

2011 年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

編號：140025

作品名稱

水漂的物理現象之研究

得獎獎項

三等獎

斯洛伐克正選代表:2011 年斯洛伐克國際科學博覽會

作者姓名：蔡卓忻、林昱安、施中右

就讀學校：國立彰化高級中學

指導教師：賴維銘

關鍵字：水漂、升力、彈跳

作者簡介



Hello^^大家好!我叫作蔡卓忻，目前就讀於彰化高中二年級數理資優班。從小對於科學研究這條的熱愛和好奇心，鼓勵我勇往直前，在浩瀚的學海裡盡情的探索。廣泛閱讀科普文章讓我得以不斷吸收新知，積累知識。透過深度的思考和評論，培養主動積極的精神。平凡的外表下蘊藏一顆多愁善感的心，偶爾會沉浸在自己的小小世界中，享受片刻的寂靜和平和，自在的舞著夢想的翼……

在進步的世界中，發揮作用的不是我們的才能，

而是我們如何運用才能。

-布雷斯福德·羅伯遜-



我是林昱安，目前就讀於彰化高中二年級數理資優班，是個興趣廣泛的高中生。在課餘時間，我會和同學去打網球，或參加學校管樂社的團練，吹奏單簧管。另外，我也樂於接受挑戰，對校外競賽多有所參與。

從小父母就會培養我對自然科學的興趣。從國小開始就曾參與科學展覽，雖然不見得每次都能有好成績，但仍樂在其中。上高中後有幸能與一群志同道合的同學一起做科展，雖花了許多時間及精力，但收穫良多，並一起完成了這份報告。



大家好，我是施中右，就讀於國立彰化高中。平常就喜歡研究一些東西，這次也很高興有機會能參加國際科展，希望能有機會和大家多多交流。我的興趣是看小說、打球、看動畫等等。最有興趣的科目...不用說，當然是物理啦。上了高中後，開始對這個科目有興趣，希望大學有機會能讀相關的科系，能有機會進一步去學習及研究。

水漂的物理現象之研究

Investigation of the Physics on Skipping-Stone

摘要

本研究主要探討水漂彈跳的物理現象，在研究中我們以實驗配合理論，藉由分析不同變因的影響，找出水漂彈跳的最佳模式。在實驗中，我們自行設計並改良發射器，並改變水漂發射的各項變因：包含初速、轉速、及發射仰角，另外也針對不同錐度的水漂進行實驗。同時，自行開發近景攝影及相片分析的技術，以進行測量及分析。

我們由實驗得知水漂在擁有較大的初速及轉速時，可有較大的彈跳次數。另外，在相同速度時，發射仰角越靠近 20 度~25 度之間越容易彈跳，且有最低的最低彈跳速率。此外，我們發現使用錐度 5 度的錐形水漂時可增加彈跳次數，並會產生明顯的滑行現象。

在理論分析中，我們針對水漂與水面接觸瞬間的受力進行探究，並根據實驗發展出一套在給訂初始條件時可推算出彈跳次數的方法，適用於我們所用的水漂。

Investigation of the Physics on Skipping-Stone

Abstract

This research mainly investigates the various factors that influence the rebound of skipping-stone. We have carried out experiments in combination with theoretical analyses; the best pattern for the skipping-stone is concluded. In our experiment, we have designed and improved a launcher for the purpose of changing the skipping-stone's launching velocity, angular speed and the angle of elevation. In addition, we also use different-shaped skipping-stones that have different tapered edges. At the same time, we figured out a technique on processing near field images of skipping-stone for data analysis.

Through lots of experiments we did, we find that the skipping-stone which has higher velocity and spinning speed bounces much more times. In addition, among the stones that have the same velocity, it reveals that they are more likely to rebound if the angle of elevation is between $20^{\circ}\sim 25^{\circ}$; also they have the least velocity to bounce. Specially, we've observed the five-degree-taper skipping-stone would demonstrate more bounces and would skim over the water face at the last period of its flight.

In the theoretical part, we analyze the forces that the skipping-stone encounters at the moment it touches the water surface. Based on the experimental data, we develop a method to estimate the maximum number of bounces when given the initial condition, which is suitable for all skipping-stones we used.

名詞解釋

彈跳次數：水漂脫離水面為一次，最後沉入水中的那一次不算

α 角：水漂面與水面的夾角(同時也會是發射仰角 α 角)

β 角：水漂入水時速度與水平面的夾角

θ 角：水漂離水時速度與水平面的夾角

s ：水漂與水接觸的面積

z ：水漂在水面下的高度

x_i ：彈跳前飛行距離

x_f ：彈跳後的飛行距離

v_0 ：水漂發射初速

v_i ：水漂入水速度

v_f ：水漂離水速度

v_{\min} (最低臨界速率)：能讓水漂彈起所需的最低速度。

動能衰減值：與水接觸後水漂所損失的動能

錐度：水漂高(頂點到底面的距離)除以底面半徑的反正切值

一、 研究動機：

「咻！咻！咻！」，手中的小石子在水面上輕盈的彈跳著，拂過水面，宛若和水跳起一首 Waltz，平靜無痕的水面頓時激起陣陣漣漪。打水漂是一項常見的小遊戲，令人驚奇連連的是看似堅硬笨重的石頭，在某些特定的情形下竟然可以在水面上飛舞。驚嘆之餘我們也不禁好奇：究竟為什麼會這樣呢？

透過網路搜尋與水漂相關的文獻後，我們發現打水漂不僅是小時候玩的遊戲而已。水漂的物理現象不但對太空船返回大氣層的軌跡有重大影響，還會在地面積水時造成車輛打滑。同時，我們也聯想到水漂的物理現象在滑航型快艇上的應用。

二、 研究目的

本研究希望藉由水漂現象的變因控制與改變，探討影響水漂的相關物理現象：

(一) 水漂入水時之受力的觀察與研究

- 1、探討入水速度對受力的影響
- 2、探討水漂發射角度 α 與其受力及彈跳次數關係

(二) 探討水漂發射時的初始條件對水漂現象的影響

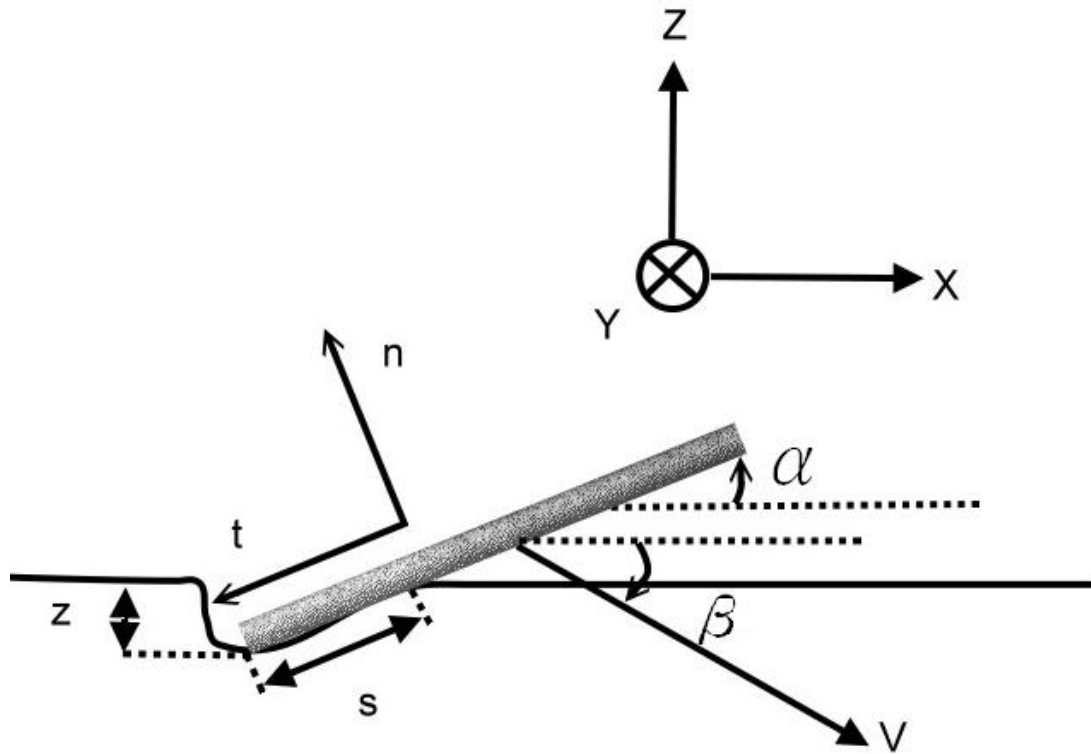
- 1、探討發射初速對水漂現象的影響
- 2、探討發射仰角對水漂現象的影響
- 3、探討發射角速度對水漂現象的影響

(三) 探討錐狀水漂對水漂現象的影響

- 1、探討不同錐度之水漂對水漂現象的影響

三、 理論研究

我們分析水漂在水面上的受力情形，畫出下方的受力圖，如圖一所示：



圖一：水漂受力圖

上圖中， α 為水漂面與水面的夾角； β 為水漂入水時速度與水平面的夾角； s 為水漂與水接觸的面積； z 為水漂在水面下的高度。

當水漂掠過水面時，水漂和水面產生接觸，使水漂和水漂下方的水產生相對速度，進而產生壓力差。此壓力差給予水漂法線方向的升力。同時，水漂也會受到水面上的阻力(切線方向)的影響。此阻力包括水的黏滯阻力和形狀阻力。在本實驗中，由於雷諾數很大，我們不考慮黏滯阻力產生的影響(高雷諾數時，黏滯力的影響遠不及壓力)。

一般而言，沉體前後的壓差在流動方向產生的形狀阻力（壓力阻力）的關係，常以無因次(Dimensionless)的壓力阻力係數 C_D 表示為 $C_D = \frac{f_D/s}{\rho v^2/2}$ ， f_D 為形狀阻力， s 為面積， ρ 是水的密度， v 是水漂的速度。經過移項可得 $f_D = \frac{1}{2}\rho v^2 s C_D$ 。

而水造成的升力亦可用無因次的升力係數 C_L 表示為 $C_L = \frac{f_L/s}{\rho v^2/2}$ ， f_L 為升力， s 為面積， ρ 是水的密度， v 是水漂的速度。經過移項可得 $f_L = \frac{1}{2}\rho v^2 s C_L$ 。

f_D 的方向為沿著水漂表面(即沿著方向 t)； f_L 的方向垂直水漂表面(即沿著方向 n)。因此水對水漂的力 F 可以寫成 $F = \frac{1}{2}\rho v^2 s C_D \hat{t} + \frac{1}{2}\rho v^2 s C_L \hat{n}$ ，加上所受的重力於 x 以及 z 方向可得：

$$M \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2}\rho v^2 s (C_L \sin(\alpha) + C_D \cos(\alpha))$$

$$M \frac{dv_z}{dt} = -Mg + \frac{1}{2}\rho v^2 s (C_L \cos(\alpha) - C_D \sin(\alpha))$$

為了簡化計算，在 α 角和 β 角很小的情況可以作幾個近似假設：

(1)小角度時，速度衰減較小，而相較於水平 (x 方向) 的速度，鉛直方向 (z 方向) 的速度可忽略不計。因此可有 $v^2 = v_x^2 + v_z^2 \simeq v_{x0}^2 + v_{z0}^2 \simeq v_{x0}^2$ 即過程中的速度近似於入水水平初速。

(2)水漂與水面接觸的過程中在小角度時，變化量極小，故在這裡將 α 視為定值。也因此 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 可視為定值。故我們可假設

$$C = C_L \cos(\alpha) - C_D \sin(\alpha) = \text{定值}$$

基於以上的假設，可以進一步簡化為

$$M \frac{dv_z}{dt} = -Mg + \frac{1}{2}\rho v_{y_0}^2 s C$$

四、 研究器材

(一) 測量裝置

1、高速攝影機(CASIO EXILM EX-F1)(每秒可拍六十張)

2、捲尺

3、六角扳手

4、螺絲起子

(二) 電腦軟體

1、Google Sketchup 7

2、Maple 14

3、GIMP 2.6.8

4、Microsoft Office Word 2007、Microsoft Office Excel 2007

6、OpenOffice.org

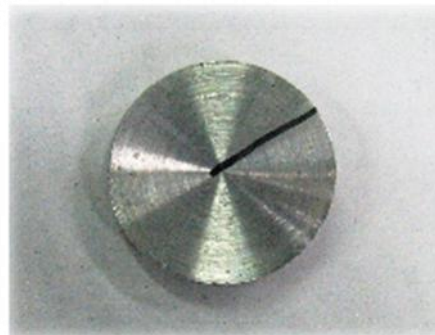
(三) 平板水漂(表面平整)

半徑：2.00cm

厚度：0.40cm

質量：14.10gw

材質：鋁



圖二:水漂俯視圖

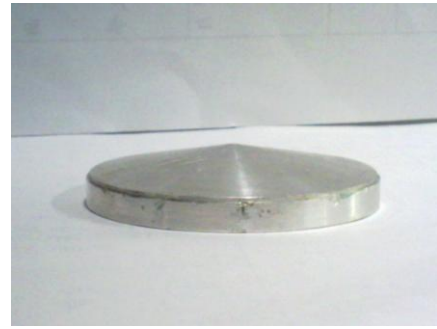
(四) 錐度水漂(具有錐度)

半徑：2.00cm

厚度：0.40cm

質量：15.50gw

材質：鋁



圖三:錐度五度的水漂

(五) 水漂發射器(1)

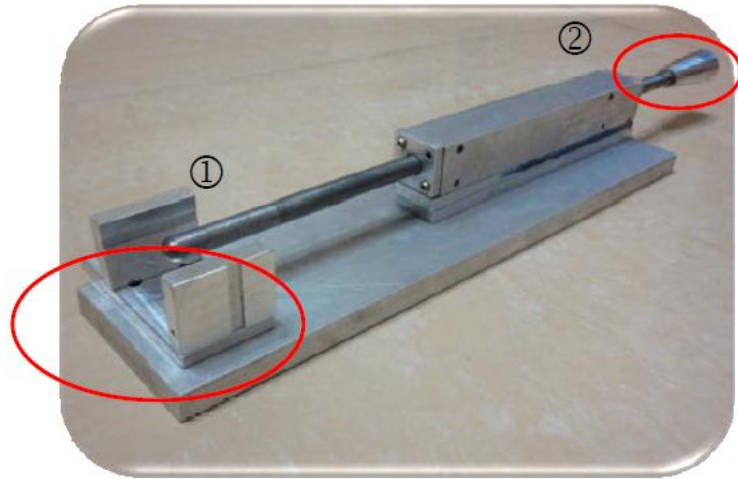
用手將橡皮筋一端扣住鐵片，再後往後拉至推桿上，藉由改變橡皮筋的伸長量可控制鬆手後水漂的飛行速度。在一開始我們使用十元硬幣，針對水漂入水時所受到的平均力作探討時，便是採用此發射器。此發射器只能控制水漂的水平速度，無法擴展至角速度，因此我們便設計了第二代發射器。



圖四:發射器正視圖

(六) 水漂發射器(2)

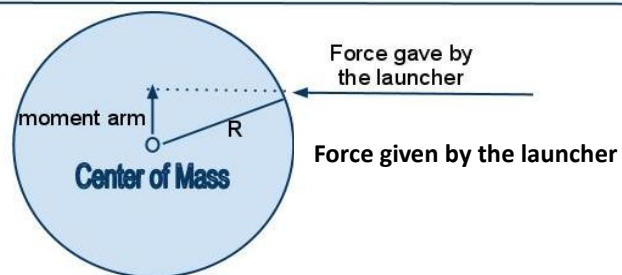
- 1.前端載座：放置水漂，可調整左右的刻度，改變水漂所受力矩
- 2.拉桿：藉由調整拉的刻度調整施力大小



圖五:第二代發射器側視圖

3.原理：

前端載座(①)可調整左右刻度，藉以讓拉桿(②)撞擊水漂時對其質心所產生的力矩作用，使得水漂產生角速度。如下圖



圖六:發射器所給予水漂之力矩圖示

五、 實驗過程與方法

(一) 水漂入水時之受力的觀察與研究

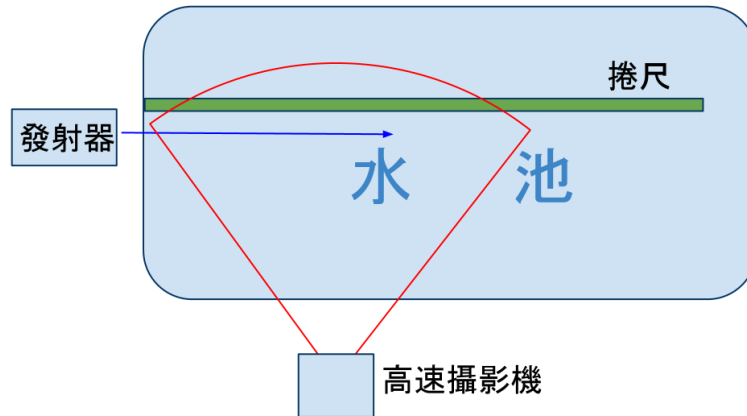
實驗 1-1 水漂入水時所受之平均力與速度的關係之探討

- 1.在水池旁架設發射器、捲尺和高速攝影機，並固定發射角度 $\alpha=15$ 度。
- 2.以橡皮筋拉動推桿後放開，發射水漂。並同時按下攝影機快門拍攝其飛行情形，以捲尺測量水漂每次彈跳的飛行距離。
- 3.重複步驟二，並取其發射成功者。
- 4.由高速攝影機的影格數求出水漂與水的接觸時間。
- 5.代入公式分別求出初速與水漂所受的力的大小並作圖，分析結果。

實驗 1-2 水漂發射角度 α 與其受力及彈跳次數關係

- 1.在水池旁架設發射器、捲尺和高速攝影機，並固定發射角度 $\alpha=15$ 度。
- 2.以橡皮筋拉動推桿後放開，發射水漂。並同時按下攝影機快門拍攝其飛行情形，以捲尺測量水漂每次彈跳的飛行距離。
- 3.重複步驟二，並取其發射成功者。
- 4.改變步驟一的水漂發射角度 α ，重複步驟二、三。
- 5.由水漂彈跳的照片(高速攝影機的影格數)中求出水漂與水的接觸時間。
- 6.代入公式分別求出初速與水漂所受的力的大小，進而求出與彈跳次數的關係並作圖，分析其結果。

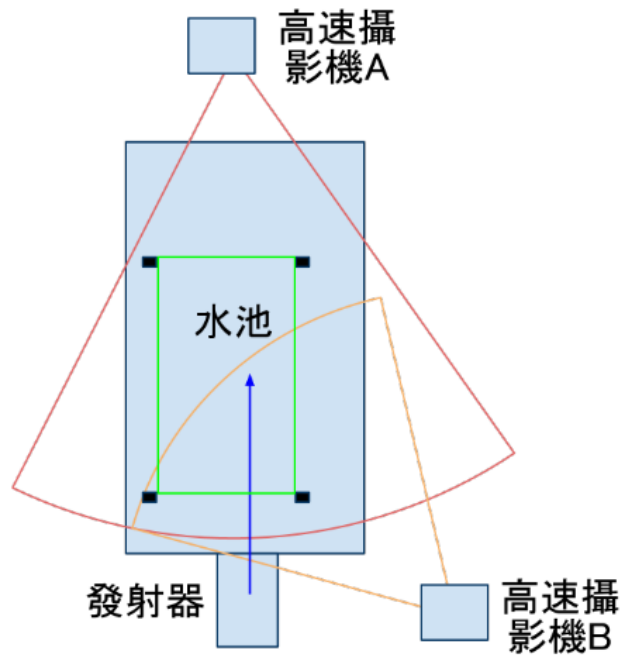
實驗配置圖



圖七：實驗俯視圖

(二) 探討水漂發射時的初始條件對水漂現象的影響

實驗配置

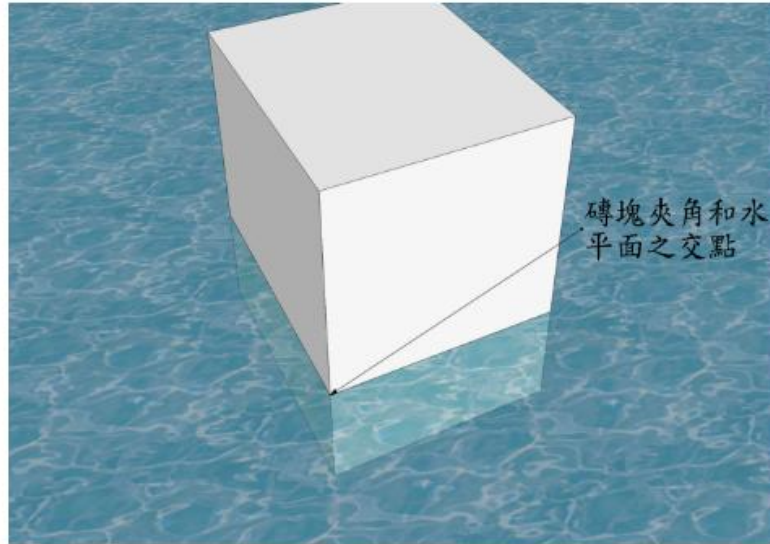


實驗配置圖

圖八：實驗俯視圖

1. 紅色及橘色扇形，分別表示高速攝影機的視野

- 2.藍色箭頭方向為發射向水池發射水漂的方向
- 3.水池中的黑色方塊為磚塊，用來做座標定位的參考點
- 4.磚塊夾角和水平面之交點，定出的四個座標點，構成綠色長方形的四角



圖九:座標定位解說圖

高速攝影機之攝影照片處理步驟

- 1.在水漂的一面以麥克筆做一道標記如圖二。
- 2.使用發射器向水池發射水漂(沿圖八中藍色箭頭方向)。
- 3.利用高速攝影機 A 及高速攝影機 B 紀錄水漂在水面彈跳的過程。從高速攝影機 A 的照片中，選出拍攝到水漂與水面接觸畫面的照片，並標示出水漂在水面的落點分布，以 GIMP 軟體進行疊圖，使之疊合為一張照片。
- 4.使用軟體 Google Sketchup 媒合照片至 3D 模型中(透過磚塊夾角和水平面之交點，可定出四個座標點如圖九，即綠色長方形的四角)，並利用 Google Sketchup 測量出水漂彈跳的距離。

- 5.透過高速攝影機的影格數可以得到水漂兩落點的時間間隔。
- 6.由高速攝影機 B 的照片，觀察步驟 1 所做的標記，並配合高速攝影機的影格數，可以得到水漂旋轉的角速度。

實驗 2-1 探討發射初速對水漂現象的影響

- 1.在水池旁架設發射器、捲尺、定位磚塊和兩台高速攝影機，並固定發射角度 $\alpha=20$ 度。
- 2.拉動拉桿後放開，發射水漂。並同時按下攝影機快門拍攝其飛行情形及各次飛行距離。
- 3.從攝影機 B 確認水漂是否有翻轉及發射是否成功。
- 4.重複步驟二、三。
- 5.由攝影機 A 中水漂彈跳的照片求出水漂的各次彈跳距離、飛行時間及彈跳次數。
- 6.代入公式分別求出初速、各次入水速度，並分析結果。

實驗 2-2 探討發射仰角對水漂現象的影響

- 1.在水池旁架設發射器、捲尺、定位磚塊和兩台高速攝影機，並固定發射角度 $\alpha=0$ 度。
- 2.拉動拉桿後放開，發射水漂。並同時按下攝影機快門拍攝其飛行情形及各次飛行距離。
- 3.從攝影機 B 確認水漂是否有翻轉及發射是否成功。
- 4.重複步驟二、三。
- 5.將發射角度 α 依次改為 5 度、10 度、15 度、20 度、25 度、28 度並重複步驟

二、三。

6.由攝影機 A 中水漂彈跳的照片求出水漂的各次彈跳距離、飛行時間及彈跳次數。

7.代入公式分別求出初速、各次入水速度，並分析結果。

實驗 2-3 探討發射角速度對水漂現象的影響

1.在水池旁架設發射器、捲尺、定位磚塊和兩台高速攝影機，並固定發射角度 $\alpha=20$ 度，力臂為 0cm。

2.拉動拉桿後放開，發射水漂。並同時按下攝影機快門拍攝其飛行情形及各次飛行距離。

3.從攝影機 B 確認水漂是否有翻轉及發射是否成功。

4.重複步驟二、三。

5.將力臂依次改為 0.8cm、1.6cm 並重複步驟二、三。

6.由攝影機 A 中水漂彈跳的照片求出水漂的各次彈跳距離、飛行時間及彈跳次數。

7.由攝影機 B 中水漂飛行的照片求出初始角速度

8.代入公式分別求出初速、各次入水速度，並分析結果。

(三) 探討錐狀水漂對水漂現象的影響

實驗 3-1 探討發射初速對水漂現象的影響

1.在水池旁架設發射器、捲尺、定位磚塊和兩台高速攝影機，並固定發射角度 $\alpha=20$ 度。

- 2.拉動拉桿後放開，發射錐度 0 度的水漂。並同時按下攝影機快門拍攝其飛行情形及各次飛行距離。
- 3.從攝影機 B 確認水漂是否有翻轉及發射是否成功。
- 4.重複步驟二、三。
- 5.將水漂依次改為錐度 5 度、10 度。
- 6.由攝影機 A 中水漂彈跳的照片求出水漂的各次彈跳距離、飛行時間及彈跳次數。
- 7.代入公式分別求出初速、各次入水速度，並分析結果。

六、 研究結果

實驗一：水漂入水時之受力的觀察與研究

在本實驗的一開始，我們先用隨手可得的十元硬幣，針對水漂入水時所受到的平均力作探討。並以此檢視我們所做的基本假設是否合理。

實驗 1-1 水漂入水時所受之平均力與速度的關係之探討

(一) 變因說明

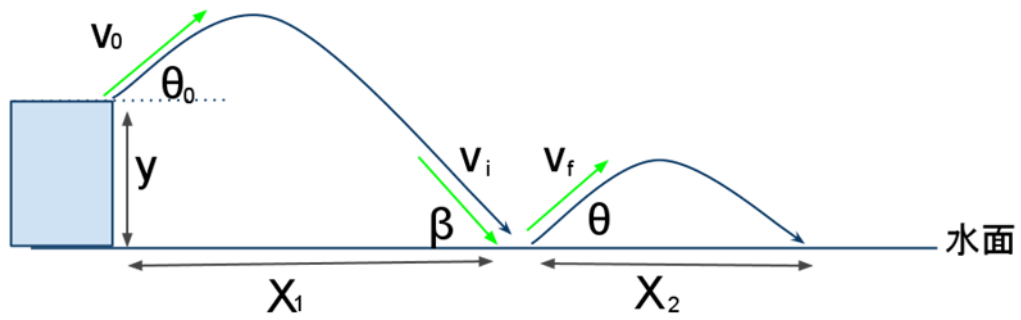
(1)控制變因：圓形水漂(十元硬幣)重 7.5g，半徑 1.3cm，發射仰角 15 度，無初角

速度

(2)操縱變因：發射初速

(二) 實驗結果

在角度固定為 15 度的情況下，改變初速並用攝影機拍下彈跳過程，經相片處理後可得彈跳前飛行距離 x_i 及彈跳後的飛行距離 x_f 和水漂與水接觸時間 t 。將 x_i 及 x_f 代入斜拋軌跡方程式，在加上初始高度 y 、發射仰角 θ_0 、發射初速 v_0 ，可算出入水速度 v_i 和離水速度 v_f ，及其速度差 Δv 。如圖十



圖十:水漂運動軌跡模擬圖

$$y = \tan \theta_0 x - \frac{g}{2(v_i \cos \alpha)^2} x^2$$

$$\rightarrow v_0 = \frac{x}{\cos \theta_0} \sqrt{\frac{g}{2(\tan \theta_0 x - y)}}$$

$$\text{又 } v_i = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

$$\rightarrow v_i = \sqrt{\left(\frac{x}{\cos \theta_0} \sqrt{\frac{g}{2(\tan \theta_0 x - y)}}\right)^2 - 2gy}$$

在計算入水速度時第一次彈跳的 y 為發射器與水面的高度差(本次實驗為 0.14m);而 θ_0 在這裡會等於水漂的 α 角, 得:

$$v_i = \sqrt{\left(\frac{x}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(\tan \alpha x - y)}}\right)^2 - 2gy}$$

而欲求得 Δv , 則須利用向量的加減法計算及餘弦定理:

$$\Delta v = v_i^2 + v_f^2 - 2v_i v_f \cos(\theta + \beta)$$

上式中 θ 為水漂出水時速度與水面的仰角；其中 θ 可用斜拋軌跡方程式解得

$\tan \theta = \frac{g}{2(v_f \cos \theta)^2} x_2$ ；而 β 為入水時速度的角度，其式為：

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{(v_i \sin \theta)^2 - 2gy}}{v_i \cos \theta}$$

計算出 ΔV 後，再利用動量變化量=衝量的原理，算出平均受力。

由 $\Delta P = J$

$$\Rightarrow m\Delta v = \int F dt \cong F_{AVG}t$$

$$\Rightarrow F_{AVG} \cong \frac{m\Delta v}{t}$$

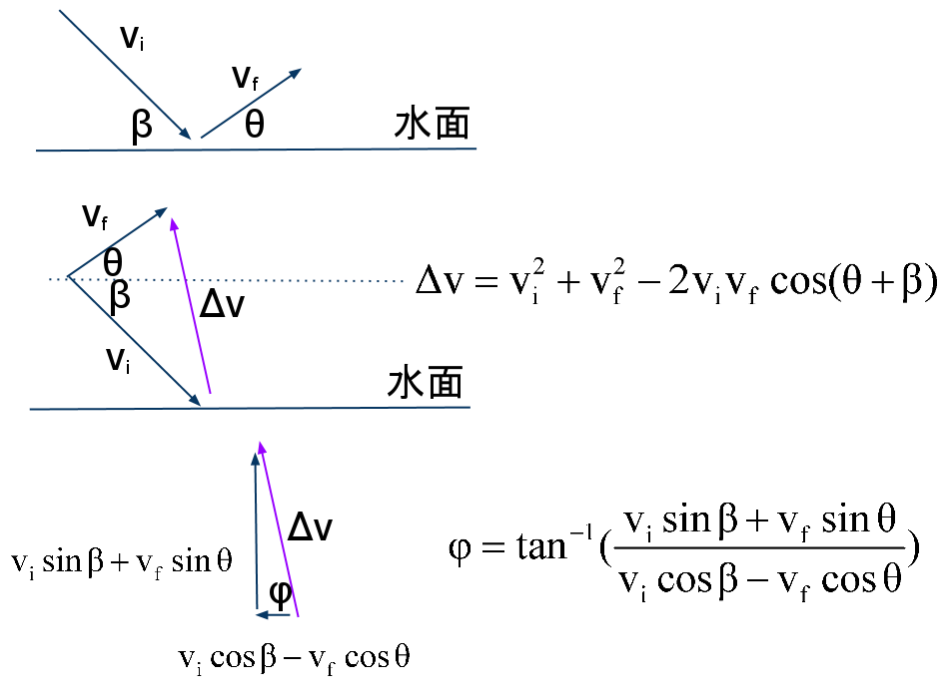
又 F_{AVG} 約等於升力、摩擦力、重力三者之合力，且 F_{AVG} 方向與水平面之夾角，等同於 Δv 與水平面之夾角，在此標記為 φ (phi)。我們再用以下之關係式求出水對水漂的施力 $F_{水}$ ：

$$\tan \varphi = \frac{v_i \sin \beta + v_f \sin \theta}{v_i \cos \beta - v_f \cos \theta}$$

$$\rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{v_i \sin \beta + v_f \sin \theta}{v_i \cos \beta - v_f \cos \theta} \right)$$

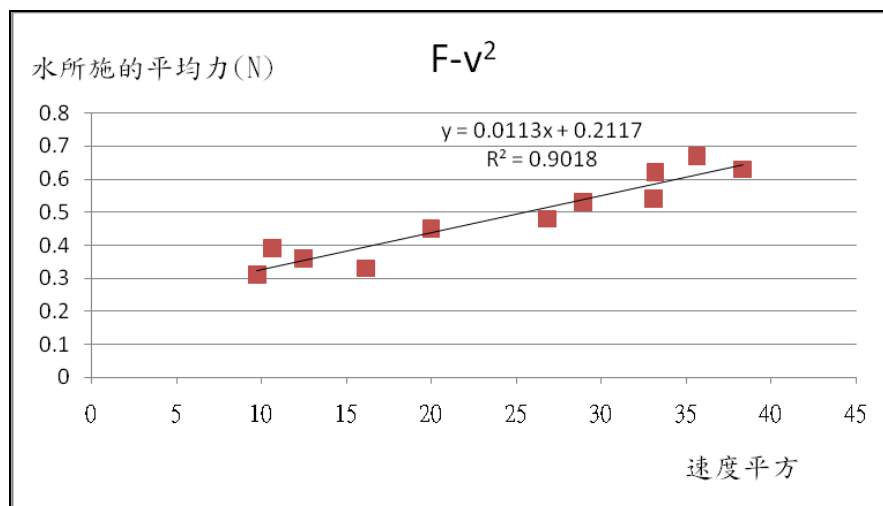
$$F_{水}^2 = F_{AVG}^2 + (mg)^2 + 2F_{AVG}mg \sin \varphi$$

$$\rightarrow F_{水} = \sqrt{F_{AVG}^2 + (mg)^2 + 2F_{AVG}mg \sin \varphi}$$



圖十一:向量運算示意圖

在角度固定為 15 度的情況下，記錄每次飛行距離 X_1 及彈跳後的飛行距離 X_2 和水漂與水接觸時間 t ，帶入上列推導式可得平均力 F ，並將之作圖：



圖十二: 水所施的平均力-速度平方的 xy 散佈圖

在實驗 1-1 中，我們發現水施予水漂之力與速度的平方有成線性之關係，這一結果可以由理論中形狀阻力及升力皆正比於速度的平方。但如果如此，該直線方程式則應通過原點，並不存在截距，我們認為原因來自於測量導出的是平均力，而非瞬時受力。由於瞬時所受力的力難以測量，我們改藉由測量其他物理量的方式，藉此得出所受的平均力，兩者間近似，但並不會完全相等，故此有產生截距。但趨勢線方程式仍舊會表現出與速度平方呈現線性遞增的圖形，驗證我們的理論。

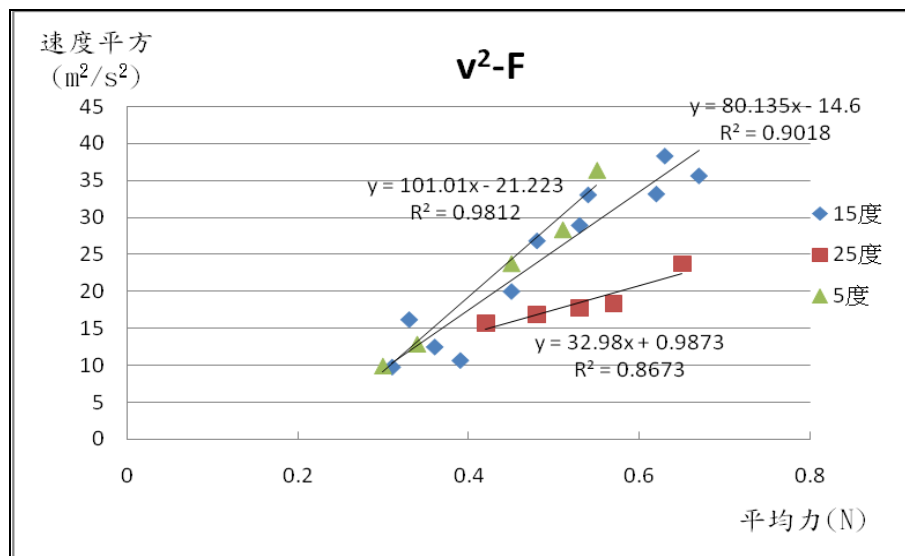
另外，在理論的部分有指出，此一近似的狀況在小角度的情況才成立，這一狀況可說明實驗 1-2 中，在小角度情況下較為吻合與速度平方呈現線性的趨勢。

實驗 1-2 水漂發射角度 α 與其受力及彈跳次數關係

(一) 變因說明

- (1)控制變因：圓形水漂(十元硬幣)重 7.5g，半徑 1.3cm，初角速度約 3rps
- (2)操縱變因：發射初速、發射仰角 5 度、15 度、25 度

(二) 實驗結果



圖十三：各種仰角下速度平方-平均力圖

由上圖可看出，平均力 F 與速度平方 V^2 成**正比**的關係在**小角度**時較符合(5度和 15 度較 25 的資料精準)，當角度大時，應為水漂速度與水平面的**攻角 β** 較**大**，使阻力及升力係數不是定值，使得 F 與速度平方 V^2 不成正比。

實驗二：探討水漂發射時的初始條件對水漂現象的影響

實驗 2-1：探討發射速度對水漂現象的影響

(一) 變因說明

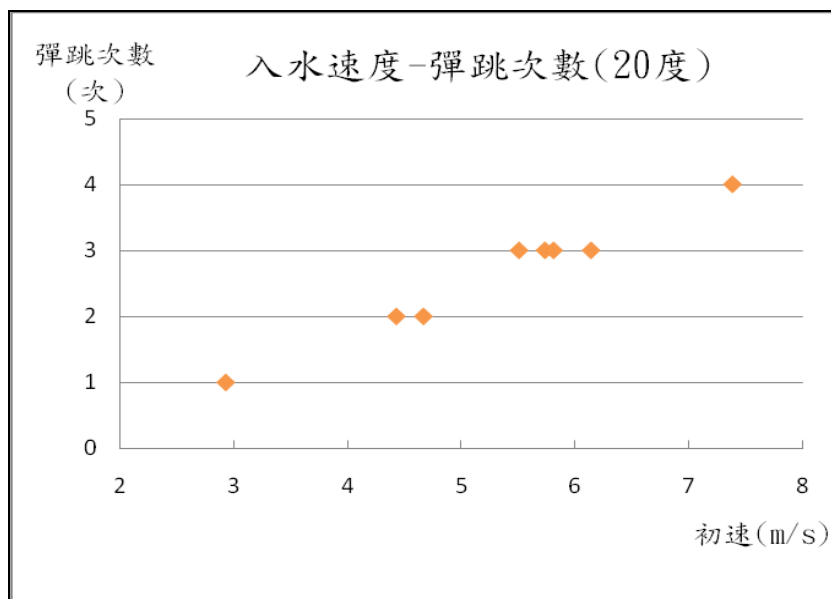
(1) 控制變因：圓形水漂重 14.10gw，半徑 2.00cm，發射仰角 20 度、

初角速度約 3rps

(2) 操縱變因：發射初速

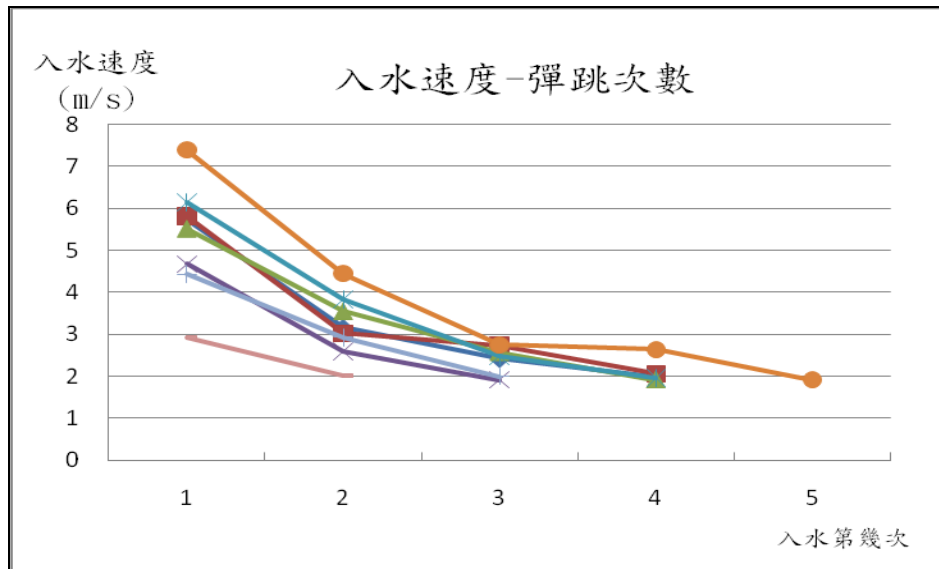
(二) 實驗結果

在發射仰角固定為 20 度的情況下，改變初速並紀錄彈跳次數，可得下列結果(單位 m/s)：



圖十四：仰角 20 度，初角速度約 3rps，入水速度-彈跳次數圖

由此圖可看出，在仰角固定的情況下，彈跳次數會隨著入水速度的增加而漸增，且若知道速度在哪一區間範圍內，即可推出其彈跳次數。



圖十五: 仰角 20 度，初角速度約 3rps，各次入水速度-彈跳次數圖

上圖代表的是 8 次實驗中，每次實驗時水漂各次入水時的的速度。因水漂在各次入水時皆在同一水平面上，故第二次入水速度等同於第一次出水速度。而兩點間的斜率即為 $\Delta V = \text{水漂出水速度} - \text{入水速度}$ 。由上圖可看出，在同一次飛行中前幾跳的斜率較後幾跳的斜率大，也就是前幾跳的速度差及動能差較大。顯示在前幾跳中能量損失較後幾跳為多。故若要增加彈跳次數，則將 4 跳增加到 5 跳所需的能量將比從 3 跳增加到 4 跳的能量為多。

實驗 2-2：探討發射仰角與速度對水漂現象的影響

(一) 變因說明

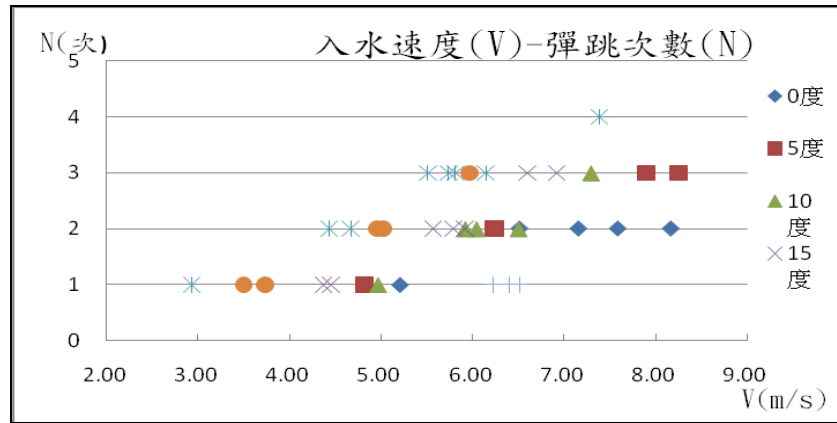
(1) 控制變因：圓形水漂重 14.10gw，半徑 2.00cm，初角速度 3rps

(2) 操縱變因：發射初速、發射仰角(0 度、5 度、10 度、15 度、20 度、25

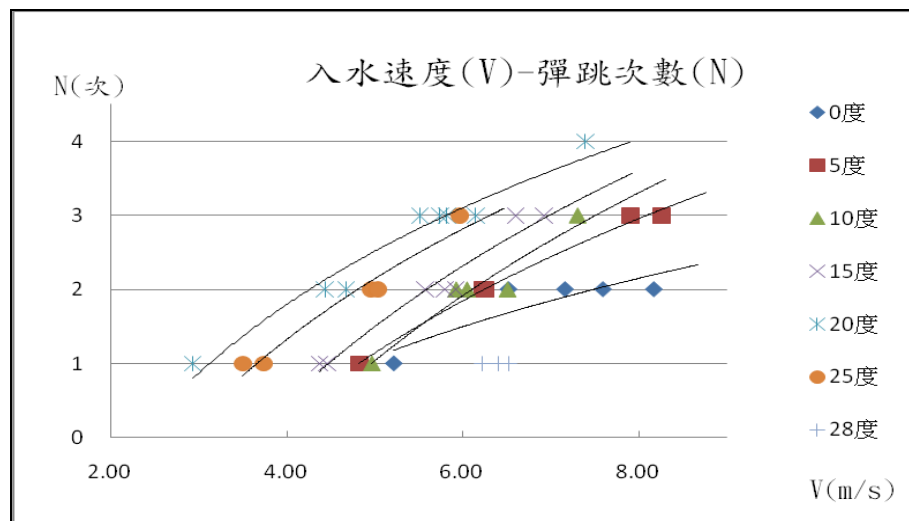
度、28度)

(二) 實驗結果

(單位 m/s)



圖十六:第一次入水速度-彈跳次數在不同發射仰角下的 xy 散佈圖

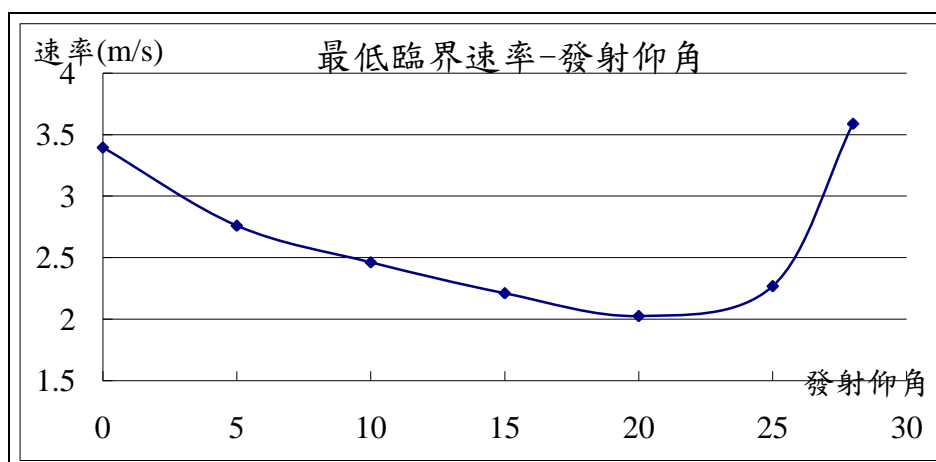


圖十七:將圖十六的資料加上趨勢線

圖十七將各種仰角的數據加上趨勢線，透過比較其斜率的大小，可比較出其彈跳的難易程度（斜率越大，增加彈跳次數 1 次所需增加的速度越少），由此可推論：

- (1) 在相同速度時，發射仰角越靠近 20 度~25 度之間越容易彈跳。以入水速度約等於 6m/s 為例，仰角 20 及 25 度皆可達到 3 跳，而 5 度、10 度、15 度可達兩跳，至於 28 度則為一跳。
- (2) 在相同彈跳次數的情況下，發射仰角越靠近 20 度~25 度之間可以較低速度達到該彈跳次數。以彈三下的情況為例，仰角 20 度約在入水速度 5.5(m/s) 即可達到，而 25 度約為 6.0(m/s)，15 度約為 6.7(m/s)，10 度約為 7.3(m/s)，5 度約為 7.9(m/s)。
- (3) 發射仰角對彈跳的難易度(根據斜率，由易至難)排列依次為 20 度、25 度、15 度、10 度、5 度、0 度、28 度。
- (4) 同一角度下，速度越快時，其趨勢線的斜率也越小。這表示了速度越大的情況下，如欲讓彈跳次數增加一次，所需增加的速度量值越多。

另外，由圖十六、圖十七可看出，經由第一次彈跳後，水漂的後幾跳速度差很小，故最後一次入水(也就是沉入水中)的速度接近可讓水漂彈起的臨界速度。由於水漂沒入水中的速度均小於最低臨界速度，為確保所取的數值接近水漂彈起的臨界速度 v_{\min} ，在該發射仰角中，我們取前三個最大的速度作平均發射仰角做圖。可得下圖：



圖十八:水漂彈起的臨界速率對發射仰角圖

由上圖可推知，水漂的最低彈跳速率從 0 度到 20 度遞減，而從 25 度之後大幅增加，我們推測應是**形狀阻力大幅增加**而造成的結果，因此，我們可以得知約在 20 度至 25 度之間，其最低彈跳速率最小，約在 **1.8 (m/s) ~ 2.2(m/s)**左右。

實驗 2-3：探討發射初速與初角速度對水漂現象的影響

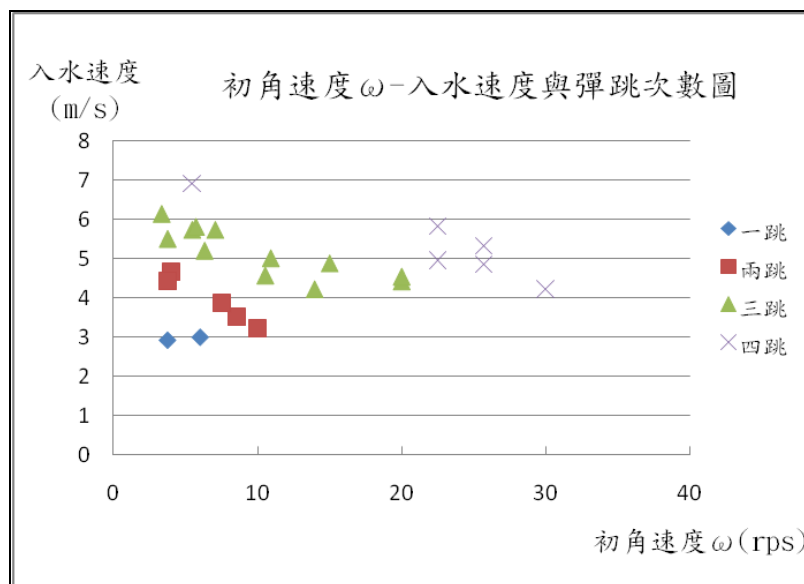
(一) 變因說明

(1)控制變因：圓形水漂重 14.10gw，半徑 2.00cm，發射仰角 20 度

(2)操縱變因：發射初速、初角速度

(二) 實驗結果

在角度固定為 20 度下，改變其初速及初角速度，並紀錄彈跳次數，可得到下列結果：



圖十九：初角速度 ω -入水速度與彈跳次數

由初角速度對入水速度的分布圖可以得知，當入水速度相同時，初角速

度越大彈跳次數也較多；同樣的，當初角速度相同時，入水速度越大彈跳次數也會較多。亦即增加入水速度及初角速度皆可增加水漂的彈跳次數。然而，我們認為這兩項變因對水漂彈跳的影響層面不同：增加入水速度，是增加其初動能，可使其彈跳次數增加；至於增加初角速度則是增加其穩定性，使其不易沉沒。

實驗三:探討錐狀水漂對水漂現象的影響

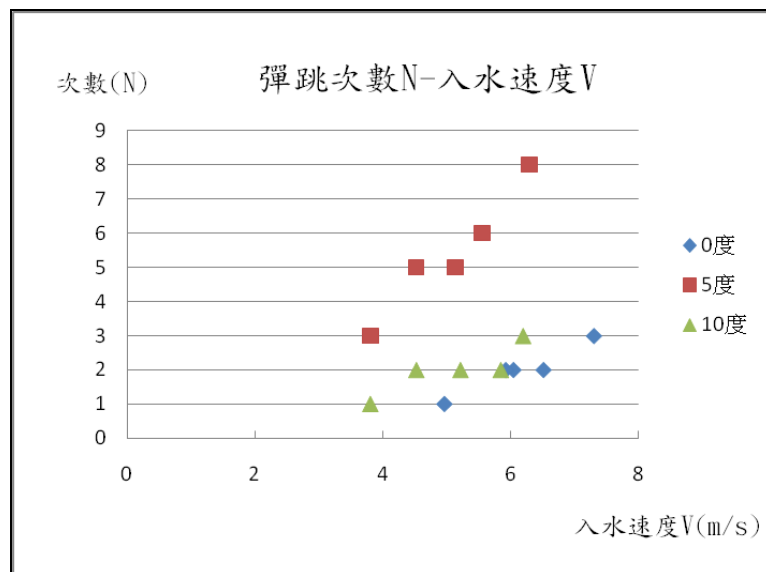
實驗 3-1:探討不同錐度之水漂對水漂現象的影響

(一) 變因說明

(1)控制變因: 圓形水漂重 14.10gw，半徑 2.00cm，發射仰角 10 度、初角速度約 3rps

(2)操縱變因: 水漂的錐度

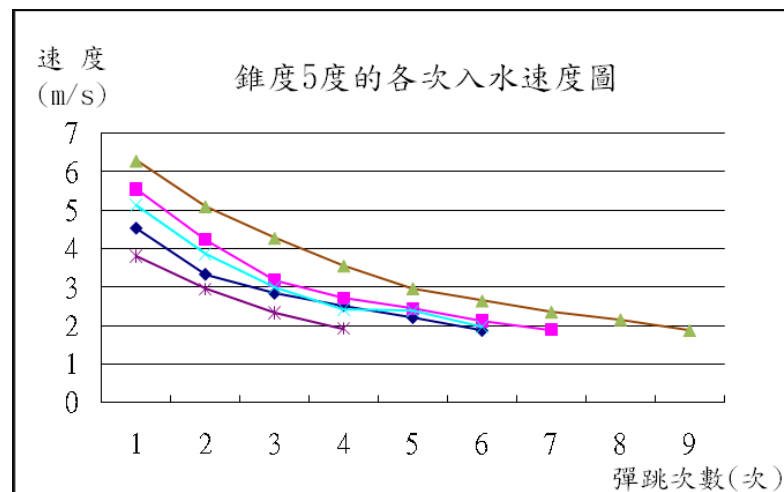
(二) 實驗結果



圖二十:彈跳次數-入水速度

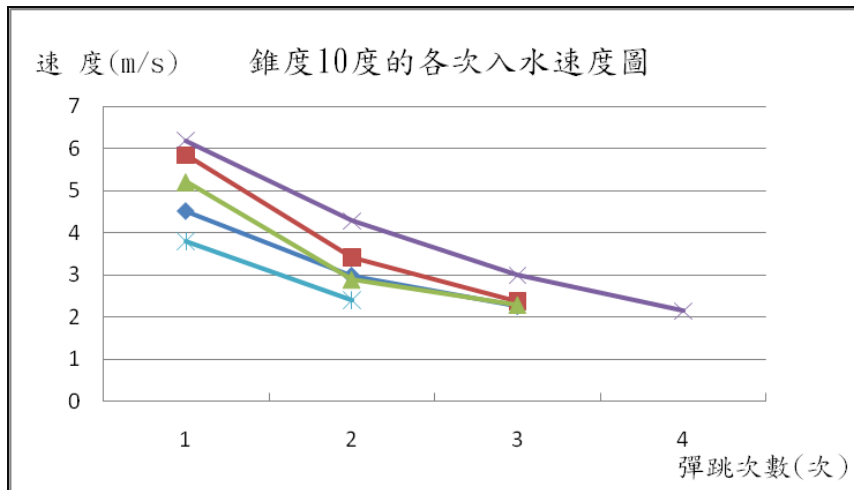
在發射仰角固定為 10 度的情況下，使用不同錐度的水漂改變初速並紀錄彈跳次數，可得下列結果(單位:m/s)：

- (1) 由上圖，我們發現使用錐度為 5 度的水漂時其彈跳次數會劇增。
- (2) 然而，我們也觀察到後 3、4 跳(也就是較平板水漂多出來的那幾跳)幾乎是連在一起的。在上圖中是將彈跳次數定義為產生一圈清楚的漣漪；但我們使用高速攝影機針對後幾跳來拍攝，發現水漂似乎沒有完全離開水面。也就是水漂沒入水中的高度達到最大值 z 後水漂向上提升，但在尚未完全離水時又在度下降，並產生第二圈漣漪。如此在水面上震盪直到阻力使速度下降到低於臨界彈跳速率為止。我們將這一過程稱為水漂在水面上滑行。在這情況下彈跳次數是難以得知或甚至無意義的。
- (3) 在錐度增加為 10 度時，反而不見水漂在水面上滑行的現象，甚至較平板水漂難以彈跳；此時，應是太大的錐度導致形狀阻力大幅增加，並使其能量大幅衰減所致



圖二十一:錐度 5 度-速度-彈跳次數

由此圖可看出，其後幾跳幾乎是水平的，也就是幾乎沒有能量損耗，符合前述的觀察。



圖二十二:錐度 10 度-速度-彈跳次數

使用 10 度錐度水漂時其曲線陡且彈跳次數少，應是阻力大所照成的。

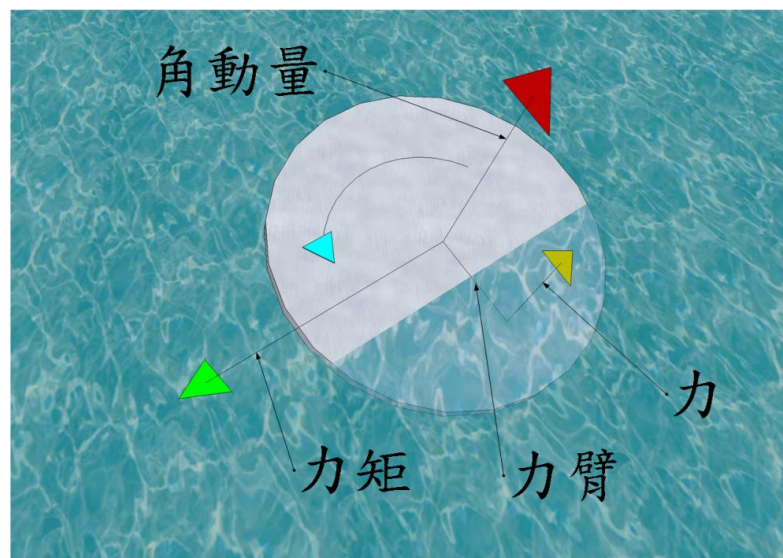
七、 討論

(一) 初始速度大小對水漂彈跳的影響

由實驗 2-1、實驗 2-2 的結果中，我們根據現有數據得到的結果可發現，速度越大彈跳次數越多，我們認為這是因為初始動能越多，需經過越多次彈跳，其速度才會衰減到低於最低臨界彈跳速率。

(二) 水漂會轉彎(軌跡為曲線)的原因

在實驗中，我們對水漂的行進軌跡進行觀察，發現水漂在彈跳過程中均會偏轉，即水漂軌跡並不成直線而有所偏折。經過我們的歸納，發現其偏轉方向和旋轉的方向有關。如果水漂面並非完全沒入水中，則可將水給予水漂面的力視為一作用於沒入面積的幾何中心之等效力，如此一來將產生一力矩，而此力矩與角動量垂直，因此造成水漂面之傾斜，進而改變水漂的行進方向。例如，給予水漂一個向上的角動量，則彈跳後水漂會往左偏轉。



圖二十三:水漂所受力矩解說

(三) 表面張力

為何表面張力不是造成水漂彈起的主要因素呢?我們稍微估計一下，做了以下分析：水漂與水面接觸時，水面會凹陷而產生表面張力，並對水漂作功 $W=AT$ 。其中 A 為凹陷表面積， T 為水表面張力。已知本實驗所用鋁製水漂半徑為 2cm ，質量為 14.10g 。若估計 A =水漂表面積，約為

$$\pi \cdot 2^2 \approx 12.567 \text{ cm}^2, \text{ 且水的表面張力} = 7.2 \times 10^{-3} \text{ N/m}, \text{ 則}$$

$$W = 12.57 \times 10^{-4} \times 7.2 \times 10^{-3} \approx 9.5 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}。 \text{ 而水漂彈起所需之功}$$

$$W = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2, \text{ 若取實驗 2-1 的第一組數據}$$

$$W = \frac{1}{2} \times 14.1 \times 10^{-3} \times (5.74^2 - 3.16^2) \approx 0.169 \text{ N} \cdot \text{m}$$

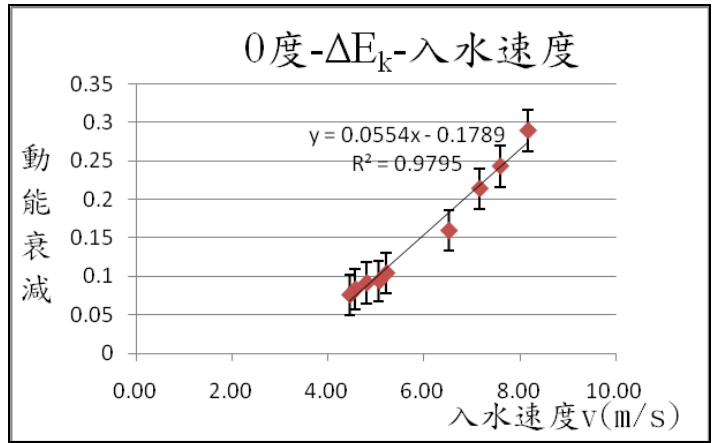
和前述的 $9.5 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$ 差五個數量級，故應該不是造成水漂彈起的主要因素，且影響極小。

(四) 經驗公式

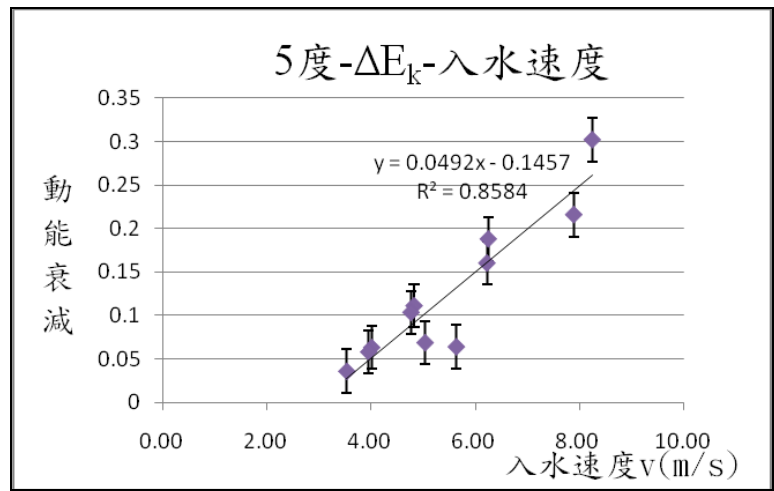
$$\text{我們將每次彈跳中水漂的動能衰減值取絕對值 } \Delta E_k = \frac{1}{2}Mv_i^2 - \frac{1}{2}Mv_f^2$$

(即初動能減去末動能， v_i 代表入水速度， v_f 代表出水速度)對入水速度 v 作

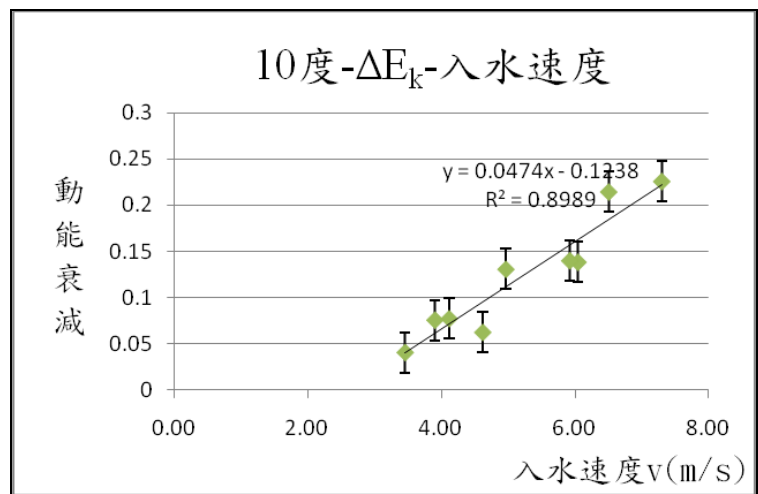
圖 (ΔE_k - v 圖) 可得：



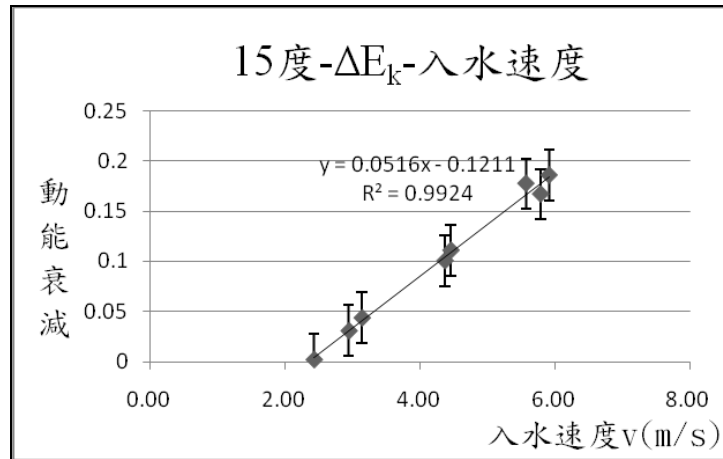
圖二十四:0度-動能衰減值-入水速度



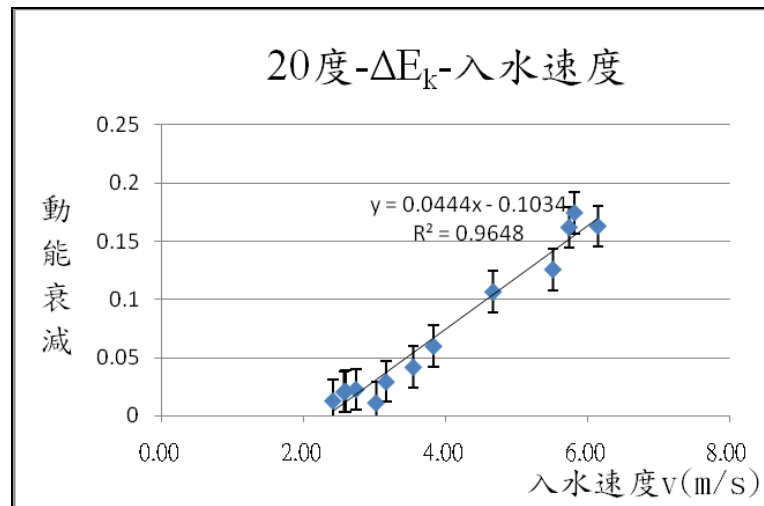
圖二十五:5度-動能衰減值-入水速度



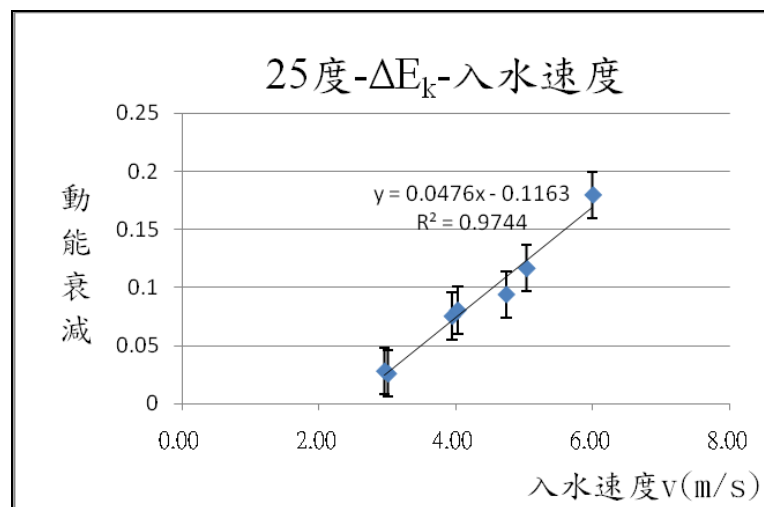
圖二十六:10度-動能衰減值-入水速度



圖二十七:15度-動能衰減值-入水速度



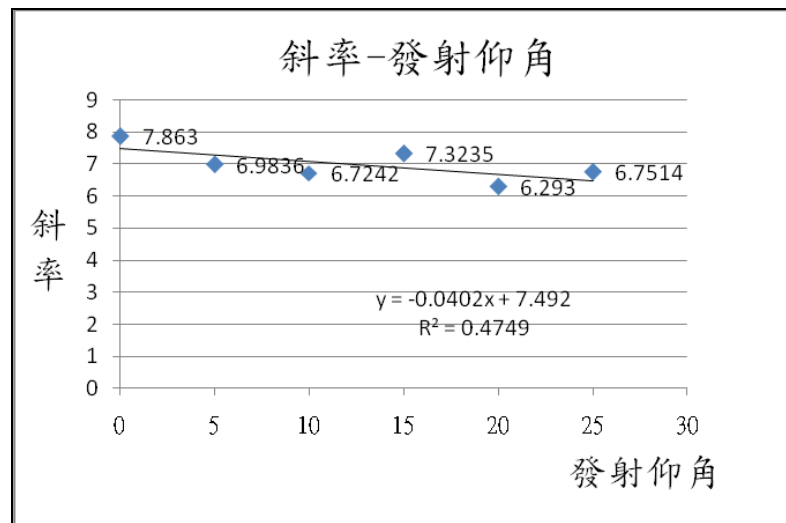
圖二十八:20度-動能衰減值-入水速度



圖二十九:25度-動能衰減值-入水速度

觀察圖二十四~圖二十九我們發現動能衰減值和入水速度有近似線性的趨勢關係。

我們嘗試將動能衰減值對-入水速度圖之趨勢線方程式斜率 m 和在不同的發射仰角 α 角情況作圖可得：



圖三十: 趨勢線方程式斜率 m -發射仰角 α

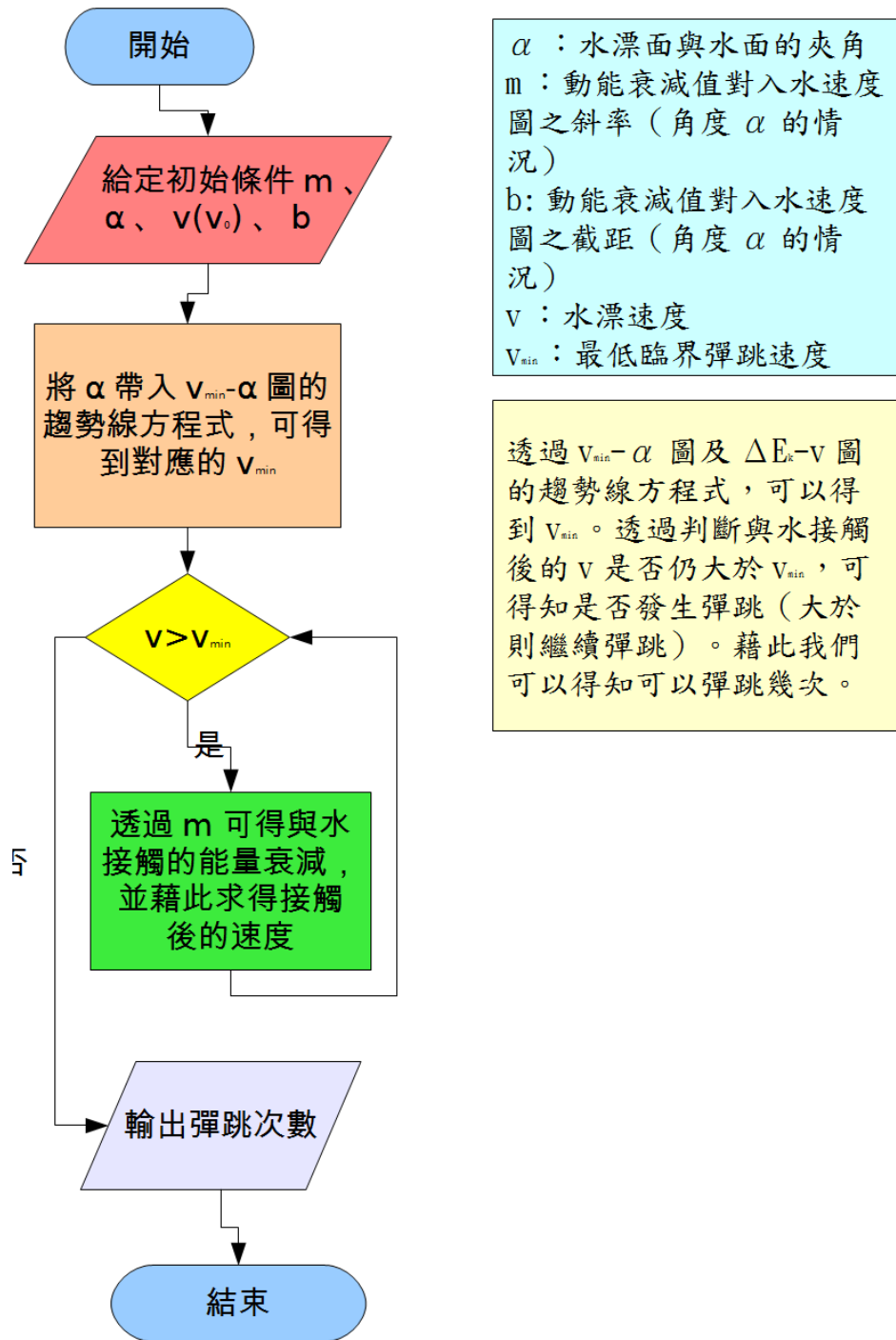
觀察上表，就斜率 m 和發射仰角 α 之間，並沒有可以一個很精確的趨勢關係，但可發現在 0~25 度之間， m 的值大約在 7.8~ 6.3 之間，並且有隨角度增大約略遞減趨勢。

針對實驗 2-2 的表十五:最低臨界速率-發射仰角圖，我們發現 6 次方的多項式頗能表現出 0~25 度最低臨界速率-發射仰角圖的趨勢，透過這個趨勢線方程式，我們可以近似得到 α 角於 0~25 度區間內對應的最低臨界速度。

(五) 推估最大彈跳次數

結合以上資料，我們設計了一種方式來計算給定已知條件的水漂最大的彈

跳次數，方法如下圖三十一：



α : 水漂面與水面的夾角
 m : 動能衰減值對入水速度圖之斜率 (角度 α 的情況)
 b : 動能衰減值對入水速度圖之截距 (角度 α 的情況)
 v : 水漂速度
 v_{min} : 最低臨界彈跳速度

透過 $v_{min}-\alpha$ 圖及 ΔE_k-v 圖的趨勢線方程式，可以得到 v_{min} 。透過判斷與水接觸後的 v 是否仍大於 v_{min} ，可得知是否發生彈跳 (大於則繼續彈跳)。藉此我們可以得知可以彈跳幾次。

圖三十一:推估最大次數流程圖

自不同仰角的 ΔE_k-v 圖(圖二十四~圖二十九)的趨勢線方程式可推出以下

式子，其中的 b 為方程式 y 軸(ΔE_k 軸)截距。

由於 ΔE_k 近似為 v 的一次函數(見圖二十四~圖二十九)，可設為

$$|\Delta E_k| = mv + b \quad (m \text{ 為斜率}, b \text{ 為 } y \text{ 軸截距})$$

$$\rightarrow v^2 - v_f^2 = mv + b \quad (v \text{ 為入水速度}, v_f \text{ 為出水速度})$$

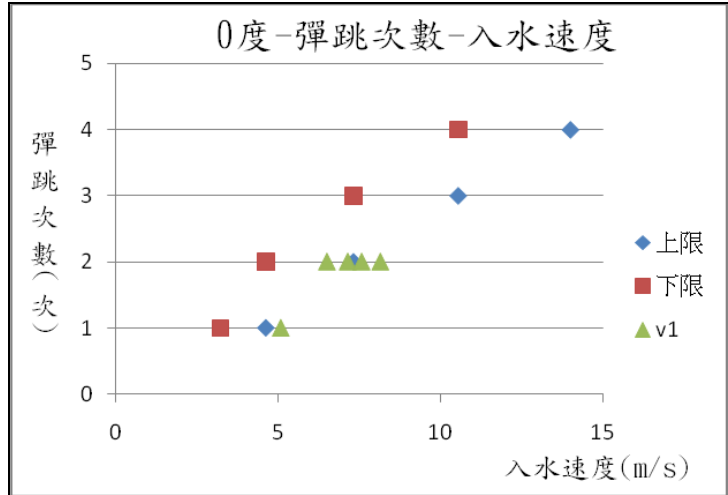
$$\rightarrow v^2 - mv - (b + v_f^2) = 0$$

$$\rightarrow v = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4b + 4v_f^2}}{2} \quad (v \text{ 大於 } v_f, \text{ 故取正值})$$

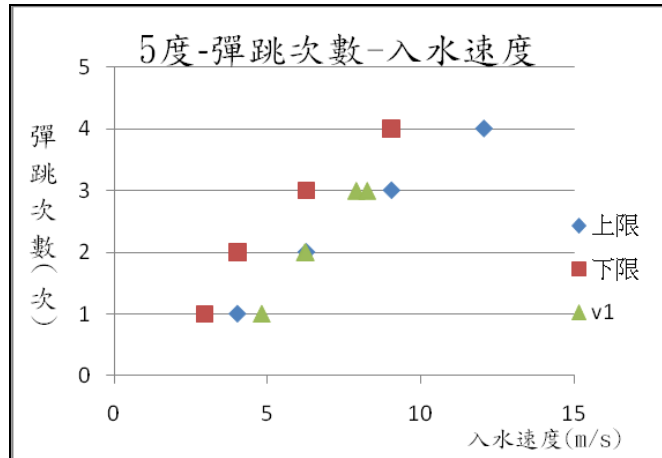
$$\rightarrow v = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4b + 4v_f^2}}{2}$$

透過這個手法我們可以以逆推的方式得到。有一開始的 v_f 以 v_{\min} 代入的話，所解出來的 v 便是一次彈跳的上限速度，也是二次彈跳的下限速度。再將 v_f 以一次彈跳的上限速度帶入，解出來的 v 即是二次彈跳的上限速度(也是三次彈跳的下限速度)。

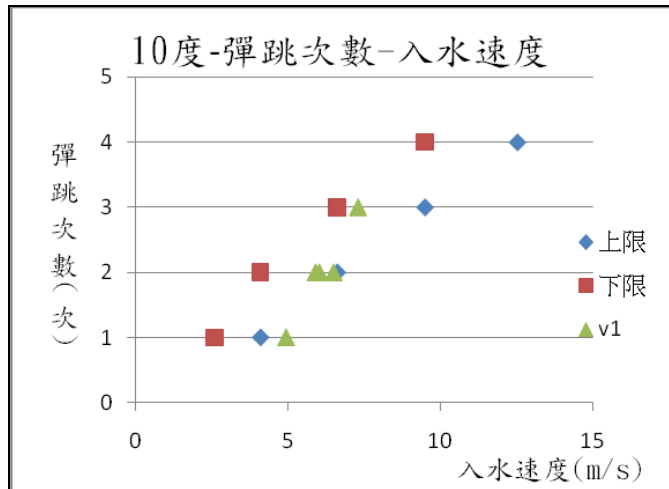
以下為以這個方法建立出彈跳次數對各角度上限、下限速度的圖，並配合實驗數據(表中的 v_1 數據)呈現。



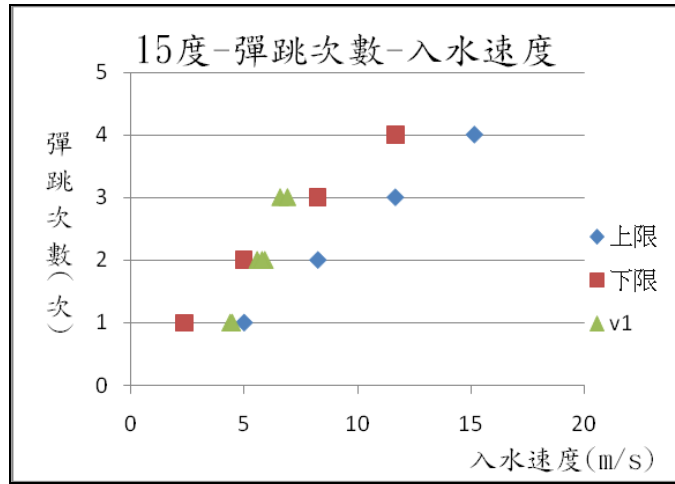
圖三十二:仰角 0 度-彈跳次數-入水速度



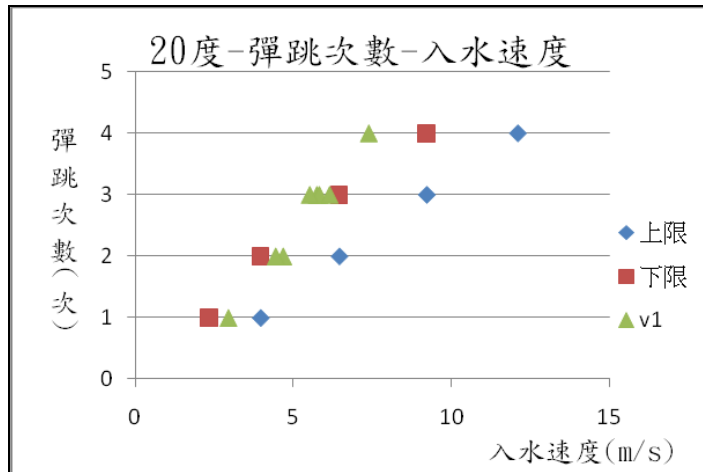
圖三十三:仰角 5 度-彈跳次數-入水速度



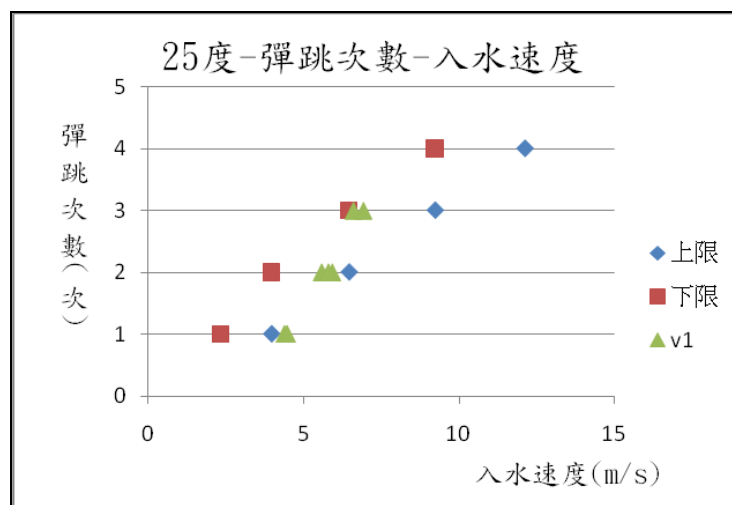
圖三十四:仰角 10 度-彈跳次數-入水速度



圖三十五:仰角 15 度-彈跳次數-入水速度



圖三十六:仰角 20 度-彈跳次數-入水速度



圖三十七:仰角 25 度-彈跳次數-入水速度

雖然實驗數據並非完全都落在我們所計算出來的上下限範圍內，針對未落在上、下限值範圍內的數據，我們提出幾點造成此一現象的解釋：

- (1) ΔE_k - v 圖中兩者間實際的關係並不必然為線性的關係，但在實驗中的表現有極為近似線性的趨勢。因此可能會對上下值造成部分的影響。
- (2) 實驗本身的誤差亦有可能對線性迴歸的結果產生影響，進而對其結果有部分影響。

但就整體而言，除少數幾個數據點外，大部分的數據仍在符合預期的狀況。因此透過經驗公式，我們能由初始條件推算出彈跳的情況。

八、 結論

(一)水漂入水時之受力的觀察與研究

在發射仰角較小時，水漂所受的平均力與入水速度的平方大致成正比。

(二)探討水漂發射時的初始條件對水漂現象的影響

(1)探討發射初速對水漂現象的影響

在仰角固定的情況下，彈跳次數會隨著入水速度的增加而漸增；而水漂在前幾跳中能量損失較後幾跳為多。

(2)探討發射仰角對水漂現象的影響

在相同速度時，發射仰角越靠近 20 度~25 度之間越容易彈跳；而在相同彈跳次數的情況下，發射仰角越靠近 20 度~25 度之間可以較低速度達到該彈跳次數。且我們可以得知約在 20 度~25 度之間，其最低彈跳速率最小。在本實驗中，20 度的最低彈跳速率約為 2m/s。

(3)探討發射角速度對水漂現象的影響

增加初角速度可增加水漂的穩定性，保持 α 角的恆定，使其不易沉沒，並增加水漂的彈跳次數。

(三)探討錐狀水漂對水漂現象的影響

使用錐度為 5 度的水漂時其彈跳次數會劇增，但此時水漂在最後幾跳並未完全彈起，而是在水面上震盪直到阻力使速度下降到低於臨界彈跳速率為止。至於錐度增加為 10 度時，則不見這種現象，我們推測應是太大的錐度導致形狀阻力大幅增加，並使其能量大幅衰減所致。

(四)表面張力的影響

表面張力不是造成水漂彈起的主要因素，且影響極小。

(五)水漂會轉彎(軌跡為曲線)的原因

水漂的行進軌跡在彈跳過程中均會偏轉，而偏轉的方向與和旋轉的方向有關。推測為應力的作用未通過質心，產生一與角動量垂直的力矩，並進而感生角衝量影響彈跳的方向。給予水漂一個向上的角動量，則彈跳後水漂會往左偏轉；反之給予水漂一個向下的角動量，則彈跳後水漂會往右偏轉。

(六)建立經驗公式

彈跳次數與入水速度的關係，可由實驗的數據結合趨勢線推算出經驗公式。藉由給定初始條件帶入經驗公式中，可推估出彈跳的次數。就整體而言，除少數幾個數據點外，大部分的數據仍符合預期的狀況。

九、 未來展望:

(一) 研究設計之建議

- (1) 改善發射器的射程:本實驗以自行設計的發射器進行實驗，但由於發射器的力道不足，導致無法將水漂以較高初速射出，使得水漂無法有多次的彈跳，限制了研究的範圍；我們也曾經嘗試製作力道更強的發射器，但面臨水漂無法穩定射出的問題。我們希望能再進一步改良以擴大研究範圍。
- (2) 攝影機的拍攝速度:目前使用的高速攝影機為 CASIO EXILM EX-F1，拍攝速度為 60fps，即每秒 60 張；然而在作某些實驗的測量時，如計算水漂與水的接觸時間，其時間往往都是非常短暫的。故如能使用拍攝速度較快的攝影機，必能大幅減少實驗的誤差。

(二) 研究問題之展望:

- (1) 影響水漂的物理因素是十分多且複雜的。除了本文討論的速度、轉動、仰角外，我們相信水漂的入水角，水漂的材質，重量、形狀等，皆會對水漂的物理現象有所影響。希望在下一個階段的研究可以在加以探討。
- (2) 在本研究中對錐形水漂進行初步的探討，發現水漂的錐度會對其彈跳產生重大影響，而我們認為這正是影響水漂彈跳的一個重要因素；如能對其再進行更深入的探討及分析，我們相信能有很大的發展空間。且能更貼近生活上的各種應用，如滑航行快艇等。相信近一步對錐形水漂做探討會是一件十分有趣的事。

十、 參考資料

中文部分

【書籍】

David Halliday., Robert Resnick & Jearl Walker. 物理。

Robert W. Fox & Alan T. Mcdonald. 流體力學。

英文部分

【期刊文章】

Christophe Clanet., Fabien Hersen & Lydéric Bocquet (2004). *Secrets of successful stone-skipping.*

Christophe Clanet & Lydéric Bocquet (2006). *The mystery of the skipping stone.*

【學位論文】

Christophe Clanet., Fabien Hersen., Lydéric Bocquet., Lionel Rosellini (2005). *Skipping stones.*

Lydéric Bocquet (2002). *The physics of stone skipping.*

【書籍】

Jonathan Allday. *Apollo in Perspective.*

Asteroids & Ron Miller. *Comets and Meteors.*

十一、 附錄-數據資料

實驗一：水漂入水時之受力的觀察與研究

實驗 1-1 水漂入水時所受之平均力與速度的關係之探討

表一：仰角 15 度，入水速度-平均力

15 度	平均力(N)	速度 V(m/s)	速度平方 V^2 (m/s) ²
第一次	0.33	4.02	16.16
第二次	0.45	4.47	19.98
第三次	0.48	5.18	26.83
第四次	0.39	3.26	10.63
第五次	0.53	5.38	28.93
第六次	0.54	5.75	33.06
第七次	0.62	5.76	33.18
第八次	0.67	5.97	35.64
第九次	0.36	3.53	12.46
第十次	0.31	3.12	9.73
第十一次	0.63	6.19	38.32

實驗 1-2 水漂發射角度 α 與其受力及彈跳次數關係

表二：仰角 5 度，速度及平均力資料

5 度		
平均力(N)	速度 V(m/s)	速度平方 V^2 (m/s) ²
0.34	3.58	12.82
0.45	4.87	23.72
0.55	6.03	36.36
0.51	5.32	28.30
0.30	3.14	9.86

表三: 仰角 15 度，速度及平均力資料

15 度		
平均力(N)	速度 V(m/s)	速度平方 $V^2(m/s)^2$
0.33	4.02	16.16
0.45	4.47	19.98
0.48	5.18	26.83
0.39	3.26	10.63
0.53	5.38	28.93
0.54	5.75	33.06
0.62	5.76	33.18
0.67	5.97	35.64
0.36	3.53	12.46
0.31	3.12	9.73
0.63	6.19	38.32

表四: 仰角 25 度，速度及平均力資料

25 度		
平均力(N)	速度 V(m/s)	速度平方 $V^2(m/s)^2$
0.53	4.21	17.72
0.65	4.87	23.72
0.42	3.96	15.68
0.57	4.28	18.32
0.48	4.11	16.89

實驗二: 探討水漂發射時的初始條件對水漂現象的影響

實驗 2-1: 探討發射速度對水漂現象的影響

表五: 仰角 20 度，初角速度約 3rps，入水速度-彈跳次數資料

20 度	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4	實驗 5	實驗 6	實驗 7	實驗 8
初速	5.24	5.36	4.87	4.21	5.75	6.38	4.10	2.88
第一次入水速度	5.74	5.82	5.51	4.67	6.15	6.72	4.43	2.93
第二次入水速度	3.16	3.02	3.54	2.59	3.83	4.44	2.92	2.02
第三次入水速度	2.41	2.74	2.57	1.92	2.48	2.74	2.00	
第四次入水速度	1.99	2.06	1.92		1.95	2.63		
第五次入水速度						1.92		
彈跳次數	3	3	3	2	3	4	2	1

單位：m/s

實驗 2-2：探討發射仰角與速度對水漂現象的影響

表六: 仰角 0 度，入水速度-彈跳次數

度數	0 度，離水高度=0.32m				
次數	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4	實驗 5
初速	6.93	6.26	7.94	7.36	5.09
第一次入水速度	7.16	6.51	8.16	7.58	5.21
第二次入水速度	4.57	4.45	5.06	4.80	3.52
第三次入水速度	3.00	3.00	3.50	3.17	
彈跳次數	2	2	2	2	1

單位：m/s

表七: 仰角 5 度，入水速度-彈跳次數

度數	5 度，離水高度=0.32m				
次數	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4	實驗 5
初速	7.76	7.97	5.99	5.86	4.40
第一次入水速度	7.90	8.25	6.23	6.25	4.82
第二次入水速度	5.64	5.04	4.01	3.53	2.74
第三次入水速度	4.76	3.95	2.66	2.71	
第四次入水速度	2.83	2.71			
彈跳次數	3	3	2	2	1

單位：m/s

表八: 仰角 10 度，入水速度-彈跳次數

度數	10 度，離水高度=0.34m				
次數	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4	實驗 5
初速	5.87	5.87	6.36	7.06	4.82
第一次入水速度	6.04	5.92	6.51	7.30	4.96
第二次入水速度	4.11	3.90	3.45	4.62	2.47
第三次入水速度	2.44	2.11	2.48	3.53	
第四次入水速度				2.16	
彈跳次數	2	2	2	3	1

單位：m/s

表九: 仰角 15 度，入水速度-彈跳次數

度數	15 度，離水高度=0.349m						
次數	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4	實驗 5	實驗 6	實驗 7
初速	5.90	5.55	5.78	4.31	4.38	6.42	6.74
第一次入水速度	5.92	5.57	5.79	4.37	4.46	6.60	6.92
第二次入水速度	2.94	2.43	3.14	2.20	2.03	3.28	3.45
第三次入水速度	2.07	2.36	1.91			2.77	2.90
第四次入水速度						2.01	2.02
彈跳次數	2	2	2	1	1	3	3

單位：m/s

表十: 仰角 20 度，入水速度-彈跳次數

度數	20 度，離水高度=0.358m							
次數	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4	實驗 5	實驗 6	實驗 7	實驗 8
初速	5.24	5.36	4.87	4.21	5.75	6.38	4.10	2.88
第一次入水速度	5.74	5.82	5.51	4.67	6.15	6.72	4.43	2.93
第二次入水速度	3.16	3.02	3.54	2.59	3.83	4.44	2.92	2.02
第三次入水速度	2.41	2.74	2.57	1.92	2.48	2.74	2.00	
第四次入水速度	1.99	2.06	1.92		1.95	2.63		
第五次入水速度						1.92		
彈跳次數	3	3	3	2	3	4	2	1

單位：m/s

表十一：仰角 25 度，入水速度-彈跳次數

度數	25 度，離水高度=0.367m				
次數	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4	實驗 5
初速	4.96	5.03	3.50	5.96	3.74
第一次入水速度	4.73	5.03	3.95	6.00	4.03
第二次入水速度	3.01	2.96	2.21	3.24	2.19
第三次入水速度	2.32	2.18		2.68	
第四次入水速度				2.28	
彈跳次數	2	2	1	3	1

單位：m/s

表十二：仰角 28 度，入水速度-彈跳次數

度數	28 度	離水高度=0.377m	
次數	實驗 1	實驗 2	實驗 3
初速	6.33	6.20	5.78
第一次入水速度	6.52	6.40	6.22
第二次入水速度	3.78	3.43	3.55
彈跳次數	1	1	1

單位：m/s

實驗 2-3：探討發射初速與初角速度對水漂現象的影響

表十三:固定仰角 20 度時，初轉速、初速與彈跳次數的資料

		第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	第八次	第九次	第十次
高轉速	ω (rps)	30.00	20.00	20.00	22.50	25.71	22.50	25.71			
	V_0 (m/s)	5.23	4.64	4.75	5.97	5.18	5.84	6.33			
	彈跳次數	4.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	4.00			
中轉速	ω (rps)	10.53	10.00	10.91	15.00	8.57	7.50	7.06	6.00	6.32	13.95
	V_0 (m/s)	4.58	3.22	5.02	4.89	3.52	3.87	5.74	3.01	5.21	4.23
	彈跳次數	3.00	2.00	3.00	3.00	2.00	2.00	4.00	1.00	3.00	3.00
低轉速	ω (rps)	5.45	5.71	3.75	4.00	3.33	5.45	3.75	3.75		
	V_0 (m/s)	5.74	5.82	5.51	4.67	6.15	6.72	4.43	2.93		
	彈跳次數	3.00	3.00	3.00	2.00	3.00	4.00	2.00	1.00		

實驗三:探討錐狀水漂對水漂現象的影響

實驗 3-1:探討不同錐度之水漂對水漂現象的影響

表十四:錐度 0 度

錐度 0 度	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4	實驗 5
V0	5.87	5.87	6.36	7.06	4.82
V1	6.04	5.92	6.51	7.3	4.96
V2	4.11	3.9	3.45	4.62	2.47
V3	2.44	2.11	2.48	3.53	
V4				2.16	
n	2	2	2	3	1

單位：m/s

表十五:錐度 5 度

錐度 5 度	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4	實驗 5
V0	4.2	5.41	6.12	5.09	3.67
V1	4.52	5.55	6.29	5.13	3.81
V2	3.33	4.24	5.1	3.87	2.95
V3	2.84	3.17	4.28	2.99	2.34
V4	2.52	2.71	3.56	2.43	1.92
V5	2.21	2.44	2.97	2.38	
V6	1.88	2.12	2.65	1.97	
V7		1.89	2.36		
V8			2.16		
V9			1.88		
n	5	6	8	5	3

單位：m/s

表十六:錐度 10 度

錐度 10 度	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4	實驗 5
V0	4.35	5.67	4.98	6.01	3.69
V1	4.52	5.84	5.21	6.19	3.8
V2	2.32	3.31	2.89	3.48	2.09
V3		2.27	2.29	2.35	
n	2	2	2	2	1

單位：m/s

評語

本作品對水漂的研究相當完備，又能設計儀器驗證理論，非常值得鼓勵。但是仍有一些變因的控制和分析，尚有繼續努力的空間。