

2012 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

編號：010001

作品名稱

給我三個點 來畫平行多邊形

得獎獎項

大會獎：四等獎

作者姓名：蘇智彥

就讀學校：國立彰化高級中學

指導教師：蔡其南

關鍵字：軸對稱、遞迴、線性組合

作者簡介



我是蘇智彥，目前就讀國立彰化高中數理資優班三年級。平常喜歡研究數學和算數學題目。

平常我利用專題課的時間進行研究，在研究中我學會了許多數學軟體的應用和許多研究所需的基本知識。隨著時間的推移，研究也有了一些成果。希望能透過這次的參賽，能夠學習更多的數學知識，並且將我的研究分享給所有愛數學的大眾。

給我三個點，來畫平行多邊形

摘要

任意給定不共線相異三點 A_1 、 A_2 、 A_3 ，想要利用邊與其對應對角線平行的方式依序作得 A_4 、 A_5 、 $\dots$ 、 A_m ，並且再作 A_{m+1} 、 A_{m+2} 、 A_{m+3} 重合於三點 A_1 、 A_2 、 A_3 ，這是一件不簡單的事！我們把這樣的多邊形稱之為平行多邊形。

為了方便探討，首先固定邊與其對應對角線長度比值固定為 $\frac{1}{t}$ ，在複數平面上，寫成遞迴式 $z_{n+3}-z_n=t(z_{n+2}-z_{n+1})$ ，可求得 $z_n=p\alpha^n+q\beta^n+s$ ，以此可以作出任意平行 m 邊形，並證明平行 m 邊形會內接於一橢圓或圓。

其次，探討邊與其對應對角線長度比值不為定值的平行 m 邊形。我們求得圓

內接平行 m 邊形，邊與其對應對角線長度比值：若 m 為偶數，則比值為 $\frac{1-\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}{1+\cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}$

及 $\frac{\cot\alpha}{\sin\frac{4\pi}{m}-\cos\frac{4\pi}{m}\cot\alpha}$ ；若 m 為奇數，則只有 $2\cos\frac{2k\pi}{m}+1$ 一種比例。接著將任意給定

的三點對直線作伸縮變換成特定的共圓狀態，作出圓內接平行 m 邊形的 m 個頂點，再反變換回平行 m 邊形。

對於順序三點已有解決方式，我們再利用線性組合的性質，使任意三點只要給定邊數、不共線三點之序數及其值，便可以利用 $z_n=p\beta^n+q\overline{\beta}^n+s$ 和 $z_n=p\beta^{kn}\alpha^m+q\overline{\beta}^{kn}\overline{\alpha}^m+s$ 兩式分別求出等比例和不等比例的平行多邊形。

最後，探討橢圓內接面積最大的 m 邊形必為邊與其對應對角線長度比值固定的平行 m 邊形。

Parallel m side polygon

Abstract

When we get three non-collinear and dissimilar points A_1, A_2, A_3 , we want to take advantage of the diagonal line which parallels its corresponding side to draw the point named A_4 , and draw the points $A_5, A_6, \dots, A_m$ according to the order by the same way. Next we try to let three points $A_{m+1}, A_{m+2}, A_{m+3}$ coincide in the three points A_1, A_2, A_3 separately. This isn't a simple task! We call it parallel m side polygon.

In order to discuss easily, first we hypothesis that the ratio between each side length and the corresponding diagonal line length is $\frac{1}{t}$, then we find out the three points on the plural coordinates. And we discuss the characteristic equation $z_{n+3} - z_n = t(z_{n+2} - z_{n+1})$. We can obtain the general formula $z_n = p\alpha^n + q\beta^n + s$. We can find out all the apexes of the parallel m side polygon and all parallel m side polygons are inscribed in an oval or circle.

Secondly, we discuss the parallel m side polygon which the ratio between each side length and the corresponding diagonal line length is variable. We calculate its

ratios when it is inscribed in a circle. When m is even, the ratios are $\frac{1 - \cot \frac{2\pi}{m} \cot \alpha}{1 + \cot \frac{2\pi}{m} \cot \alpha}$ and

$\frac{\cot \alpha}{\sin \frac{4\pi}{m} - \cos \frac{4\pi}{m} \cot \alpha}$ which appear alternately. Relatively, when m is odd, the parallel m

side polygon just has only one ratio: $2\cos \frac{2k\pi}{m} + 1$.

Finally, we let three non-collinear and dissimilar points convert into special circular state by linear expansion. Then we can make a parallel m side polygon which was inscribed the circle and transform back to the parallel m side polygon.

We have the solutions for getting the parallel m side polygon under the conditions of giving three serial points. We use the feature of the linear combination. Giving the ordinal and value of three points, we can use the general formula $z_n = p\beta^n + q\overline{\beta}^n + s$ (for

the radio is invariable) and $z_n = p\beta^{kn}\alpha^{tn} + q\overline{\beta}^{kn}\overline{\alpha}^{tn} + s$ (for the radio is variable) to get the other points and the parallel m side polygon.

壹、研究動機

校內數學學科能力競試遴選出了一道題目：「凸五邊形 $ABCDE$ ，已知 $a\Delta ABC = a\Delta BCD = a\Delta CDE = a\Delta DEA = a\Delta EAB = 400$ ，求凸五邊形 $ABCDE$ 的面積？」一看到「兩三角形面積相等」自然要聯想到同底等高，必須作出：每一邊相鄰的兩頂點所連對角線與該邊皆能夠平行的五邊形方能符合題意，雖然解得出面積值，但是卻難以作出圖形，我們對此圖形性質更加感興趣，於是我們便開始著手研究神秘的平行多邊形。第 24 屆全國中小學科學展覽作品「平行五邊形」，有別於其作品，我們應用完全不同的數學方法，更廣泛地處理了平行多邊形的相關性質。

貳、研究目的

任意給定三個不共直線的相異點，以此三點為相鄰三頂點並以平行的方式依序完成其他頂點，如何得到此種平行多邊形？以下是研究目的：

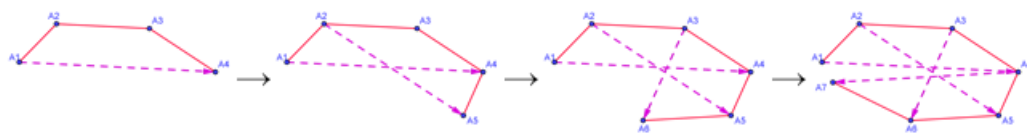
- 一、邊與其對應對角線長度比例為定值的平行多邊形。
- 二、邊與其對應對角線長度比例不為定值的平行多邊形。
- 三、橢圓內接面積最大的 m 邊形必為邊與其對應對角線長度比值固定的平行 m 邊形。

參、研究設備及器材

- 一、筆、紙、尺、立可白
- 二、Word、Excel、Geogebra、The Geometer's Sketchpad

肆、研究方法及過程

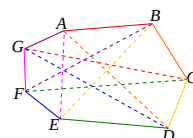
「凸五邊形 $ABCDE$ ，已知 $a\Delta ABC = a\Delta BCD = a\Delta CDE = a\Delta DEA = a\Delta EAB = 400$ ，求凸五邊形 $ABCDE$ 的面積？」問題中，我們注意到：滿足條件的五邊形和**正五邊形**同樣具有黃金比的性質，再經過一番測試，所有邊與其對應對角線長度比例亦相等，這是給定三點而能夠作出平行多邊形的重要啟發！**以平行方式製作平行多邊形不是一件容易的工作**，比如：給定三點 A_1 、 A_2 、 A_3 ，想要作出平行七邊形，參考下圖，利用平行的方式依序作得 A_4 、 A_5 、...、 A_7 ，但是接下來的 A_8 、 A_9 、 A_{10} 卻不會重合回到 A_1 、 A_2 、 A_3 ，所以無法作出平行七邊形。找出邊與其對應對角線長度比例是首要工作！



一、邊與其對應對角線長度比例為定值的平行多邊形

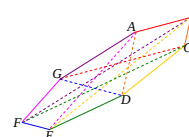
(一)定義

1. 邊的對應對角線 多邊形的邊相鄰的兩頂點所連成的對角線。



以上圖為例： $\overline{AB}$ 邊的對應對角線為 $\overline{GC}$ 、 $\overline{BC}$ 邊的對應對角線為 $\overline{AD}$ 、……以此類推

2. 平行多邊形的意義 每一邊與其對應對角線皆平行的多邊形。



以上圖平行七邊形 $ABCDEFG$ 為例： $\overline{AB} \parallel \overline{GC}$ 、 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ 、……以此類推

(二)邊與其對應對角線長度比值

把頂點化為高斯平面上的複數，依順序定為 $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$ ，可得三階齊次遞迴 $z_{n+3} - z_n = t(z_{n+2} - z_{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ，進而求出此定值 t ，並研究所構成平行多邊形的性質。

定理一 設 z_1, z_2, z_3 為複數平面上不共線相異三點， $z_{n+3} - z_n = t(z_{n+2} - z_{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, t 為正實數。若 $m \in \mathbb{N}$, $z_{m+1} = z_1, z_{m+2} = z_2, z_{m+3} = z_3$ ，則 $t = 2\cos\frac{2k\pi}{m} + 1$, $0 < k < \frac{m}{3}$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 。

(三)點的共橢圓與順序問題

上例中，點似乎在同一個橢圓上，但是 $k=2$ 或 3 時似乎無法依序連接出平行十一邊形。如果將 11 個點先全部作出來之後，再依照鄰近的點連接仍能得到平行十一邊形。

定理二 設 $z_n = p\beta^n + q\overline{\beta}^n + s$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq m$ ，其中 $\beta = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$, $0 < k < \frac{m}{3}$ 且 $k \in \mathbb{N}$ ，則

- (1) z_n 必落在以 s 為中心的橢圓或圓上；
- (2) $k=1$ 時， $z_1, z_2, \dots, z_m$ 依序連接起來形成平行 m 邊形；
- (3) $k \neq 1$ 時， $z_1, z_2, \dots, z_m$ 依序連接起來無法成為平行 m 邊形。

(四)線性組合 $p\beta^n + q\overline{\beta}^n$ 的圖形

圖中的 $s=0$, p, q 定值且分別以 $\beta = \cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}$, $\overline{\beta} = \cos\frac{2\pi}{9} - i\sin\frac{2\pi}{9}$ 旋轉， $B_1 = p\beta, B_2 = p\beta^2, \dots, C_2 = q\overline{\beta}, C_2 = q\overline{\beta}^2, \dots$ ，各旋轉結果相加為 $A_1, A_2, \dots$ ，為平行九邊形各頂點之座標。

兩圓代表 p 和 q 以 $0 \leq \theta < 2\pi$ 的旋轉結果，分別相加結果即為橢圓並形成平行九邊形。

二、邊與其對應對角線長度比例不為定值的平行多邊形

(一)圓的內接平行多邊形 圓的內接平行多邊形的邊與其對應對角線長度比值如下。

定理三 圓心為 O 點的圓內接平行 m 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_m$ ，設 $\angle A_1A_2O = \alpha$ ($\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{m} < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

(1)若 m 為偶數，則邊與其對應對角線長度比值為 $\frac{1 - \cot \frac{2\pi}{m} \cot \alpha}{1 + \cot \frac{2\pi}{m} \cot \alpha}$ 及

$\frac{\cot \alpha}{\sin \frac{4\pi}{m} - \cos \frac{4\pi}{m} \cot \alpha}$ 順序輪替；

(2)若 m 為奇數，則圓內接平行 m 邊形必為圓內接正 m 邊形，其邊與其對應對角線長度比值為 $\frac{1}{2 \cos \frac{2\pi}{m} + 1}$ 。

(二)給定三點對軸的伸縮

例 給三點 A_1 、 A_2 、 A_3 欲作一平行十邊形，先將 A_1 、 A_2 、 A_3 三點對直線

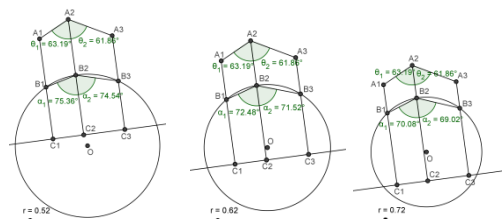
L 伸縮 r 倍變換成 B_1 、 B_2 、 B_3 共圓，設圓心為 O ，必須滿足 $\angle B_1OB_3 = \frac{4\pi}{10}$ ，

也就是 $\angle B_1B_2B_3 = 144^\circ$ ，若固定直線 L 調整 r 值： $r = 0.52$ 、 0.72 時， $\angle B_1B_2B_3 \neq 144^\circ$ 不能作一圓內接平行十邊形

$B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_9B_{10}$ ， $r = 0.62$ 時，

$\angle B_1B_2B_3 = 144^\circ$ 方能作一圓內接平

行十邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_9B_{10}$ ，



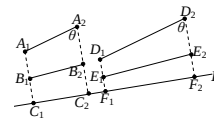
再變換回平行多邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$ 。

定義幾何變換 $P_L^r: A$ 點對直線 L 作投影點 C ，若 $\overrightarrow{BC} = r\overrightarrow{AC}$ ，則定義變換 P_L^r

$(A) = B$ 。比如： $r = \frac{1}{3}$ 時，

定理四 設平面坐標系上兩點 A_1, A_2 ， L 為不過 A_1, A_2 的一直線， L 亦不垂直 $\overline{A_1A_2}$ 。若 A_1, A_2 分別對直線 L 作投影點得 C_1, C_2 ，且 $P_L^r(A_1) = B_1$ 、 $P_L^r(A_2) = B_2$ ，其中 r 為一正實數。設 $\angle A_1A_2C_2 = \theta$ 、 $\angle B_1B_2C_2 = \alpha$ ，試證：(1) $\cot \alpha = r \cot \theta$ ；(2) $\overline{B_1B_2}^2 = (1-r^2) \overline{C_1C_2}^2 + r^2 \overline{A_1A_2}^2$ ；(3) 若 $L' \parallel L$ 且 L' 亦不過 A_1, A_2 ，則性質(1)、(2)不變。

定理五 試證幾何變換 P_L^r ，(1)保平行；(2)保平行線段比例；(3)一對一變換

且反函數為 $P_L^{\frac{1}{r}}$ 。

定理六 任意給定三點 A_1, A_2, A_3 ，試證：若 $0 < \varphi < \frac{4\pi}{m} (m \geq 4, m \in \mathbb{N})$ ，則存

在一直線 L 及一正實數 r 使得 $\begin{cases} B_1 = P_L^r(A_1) \\ B_2 = P_L^r(A_2) \\ B_3 = P_L^r(A_3) \end{cases}$ 共圓的圓心為 O 時，滿足

① $\angle B_1OB_3 = \frac{4\pi}{m}$ ；② $\angle B_1OB_2 = \varphi$ 。

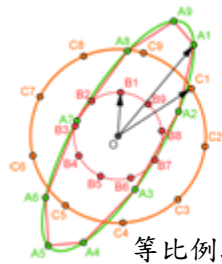
(三)任意給定不共線相異三點作平行 m 邊形 給定三點作平行十邊形，

$$\alpha = 80^\circ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{m} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 的 } \alpha \text{ 值皆可} \right) \Rightarrow \frac{1 + \cot \frac{2\pi}{m} \cot \alpha}{1 - \cot \frac{2\pi}{m} \cot \alpha} = 1.640938 \text{ 及}$$

$$\frac{\sin \frac{4\pi}{m} - \cos \frac{4\pi}{m} \cot \alpha}{\cot \alpha} = 5.084685 \text{ 為比例分別作平行的對角線。}$$

(四)任意給定不相鄰且不共線三點，作出等比例和不等比例的平行多邊形建構
流程

利用一般式 $z_n = p\beta^n + q\overline{\beta}^n + s$ (等比例) 或 $z_n = p\beta^{kn}\alpha^{tn} + q\overline{\beta}^{kn}\overline{\alpha}^{tn} + s$ (不等比例). 帶入三點序數 n 及其點之值 z_n ，求 p 、 q 、 s 。再將 $n=1,2,3,\dots,n$ 帶入一般式即可得到平行多邊形。用線性組合可看出可得出如下面之圖形：



等比例線性組合



不等比例線性組合

三、橢圓內接面積最大的 m 邊形必為邊與其對應對角線長度比值固定的平行 m 邊形

伍、研究結果與討論

一、邊與其對應對角線長度比例為定值的平行多邊形

平行多邊形頂點依序為 $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m \Rightarrow z_{n+3} - z_n = t(z_{n+2} - z_{n+1}), \forall n \in N$

$$\Rightarrow t = 2\cos\frac{2k\pi}{m} + 1, 0 < k < \frac{m}{3} \text{ 且 } k \in N。$$

(一) 點的共橢圓與順序問題 對上述定值 $t = 2\cos\frac{2k\pi}{m} + 1$

1. $\forall n \in N, 1 \leq n \leq m, z_n$ 必落在以 s 為中心的橢圓或圓上；
2. $k=1$ 時， $z_1, z_2, \dots, z_m$ 依序連接起來形成平行 m 邊形；
3. $k \neq 1$ 時， $z_1, z_2, \dots, z_m$ 依序連接起來無法成為平行 m 邊形。

(二) 線性組合 $p\beta^n + q\overline{\beta}^n$ 的圖形

二、邊與其對應對角線長度比例不為定值的平行多邊形

(一) 圓的內接平行 m 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_m$ 圓心為 O 點，設 $\angle A_1A_2O = \alpha (\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{m} <$

$$\alpha < \frac{\pi}{2})$$

1. m 為偶數，則邊與其對應對角線長度比值為 $\frac{1 - \cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}{1 + \cot\frac{2\pi}{m}\cot\alpha}$ 及

$$\frac{\cot\alpha}{\sin\frac{4\pi}{m} - \cos\frac{4\pi}{m}\cot\alpha} \text{ 順序輪替；}$$

2. m 為奇數，則圓內接平行 m 邊形必為圓內接正 m 邊形，其邊與其對

$$\text{應對角線長度比值為 } \frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{m} + 1}。$$

(二)給定三點對軸的伸縮

1.幾何變換 P_L^r 具有①保平行；②保平行線段比例；③一對一變換且反函數為 $P_L^{\frac{1}{r}}$ 。

2.對任意不共線相異三點 A_1 、 A_2 、 A_3 且任意角度 φ 滿足 $0 < \varphi < \frac{4\pi}{m}$ ，必存在一直線 L 及一正實數 r 使得 P_L^r 變換成的 B_1 、 B_2 、 B_3 共圓的圓心為 O 時， $\angle B_1OB_3 = \frac{4\pi}{m}$ 、 $\angle B_1OB_2 = \varphi$ ，如此一來，任何比值的圓內接平行 m 邊形都有其對應的變換 P_L^r 。

(三)任意給定不共線相異三點作平行 m 邊形

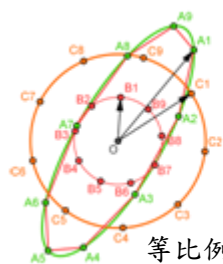
任意給定不共線相異三點 A_1 、 A_2 、 A_3 作平行 m 邊形，可給定 α 值滿足 $\frac{\pi}{2} -$

$\frac{2\pi}{m} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 利用 $\frac{1 + \cot \frac{2\pi}{m} \cot \alpha}{1 - \cot \frac{2\pi}{m} \cot \alpha}$ 及 $\frac{\sin \frac{4\pi}{m} - \cos \frac{4\pi}{m} \cot \alpha}{\cot \alpha}$ 為比例分別作平行的

對角線。

(四)任意給定不相鄰且不共線三點，作出等比例和不等比例的平行多邊形建構流程

利用一般式 $z_n = p\beta^n + q\overline{\beta}^n + s$ (等比例) 或 $z_n = p\beta^{kn}\alpha^{tn} + q\overline{\beta}^{kn}\overline{\alpha}^{tn} + s$ (不等比例). 帶入三點序數 n 及其點之值 z_n ，求 p 、 q 、 s 。再將 $n=1,2,3,\dots,n$ 帶入一般式即可得到平行多邊形。用線性組合可看出如下面之圖形：



等比例線性組合



不等比例線性組合

三、橢圓內接面積最大的 m 邊形必為邊與其對應對角線長度比值固定的平行 m 邊形

利用幾何變換 P_L^r 簡單地證明：橢圓內接面積最大的 m 邊形必為邊與其對應對角線長度比值固定的平行 m 邊形。

陸、結論與應用

我們已經發現了等比例和不等比例的平行多邊形，並利用幾何變換證明平行 m 邊形只有此兩種情形，並得證橢圓內接面積最大的 m 邊形必為邊與其對應對角線長度比值固定的平行 m 邊形，相信對於橢圓相關的應用有極大幫助；再者，軸對稱變換 P_L^r 雖然不是一個困難的幾何變換，但是它的保平行、保平行線段比例的性質也應有廣泛的應用價值。未來希望能朝向立體空間發展，對於多面體做平行或邊角錐體積相等相關的研究。

柒、參考文獻

陳勇至、吳學晃、吳鴻基、洪宇德。平行五邊形。國立臺灣科學教育館第二十四屆全國中小學科學展覽高中組數學科第二名。

鄭元博。滿足 $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{MP_i} = \overrightarrow{0}$ 之 M 點是否為重心之探索。國立臺灣科學教育館 2003 年臺灣國際科展高中組數學科。

評語

作者利用解析的技巧，將頂點利用複數表示，透過求解遞迴數列，得出平行多邊形的必要條件，這一部分的分析是創新的。然而，這個作品有幾個需要改進的地方：(i)所得的點位於橢圓上，必須先透過合理的先期試驗和觀察，不宜貿然假設後求證。(ii)所得的 k 值，並無法全部用於作出平行多邊形，代表“定理一”還有很大的改進空間(數學上的講法是定理一不夠強)。應該想辦法獲得更精細的結果，將那些無法畫出平行多邊形的 k 值去掉。