2011 年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

編號：010042

作品名稱

密碼鎖-拉丁超立方體的完美控制情形(Lucky Locks)

得獎獎項

二等獎

作者姓名：尤怡方、李敏辰

就讀學校：國立南科國際實驗高級中學(國中)

指導教師：曾智偉

關鍵字：Cartesian product、拉丁超立方體、延伸樹

作者簡介

我是尤怡方，目前就讀國立南科國際實驗高級中學九年級。平時喜歡聽些音樂，讓自己全心全意的沉醉在悠揚的樂曲中，體會作曲者透過音樂所表達的情緒。學習新的語言，嘗試新的才藝是我最大的興趣，除了英文之外，透過歌曲也學了點日語、韓文。有很多的情感是只能意會而不能言傳的，音樂也是一種表達內心情感的方式。

一個小小的密碼鎖是改變我的契機，數學為我的生活掀開了全新的扉頁，科展將世界的另一面展現在我的眼前。從日常生活的三維空間，到高維度的抽象思考，原來用簡單的數學符號，就可以代表這一切。透過科展，我學到了很多教科書上無法教授的知識，也因為這次的機會，我才能有幸去認識更多不同領域的前輩。

我是李敏辰，目前就讀國立南科國際實驗高級中學九年級。

邏輯、推理、創造，這些是我的心之所向；我也喜愛閱讀，讓自己沉浸在書的世界。

在我懵懂之時，我就喜歡將我心中所想的、所創造的故事情節、人物一一畫在紙上；我也喜歡想一些精靈古怪的謎題，以考倒他人為樂；在學校中，我也勇於表現自己，為大家帶來歡樂。

在參加數學科展後,隨著我們朝向新大陸所邁出的一步步,我也更加熱衷於其中。原本只有 3D 的世界中，隨著越來越多維的加入，我的思緒也越來越活化。與他人研究各自的結晶，讓我們看到了科學的殿堂、知識的世界，是如此的神聖、如此的廣大、如此的奧妙。

期望我可以從一隻小小黃雀，蛻變成一隻大鵬，飛到巨人的肩膀上，去眺望科學那遼闊的星空。

摘要

有個密碼鎖由D個旋鈕組成，每個旋鈕有N種不同的號碼，由於構造缺點若D個旋鈕中僅有1個號碼錯誤仍能打開密碼鎖，問最少嘗試多少組號碼才能保證一定能打開這個鎖？這個問題等同於在N元D維超立方中找一組點集，點集中的點各自向其D維度畫出延伸線，若超立方中的所有點都至少被1條延伸線所涵蓋，要求重複涵蓋的次數總和要最少。

43屆的科展中已經討論過3個旋鈕的情況，我們接著分析4個旋鈕的情況。在討論中發現D=4時並沒有如D=3時保證打開的最小次數公式，我們給出上下限的公式。但D=N+1且N≠6時卻很特別，恰可利用拉丁超立方挑出1組點集，其所有延伸線涵蓋的點都沒有重複，稱為完美控制，而保證打開鎖的最小次數是N^{N-1}。

Lucky Locks

-Using Latin HyperCubes to Find The Optimum Solutions For A Series Of Defect Combination Locks.

Abstract

There is a combination lock that has D knobs, and each knob has N kinds of different numbers. We solved the least attempts of combination to open the lock, if one wrong digit of these D knobs remains acceptable due to the designed structural defects. This case is equivalent to or considered as searching for a set of points with N elements in D dimensions, and each point in the set of points is able to draw an extension lines to its dimension, if each point in the multidimensional block is connected to the least extension lines.

In the 43th Taiwan Scientific Affair, someone had postulated the 3-knob case. Later we analyzed the 4-knob case. Unlike the 3-knob case that are found with a least number of extension lines, the 4-knob case can be estimated by a range of extension line numbers. Moreover, a special case, when D=N+1 except N=2 and 6, can use the Latin hypercubes to exactly construct one set of points connecting to their extension line set without redundancy. We call this a “Optimum Solutions” which guarantees the least number of times to open the lock is N^{N-1}.

目錄

一、 研究動機與目的

在學校看到上屆學長的科展海報，很好奇的去搜尋資料後，發現這個問題和很多領域有關，像是「忘記旅行箱密碼的故事」、「工廠製作密碼鎖的原理」、「千禧蟲」等。我們覺得高維度超立方體很有趣，對於密碼鎖的瑕疵問題能轉換成超立方體問題也覺得很新鮮，起初老師讓我們看影片「不可能的三角形」去體會視覺誤差的情況，然後由紙上3維立方體各線條間交叉關係讓我們去想像4維的圖形在紙上表現時的關係。另外在找資料時還看到有關超立方體內探尋漢彌頓路徑、Euler的36軍官及還有2元超立方體[－]等問題，老師也提到4維可想成是3維再結合1維度的結果，和國一學的實數線變成2維的平面很相似，這些都讓我們覺得十分想去了解，尤其是一開始老師問我們「會不會畫4維超立方的模型呢？」引起我們很大的興趣，最後我們決定把這個國際奧林匹克競賽的題目從3個旋鈕8個號碼延伸下去，看能不能對於更多旋鈕的情況有所發展。

我們打算先由以下幾個方向來探討：

（一）分析4個旋鈕上各有N個號碼的數學模型(N^4問題)，求保證開鎖的最小次數或上下限。

（二）4個旋鈕上各有3個號碼時(3^4問題)，找到保證能打開鎖的最少號碼組合，並證明其是完美控制的情況。

（三）5個旋鈕上各有4個號碼時(4^5問題)，找到保證能打開鎖的最少號碼組合，並證明其是完美控制的情況。

（四）當N=6以外的正整數時，在N+1個旋鈕上各有N個號碼時(N^{N+1}問題)，找到保證打開的最少號碼組合，並證明其是完美控制情況，最小次數是N^{N-1}。

二、 研究設備及器材

多向連結方塊、智高積木、Google SketchUp

三、 研究過程與方法

(一)、 前言

1. 文獻探討

1998年國際奧林匹克數學競賽中東德提供1個預選題如下：1個密碼鎖由3個旋鈕組成，每個旋鈕有8個位置(號碼)，由於構造上的缺點只要旋鈕中有2個正確便能打開這個鎖。問最少要嘗試多少組合才能保證打開這個鎖？這問題的答案出奇之小是32組號碼。後來在43屆的全國科展中曾被推廣為3個旋鈕上有n個位置的$n\times n\times n$密碼鎖問題[二]，討論出保證能開鎖的最少號碼組合次數的公式如下：

n是偶數時：$\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2$

n是奇數時：$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ (一.1式)

其後在48屆全國科展中有篇文章「超立方Qn的最小控制」[一]，主要是談論如下：在2^n超立方中取1個點集，點集中的點及其有邊相連(只有1維座標不同)的點都聯集起來，若聯集的結果是整個超立方，便稱這個點集是1個控制集，點數最小的控制集其點數稱為控制數。文章討論出$n=2^p-1$時用nim(拈)遊戲選的任2控制點不會控制同1個點，此時控制數是2^{n-p}，但n是其它數時沒有找到公式只可以確定上限。文章中還提及1個控制點可以控制本身及跟自己有邊相連的點，就像是一個警衛可以看守自己這個點還有它眼力可達的點，

我們覺得這個概念可以用於43屆密碼鎖科展中，於是試著結合2篇科展文章將其再推廣到d個旋鈕，n種號碼的情況，也就是在一個n元d維的超立方中選取控制點集。

2.名詞與符號定義

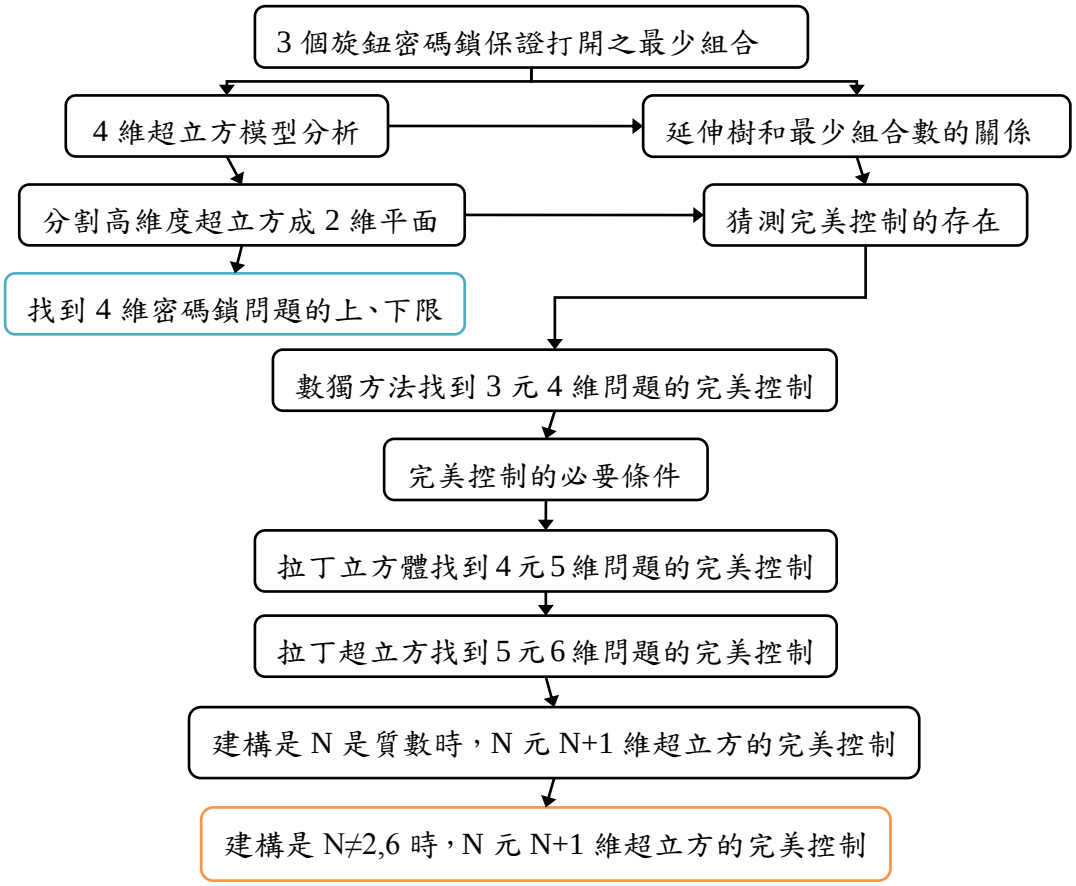
於本文中我們會重複使用到幾個概念，為了表達上的方便我們首先定義下列名詞：

延伸樹：　1個點及超立方中與此點僅有1維座標相異之點的聯集。

控制集：　1點集若其內各點之延伸樹的聯集等於整個超立方，稱此點集是個控制集，其內的點稱為控制點。

完美控制：1組控制集其控制點之延伸樹間沒有交集的情況。

3.研究流程圖



（二）、 4個旋鈕上各有N個號碼時保證開鎖的最小次數上下限

1.分析3維的模型結構來推演4維的情況

由警衛看守2^n超立方觀點可知缺陷密碼鎖問題可轉變成超立方體中延伸樹的涵蓋與重疊問題，於是我們從延伸樹著手來分析。2元3維立方體中的每個延伸樹涵蓋了4個點(圖1.1)，顯而易見的若所選的2點其延伸樹之間沒有重疊，則這2個點就形成1組控制集。

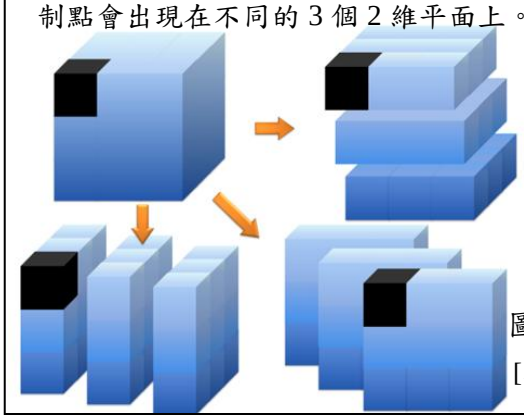
圖(1.1)　2 元 3 維延伸樹可涵蓋 4 個點。

圖(1.2)　3 元 3 維延伸樹可涵蓋 7 個點。

把3元3維的立方體由3個不同方向分割成9個2維平面觀察，發現任1個點會出現在3個不同的2維平面中，由(一.1式)知3元3維的最小控制集其點數是5，這5點在所有平面上共出現15次，由鴿籠原理得知某個平面上的控制點數會大於1，延伸樹會重疊。又每個延伸樹可涵蓋7個點圖(1.2)，$5\times7-27=8$──有8次重疊。

n元3維的立方體中，每個延伸樹涵蓋$3\times(n-1)+1=3n-2$個點。若延伸樹間不重疊，n^3必定是$3n-2$的倍數。

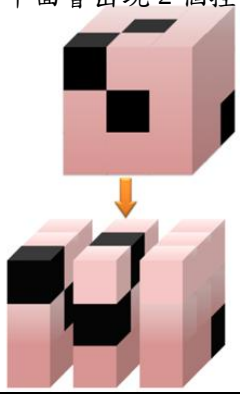
3 元 3 維的立方體可以切割成九個平面，1 個控制點會出現在不同的 3 個 2 維平面上。



圖(1.3)

[參考文獻二 p.12]

3 元 3 維的最小可行解數為 5，某些平面會出現 2 個控制點。



【小結論1】n 元3維的立方體中，n=1和 2 時才能挑出延伸樹不重疊的控制集。

證明：若 $(3n-2)\mid n^3$且$(3n-2)\mid(3n-2)^3$，則 $(3n-2)\mid[27n^3-(3n-2)^3]$，$(3n-2)\mid(54n^2-36n+8)$，$(3n-2)\mid[(54n^2-36n+8)-6(3n-2)^2]$，最後得到 $(3n-2)\mid 8$ ，$3n-2$必定是8的因數，因此n的正整數解只有1或2。

3維立方體中的點都有3個方向要延伸，而4維中的點都有4個方向延伸，其中任選3方向可組成一個立方體。同一個維度上的2點其坐標只有1維數字不同，且可各自屬於2個相異而不相交的3維立方體，如圖(2)中A(0000)屬於外層的立方體，B(0000)屬於內層的立方體。選定某3維立方上的點A可發現它的延伸樹只能涵蓋另一個3維立方上的1個點B如圖(4)，同時平面外的點其延伸樹最多只能涵蓋此平面中的1個點。

一個 2 元 4 維的超立方體有 8 個立方體、16 個平面、24 條邊、32 個點。

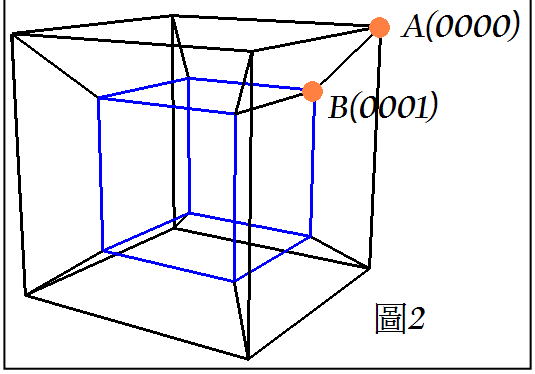
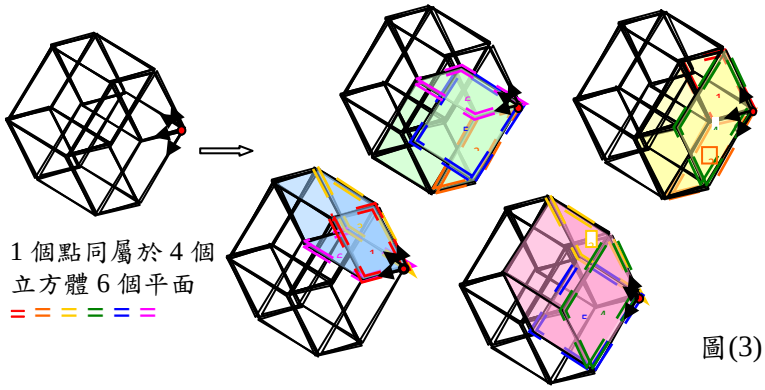
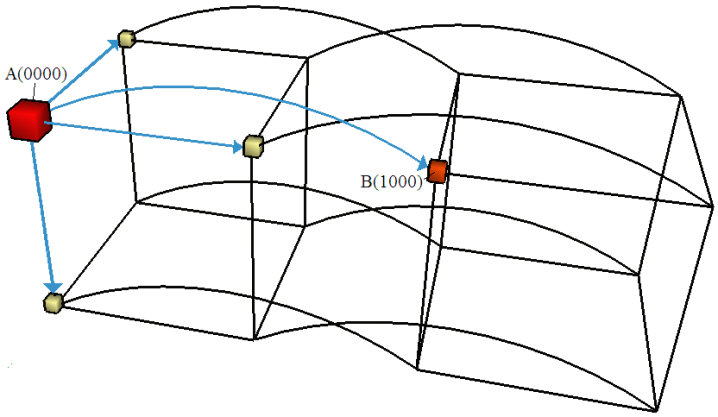


圖2

2元4維時，1個延伸樹涵蓋了1個點，故需要4個控制點以上才能蓋滿超立方2^4點，因此延伸樹間最少重疊了$4\times5-2^4=4$次。



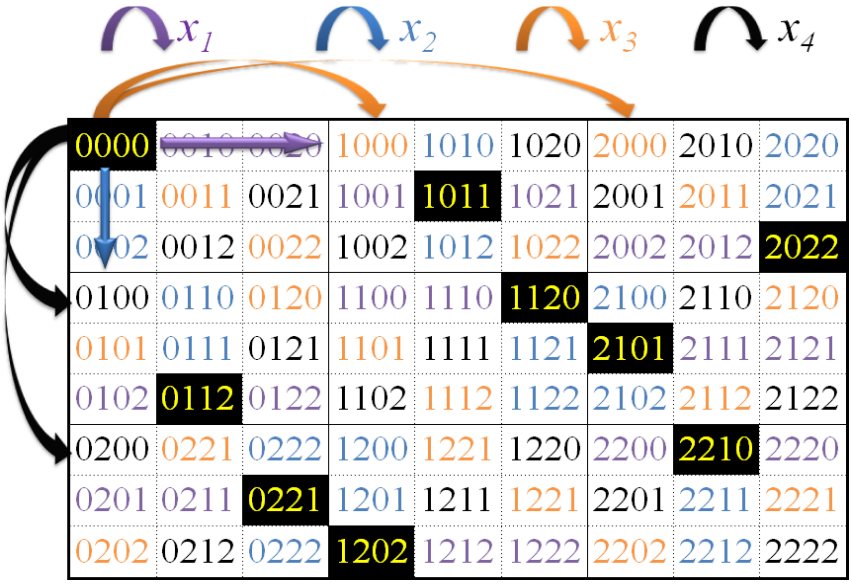
圖(3)



圖(4) 右立方體中的所有點，只有 B 點能被點 A 的延伸樹涵蓋。

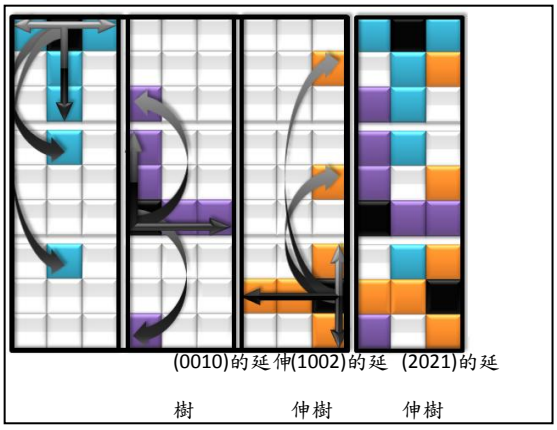
$n=3$時由*Cartesianproduct* $3^4=3\times3\times(3\times3)$得知1個3元4維的超立方可視為9個3×3的平面，若將其分割成9個平面如表(一)，利用2維平面外的點最多只和此平面上的1個點有邊相連通的特性，可畫出選定之點其4個方向上的延伸線以構成延伸樹，表(一)中9個黑格其延伸樹恰好蓋滿3^4超立方，故這9點成為一組控制集。

表(一)為一個三元四維的超立方體，四個顏色代表四個不同的維度



2. 利用數獨遊戲的方法讓4維圖形中的延伸樹減少重疊

由表(一)看出要減少延伸樹的重疊，關鍵是像數獨遊戲般在不同行、列之中挑選控制點。點的延伸樹在x_3方向只能涵蓋(1010)和(2010)兩點，在x_4方向只能涵蓋(0110)和(0210)兩點。右圖(5)可以看到(0010),(1002),(2021)3個點中任2點在各自的平面上的行列位置都不相同，其延伸樹用不同的顏色標示便可發現彼此沒有重疊。



(圖 5)三個延伸樹不重疊

進一步觀察，如果1個格子看作是1個2維平面，表(一)中9個控制點其(x_1,x_2)座標是(0,0)~(2,2)如表(二.1)中的黑色數字，剛好是整數0~8的10進位換成3進位的2元數，x_3,x_4各自成1個拉丁方陣，且(x_3,x_4)形成1個正交拉丁方陣(表二.2)。

表(二)

0000	1011	2022	→	00	11	22	=	0	1	2	+	0	1	2
0112	1120	2101		12	20	01		1	2	0		2	0	1
0221	1202	2210		21	02	10		2	0	1		1	2	0
9個平面的控制點 (表二.1)				x_3,x_4正交拉丁方陣 (表二.2)				x_3 拉丁方陣 (表二.3)				x_4 拉丁方陣 (表二.4)					

3^4超立方中任1點其延伸樹可涵蓋2×4+1=9個點，若延伸樹不重疊則要蓋滿超立方需81÷9=9個延伸樹，表(一)中的控制集有9個控制點故是最小控制集，延伸樹間沒重疊。

3.推測4維問題中不存在型如3維時的最小控制集點數公式，故推論上下限

2元3維和3元4維都可挑出延伸樹不重疊的控制集，而2元3維的最小控制集點數是2，觀察$2=1^2+1^2$符合一.1式的要求，$2=2^{2-1}$也符合n^{n-1}型態，3元4維的最小控制集點數是9，由於9=1+8=2+7=3+6=4+5=3×3，我們發現$9=1+8$符合$9=1^3+2^3$，而$9=3^2$符合n^{n-1}，只有這2個式子其型態和3維時公式類似也和3^4中的3與4兩數字相關，故猜測若4維有類似3維時型態的簡單公式應該如下:

$$\begin{cases} \left(\frac{n}{2}\right)^3+\left(\frac{n}{2}\right)^3 & ,n\text{是偶數時} \\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^3+\left(\frac{n-1}{2}\right)^3 & ,n\text{是偶數時} \end{cases} \qquad \text{(二.1式)}$$

或　n^{n-1}　(二.2式)

依(二.1式)，則$n=4$時最小控制集點數是$(\frac{4}{2})^3+(\frac{4}{2})^3=16$，但4元4維中每個控制點其延伸樹可以涵蓋3×4+1=13個點，16個控制點則涵蓋13×16<4^4，沒蓋滿4^4，故最小控制集點數不可能是16，可知(一.2式)不合。

依(二.2式)，則$n=4$時最小控制集點數為4^3，由(一.1式)知道1個4元3維的立方體只需要8個控制點，再由*Cartesianproduct* $4^4=(4\times 4\times 4)\times 4$，4元4維超立方

體等於是由4個4元3維的立方體所組成，所需的最小控制集點數不會超過 $4\times8=32$，並不是(二.2式)預測的64，故(二.2式)也是不合的。4維情況下我們沒找到合理的公式，不過由 $N^4=N^3\times N$，把N元4維超立方看做N個N^3立方體再加上(一.1式)，可以推論4維密碼鎖的最小控制集點數的1個明顯上限公式：

【小結論2】4維問題中的最小控制集點數上限

N是偶數時：$\left[\left(\frac{N}{2}\right)^2+\left(\frac{N}{2}\right)^2\right]\times N$

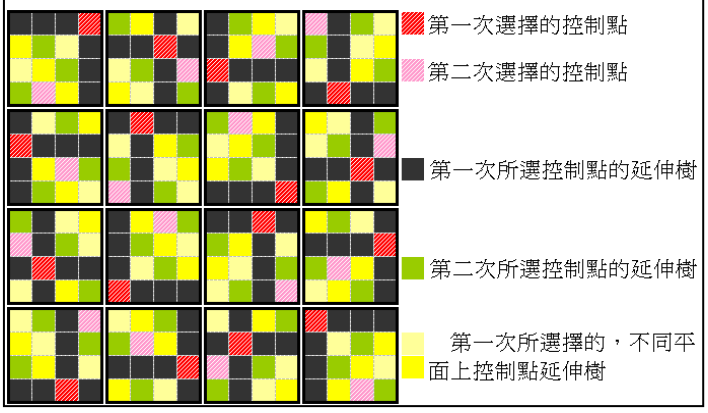
N是奇數時：$\left[\left(\frac{N+1}{2}\right)^2+\left(\frac{N-1}{2}\right)^2\right]\times N$ (二.3式)

3元4維存在延伸樹都不重疊的完美控制。那4元4維的密碼鎖問題是否也存在完美控制？4元4維中的一個點其延伸樹共涵蓋13個點，若每個延伸樹彼此不重疊則它們的聯集必為是13的倍數，但4^4不是13的倍數，所以不可能出現完美控制的情形。

進一步把4^4分割成16個4^2平面分析，在選擇控制點時先選出16個延伸樹都不重疊的控制點，發現每個2維平面上都剩下3個沒被涵蓋到的點，我們思考如何讓一個控制點其延伸樹扣除掉重疊後，其可以涵蓋的效應可以達到最大，但目前我們只能讓第二次所選的控制點其延伸樹的有效涵蓋數為3。

右圖(6) 中4元4維中所選的控制集其延伸樹會出現重疊，我們由(二.3式)算出其上限點數是32，而這組找出來的控制集點數也是32，我們試過的方法都無法用少於32個

圖(6) 4 元 4 維的 2 維分割圖及 1 組控制集



控制點去涵蓋整個超立方，雖是如此但我們仍無法證明這就是一組最小控制集。

4元4維中的每個延伸樹的涵蓋點數是13，$19\times13<4^4$，$20\times13>4^4$，由延伸樹和超立方體總點數的關係來看，控制點數不能小於19，是目前我們所知的下限。

由於n元4維的密碼鎖問題中有n^4個點需要被涵蓋，每個延伸樹都能涵蓋$4n-3$個點，若是延伸樹不重疊，只需$\frac{n^4}{4n-3}$個控制點，這時$4n-3$必須是n^4的因數。

【小結論3】n元4維的超立方中，n=1和3時才能挑出延伸樹不重疊的控制集。

證明：則$(4n-3)\mid n^4$且$(4n-3)\mid(4n-3)^4$，則

$(4n-3)|[256n^4-(4n-3)^4]$,

$(4n-3)|[(768n^3-864n^2+432n-81)-(4n-3)^3]$

$(4n-3)|[(864n^2-864n+243)-54(4n-3)^2]$,

$(4n-3)|[(432n-243)-108(4n-3)]$

$(4n-3)|81 \Rightarrow (4n-3)|3^4$, 所以 $4n-3=1,3,9,27,81$

最後得到n=1,3,21， n=1,3時我們證明其為完美控制的例子，但是21元4維並不是完美控制情形。

因為21元4維共需2401個點，而每個點會出現在6個平面上，故總共出現14406次。但是我們只有2646個平面，14406÷2646 > 1，故不會是完美控制。

$n=2$時$\frac{n^4}{4n-3}>3$，由(二.3式)得知2^4密碼鎖問題最小控制集點數上限是4，

故2^4最小控制集其點數為4，因延伸樹能涵蓋5點，$4\times5>2^4$這也是1組非完美控制的最小控制集。

【小結論4】4維問題中的最小控制集數的下限：

$$\text{最小控制集點數} \geq \frac{n^4}{4n-3} \qquad \text{(二.4式)}$$

4.N元N+1維滿足完美控制的必要條件

留意到2元3維和3元4維都有完美控制，3元4維卻沒有，那什麼條件下能出現完美控制呢？

N元D維中每個點其延伸樹可涵蓋(N-1)× D+1個點，因此(N-1)× D+1為N^D的因數是完美控制的必要條件，寫成(N-1)× D+1=N^K，K是正整數。由2元3維和3元4維的例子我們猜，當D=N+1，也就是K=2時，滿足必要條件，這時(N-1)× D+1=(N+1)× (N-1)+1=N^2。

【小結論5】N元N+1維時滿足完美控制的必要條件，此時最小控制集點數為：

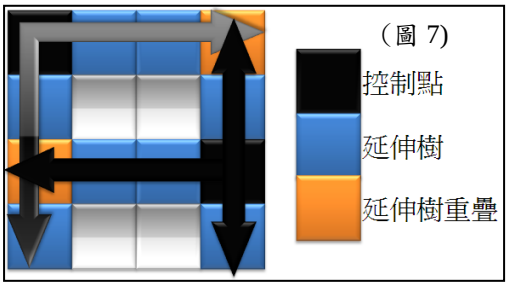
$$\frac{N^D}{(N-1)\times D+1} = N^{N-1} \qquad \text{(二.5式)}$$

(三)、 4元5維的完美控制

在上一節中預測了N元N+1維時可能有完美控制，首先討論N=4的情形，我們仍需先找出1組涵蓋整個4^5超立方的控制集，再去證明它是1組完美控制。

1.完美控制則任1平面上最多能有1個控制點

兩個控制點出現在同一平面上則其延伸樹必會重疊如右圖(7)，反之所有平面上只有1控制點時則延伸樹不

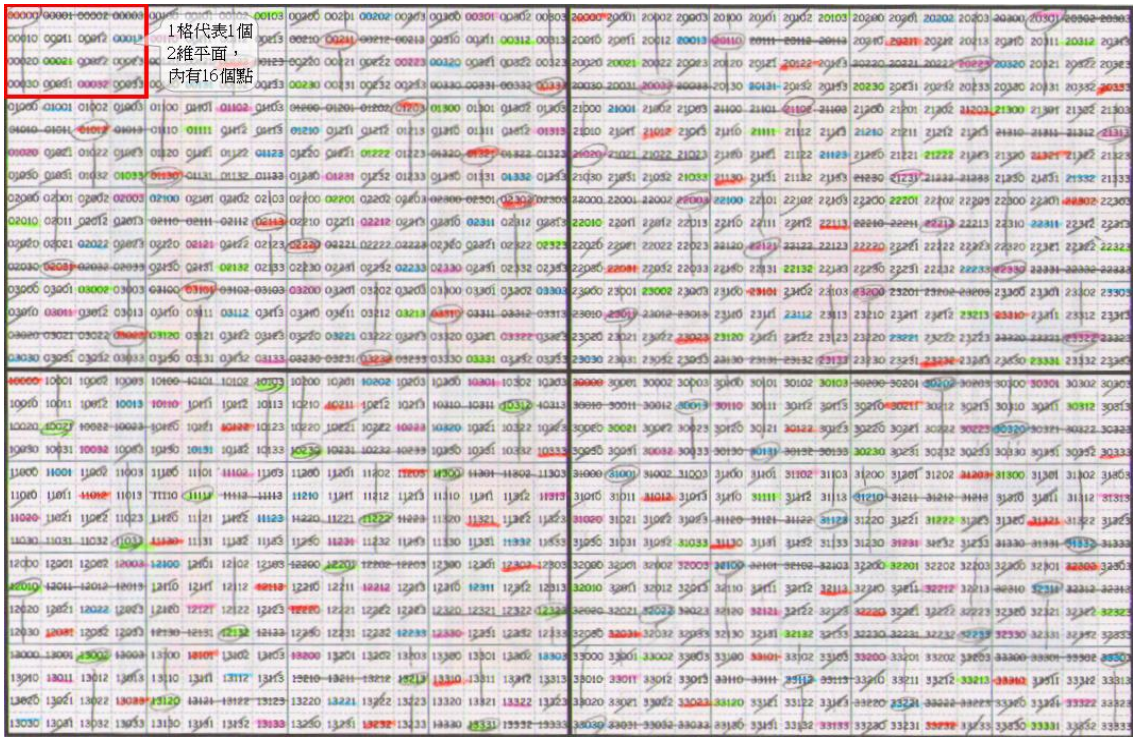


（圖 7）

重疊，故完美控制時所有平面上不能超過1個控制點。

2.用拉丁超立方和正交拉丁方陣挑選完美控制的控制集

在3元4維中使用數獨的方法找到的控制集是完美控制，我們也把4元5維分割成64個2維平面如下圖(8)，再借用「不同行、列」的想法挑出1組64個點。



圖(8)　圈起 64 個點及其延伸樹

上圖(8)中挑出的64個點其座標列出如表(四)(五)(六)(七)。表(四)中每1格代表1個圖(8)中的2維平面，將其編為0~63號，同1格中的16個點它們前3維座標都相同所以把這64個平面命名為(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)~(3,3,3)如同表(五)所示，這64個3元數也正好是表(四)中的數由10進位轉成4進位的結果。

編號0~63個格子代表64個2維平面

	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	表四
	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	
	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	
	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	
x1	000	010	020	030	100	110	120	130	200	210	220	230	300	310	320	330	表五
x2	001	011	021	031	101	111	121	131	201	211	221	231	301	311	321	331	
x3	002	012	022	032	102	112	122	132	202	212	222	232	302	312	322	332	
	003	013	023	033	103	113	123	133	203	213	223	233	303	313	323	333	

這64個點其(x_4,x_5)座標如表(六)，把(x_4,x_5)的數字分開來看，這2× 64個數字剛好形成2個4階拉丁立方體，同時(x_4,x_5)在相同的平面中形成4階的正交拉丁方陣。把表(五)和表(六)合成表(七)就是這64個點的5維座標。

X4和x5在各平面上結合成4階正交拉丁方陣

x4	00	12	31	23	21	33	10	02	32	20	03	11	13	01	22	30	表六
x5	22	30	13	01	03	11	32	20	10	02	21	33	31	23	00	12	
	11	03	20	32	30	22	01	13	23	31	12	00	02	10	33	21	
	33	21	02	10	12	00	23	31	01	13	30	22	20	32	11	03	

合成5維座標

00000	01012	02031	03023	10021	11033	12010	13002	20032	21020	22003	23011	30013	31001	32022	33030	表七
00122	01130	02113	03101	10103	11111	12132	13120	20110	21102	22121	23133	30131	31123	32100	33112	
00211	01203	02220	03232	10230	11222	12201	13213	20223	21231	22212	23200	30202	31210	32233	33221	
00333	01321	02302	03310	10312	11300	12323	13331	20301	21313	22330	23322	30320	31332	32311	33303	

檢查這64個點的延伸樹後發現恰可涵蓋4元5維的超立方體，所以這是一組控制集，接下來我們要證明所選控制集是完美控制。

3.控制點出現在平面上的總次數，證明任1平面都恰有1個控制點

4元5維超立方可由10個方向分割成2維平面，每個方向都分割出64個平面，故整個超立方包含了640個平面。5維超立方中任1個點會出現在10個平面上，故64個控制點恰在所有平面上共出現640次。

若是640個平面上都出現控制點，由鴿籠原理，得到所有平面上恰有1個控制點，因此延伸樹間不重疊。我們把640個平面分成3類5種情況討論：

	(x_4,x_5)不相同	(x_4,x_5)其中之一相同	(x_4,x_5)皆相同
選取維度	1、x_1,x_2,x_3	2、x_1,x_2,x_4和x_1,x_2,x_5 3、x_1,x_3,x_4和x_1,x_3,x_5 4、x_2,x_3,x_4和x_2,x_3,x_5	5、x_1,x_4,x_5、x_2,x_4,x_5和x_3,x_4,x_5

1. x_1,x_2,x_3方向的64個平面

圖(8)中所挑的64個控制點其(x_1,x_2,x_3)座標恰如表(五)所示，也就是這64個控制點分別自出現在表(五)中所示的64個平面，故(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)~(3,3,3)這64個2維平面上都有控制點出現。

2. 換掉x_3，考慮x_1,x_2,x_4和x_1,x_2,x_5方向的2組64個平面

	00	*11*	*22*	*33*	*10*	*11*	*12*	*13*	*20*	*21*	*22*	*23*	*30*	*31*	*32*	*33*	表八
x1	*00*	*11*	*22*	*33*	*10*	*11*	*12*	*13*	*20*	*21*	*22*	*23*	*30*	*31*	*32*	*33*	
x2	*00*	*11*	*22*	*33*	*10*	*11*	*12*	*13*	*20*	*21*	*22*	*23*	*30*	*31*	*32*	*33*	
	00	*11*	*22*	*33*	*10*	*11*	*12*	*13*	*20*	*21*	*22*	*23*	*30*	*31*	*32*	*33*	

每一縱行的數字都相同，每一橫列間的數字都不相同

圖(8)中所挑的64個控制點其中(x_1,x_2)兩維度座標如上表(八)所示，因x_4在同1方向上的數字都不同，故把x_4填入表(八)後形成下表(九)，其64格各自出現000~333的相異3元數，數字皆不重複，這說明了這個切割方向上64個2維平面都出現了控制點。相同的表(十)中的64個數字所代表的平面也都出現了控制點。

x1 x2 x4	000	011	023	032	102	113	121	130	203	212	220	231	301	310	322	333	表九
	002	013	021	030	100	111	123	132	201	210	222	233	303	312	320	331	
	001	010	022	033	103	112	120	131	202	213	221	230	300	311	323	332	
	003	012	020	031	101	110	122	133	200	211	223	232	302	313	321	330	
x1 x2 x5	000	012	021	033	101	113	120	132	202	210	223	231	303	311	322	330	表十
	002	010	023	031	103	111	122	130	200	212	221	233	301	313	320	332	
	001	013	020	032	100	112	121	133	203	211	222	230	302	310	323	331	
	003	011	022	030	102	110	123	131	201	213	220	232	300	312	321	333	

3. 換掉x_2，考慮x_1,x_3,x_4和x_1,x_3,x_5方向的2組64個平面

x1 x3	00	00	00	00	10	10	10	10	20	20	20	20	30	30	30	30	表十一
	01	01	01	01	11	11	11	11	21	21	21	21	31	31	31	31	
	02	02	02	02	12	12	12	12	22	22	22	22	32	32	32	32	
	03	03	03	03	13	13	13	13	23	23	23	23	33	33	33	33	

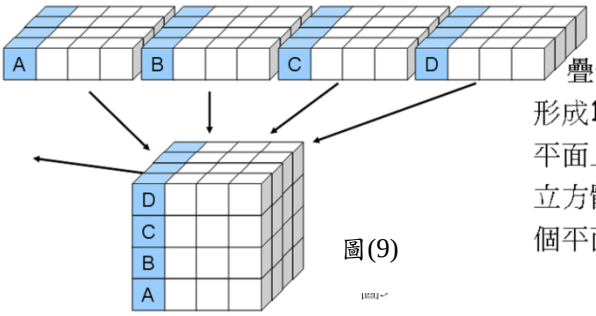
x_4,x_5皆是同1維度4個數字各自相異的拉丁立方體，分別填入表(十一)後形成下表(十二)、(十三)，兩組中64個3元數各自相異。故這2組64個平面上都有控制點出現。

x1 x3 x4	000	001	003	002	102	103	101	100	203	202	200	201	301	300	302	303	表十二
	012	013	011	010	110	111	113	112	211	210	212	213	313	312	310	311	
	021	020	022	023	123	122	120	121	222	223	221	220	320	321	323	322	
	033	032	030	031	131	130	132	133	230	231	233	232	332	333	331	330	
x1 x3 x5	000	002	001	003	101	103	100	102	202	200	203	201	303	301	302	300	表十三
	012	010	013	011	113	111	112	110	210	212	211	213	311	313	310	312	
	021	023	020	022	120	122	121	123	223	221	222	220	322	320	323	321	
	033	031	032	030	132	130	133	131	231	233	230	232	330	332	331	333	

4. 換掉x_1，考慮x_2,x_3,x_4和x_2,x_3,x_5方向2組64個平面

A	B	C	D
00	00	00	00
01	01	01	01
02	02	02	02
03	03	03	03

表十五



圖(9)

疊合4個平面就形成1個立方體，4平面上的4縱行在立方體中也組成1個平面。

	A				B				C				D				
x2 x3	00	10	20	30	00	10	20	30	00	10	20	30	00	10	20	30	表十四
	01	11	21	31	01	11	21	31	01	11	21	31	01	11	21	31	
	02	12	22	32	02	12	22	32	02	12	22	32	02	12	22	32	
	03	13	23	33	03	13	23	33	03	13	23	33	03	13	23	33	

表(七)中的(x_2,x_3)如表(十四)，將4個平面疊成1個立方體，藍底的4個縱行疊合成1個直立的4× 4平面如圖(9)。這個4階方陣中的(x_2,x_3)如表(十五)。表(十五)的型態和表(十一)是相同的，所以把x_4和x_5各自加到表(十五)後在這個直立平面上的16個3位元數也都不重複，圖(9)中藍色位置填出的結果就是000~333如下表(十六)、(十七)，這2組64個平面都有控制點出現其上。

x2 x3 x4	000	101	203	302	002	103	201	300	003	102	200	301	001	100	202	303	表十六
	012	113	211	310	010	111	213	312	011	110	212	313	013	112	210	311	
	021	120	222	323	023	122	220	321	022	123	221	320	020	121	223	322	
	033	132	230	331	031	130	232	333	030	131	233	332	032	133	231	330	
x2 x3 x5	000	102	201	303	001	103	200	302	002	100	203	301	003	101	202	300	表十七
	012	110	213	311	013	111	212	310	010	112	211	313	011	113	210	312	
	021	123	220	322	020	122	221	323	023	121	222	320	022	120	223	321	
	033	131	232	330	032	130	233	331	031	133	230	332	030	132	231	333	

5. 同時換上x_4,x_5，考慮x_1,x_4,x_5、x_2,x_4,x_5和x_3,x_4,x_5方向3組64個平面

x_4,x_5在各平面上皆呈正交拉丁方陣，在每平面上16個2元數皆不相同

故2元數前方放上1位數字後其3位元數也不會重複如下表。

x1 x4 x5	000	012	031	023	121	133	110	102	232	220	203	211	313	301	322	330	表十八
	022	030	013	001	103	111	132	120	210	202	221	233	331	323	300	312	
	011	003	020	032	130	122	101	113	223	231	212	200	302	310	333	321	
	033	021	002	010	112	100	123	131	201	213	230	222	320	332	311	303	
x2 x4 x5	000	112	231	323	021	133	210	302	032	120	203	311	013	201	322	430	表十九
	022	130	213	301	003	111	232	320	010	102	221	333	031	223	300	412	
	011	103	220	332	030	122	201	313	023	131	212	300	002	210	333	421	
	033	121	202	310	012	100	223	331	001	113	230	322	020	232	311	403	
x3 x4 x5	000	012	031	023	021	033	010	002	032	020	003	011	013	001	022	030	表二十
	122	130	113	101	103	111	132	120	110	102	121	133	131	123	100	112	
	211	203	220	232	230	222	201	213	223	231	212	200	202	210	233	221	
	333	321	302	310	312	300	323	331	301	313	330	322	320	332	311	303	

這說明這3組64個平面上也都出現了控制點

由以上10個方向來觀察，利用拉丁超立方體及正交拉丁方陣的特性讓我們證明了在這10組各64個平面上都出現控制點，所以640個平面都恰只有1個控制點，因此延伸樹間皆不重疊。

4.控制集點數及延伸樹涵蓋點數乘積證明是完美控制

1控制點其延伸樹都能涵蓋16個點，圖(8)中64個點的延伸樹最多能涵蓋 $16\times 64=4^5$ 個點，由於其延伸樹都不重疊故共涵蓋了 4^5 個點，故此64點形成控制集且是完美控制，也解決了4旋鈕5號碼的最小保證開鎖問題。

(四)、建造拉丁超立方體，構造5元6維的解

在3元4維及4元5維中發現，完美控制的控制點其最後2維數字上分別呈現拉丁方陣和拉丁立方體，而前面維度的數字呈現10進位數字轉換成3及4進位的結果，所以我們依這2個線索去構造5元6維的解。

由(二.5式)知5元6維完美控制需要挑5^4個控制點。6維超立方中每個點都是6元座標數，任1點所在的15個平面其名稱恰由6元數中任4個數組合表示。

1.用10進位轉換成5進位定出625個控制點的前4維座標

令$S=\{s|s是0\le s\le 624的整數\}$，把$s$換算成5進位數的4元數：

令 $\begin{aligned} x_1(s)&=\text{int}(s\div 125)\\ x_2(s)&=\text{mod}(\text{int}(s\div 25),5)\\ x_3(s)&=\text{mod}(\text{int}(s\div 5),5)\\ x_4(s)&=\text{mod}(s,5)\end{aligned}$，int( )是取整數，mod(,5)是指取5進位的同餘數。

相異的10進位數換算成5進位數時也相異，故x_1,x_2,x_3,x_4組成的4位元數不會重複。

2.建構2個拉丁超立方體做為最後2維座標

考慮2維拉丁方陣的特性，其同一方向上各位置的數都要不同，我們可以用x和y的關係建立拉丁方陣

y \ x	0	1	2	
0	$P(x,y)\equiv x+\alpha y \bmod n$			當 x 相同時，除非 y 也相同，不然 $P(x,y)$不會相同。這個方法可以建立一個拉丁方陣。在 y 相同時，只有在 $x=x'$時 $P(x,y)=P(x',y)$，這方法也可建立一個拉丁方陣 [三]。
1				
2				

擴展這個想法到高維度中，我們再令：

$x_5(s)\equiv x_1+x_2+x_3+x_4 \bmod 5$

$x_6(s)\equiv x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \bmod 5$，

可知　$x_1(s)\times 5^3+x_2(s)\times 5^2+x_3(s)\times 5^1+x_4(s)=s$　　(四.1式)

在0～624中取2數p和q若$x_a(p)=x_a(q),\ x_b(p)=x_b(q),\ x_c(p)=x_c(q),$ $x_d(p)\neq x_d(q)$這裏的指標a,b,c,d是4個介於1到4的相異整數， 則

$x_5(p)-x_5(q)$

$\equiv [x_a(p)-x_a(q)+x_b(p)-x_b(q)+x_c(p)-x_c(q)+x_d(p)-x_d(q)]$

$\equiv x_d(p)-x_d(q)\text{mod}5$

故$x_5(\text{p})\text{-}x_5(\text{q})=\ x_{\text{d}}(\text{p})\text{-}x_{\text{d}}(\text{q})+5\text{k}$，k是整數。又$x_{\text{d}}(\text{p})\text{-}x_{\text{d}}(\text{q})$不是5的倍數

$\therefore x_5(\text{p})\text{-}x_5(\text{q})\neq 0$，這說明了$x_5(\text{s})$是個拉丁超立方體。

同理$x_6(\text{p})\text{-}x_6(\text{q})\equiv \text{d}\times[x_{\text{d}}(\text{p})\text{-}x_{\text{d}}(\text{q})]\text{mod}5=\text{d}\times[x_{\text{d}}(\text{p})\text{-}x_{\text{d}}(\text{q})]+5\text{h}$，

$\because \begin{cases} |x_{\text{d}}(\text{p})\text{-}x_{\text{d}}(\text{q})|\text{不是5的倍數} \\ (\text{d},5)=1\ \ \text{且}\text{d}<5 \end{cases}$，$\therefore x_6(\text{p})\text{-}x_6(\text{q})\neq 0$。說明了$x_6(\text{s})$是個拉丁超立方體。

3.證明所選的625個控制點都不出現在同一個2維平面上

最後令控制點$C(s)=(x_1(s),x_2(s),x_3(s),x_4(s),x_5(s),x_6(\text{s}))$，$\{\ C(s)\mid s\in S\ \}$則共選出了625個6維度座標點，很明顯如果編號$p\neq q$則控制點$C(p)\neq C(q)$。

從S中選2個編號p和q比較$C(p)$和$C(q)$的6維度座標，若兩控制點的任4維數字相同代表2個點出現在相同的2維平面上。所以我們要去證明如果$C(p)$和$C(q)$的任4維維度數字相同，則p和q一定是相同的編號，也就是$C(p)$和$C(q)$是同1點。

我們把5元6維的問題分成4類，對這15個方向的所有平面一一檢查：

第1類：若$C(p)$和$C(q)$的(x_1,x_2,x_3,x_4)座標相同，

$x_1(p)=x_1(q), x_2(p)=x_2(q), x_3(p)=x_3(q), x_4(p)=x_4(q)$

由(四.1式)可得知

$$p = x_1(p)\times 5^3 + x_2(p)\times 5^2 + x_3(p)\times 5^1 + x_4(p)$$

$$= q = x_1(q)\times 5^3 + x_2(q)\times 5^2 + x_3(q)\times 5^1 + x_4(q)$$

因此$C(p)$和$C(q)$的(x_1, x_2, x_3, x_4)相同時，則$p=q$，$C(p)=C(q)$。

第2類：若$C(p)$和$C(q)$的(x_a,x_b,x_c,x_5)座標相同，$a,b,c\in\{1,2,3,4\}$

$$x_a(p)=x_a(q), x_b(p)=x_b(q), x_c(p)=x_c(q), x_5(p)=x_5(q)$$

$$\because x_5(p)=x_5(q)$$

則$x_1(p)+x_2(p)+x_3(p)+x_4(p)\equiv x_1(q)+x_2(q)+x_3(q)+x_4(q)\text{mod}5$

$$x_d(p)\equiv x_d(q)\text{mod}5$$

$$x_d(p)-x_d(q)=5k,\ k\text{是整數}$$

$$\text{又}|x_d(p)-x_d(q)|<5$$

$$\therefore k=0$$

$$x_d(p)=x_d(q)$$

由(四.1式)得到編號$p=q$。

因此點$C(p)$和$C(q)$的(x_a,x_b,x_c,x_5)相同時，則$C(p)=C(q)$。

第3類：若$C(p)$和$C(q)$的(x_a,x_b,x_c,x_6)座標相同，$a,b,c\in\{1,2,3,4\}$

$$x_a(p)=x_a(q), x_b(p)=x_b(q), x_c(p)=x_c(q), x_6(p)=x_6(q)$$

$\because x_6(p) = x_6(q)$

則$x_1(p) + 2x_2(p) + 3x_3(p) + 4x_4(p)$

$\equiv x_1(q) + 2x_2(q) + 3x_3(q) + 4x_4(q)\text{mod}5$

$dx_d(p) \equiv dx_d(q)\text{mod}5$

$d[x_d(p) - x_d(q)] = 5k$

又$\begin{cases} |x_d(p) - x_d(q)| < 5 \\ d < 5 \end{cases}$

$\therefore x_d(p) = x_d(q)$

由(四.1式)得到編號p=q。

因此點$C(p)$和$C(q)$的(x_a,x_b,x_c,x_6)若相同，可得$C(p)$=$C(q)$。

第4類：若$C(p)$和$C(q)$的(x_a,x_b,x_5,x_6)座標相同，$a,b,c,d \in \{1,2,3,4\}$

$x_a(p) = x_a(q), x_b(p) = x_b(q), x_5(p) = x_5(q), x_6(p) = x_6(q)$

$\because x_5(p) = x_5(q), x_6(p) = x_6(q)$

則 $\begin{cases} x_c(p) + x_d(p) \equiv x_c(q) + x_d(q)\text{mod}5 \\ cx_c(p) + dx_d(p) \equiv cx_c(q) + dx_d(q)\text{mod}5 \end{cases}$

$\begin{cases} (c-d)(x_d(p) - x_d(q)) \equiv 0\text{mod}5 \\ (d-c)(x_c(p) - x_c(q)) \equiv 0\text{mod}5 \end{cases}$

$\begin{cases} (c-d)[x_d(p) - x_d(q)] \equiv 5k \\ (d-c)[x_c(p) - x_c(q)] \equiv 5h \end{cases}$ k, h是整數

又$\begin{cases} (c-d) \neq 0 \\ |x_d(p) - x_d(q)| < 5 \end{cases}$

故$x_d(p) = x_d(q), x_c(p) = x_c(q)$

再由(四.1式)我們得到p=q。

因此點$C(p)$和$C(q)$的(x_a,x_b,x_5,x_6)若相同，可得$C(p)=C(q)$。

我們證明了所選的625個點中，任意2個不同控制點都不會出現在同一個2維平面上，所以延伸樹也不會重疊。每棵延伸樹所涵蓋點數是$6\times 4+1=25$，所選的625個點的延伸樹總共涵蓋了$25\times 625=5^6$個點，因延伸樹不重疊所以這5^6個點也相異，因此證明了這個625點蓋滿整個超立方所以是5元6維密碼鎖最小控制集也是完美控制。

(五)、 當N為質數時，構造N元N+1維的完美控制情形

雖然在4元5維和5元6維中都挑出完美控制的控制集，但挑選的方法是不同，4元5維的拉丁立方和正交拉丁方陣比5元6維中的拉丁超立方還要難構造出來，原因是5是質數而4是合數，參考了一些資料後[三]，我們把N=5的情況推廣到一般的質數。

令$S=\{s|s是0\le s\le n^{n-1}-1的整數\}$，把$s$換算成$n$-1位元的$n$進位數，

$$x_1(s)=\text{int}(s\div n^{n-2})$$
$$x_2(s)=\text{mod}[\text{int}(s\div n^{n-3}),n]$$
令 $$x_3(s)=\text{mod}[\text{int}(s\div n^{n-4}),n]$$
$$....$$
$$....$$
$$x_{n-1}(s)=\text{mod}[s,n]$$

接著再建構2個拉丁超立方

令 $$x_n(s)=x_1+x_2+x_3+...+x_{n-1}\bmod n$$
$$x_{n+1}(s)\equiv x_1+2x_2+3x_3+...+(n-1)x_{n-1}\bmod n$$

故$x_1(s)\times n^{n-2}+x_2(s)\times n^{n-3}+x_3(s)\times n^{n-4}+\cdots+x_{n-1}(s)=s$　　(五.1式)

定義控制點$C(s)=(x_1(s),x_2(s),x_3(s),...,x_{n+1}(s))$，當$p,q\in S,p\neq q$則控制點$C(p)\neq C(q)$。

我們要證明若是$C(p)$和$C(q)$的任意n-1個維度相同，這兩點必為相同的控制點。

我們分成4類把C_{n-1}^{n+1}個方向的平面一一檢查：

第1類：若$C(p)$和$C(q)$的前n-1維度相同，

$x_1(p)=x_1(q), x_2(p)=x_2(q), x_3(p)=x_3(q), ...x_{n-1}(p)=x_{n-1}(q)$

由(五.1式)得 $p=q$。因此點$C(p)$和$C(q)$的$(x_1, x_2, x_3, ...x_{n-1})$若相同，推得

$C(p)$和$C(q)$必為同1點。

第 2 類：若$C(p)$和$C(q)$的$(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3} ....x_{i_{n-2}}, x_n)$相同，也就是

$x_{i_1}(p)=x_{i_1}(q), x_{i_2}(p)=x_{i_2}(q), \cdots, x_{i_{n-2}}(p)=x_{i_{n-2}}(q)$, 且$x_n(p)=x_n(q)$

其中$i_j \in \{1,2,3, \cdots n-1\}$，且當$j \neq k$時，指標$i_j \neq i_k$

$\because x_n(p)=x_n(q)$

$\therefore x_1(p)+x_2(p)+x_3(p) \cdots + x_{n-1}(p)$

$= x_1(q)+x_2(q)+x_3(q) \cdots + x_{n-1}(q)+nk$

$\Rightarrow x_{i_{n-1}}(p)=x_{i_{n-1}}(q)+nk$

$\because \left|x_{i_{n-1}}(p)-x_{i_{n-1}}(q)\right| < n \Rightarrow K=0$

$\therefore x_{i_{n-1}}(p)=x_{i_{n-1}}(q)$

由(五.1式)得 $p=q$ ，故點$C(p)$和$C(q)$的$(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3} ....x_{i_{n-2}}, x_n)$若相同，

必為同1點。

第3類：若 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的 $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}....x_{i_{n-2}}, x_{n+1})$ 相同，

$x_{i_1}(p) = x_{i_1}(q), x_{i_2}(p) = x_{i_2}(q), ...x_{i_{n-2}}(p) = x_{i_{n-2}}(q)$, 且 $x_{n+1}(p) = x_{n+1}(q)$

其中 $i_j \in \{1,2,3...n-1\}$，且當 $j \neq k$ 時，指標 $i_j \neq i_k$

$\because x_{n+1}(p) = x_{n+1}(q)$

$\therefore x_1(p) + 2x_2(p) + 3x_3(p) \cdots + (n-1)x_{n-1}(p)$

$= x_1(q) + 2x_2(q) + 3x_3(q) \cdots (n-1)x_{n-1}(q) + nK$

$\Rightarrow i_{n-1} \times x_{i_{n-1}}(p) = i_{n-1} \times x_{i_{n-1}}(q) + nK$

$\Rightarrow i_{n-1} \times \left[x_{i_{n-1}}(p) - x_{i_{n-1}}(q)\right] = nK$

K 是整數

$\because \begin{cases} i_{n-1} < n \\ \left|x_{i_{n-1}}(p) - x_{i_{n-1}}(q)\right| < n \end{cases} \Rightarrow \mathrm{K} = 0$

$\therefore x_{i_{n-1}}(p) - x_{i_{n-1}}(q) = 0$

由(五.1式)得到 $p = q$ 。

因此點 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的 $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}....x_{i_{n-2}}, x_{n+1})$ 若相同，必為同點。

第 4 類：若 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的 $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}....x_{i_{n-3}}, x_n, x_{n+1})$ 相同，

$x_{i_1}(p) = x_{i_1}(q), x_{i_2}(p) = x_{i_2}(q), ...x_{i_{n-3}}(p) = x_{i_{n-3}}(q), x_n(p) = x_n(q), x_{n+1}(p) = x_{n+1}(q)$

其中 $n-3$ 個指標 $i_j \in \{1,2,3...n-1\}$，當 $j \neq k$ 時，指標 $i_j \neq i_k$ 。

由 $\begin{cases} x_{i_{n-2}}(p) + x_{i_{n-1}}(p) \equiv x_{i_{n-2}}(q) + x_{i_{n-1}}(q) \mathrm{mod} n \\ i_{n-2} \cdot x_{i_{n-2}}(p) + i_{n-1} \cdot x_{i_{n-1}}(p) \equiv i_{n-2} \cdot x_{i_{n-2}}(q) + i_{n-1} \cdot x_{i_{n-1}}(q) \mathrm{mod} n \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases}(i_{n-2}-i_{n-1})\times[x_{i_{n-1}}(p)-x_{i_{n-1}}(q)]\equiv 0 \bmod n\\ (i_{n-1}-i_{n-2})\times[x_{i_{n-2}}(p)-x_{i_{n-2}}(q)]\equiv 0 \bmod n\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(i_{n-2}-i_{n-1})\times[x_{i_{n-1}}(p)-x_{i_{n-1}}(q)]\equiv nK\\ (i_{n-1}-i_{n-2})\times[x_{i_{n-2}}(p)-x_{i_{n-2}}(q)]\equiv nH\end{cases} \quad K、H是某個整數$$

因為n是質數所以$(i_{n-1}-i_{n-2})$和$x_{i_{n-1}}(p)-x_{i_{n-1}}(q)$的其中之一應是$n$的倍數，

$$\because \begin{cases} i_{n-1}-i_{n-2}\neq 0\\ |\ x_{i_{n-1}}(p)-x_{i_{n-1}}(q)\ |<5\end{cases}\Rightarrow K=0$$

但

$$\therefore \begin{cases}x_{i_{n-1}}(p)=x_{i_{n-1}}(q)\\ x_{i_{n-2}}(p)=x_{i_{n-2}}(q)\end{cases}$$

最後我們由(五.1式)得到 $p=q$

因此點$C(p)$和$C(q)$的$(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}....x_{i_{n-3}},x_n,x_{n+1})$若相同，必為同1點。

因此以上所選出的控制點都不出現在相同的2維平面上，得到延伸樹不重疊，又每個延伸樹涵蓋的點數是$(n+1)(n-1)+1=n^2$，所選的n^{n-1}個延伸樹總共涵蓋了$n^{n-1}\times n^2=n^{n+1}$個點，因此我們證明了這$n^{n-1}$個點集是$n$元$n+1$維密碼鎖的最小控制集，且是完美控制的情況。

(六)、當n是大於2且非6的正整數時，構造n元$n+1$維的完美控制情形

前一節中建構拉丁超立方的方法只能用在N是質數時，我們參考了文獻[四]的方法來建構新的超立方體。當n是大於2且非6正整數時，我們用2個order n的正交拉丁方陣做基底來建構order n,維度$n-1$的拉丁超立方體。

首先令$S=\{s|s是0\le s\le n^{n-1}-1的整數\}$，把$s$換算成$n$-1位元的$n$進位數，

$x_1(s) = \text{int}(s \div n^{n-2})$

$x_2(s) = \text{mod}(\text{int}(s \div n^{n-3}), n)$

$x_3(s) = \text{mod}(\text{int}(s \div n^{n-4}), n)$

....

....

$x_{n-1}(s) = \text{mod}(s, n)$

則 $x_1(s) \times n^{n-2} + x_2(s) \times n^{n-3} + x_3(s) \times n^{n-4} + ... + x_{n-1}(s) = s$ (六.1式)

接著再藉2個正交的拉丁陣來建構2個拉丁超立方體：

先令 $A(a_{i,j}), a_{i,j} = i + j \mod n$， $B(b_{i,j}), b_{i,j} = i - j \mod n$， $1 \le i, j \le n$ 的整數，很明顯 $A(a_{i,j}), B(b_{i,j})$ 是兩個order n的正交拉丁方陣。

令 $x_n(s) = A(x_1(s), A(x_2(s), A(x_3(s),..., A(x_{n-2}(s), x_{n-1}(s))....)))$

$x_{n+1}(s) = B(x_1(s), A(x_2(s), A(x_3(s),..., A(x_{n-2}(s), x_{n-1}(s))) . . . .$

定義控制點 $C(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s),..., x_{n+1}(s))$ ，若 $p, q \in S, p \ne q$ 則 $C(p) \ne C(q)$ 。

我們要證明若是 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的任意 $n-1$ 個維度上相同，這兩點必為相同的控制點。

我們分成4類把 C_{n-1}^{n+1} 個方向的平面一一檢查：

第1類：若 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的前 $n-1$ 維度相同，

$x_1(p) = x_1(q), x_2(p) = x_2(q), x_3(p) = x_3(q),...x_{n-1}(p) = x_{n-1}(q)$

由(六.1式)得 $p = q$ 。因此點 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的 $(x_1, x_2, x_3,...x_{n-1})$ 若相同，

推得 $C(p)$ 和 $C(q)$ 必為同1點。

第2類：若 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的 $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}...x_{i_{k-1}}, x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}..., x_{i_{n-1}}, x_n)$ 相同，也就是

$x_1(p) = x_1(q), x_2(p) = x_2(q), ...x_{k-1}(p) = x_{k-1}(q), x_{k+1}(p) = x_{k+1}(q), ...x_n(p) = x_n(q)$

我們要推論出 $x_k(p) = x_k(q)$ 。

$\because x_{k+1}(p) = x_{k+1}(q), ...x_{n-1}(p) = x_{n-1}(q)$

故存在 $y_k = A(x_{k+1}(p), A(x_{k+2}(p), .., A(x_{n-2}(p), x_{n-1}(p)).)$

$= A(x_{k+1}(q), A(x_{k+2}(q), .., A(x_{n-2}(q), x_{n-1}(q)) . .)$

假設 $A(x_k(p), y_k) \neq A(x_k(q), y_k)$

又因 $x_1(p) = x_1(q), x_2(p) = x_2(q), ...x_{k-1}(p) = x_{k-1}(q)$

則 $A(x_{k-1}(p), A(x_k(p), y_k)) \neq A(x_{k-1}(q), A(x_k(q), y_k))$ ，

但遞推到 $x_n(p) = A(x_1(p), ...A(x_{k-1}(p), A(x_k(p), y_k))$

$\neq A(x_1(q), ...A(x_{k-1}(q), A(x_k(q), y_k)) = x_n(q)$ 矛盾

$\therefore A(x_k(p), y_k) = A(x_k(q), y_k)$ ，也就是 $x_k(p) = x_k(q)$

由(六.1式)得 $p = q$

故點 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的 $(x_1, x_2, x_3....x_{k-1}, x_{k+1,} x_{k+2}, ...x_n)$ 若相同，必為同1點。

第3類：若 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的 $(x_1, x_2, x_3....x_{k-1}, x_{k+1,} x_{k+2}, ...x_{n-1}, x_{n+1})$ 相同，也就是

$x_1(p) = x_1(q), x_2(p) = x_2(q), ..x_{k-1}(p) = x_{k-1}(q), x_{k+1}(p) = x_{k+1}(q)., x_{n+1}(p) = x_{n+1}(q)$

其證明過程和第2類相似。

因此點 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的 $(x_1, x_2, x_3....x_{k-1}, x_{k+1,} x_{k+2}, ...x_{n-1}, x_{n+1})$ 若相同，必為同點。

第4類：若 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的 $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3} \ldots . x_{i_{n-3}}, x_n, x_{n+1})$ 相同， 令

$\alpha_1 = x_1(p) = x_1(q), \alpha_2 = x_2(p) = x_2(q), \ldots$

$\alpha_{c-1} = x_{c-1}(p) = x_{c-1}(q), \alpha_{c-1} = x_{c+1}(p) = x_{C+1}(q), \ldots$

$\alpha_{d-1} = x_{d-1}(p) = x_{d-1}(q), \alpha_{d+1} = x_{d+1}(p) = x_{d+1}(q) \ldots .$

$\alpha_{n-1} = x_{n-1}(p) = x_{n-1}(q), 1 \le c < d \le n-1$ 且

$x_n(p) = x_n(q), x_{n+1}(p) = x_{n+1}(q)$

由定義 $x_n(s)$ 和 $x_{n+1}(s), \{s \in S\}$ 是2個秩是n，維度n-1的拉丁超立方體，且其超平面也呈正交拉丁方陣：

$M(x_c(s), x_d(s))$

$= A(\alpha_1, A(\alpha_2, .. A(x_c(s), A(\alpha_{c+1,} \ldots A(\alpha_{d-1}, A(x_d(s), A(\alpha_{d+1}, A(\alpha_{n-1}) \ldots .)))))))$

$T(x_c(s), x_d(s))$

$= B(\alpha_1, A(\alpha_2, .. A(x_c(s), A(\alpha_{c+1,} \ldots A(\alpha_{d-1}, A(x_d(s), A(\alpha_{d+1}, A(\alpha_{n-1}) \ldots .)))))))$,

因 $x_n(p) = x_n(q), x_{n+1}(p) = x_{n+1}(q)$ ，所以 $M(x_c(p), x_d(p)) = M(x_c(q), x_d(q))$

且 $T(x_c(p), x_d(p)) = T(x_c(q), x_d(q))$ ，

又M, T兩個拉丁方陣正交得到 $x_c(p) = x_c(q)$, $x_d(p) = x_d(q)$

最後我們由(六.1式)得到 $p = q$

因此點 $C(p)$ 和 $C(q)$ 的 $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3} \ldots . x_{i_{n-3}}, x_n, x_{n+1})$ 若相同，必為同1點。

因所有相異控制點都不在相同的2維平面上，故延伸樹不重疊，而每個延伸樹

涵蓋的點數是$(n+1)(n-1)+1=n^2$，所選的n^{n-1}個延伸樹總共涵蓋了$n^{n-1}\times n^2=n^{n+1}$個點，因此我們證明了這$n^{n-1}$個點集是$n$元$n+1$維密碼鎖的最小控制集，且是完美控制的情況。

四、研究結果

（一）、 瑕疵密碼鎖保證打開問題可以對應於超立方體中的控制集問題。N≠6的正整數時，旋鈕數$D=N+1$且旋鈕上有N個號碼的情況時可用拉丁超立方找出N^{N+1}中延伸樹不重疊的控制集，稱為「完美控制」，這時最小控制集點數是N^{N-1}。

（二）、 4^5問題完美控制的最小控制集點數是64。

（三）、 N^4問題中，在$N=1$或3以外都沒有完美控制；2^4問題的最小控制集數是4，4^4問題的最小控制集數介於21~32之間；N^4問題給出

上限公式： N是偶數時：$\left[\left(\frac{N}{2}\right)^2+\left(\frac{N}{2}\right)^2\right]\times N$

N是奇數時：$\left[\left(\frac{N+1}{2}\right)^2+\left(\frac{N-1}{2}\right)^2\right]\times N$ (二.3式)

下限公式： $\frac{n^4}{4n-3}$ (二.4式)

（四）、 N^D超立方中完美控制的必要條件為 $\frac{N^D}{(N-1)\times D+1}=N^K, K$ 是正整數；當$D=N+1$時最小控制集點數$N^K=N^{N-1}$，延伸樹涵蓋點數$(N-1)\times D+1=N^2$。

（五）、 *Cartesianproduct*可以把N^D超立方分割成較小維度的集合以適合分析，而拉丁超立方的方法也可把N^{N+1}也以分割成不重疊N^{N-1}的個集合。

五、 討論

(一)、在2維平面中畫3維立方體時，我們自小已經學會辨認哪些線條是真的有交點哪些是視覺上的誤差，但在2維平面上畫4維的圖形時線條交錯的誤差辨認起來就麻煩多了，所以把維度高的超立體切割成2維平面是個很好的分析方法。要把4維超立方切成表(一)這個想法我們想了很久，靈感是我們能把3維切成2維平面當然也能把4維分割成2維平面，老師說就是善用*Cartesianproduct*的概念。有了這個想法，高維度的超立方體就不會那麼抽象了，我們也才能夠在高維度的問題中找到分析的起點，發現了3^4問題中的完美控制。

(二)、拉丁方陣的概念很簡單，但是要用數字或函數去表達一個拉丁方陣就不是那麼容易了，就好像數獨遊戲，規則很容易了解但解法卻不是很好用文字表達，所以本篇報告我們用了很多圖形來表達我們要說明的概念，但即使用了圖形，仍然需要使用「同餘數」來寫出我們要選的控制點，在N^{N+1}所使用的拉丁超立方挑選最小控制集時，受限於係數與N的互質關係；原本我們只會建構在N是質數時的拉丁超立方體，此時的證明方法中各項係數除了要和N互質之外，係數兩兩相減也要和N互質。後來我們從參考文獻[四]中學習到建構正交超立方體的方法，所以才解決了N^{N+1}的所有情況(除了N=6)

(三)、在4維度的問題中，我們提到4維度沒有像3維那樣型態的公式，主要也是受限於我們對3次方程式的認識，我們說明沒有像3維類型的公式，還沒能力進一步的證明這類公式不存在，所以只能找到4維問題的最小控制集的上下限。在3維時我們證明完美控制只在N=1或2時發生，但高次方的多項式函數的因式問題我們不太會證明，在討論1.6式時只知道N=1及N=D-1會使得$(N-1)\times D+1$是N^D的因數，如果能證明除了上面以外沒有其它正整數解，等於說明了只有在N=1和D-1時，D維超立方密碼鎖才會有完美控制的情況。

(四)、在N≠6時證明完美控制的過程中，最後2維度的超立方體要在各平面中形成正交拉丁方陣，在這N不是質數時的證明過程中很重要。

六、結論、心得與展望

(一)、 N是非6的正整數時可構造並證明N元N+1維的密碼鎖問題會出現完美控制的情況。

(二)、 延伸樹不重疊必須要每個2維平面都只能有1個控制點。我們能由數獨遊戲中發現，建構拉丁方陣的方法可以在每個2維平面挑選1個控制點，經由鴿籠原理，我們把各控制點在所有2維平面中出現的次數加總，除以2維平面的總數，得到所有的2維平面恰有1個控制點，也就是達成延伸樹之間不重疊。最後由每個控制點延伸樹能涵蓋的數目，乘上控制點數來證明所選的是個完美控制的控制集。

(三)、 N≠6時建構2個N元N+1維拉丁超立方的方法我們已經找到了，所以能證明到其完美控制，但是6元7維的完美控制我們連其是否存在都不確定，這也是我們將來的目標。

(四)、 完美控制下的延伸樹彼此不重疊，也就是說我們找到了用拉丁超立方的方法把N元N+1維超立方體分割成 N^{N-1} 個彼此互斥的部份，而每一部份都由1個樞紐點(控制點)相連。在看參考資料時也看到一些在超立方體上討論漢彌頓迴圈的問題，主要是在討論「在某些節點或邊不能相通時如何在超立方體中找到一個路徑把所有點都連接」，這個讓人覺得很有挑戰性，所以我們也希望能再朝漢彌頓迴圈再去研究。

(五)、 我們討論的密碼鎖問題是指1個維度錯誤仍能打開的情況，那如果條件改成2個維度錯誤仍能打開呢?如果仍以「完美控制」的角度切入時目前只發現 2^5 問題中有完美控制的情況，而其它的情況還沒有進一步的了解。

(六)、 4維一般情況的問題中我們尚無法找到一個最小控制集公式，但可以由*Cartesianproduct*來理解3維和4維的關係，所以得到最小控制集數的上限公式(二.3式)，又

從延伸樹的有效涵蓋的觀念中得到最小控制集數的上限公式(二.4式)。只是上、下限公式之間的範圍還很大，我們應該再學習寫電腦程式去找到一些4維度的問題的控制集，來再把4維度的問題解決得更好。相同的方法我們也可對其它維度做出上、下限的控制集點數公式，但仍因為把範圍太大故公式並沒有列出。

(七)、 在做這份科展時老師一直讓我們練習去發現問題的特性、實驗一些例子後去驗證我們的猜想、再去構思想證明的現象如何用數學的方法組織和列式、找到數學的工具來證明我們的推測。每一個小節進行中遇到困難時我們就要回來想一想這個步驟，最後我們找到了一部份我們想知的答案也學到很多思考的方法、表達的方法、證明的寫法。我們發現數學不只是計算，反而感受到了數學和許多現實世界中問題是如此有關連。

七、參考資料及其它

[一] 李佳晉、藍唯倫、徐書強、鄭博升/ 超立方體Qn之最小控制/ 第四十八屆全國中小學科 學展覽P1~P7。

[二] 陳冠儒、翁翠微、伍蕙萱、陳冠霖/ 密碼鎖/ 第四十三屆全國中小學科學展覽。

[三] Jerzy Wojdyło/Latin Squares, Cubes and Hypercubes/Southeast Missouri State University
March 31, 2007.P7~P18

[四] M.Trenkler /On orthogonal Latin p-dimensional cubes/Czechoslovak MathematicalJournal 55 (2005) 725-728.

附錄：非質數階的正交拉丁方陣

(一) 、Order 4 的正交拉丁方陣

00	12	31	23
22	30	13	01
11	03	20	32
33	21	02	10

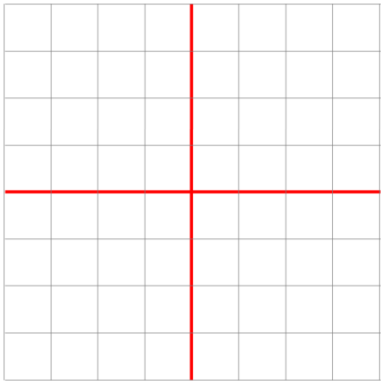
(二)、Order 9 的正交拉丁方陣

00	11	22	33	44	55	66	77	88
18	20	31	42	53	64	75	86	07
27	38	40	51	62	73	84	05	16
36	47	58	60	71	82	03	14	25
45	56	67	78	80	01	12	23	34
54	65	76	87	08	10	21	32	43
63	74	85	06	17	28	30	41	52
72	83	04	15	26	37	48	50	61
81	02	13	24	35	46	57	68	70

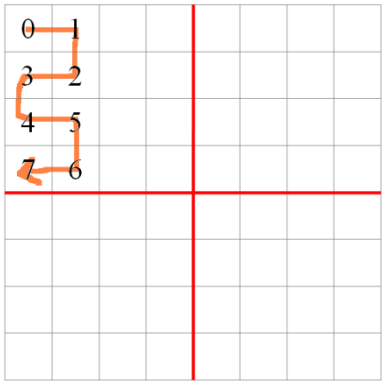
(三)、2^p階的正交拉丁方陣作法

1.方陣 C 的作法

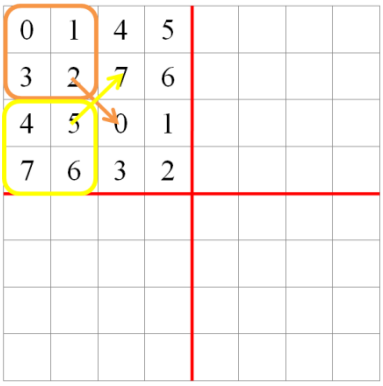
1.在表格中央畫一十字



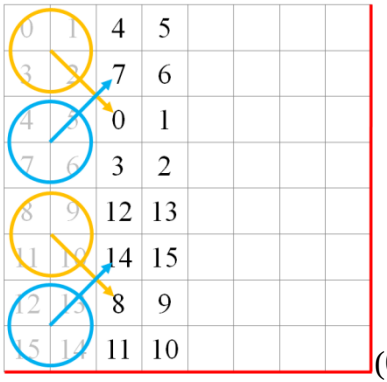
2.從最左端以 S 型依序填入 $0,1,2,3,....2^k-1$



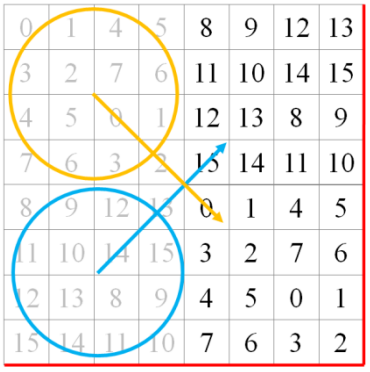
3.將左上四格與下方四格交叉填入其右方



4.不斷交叉填入，直到左上方$\frac{2^k}{2}\times\frac{2^k}{2}$方格填滿



(01)



(02)

5.把左上的 4×4 方格 180°旋轉，分別填入右上和左下

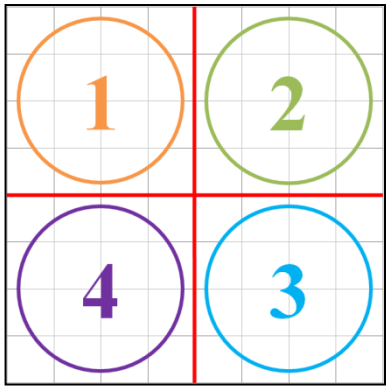
0	1	4	5	2	3	6	7
3	2	7	6	1	0	5	4
4	5	0	1	6	7	2	3
7	6	3	2	5	4	1	0
2	3	6	7				
1	0	5	4				
6	7	2	3				
5	4	1	0				

6.將左上的 4×4 方格依樣填入右下

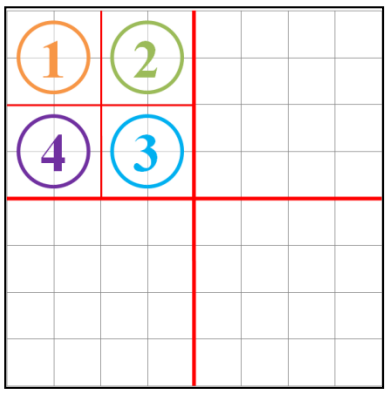
0	1	4	5	2	3	6	7
3	2	7	6	1	0	5	4
4	5	0	1	6	7	2	3
7	6	3	2	5	4	1	0
2	3	6	7	0	1	4	5
1	0	5	4	3	2	7	6
6	7	2	3	4	5	0	1
5	4	1	0	7	6	3	2

2.方陣 D 的作法

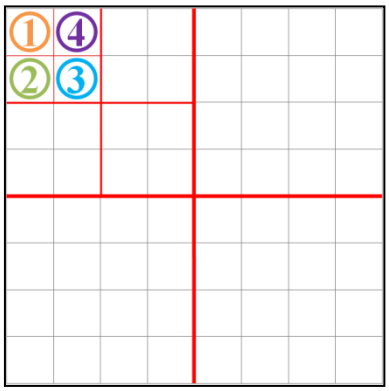
1.以方陣中心為原點,過原點兩條互相垂直的線為主要區隔線,由順時針方向從左上到左下分別為 1,2,3,4 區(四區同樣大小)



2.再把每個區各自互相以同樣方式切割成四區



3.重複以上直到區分成各自 1×1 的小格

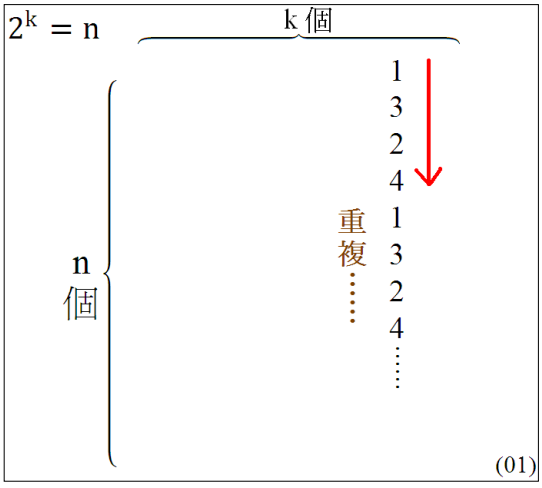


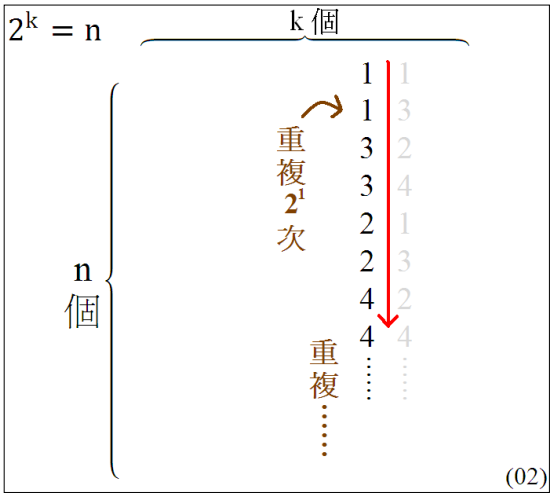
4.某點在表中的 a 區中的 b 區中的 c 區中的.....中的 z 區。座標為(a,b,c,...,z)
如表中的藍字座標為(1, 3,2,4)

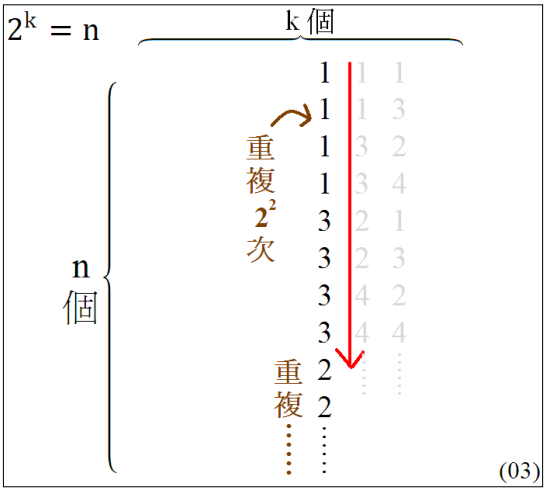
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	5	6	7	2	3	0	1	12	13	14	15	10	11	8	9
5	4	7	6	3	2	**1**	0	13	12	15	14	11	10	9	8
7	6	5	4	1	0	3	2	15	14	13	12	9	8	11	10
6	7	4	5	0	1	2	3	14	15	12	13	8	9	10	11
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
10	11	8	9	12	13	14	15	2	3	0	1	4	5	6	7
11	10	9	8	13	12	15	14	3	2	1	0	5	4	7	6
9	8	11	10	15	14	13	12	1	0	3	2	7	6	5	4
8	9	10	11	14	15	12	13	0	1	2	3	6	7	4	5

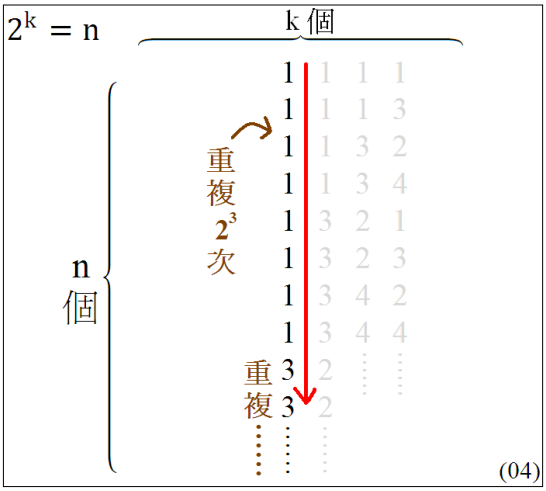
5.再以 1,3,2,4 這個順序填入基本組座標(如下表)

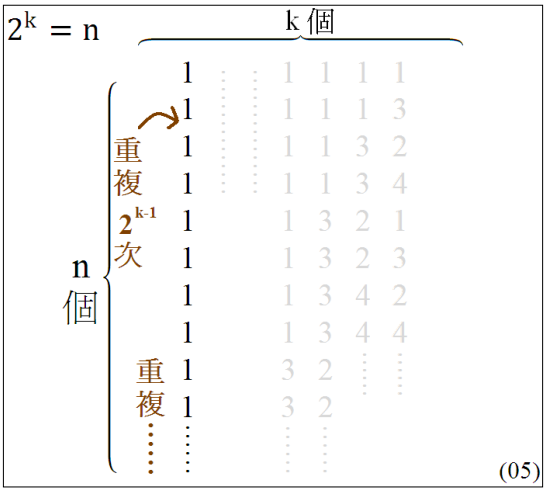
(基本組座標構造方法)











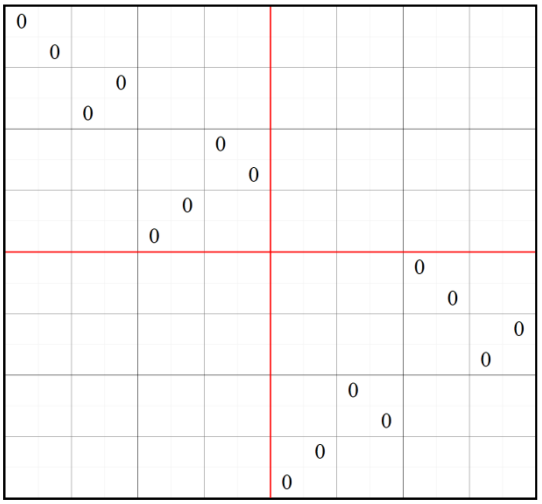
※若以 n=16 為例

1.現在我們要先填入 0

0 的二進位是 0000(四個區座標皆不用改,0 表示不用改,1 表示要 12 互變,34 互變)故基本組的座標不用改變,直接填入

基本組				完全不改	數字0	(0000)		
1	1	1	1		1	1	1	1
1	1	1	3		1	1	1	3
1	1	3	2		1	1	3	2
1	1	3	4		1	1	3	4
1	3	2	1		1	3	2	1
1	3	2	3		1	3	2	3
1	3	4	2		1	3	4	2
1	3	4	4		1	3	4	4
3	2	1	1		3	2	1	1
3	2	1	3		3	2	1	3
3	2	3	2		3	2	3	2
3	2	3	4		3	2	3	4
3	4	2	1		3	4	2	1
3	4	2	3		3	4	2	3
3	4	4	2		3	4	4	2
3	4	4	4		3	4	4	4

(座標上的點皆須填入 0)



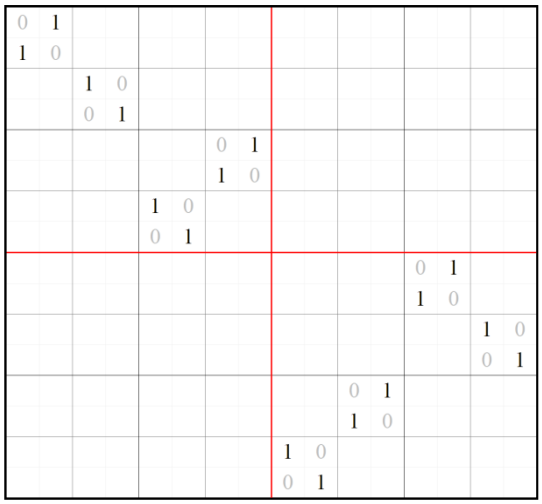
2.接下來要填入 1

1 的二進位是 0001(從左邊數來第 4 個區座標要 12 互變,34 互變)

完成後依此組座標填入

基本組				改第四列	數字1			(0001)
1	1	1	1		1	1	1	2
1	1	1	3		1	1	1	4
1	1	3	2		1	1	3	1
1	1	3	4		1	1	3	3
1	3	2	1		1	3	2	2
1	3	2	3		1	3	2	4
1	3	4	2		1	3	4	1
1	3	4	4		1	3	4	3
3	2	1	1		3	2	1	2
3	2	1	3		3	2	1	4
3	2	3	2		3	2	3	1
3	2	3	4		3	2	3	3
3	4	2	1		3	4	2	2
3	4	2	3		3	4	2	4
3	4	4	2		3	4	4	1
3	4	4	4		3	4	4	3

(凡是座標上的點皆須填入 1)



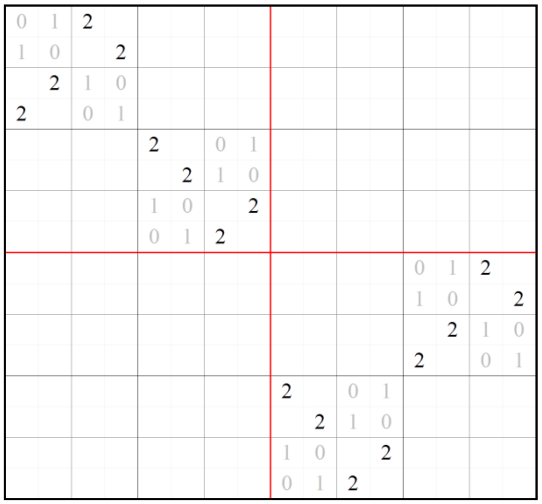
3.接下來要填入 2

2 的二進位是 0010(從左邊數來第 3 個區座標要 12 互變,34 互變)

完成後依此組座標填入

基本組				改第三列	數字2			(0010)
1	1	1	1		1	1	2	1
1	1	1	3		1	1	2	3
1	1	3	2		1	1	4	2
1	1	3	4		1	1	4	4
1	3	2	1		1	3	1	1
1	3	2	3		1	3	1	3
1	3	4	2		1	3	3	2
1	3	4	4		1	3	3	4
3	2	1	1		3	2	2	1
3	2	1	3		3	2	2	3
3	2	3	2		3	2	4	2
3	2	3	4		3	2	4	4
3	4	2	1		3	4	1	1
3	4	2	3		3	4	1	3
3	4	4	2		3	4	3	2
3	4	4	4		3	4	3	4

(凡是座標上的點皆須填入 2)



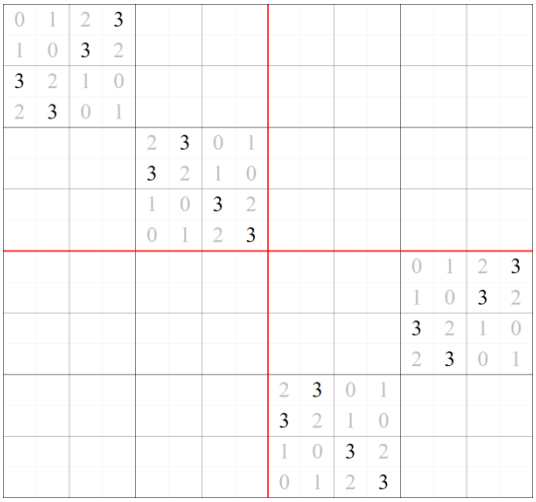
4.接下來要填入 3

3 的二進位是 0011(從左邊數來第 3 區和第 4 區座標要 12 互變,34 互變)

完成後依此組座標填入

基本組					數字3 (0011)			
1	1	1	1	改三四列	1	1	2	2
1	1	1	3		1	1	2	4
1	1	3	2		1	1	4	1
1	1	3	4		1	1	4	3
1	3	2	1		1	3	1	2
1	3	2	3		1	3	1	4
1	3	4	2		1	3	3	1
1	3	4	4		1	3	3	3
3	2	1	1		3	2	2	2
3	2	1	3		3	2	2	4
3	2	3	2		3	2	4	1
3	2	3	4		3	2	4	3
3	4	2	1		3	4	1	2
3	4	2	3		3	4	1	4
3	4	4	2		3	4	3	1
3	4	4	4		3	4	3	3

(凡是座標上的點皆需填入 3)



5.依此方法將 0~15 的數字填入表格即可

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
4	5	6	7	2	3	0	1	12	13	14	15	10	11	8	9
5	4	7	6	3	2	1	0	13	12	15	14	11	10	9	8
7	6	5	4	1	0	3	2	15	14	13	12	9	8	11	10
6	7	4	5	0	1	2	3	14	15	12	13	8	9	10	11
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
10	11	8	9	12	13	14	15	2	3	0	1	4	5	6	7
11	10	9	8	13	12	15	14	3	2	1	0	5	4	7	6
9	8	11	10	15	14	13	12	1	0	3	2	7	6	5	4
8	9	10	11	14	15	12	13	0	1	2	3	6	7	4	5

(四)、考慮偶數中 n=4k 的情況

$n = 4k, k = \{2,3,4, \dots\dots\}$，會存p 和 q使得

$4k = 2^p \times q$, 這裏 $p = \{2,3,4,5, \dots\dots\}, q = \{1,3,5,7, \dots\dots\}$

借用 A,B,C,D 4 個拉丁方陣來建構 M,N 二個正交拉丁方陣。其中 A、B 的秩是q，C、D 的秩是2^p，且$A \perp B$、$C \perp D$。

令 $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ 這裏 $a_{i,j} = i + j \bmod q;\ b_{i,j} = i - j \bmod q$, 則 $A \perp B$

再找 2 個 $C_{2^p \times 2^p}, D_{2^p \times 2^p}$ and $C \perp D$,再定義

$M_{2^p \times q, 2^p \times q} = A \otimes C$ by $m_{q(i-1)+s, q(j-1)+t} = a_{i,j} + c_{s,t} \times q$

$N_{2^p \times q, 2^p \times q} = B \otimes D$ by $n_{q(i-1)+s, q(j-1)+t} = b_{i,j} + d_{s,t} \times q$

then it is easy to see

if $a_{i_1 j_1} + c_{s_1 t_1} \times q = a_{i_2 j_2} + c_{s_2 t_2} \times q$ and $b_{i_1 j_1} + d_{s_1 t_1} \times q = b_{i_2 j_2} + d_{s_2 t_2} \times q$

then $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2}, b_{i_1 j_1} = b_{i_2 j_2}, c_{s_1 t_1} = c_{s_2 t_2}, d_{s_1 t_1} = d_{s_2 t_2}$

因為 $A \perp B, C \perp D$, 所以$i_1 = i_2, j_1 = j_2, s_1 = s_2, t_1 = t_2$

我們得到 $M \perp N$

評語

本作品主要是研究超立方體的完美控制集，作者充分地利用互相垂直拉丁方陣的概念，構造 n 元 n+1 元維的完美控制集，是一個不錯的作品；相關的研究也具有不錯的水準，而且有進步的空間，尤其在表示法方面可作更具體修正。因此，評為獲獎作品。