點或可稱為非原點可見。觀察這些點，由引理 1，不難發現下列現象：

直線 $x = 2$ 上非原點可見的點為 $\{(2, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

直線 $x = 3$ 上非原點可見的點為 $\{(3, 3n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

直線 $x = 6$ 上非原點可見的點為 $\{(6, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(6, 3n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 。

依據以上觀察，考慮將拍攝點從原點移到 x 軸（或 y 軸）上的正整數點，得出以下性質。

引理 2. 設 k, m 為正整數，

(1) 以點 $(k, 0)$ 為拍攝點，觀察直線 $x = m$ 上的目標點 $C(m, y)$ ，則 C 點是 $(k, 0)$ -可見若且唯若 $\gcd(m-k, y) = 1$ ，

(2) 以點 $(0, k)$ 為拍攝點，觀察直線 $y = m$ 上的目標點 $C(x, m)$ ，則 C 點是 $(0, k)$ -可見若且唯若 $\gcd(x, m-k) = 1$ 。

證明：(1) 經過平移，以 $(k, 0)$ 為新原點，則 C 點的新座標為 $(m-k, y)$ 。由引理 1 得知 C 點是

$(k, 0)$ -可見若且唯若 $\gcd(m-k, y) = 1$ 。

(2) 同理可證。

□

例如，如圖 1 所示，直線 $x = 2$ 上非原點可見的目標點 $(2, 2n), n \in \mathbb{N}$ 與直線 $x = 3$ 上非原點可見的目標點 $(3, 3n), n \in \mathbb{N}$ 可以利用 y 軸上的拍攝點 $(0, 5)$ 去看。

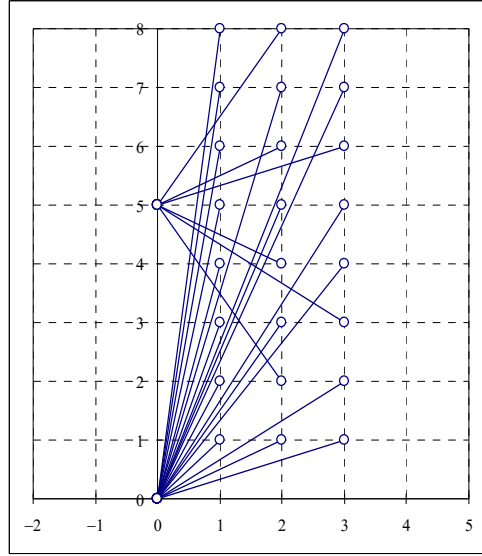


圖 1：由拍攝點 $(0, 0), (0, 5)$ 去看目標點集 $V(3)$ 。

以下性質經常用在說明 y 軸拍攝點 $(0, r)$ 對目標點的可見性。

引理 3. 設 $c, r \in \mathbb{N}$, $\gcd(c, r) = 1$, $p_1, p_2, \dots, p_s$ 為 c 的質因數, $q = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_s$, 則對任意 $n \in \mathbb{N}$, $\gcd(c, qn - r) = 1$ 恆成立。

證明：若存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\gcd(c, qn_0 - r) > 1$, 則存在 c 的質因數 p_i 整除 $qn_0 - r$, 又因 p_i 整除 q 所以 p_i 整除 r , 但這與假設 $\gcd(c, r) = 1$ 矛盾, 因此對任意 $n \in \mathbb{N}$, $\gcd(c, qn - r) = 1$ 。

以符號 $|S|$ 表示集合 S 的元素個數, 以符號 $\sigma(m)$ 表示可觀看 $V(m)$ 全體目標點所需的最小拍攝點數, 即

$$\sigma(m) = \min \{|S| : V(m) \text{ 為 } S\text{-可見}\}$$

由上述引理, 對於 $m < 10$ 的情形可得出以下之結論。對於 $m \geq 10$ 的情形我們提出一個建構最小拍攝點集的方法。

定理 4. 設 m 為正整數, 下列敘述成立。

(1) 若 $m = 1$, 則 $\sigma(m) = 1$ 。

(2) 若 $2 \leq m \leq 5$ ，則 $\sigma(m) = 2$ 。

(3) 若 $6 \leq m \leq 9$ ，則 $\sigma(m) = 3$ 。

我們以各別討論的方式，試著找出最少的拍攝點。

當 $m = 1$ 時，對於 $V(1) = \{(1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 而言，拍攝點僅需原點即可全部入鏡。

證明：對於 $n \in \mathbb{N}$ ， $\gcd(1, n) = 1$ ，由引理 1 知目標點 $(1, n)$ 均為原點可見。定理 4 敘述(1)成立。

當 $m > 1$ 時，原點不足以看到全部 $V(m)$ 的點，因此 $\sigma(m) \geq 2$ 。

當 $m = 2, 3, 4, 5$ 時，對於 $V(m)$ 而言，拍攝點集 $S = \{(0, 0), (0, 7)\}$ 即能全部入鏡

證明：由敘述(1)知直線 $x = 1$ 上的目標點均為原點可見。考慮直線 $x = 2, 3, 4, 5$ 上那些原點看不到的點 $(2, 2n), (3, 3n), (4, 2n), (5, 5n), n \in \mathbb{N}$ ，這些點可從 y 軸上的拍攝點 $(0, 7)$ 看到。理由是，若以點 $(0, 7)$ 為新原點，這些點的新座標分別為 $(2, 2n-7), (3, 3n-7), (4, 2n-7), (5, 5n-7)$ 。由引理 3 知 $\gcd(2, 2n-7) = \gcd(3, 3n-7) = \gcd(4, 2n-7) = \gcd(5, 5n-7) = 1$ ，由引理 2 之(2)得知這些點均為 $(0, 7)$ -可見。以上證明了定理 4 之敘述(2)。

當 $m > 5$ 時，包含原點的拍攝點數至少為 3，即 $\sigma(m) \geq 3$ 。

證明：考慮直線 $x = 6$ 上非原點可見的目標點 $(6, 2n), (6, 3n)$ ，對於任意整數 r 都存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ (或 $n_2 \in \mathbb{N}$) 存使得 3 整除 $2n_1 - r$ (或 2 整除 $3n_2 - 7$)，因此對於 y 軸上任意拍攝點 $(0, r)$ ，都存在直線 $x = 6$ 上非原點可見的目標點 $(6, 2n_1)$ (或 $(6, 3n_2)$) 為非 $(0, r)$ -可見。

很明顯，對於 x 軸上的一拍攝點 $(i, 0)$ ， $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ，不足以看到全部 $V(6)$ 的非原點可見的目標點。

當 $m = 6, 7, 8, 9$ 時，對於 $V(6)$ 而言，拍攝點集 $S = \{(0, 0), (7, 0), (0, 11)\}$ 即能全部

入鏡。

證明：考慮非原點可見且非 $(7, 0)$ -可見的目標點 $(2, 10n), (3, 6n), (4, 6n), (5, 10n)$, $n \in \mathbb{N}$ 。這些點將可從 y 軸上的拍攝點 $(0, 11)$ 看到。理由是，若以點 $(0, 11)$ 為新原點，這些點的新座標分別為 $(2, 10n-11), (3, 6n-11), (4, 6n-11), (5, 10n-11)$ 。由引理 3 知 $\gcd(2, 10n-11) = \gcd(3, 6n-11) = \gcd(4, 6n-11) = \gcd(5, 10n-11) = 1$ ，由引理 2 之(2) 得知這些點均為 $(0, 11)$ -可見，故 $V(6)$ 為 S -可見。

考慮直線 $x = 7, 8, 9$ 上的目標點，很明顯，那些非原點可見的點均為 $(0, 11)$ -可見。以上證明了定理 4 之敘述(3)。

□

附註：上述 $V(m)$ 的最小拍攝點集不是唯一的，例如，對於 $V(m)$, $m = 6, 7, 8, 9$ ，的拍攝點集 S 也可以取 $S = \{(0, 0), (5, 0), (0, 11)\}$ 。

當 $m \geq 10$ 時，對於目標點集 $V(m)$ 我們提出一個建構拍攝點集 S 的方法。

將目標點依其所在的直線 $x = c$ 加以分類，我們將集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 分割成三個子集

$$\{1, 2, \dots, m\} = \{1\} \cup U_m \cup W_m,$$

其中 U_m 是那些質數冪所成的集合，而 W_m 是那些剩下的數所成的集合，換言之

$$U_m = \{c \in \mathbb{N} \mid c \leq m, c \text{ 只有 1 個質因數}\},$$

$$W_m = \{c \in \mathbb{N} \mid c \leq m, c \text{ 有 2 個或 2 個以上質因數}\}.$$

例如，當 $m = 10$ 時， $U_{10} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $W_{10} = \{6, 10\}$ ，當 $m = 15$ 時 $U_{15} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13\}$, $W_{15} = \{6, 10, 12, 14, 15\}$ 。

若 $|W_m| = r$ ，令 $W_m = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ 。對於 $1 \leq i \leq r$ ，設 w_i 有 $s(i)$ 個質因數，並令這些質因數為 $\{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{i,s(i)}\}$ ，考慮 w_i 所衍生型如 $w_i \pm p_{ij}^k$ 的正整數類型，定義集合 $f(w_i)$ 如下，其中 k 為任意非負整數

$$f(w_i) = \{ w_i \pm p_{ij}^k \mid 1 \leq j \leq s(i) \},$$

並定義 $F(m)$ 為所有這些類型所成的集合，即

$$F(m) = f(w_1) \cup f(w_2) \cup \dots \cup f(w_r).$$

若正整數 t 可以表示成 $w_i \pm p_{ij}^k$ 的形式，則稱 t 涵蓋 $w_i \pm p_{ij}^k$ 類型。考慮正整數集 $T \subset \{1, \dots, m+1\}$ ，若對每一類型 $w_i \pm p_{ij}^k \in F(m)$ ，存在 $t \in T$ 使得 t 涵蓋 $w_i \pm p_{ij}^k$ 類型，則稱 T 為 $F(m)$ -覆蓋。我們的目的就是利用 $F(m)$ -覆蓋建構 x 軸上的拍攝點集。

例如，當 $m = 10$ 時， $W_{10} = \{6, 10\}$ ，其中 6 的質因數為 $\{2, 3\}$ ，10 的質因數為 $\{2, 5\}$ ，則 6 與 10 分別衍生正整數類型 $f(6) = \{6 \pm 2^k, 6 \pm 3^k\}$ ， $f(10) = \{10 \pm 2^k, 10 \pm 5^k\}$ ，因此

$$F(10) = \{6 \pm 2^k, 6 \pm 3^k, 10 \pm 2^k, 10 \pm 5^k\}.$$

當 $k = 0$ 時， $6 \pm 2^k = \{7, 5\}$ ， $6 \pm 3^k = \{7, 5\}$ ， $10 \pm 2^k = \{11, 9\}$ ， $10 \pm 5^k = \{11, 9\}$ ，知 7 與 5 涵蓋 6 ± 2^k 類型與 6 ± 3^k 類型，11 與 9 涵蓋 10 ± 2^k 與 10 ± 5^k 類型，因此構成 $F(10)$ -覆蓋的集合 T 有 $\{5, 9\}$ ， $\{5, 11\}$ ， $\{7, 9\}$ ， $\{7, 11\}$ ；當 $k = 1$ 時， $6 \pm 2^k = \{8, 4\}$ ， $6 \pm 3^k = \{9, 3\}$ ， $10 \pm 2^k = \{12, 8\}$ （因 $12 > m+1=11$ ，可以捨去）， $10 \pm 5^k = \{15, 5\}$ （因 $15 > m+1=11$ ，可以捨去），知 8 涵蓋 6 ± 2^k 類型與 10 ± 2^k 類型，依此類推；當 $k = 2$ 時， $6 \pm 2^k = \{10, 2\}$ ， $10 \pm 2^k = \{14, 6\}$ 。我們將結果整理成下表，以利說明：

	6 ± 2^k	6 ± 3^k	10 ± 2^k	10 ± 5^k
當 $k = 0$	7, 5	7, 5	11, 9	11, 9
當 $k = 1$	8, 4	9, 3	8	5
當 $k = 2$	10, 2	超出範圍	6	超出範圍

由表得知，構成 $F(10)$ -覆蓋的集合 T 有 $\{5, 9\}$ ， $\{5, 11\}$ ， $\{7, 9\}$ ， $\{7, 11\}$ ， $\{5, 8\}$ ， $\{8, 9\}$ ， $\{3, 9, 11\}$ ，...，等，但 $\{7, 8\}$ 不是一個 $F(10)$ -覆蓋，因為 10 ± 5^k 類型不能被 7 與 8 所涵蓋。

注意，對於 $m \geq 10$ ，任何一個 $F(m)$ -覆蓋 T 至少包含 2 個元素。

以下，對於目標點集 $V(m)$ ，我們利用 $F(m)$ -覆蓋建構拍攝點集 S 使得 $V(m)$ 為 S -可見。

定理 5. 設正整數 $m \geq 10$ ， $T \subset \{1, \dots, m+1\}$ 為一個 $F(m)$ -覆蓋， r 為大於 m 的最小質數，對於目標點集 $V(m) = \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m\}$ ，建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, 0) \mid t \in T\}$ ，則 $V(m)$ 為 S -可見。

證明：為了證明 $V(m)$ 為 S -可見，我們將目標點依其所在的直線 $x = c$ 分類，因此將集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 分割成上述三個子集 $\{1\}, U_m, W_m$ ，分別討論如下：

- (1) 當 $c = 1$ 時，很明顯，直線 $x = 1$ 上所有目標點均為原點可見。
- (2) 當 $c \in U_m$ 時， c 只有 1 個質因數 p ，考慮直線 $x = c$ 上那些非原點可見的目標點 $(c, pn), n \in \mathbb{N}$ ，由引理 3 知對於任意 $n \in \mathbb{N}$ ， $\gcd(c, pn-r) = \gcd(c, r) = 1$ ，因此由引理 2 之(2)得知這些目標點 (c, pn) 都可被 y 軸上的拍攝點 $(0, r)$ 所看見。
- (3) 當 $c \in W_m$ 時， c 有 2 個或 2 個以上質因數，令這些質因數為 $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ 。因 T 是一個 $F(m)$ -覆蓋，故存在 $t_1, t_2, \dots, t_s \in T$ 使得 t_i 涵蓋 $c \pm p_i^k$ 類型 ($1 \leq i \leq s$)。

對於相異的 $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ ，存在 $a, b \in \mathbb{N}$ 使得 $t_i = c \pm p_i^a, t_j = c \pm p_j^b$ 。由引理 3 知對於任意 $n \in \mathbb{N}$ ，當 n 不是 p_j 的倍數時， $\gcd(t_j - c, p_i n) = \gcd(\pm p_j^b, p_i n) = 1$ 。同樣的，當 n 不是 p_i 的倍數時， $\gcd(t_i - c, p_j n) = \gcd(\pm p_i^a, p_j n) = 1$ 。

考慮直線 $x = c$ 上那些非原點可見的目標點 $(c, p_1 n), (c, p_2 n), \dots, (c, p_s n), n \in \mathbb{N}$ ，拍攝點 $(t_j, 0) \in S$ 可看見目標點 $\{(c, p_i n) \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ 不是 } p_j \text{ 的倍數}\}$ ，但看不見目標點 $\{(c, p_i n) \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ 是 } p_j \text{ 的倍數}\}$ 。同樣的，拍攝點 $(t_i, 0) \in S$ 可看見目標點 $\{(c, p_j n) \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ 不是 } p_i \text{ 的倍數}\}$ ，但看不見目標點 $\{(c, p_j n) \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ 是 } p_i \text{ 的倍數}\}$ 。令 $q = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_s$ ，則直線 $x = c$ 上只剩下目標點 $(c, qn), n \in \mathbb{N}$ 不能被拍攝點 $\{(t_1, 0), (t_2, 0), \dots, (t_s, 0)\}$ 所看見，而這些目標點 (c, qn) 可被 y 軸上的拍攝點 $(0, r)$ 所看見，理由是 $\gcd(c, qn-r)$

$= \gcd(c, r) = 1$ ，因此我們證明了 $V(m)$ 為 S -可見。 □

例如，當 $m = 10$ 時， $U_{10} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ ， $W_{10} = \{6, 10\}$ ， $F(10) = \{6 \pm 2^k, 6 \pm 3^k, 10 \pm 2^k, 10 \pm 5^k\}$ 。對於目標點集 $V(10)$ 建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (0, 11), (7, 0), (9, 0)\}$ 使得 $V(10)$ 為 S -可見，茲說明如下。

考慮直線 $x = c$ 上的目標點，當 $c = 1$ 時，顯然直線 $x = 1$ 上的目標點均為原點可見。

當 $c \in U_{10}$ 時，非原點可見的目標點有 $(2, 2n), (3, 3n), (4, 2n), (5, 5n), (7, 7n), (8, 2n), (9, 3n), n \in \mathbb{N}$ ，這些點都是 $(0, 11)$ -可見。

當 $c \in W_{10}$ 時，非原點可見的目標點有 $(6, 2n), (6, 3n), (10, 2n), (10, 5n), n \in \mathbb{N}$ 。

若取 $F(10)$ -覆蓋 $T = \{7, 9\}$ 知拍攝點 $(7, 0)$ 可看見直線 $x = 6$ 上的目標點，拍攝點 $(9, 0)$ 可看見直線 $x = 10$ 上的目標點，因此建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (7, 0), (9, 0), (0, 11)\}$ 可使 $V(10)$ 為 S -可見。

若取 $F(10)$ -覆蓋 $T = \{5, 8\}$ 知直線 $x = 6$ 上的目標點可被拍攝點 $(5, 0)$ 可看見，但直線 $x = 10$ 上的部份目標點 $(10, 10n), n \in \mathbb{N}$ 不能被拍攝點 $(5, 0)$ 及 $(8, 0)$ 可看見，而這些點均為 $(0, 11)$ -可見，因此建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (5, 0), (8, 0), (0, 11)\}$ 亦可使 $V(10)$ 為 S -可見。

由定理 5，要建構 $V(m)$ 的最小拍攝點集 S 就要搜尋最小的 $F(m)$ -覆蓋，以符號 $\kappa(m)$ 表示最小 $F(m)$ -覆蓋的點數，即

$$\kappa(m) = \min\{|T| : T \text{ 為 } F(m)\text{-覆蓋}\},$$

則我們有以下結果。

定理 6. 若 m 為正整數，則 $\sigma(m) \leq \kappa(m) + 2$ 。

在研究過程中發現我們觀察到一個現象，當 m 為質數時， $V(m)$ 與 $V(m-1)$ 所

需的拍攝點個數相同，經過思考之後知道，因為 m 是質數，不會產生新的類型，換言之 $F(m) = F(m-1)$ ，我們得出下列定理。

推論 7. 若 m 為質數，則 $\kappa(m) = \kappa(m-1)$ 。

當數字 m 越大時，構成 $F(m)$ -覆蓋的集合也越多，此時需要數學軟體輔助加以運算。以下是我們目前找出來最小覆蓋的點數：

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\kappa(m)$						1			2										3		4				5					

m	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$\kappa(m)$	5		6		8										9			10					11			12		14		

我們試著使用迴歸直線去預測接下來的最小覆蓋的點數 $\kappa(m)$ ，以 $1 \leq m \leq 100$ 計算資料得出迴歸直線為

$$\kappa(m) = (2028585m + 2906864)/8329699$$

其相關係數為 0.994141。

下圖為 $\kappa(m)$ 與 π 函數的對照圖，其中 π 函數定義 $\pi(m)$ 為小於或等於 m 的質數個數。經過觀察，我們發現 $\kappa(m)$ 與 $\pi(m)$ 函數有高度相關性，至於他們之間的關係為何？目前尚無確定的結論。

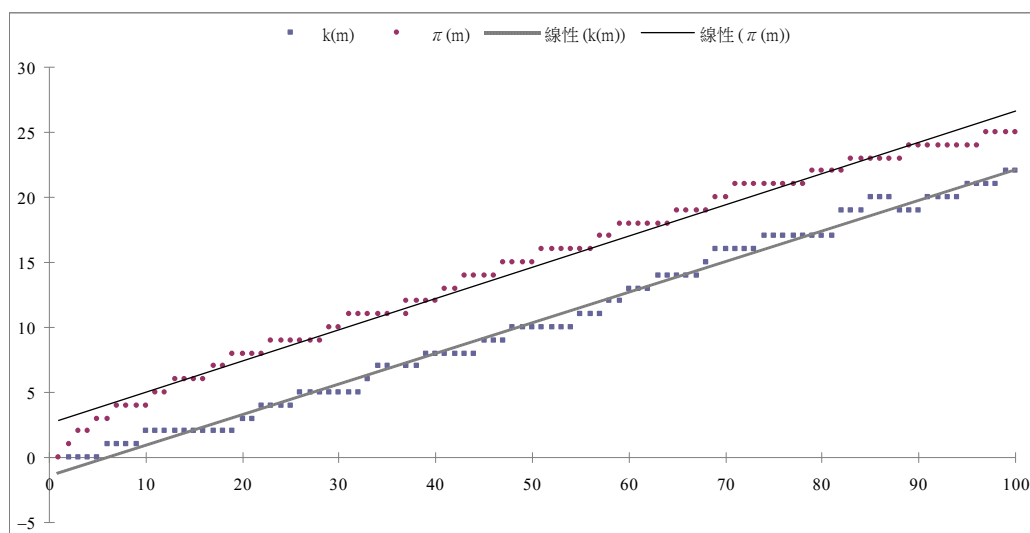


圖 2： $\kappa(m)$ 與 π 函數的對照圖。

猜想 8. 若 m 為正整數，則 $\kappa(m) + 2 \leq \pi(m)$ 。

與先前文獻之結果比較，參考文獻[2]探討對於目標點集 $V(m)$ ，拍攝點限制在 x 軸上點集合 $\{(i, 0) \mid 1 \leq i \leq m+1\}$ ，建構 $V(m)$ -可見的最小拍攝點集 S ，得到結論是當 m 是 4 的倍數時， $|S|=m/2$ ，當 m 不是 4 的倍數時， $|S|=[m/2]+1$ ，其中符號 $[x]$ 表示高斯函數。

$$f(m) = \begin{cases} m/2 & m \text{ 是 4 的倍數} \\ [m/2] + 1 & m \text{ 不是 4 的倍數} \end{cases}$$

如下圖，將這個函數與我們所做（擁許 y 軸上拍攝點）的結果 $\kappa(m) + 2$ 比較，我們發現所需的拍攝點數大幅降低。

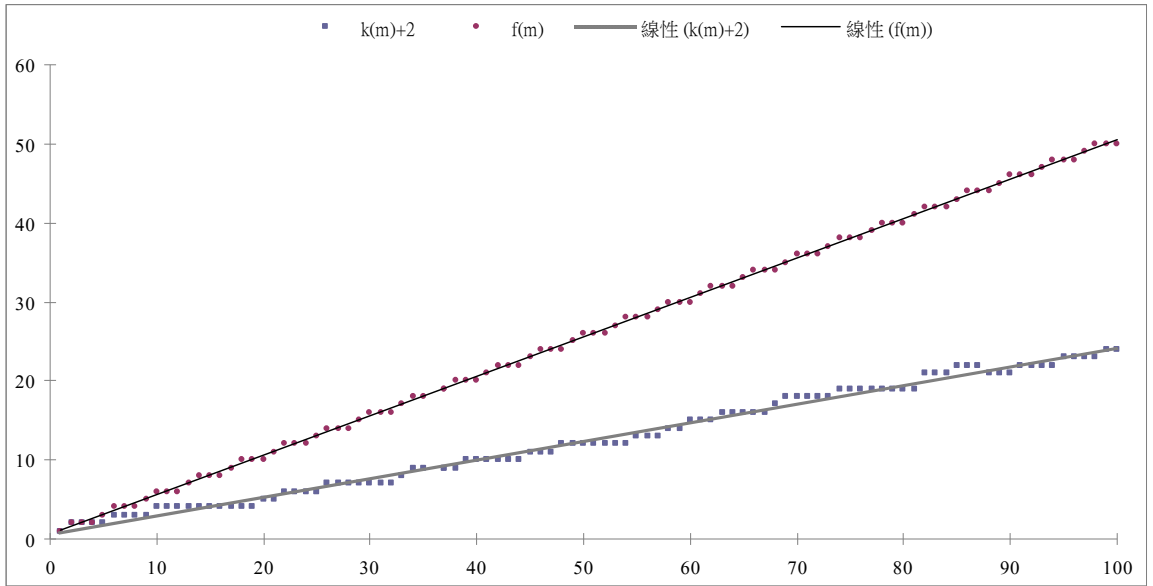


圖 3： $\kappa(m) + 2$ 與 $f(m)$ 對照圖。

我們在研究過程中，我們曾考慮以原點為拍攝點，目標點集為 $m \times m$ 方陣

$$M(m) = \{(i, j) \mid i, j \in N, 1 \leq i, j \leq m\},$$

我們發現一個有趣特殊性質，以 a_m 表示 $M(m)$ 中原點所看不到的目標點個數，下表列出我們觀察到 a_m 的初始值 ($1 \leq m \leq 10$)

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_m	0	1	2	5	6	13	14	21	26	37

我們得到以下結果。

定理 9. 以下等式成立，其中符號 $\phi(x)$ 表示尤拉函數，

$$a_m = m^2 - 1 - 2 \sum_{k=1}^m \phi(k)$$

證明：比較 $M(k)$ 與 $M(k-1)$ ，目標點多出 $2k-1$ 個點，分布在直線 $x=k$ 上與直線 $y=k$ 上，其中原點可見的目標點在直線 $x=k$ 上有 $\phi(k)$ 個，在直線 $y=k$ 上有 $\phi(k)$ 個，因此數列 a_k 滿足遞迴關係式

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_k = a_{k-1} + 2k - 1 - 2\phi(k) \end{cases}$$

上述等式做 $a_1 + a_2 + \dots + a_m$ ，即可得證。 □

另外，考慮以點 $(1, 1) \in M(m)$ 為拍攝點， b_m 表示 $M(m)$ 中 $(1, 1)$ 點所看不到的目標點個數（包含 $(1, 1)$ 點本身），有以下結果。

定理 10. 以下等式成立， $b_1 = 1$ ，當 $m \geq 2$ 時，

$$b_m = m^2 - 3 - 2 \sum_{k=1}^{m-1} \phi(k)$$

證明：目標點 $M(m)$ 可分成直線 $x=1$ ，直線 $y=1$ ，與 $(m-1) \times (m-1)$ 方陣，其中在直線 $x=1$ ， $y=1$ 上分別有 $m-2$ 個 $(1, 1)$ 點所看不到的目標點，加上 $(1, 1)$ 點本身，共 $2m-3$ 個點。以 $(1, 1)$ 點去看這個 $(m-1) \times (m-1)$ 方陣相當於以原點去看 $M(m-1)$ ，有 a_{m-1} 看不到的目標點，因此

$b_m = 2m - 3 + a_{m-1}$ ，由定理 7，將 a_{m-1} 代入得證。 □

承上，很明顯，若將拍攝點移到其他三個角落的點 $(m, 1)$, $(1, m)$, $(m, m) \in M(m)$ ，

則會有相同點數 b_m 看不到的目標點。

以下我們考慮增加第四象限的目標點，以符號 $A(m)$ 表示下列目標點所成的集合

$$A(m) = V(m) \cup \{(i, -j) \mid i, j \in N, 1 \leq j \leq m\},$$

拍攝點仍限制在原點及 x 軸， y 軸上的正整數點。我們發現雖然目標點增為加一倍，但所需的點拍攝點並未增加，即只需 $\kappa(m) + 2$ 個拍攝點就可將 $A(m)$ 全部入鏡，我們得到以下定理：

定理 11. 設 m 為正整數， $T \subset \{1, \dots, m+1\}$ 為一個 $F(m)$ -覆蓋， r 為大於 m 的最小質數，對於目標點集 $A(m) = \{(i, j), (i, -j) \mid i, j \in N, 1 \leq j \leq m\}$ ，建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, 0) \mid t \in T\}$ ，則 $A(m)$ 為 S -可見。

證明：設 T 是一個 $F(m)$ -覆蓋，建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, 0) \mid t \in T\}$ ，則 $V(m)$ 是 S -可見，對於直線 $x = c$ 上的目標點，若目標點 $(c, j) \in V(m)$ 可被 x 軸上的拍攝點 $(t, 0) \in S$ 看見，則 $\gcd(c-t, j) = 1 = \gcd(c-t, -j)$ ，因此目標點 $(c, -j) \in A(m)$ 也可被拍攝點 $(t, 0)$ 看見。至於那些不能被 x 軸上拍攝點看到的點 (c, qn) ， $n \in N$ ，其中 q 為 c 的質因數乘積，則由 y 軸上的拍攝點 $(0, r)$ 負責去看，因 $\gcd(c, qn-r) = 1 = \gcd(c, -qn-r)$ ， $n \in N$ ，因此目標點 $(c, -qn) \in A(m)$ 也可被拍攝點 $(0, r)$ 看見，故 $A(m)$ 也 S -可見。

□

下圖為利用拍攝點 $\{(0, 0), (0, 5)\}$ 去看目標點 $A(3)$ 。

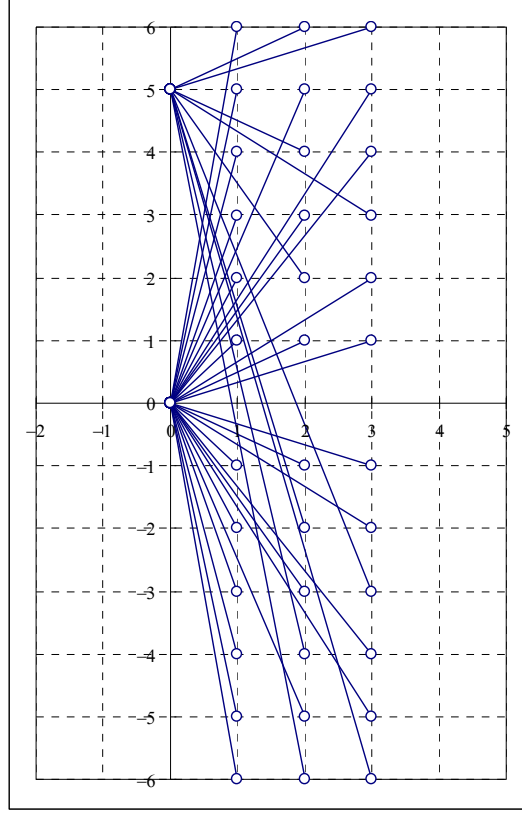


圖 4：由拍攝點 $(0, 0), (0, 5)$ 去看目標點集 $A(3)$ 。

考慮將目標點 $A(m)$ 沿著 y 軸翻轉以增加第二及第三象限的目標點，以符號 $B(m)$ 表示下列目標點所成的集合

$$B(m) = \{(-i, j) \mid (i, j) \in A(m)\},$$

拍攝點仍限制在原點及 x 軸， y 軸上的正整數點，我們得到以下定理：

定理 12. 設 m 為正整數，對於目標點集 $A(m) \cup B(m)$ 的最小拍攝點數 $\sigma(m)$ ，有

$$\sigma(m) \leq \min \{2\kappa(m) + 2, \kappa(2m+1) + 2\}.$$

證明：設 T 是一個 $F(m)$ -覆蓋，建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, 0) \mid t \in T\} \cup \{(-t, 0) \mid t \in T\}$ ，由定理 10 知，目標點集 $A(m)$ 可被拍攝點 $\{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, 0) \mid t \in T\}$ 所看見，而目標點集 $B(m)$ 可被拍攝點 $\{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(-t, 0) \mid t \in T\}$ 所看見，所以

$A(m) \cup B(m)$ 是 S -可見，因此 $\sigma(m) \leq 2\kappa(m) + 2$ 。另外，考慮將 y 軸平移到直線 $x = -m - 1$ 上，相當於整個目標點落在 $A(2m+1)$ 之內，而 x 軸上所需的攝點集可以由 $F(2m+1)$ -覆蓋建構得到，因此 $\sigma(m) \leq \kappa(2m+1) + 2$ 。 □

我們又回到第一象限的目標點集 $V(m)$ ，這次變更拍攝點的限制，拍攝點限制在原點，直線 $y = x$ 上正整數點及 y 軸上正整數點，其結果如下：

定理 13. 設 m 為正整數， $T \subset \{1, \dots, m+1\}$ 為一個 $F(m)$ -覆蓋， r 為大於 m 的最小質數，對於目標點集 $V(m) = \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m\}$ ，建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, t) \mid t \in T\}$ ，則 $V(m)$ 為 S -可見。

證明：將目標點依其所在的直線 $x = c$ 分類，因此將集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 分割成上述三個子集 $\{1\}, U_m, W_m$ ，由定理 5 的證明知，當 $c = 1$ 或 $c \in U_m$ 時，直線 $x = c$ 上所有目標點都可被 $\{(0, 0), (0, r)\}$ 所看見，現在討論 $c \in W_m$ 時的情形如下：

令 $p_1, p_2, \dots, p_s$ 為 c 的質因數 ($s \geq 2$)。因 T 是一個 $F(m)$ -覆蓋，故存在 $t_1, t_2, \dots, t_s \in T$ 使得 t_i 涵蓋 $c \pm p_i^k$ 類型 ($1 \leq i \leq s$)。對於相異的 $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ ，存在 $a, b \in \mathbb{N}$ 使得 $t_i = c \pm p_i^a$ ， $t_j = c \pm p_j^b$ 。由引理 3 知對於任意 $n \in \mathbb{N}$ ，當 n 不是 p_j 的倍數時， $\gcd(t_j - c, t_j - p_j n) = \gcd(\pm p_j^b, c \pm p_j^b - p_j n) = 1$ 。同樣的，當 n 不是 p_i 的倍數時， $\gcd(t_i - c, t_i - p_i n) = \gcd(\pm p_i^a, c \pm p_i^a - p_i n) = 1$ 。

考慮直線 $x = c$ 上那些非原點可見的目標點 $(c, p_1 n), (c, p_2 n), \dots, (c, p_s n), n \in \mathbb{N}$ ，拍攝點 $(t_j, t_j) \in S$ 可看見目標點 $\{(c, p_i n) \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ 不是 } p_j \text{ 的倍數}\}$ ，但看不見目標點 $\{(c, p_i n) \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ 是 } p_j \text{ 的倍數}\}$ 。同樣的，拍攝點 $(t_i, t_i) \in S$ 可看見目標點 $\{(c, p_j n) \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ 不是 } p_i \text{ 的倍數}\}$ ，但看不見目標點 $\{(c, p_j n) \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ 是 } p_i \text{ 的倍數}\}$ 。令 $q = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_s$ ，則直線 $x = c$ 上只剩下目標點 $(c, qn), n \in \mathbb{N}$ 不能被拍攝點 $\{(t_1, t_1), (t_2, t_2), \dots, (t_s, t_s)\}$ 所看見，而這些目標點 (c, qn) 可被 y 軸上的拍攝點 $(0, r)$ 所看見，理由是 $\gcd(c, qn - r) = \gcd(c, r) = 1$ ，因此我們證明了 $V(m)$ 為 S -可見。 □

下圖為利用拍攝點 $\{(0, 0), (5, 5)\}$ 去看目標點 $V(3)$ 。

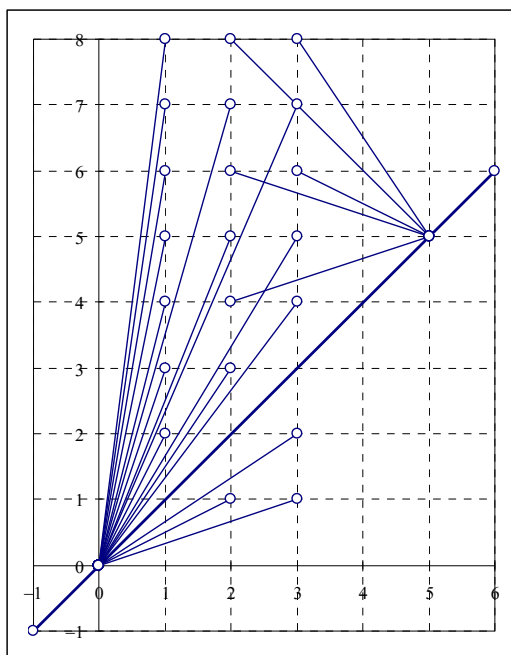


圖 5：由拍攝點 $(0, 0), (5, 5)$ 去看目標點集 $V(3)$ 。

三、結論與展望

結論：

(一) 設 m 為正整數，對於目標點集 $V(m)$ ，拍攝點包含原點並限制在以及 x 軸， y 軸正向的整數點上而且 x 軸上的拍攝點不可以超過 $(m+1, 0)$ ，最小拍攝點數 $\sigma(m)$ 有下列結果：

若 $m = 1$ ，則 $\sigma(m) = 1$ 。

若 $2 \leq m \leq 5$ ，則 $\sigma(m) = 2$ 。

若 $6 \leq m \leq 9$ ，則 $\sigma(m) = 3$ 。

若 $m \geq 10$ ，我們提出 $F(m)$ -覆蓋的想法去建構 x 軸上的拍攝點，得到 $\sigma(m)$ 好的上界 $\kappa(m) + 2$ ，其中 $\kappa(m)$ 是最小 $F(m)$ -覆蓋點數，我們也認為 $\kappa(m) + 2$ 不會超過 m 以內的質數個數 $\pi(m)$ 。

(二) 增加第四象限的目標點數不會造成最小拍攝點數增加。

(三) 若拍攝點在第一、二、三和第四象限，則只需 $2\kappa(m) + 2$ 個拍攝點。

(四) 對於目標點集 $V(m)$ ，拍攝點包含原點並限制在直線 $y = x$ 以及 y 軸正向的整數點上，則只需 $\kappa(m) + 2$ 個拍攝點。

展望：

(一) 由於 $\kappa(m)$ 是從許多 $F(m)$ -覆蓋中找出最小覆蓋的點數，我們嘗試找一個好的估計，例如 π 函數。

(二) 我們可以試著推廣到三度空間，對於空間中的原點可見的目標點有類似引理 1 的性質，以原點 $(0, 0, 0)$ 為拍攝點，觀察目標點 $C(x, y, z)$ ，則 C 點

為 $(0, 0, 0)$ -可見若且唯若 $\gcd(x, y, z)=1$ 。另外，空間中的可見點仍然保有平面可見點的性質，即在平面上，原點可見的目標點 (x, y) 其 x, y 座標互質，那麼即使到了高維度空間，只要該點的 x, y 座標互質，無論其他軸向的坐標為何，該點即可被原點看到。

(三) 我們找觀測點方式分成許多小細節和步驟，因此我們將步驟與限制輸入電腦運作時會有書寫程式和運作上的問題。

(四) 希望後來可以將它簡化或者有另一套更快更準的找法出現，以至於可以利用電腦程式幫助找出之後的結果，進一步可以去發現拍攝點和 m 的大小之間的關係。

(五) 進一步嘗試拍攝點不限制在 x 軸， y 軸或直線 $y=x$ 上，而以其他點作為拍攝點，希望可以發展出拍攝點擺放在特殊的直線或曲線上，做出相關的成果。

參考文獻

- [1] S. D. Adhikari, Y.-G. Chen, On a question regarding visibility of lattice points III, *Discrete Mathematics*, 259 (2002) 251- 256.
- [2] S. D. Adhikari, A. Granville, Visibility in the plane, *Journal of Number Theory*, 129 (2009) 2335-2345.
- [3] J. Laison, M. Schick, Seeing Dots: Visibility of Latice Points, *Mathematic Magazine*, Vol. 80, No. 4, October (2007) 274-282.
- [4] Lu Zong Wan(2009), Visibility of Lattice Points, Taiwan International Science Fair. (2009)

評語

本作品討論最少拍攝點的問題，藉由控制 x 軸寬度 m 這一個變數，作者成功找出一些因數關係的性質去解決這個問題。其中 W_i 衍生型的分析是最關鍵成功的一個步驟。最後結論還可以推廣到多維度，所以成果算是相當豐碩。然而統計迴歸分析部分，立論仍有商確性(比如，為何採用線性迴歸)，是需要改進之處。