

2011 年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

編號：010034

作品名稱

省錢大作戰-探討籬笆價格和所圍面積的關係

得獎獎項

三等獎

香港正選代表:香港第 44 屆聯校科學展覽會

作者姓名：張中嘉、陳妤芳

就讀學校：國立臺南女子高級中學

指導教師：黃哲男、黃信淳

關鍵字：非線性規劃、最佳整數解、單位價面積

作者簡介



張中嘉，目前就讀台南女中數理資優班二年級。

我的興趣很廣泛，唱歌、閱讀、彈奏樂器、做白日夢……等等，閒來沒事喜歡玩腦力激盪。高中一年級時無意間發現數學其實是一種有趣的益智遊戲，就這樣玩數學變成了我的娛樂。

在專題研究的過程中，我學到了不少課本以外的新鮮事；期待在這次國際科展中擴展視野，和來自各地愛科學的同學們腦力激盪一番。



我是陳好芳，目前就讀台南女中二年級數理資優班。自小就對數理方面感興趣，常常想些與平常課業中不同的問題來思考。父母也不吝於栽培我，所以數理方面也特別的強，但儘管不是每次都得名，對於許多數學科有關的競賽也勇於參加。在學科方面也脫穎而出，曾經代表學校參加地科能力測驗。在校參加的是管樂社，每到寒假暑假都會舉辦發表會，而結束之後都會有不同的收穫。

摘要

本研究探討在給定範圍的面積下，以最省錢的方式用籬笆圍出最大的矩形土地，其中矩形的邊長為正整數，且矩形對邊使用相同單價之材質的籬笆，但相鄰邊使用不同單價之材質的籬笆。我們希望透過轉換，將單價不同的情況回歸到單價相同的情況，以便完整的解決這個問題。

藉由改變邊長，將 $\begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix}$ 轉換成 $\begin{bmatrix} ma & nb \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，使問題轉換成相鄰邊之單價相同的情況；但是經過運算找出的最佳解 $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 轉換回 $\begin{bmatrix} \alpha/m & \beta/n \\ m & n \end{bmatrix}$ 後卻不一定符合「整數邊長」的要求(即 α/m 和 β/n 不一定是整數)。為了解決這點，我們重新以不同的角度探討單價相同的情形，以找出整數的最佳解。

最後我們發現，若 Γ_A 和 Γ_R 切線斜率的差值大於或等於 1，則 a 坐標愈近 $\sqrt{N}$ 的解愈佳，而在差值小於 1 的範圍內，我們提出一個檢驗法，可以找到整個問題的最佳解，同時讓此最佳解 $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 轉換回 $\begin{bmatrix} \alpha/m & \beta/n \\ m & n \end{bmatrix}$ 後仍符合「整數邊長」的要求，進而解決問題。

Abstract

This research is to discuss how to box the maximum rectangle within an assigned area in the most economical way. The sides of the rectangle should be integers. The materials for the fences at the opposite sides of the rectangle should cost the same per unit, whereas the adjacent sides differently. In this research, we hope to turn the different prices per unit to the same through operations.

By changing the length of the sides, $\begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix}$ could be turned into $\begin{bmatrix} ma & nb \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

which makes the adjacent sides of the same price per unit. But the best root to

$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ doesn't always fit in the request that the length of the sides are integers after

it is turned back to $\begin{bmatrix} \alpha/m & \beta/n \\ m & n \end{bmatrix}$. (That is to say, α/m and β/n are not certain

to be integers.) To solve this problem, we researched into the situation of the same price per unit again from a new point of view, expecting to find the best integral roots.

Finally, we discovered that if the tangent slopes of Γ_A and Γ_R have a difference greater than or equal to 1, the closer the root's a-coordinate and $\sqrt{N}$ are, the better the root it is. Otherwise, for the situation that the difference is smaller than 1, we brought up an examination to find the best root to the whole problem, which can make the best root to $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ remain integral after returned back to $\begin{bmatrix} \alpha/m & \beta/n \\ m & n \end{bmatrix}$, and then achieved the goal of solving the problem.

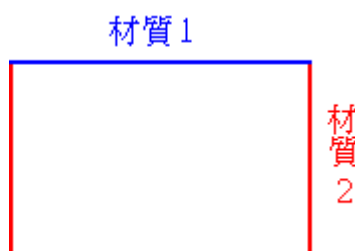
目次

作者簡介.....	ii
摘要.....	iv
壹、 研究動機.....	1
貳、 研究目的.....	1
參、 研究問題.....	2
肆、 研究過程.....	4
伍、 研究結果.....	23
陸、 未來展望.....	24
柒、 參考文獻.....	24

壹、 研究動機：

Martin Greg 在他的論文《Farmer Ted Goes Natural》中提出了一個有趣的問題：「農夫泰德想要用籬笆圍一個面積不超過 190 平方單位的土地，並且希望花在購買籬笆上的錢愈少愈好。但是賣籬笆的老闆只懂『整數』，也就是說籬笆的長度必須是整數才行。請問要怎麼圍才能用最少的錢圍出最大面積的土地呢？」

雖然在論文中已經解決了這個問題，但是緊接著在論文的結尾又浮現了另一個問題：「如果今天泰德用的是不同材質的籬笆呢？如下圖，藍色材質和紅色材質的單價並不相同，怎麼做才是最經濟的呢？」



貳、 研究目的：

我們試著以另一個角度看原問題，尋找一個能同時解決前後兩個問題的方法。也就是說，希望將單價比為 $m:n$ 的情況透過適當的轉換，回到單價比 $1:1$ 的情況，藉由單價比為 $1:1$ 時尋找最佳整數解的方法找出單價比為 $m:n$ 時的最佳非整數解；接著再進一步克服經過運算產生的最佳解透過轉換回到單價比 $m:n$ 後不一定為整數的問題，最後達到尋找單價比 $m:n$ 時最佳整數解的目的。

參、 研究問題：

- 一、 $\begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix}$ ：表示一邊長 a 、另一邊長 b 的圍法，且邊長 a 對應的單價為 m 、邊長 b 對應的單價為 n (如下圖)。(這只是簡化的表示法，與矩陣無關，故矩陣的運算在此皆不適用)



- 二、 A ：圍出的面積，即 $A = a \times b$ 。

A 在 ab 座標平面上隨 a 、 b 值變動而描繪出的圖形稱為 Γ_A 。

- 三、 N ：給定的正整數，即為 A 的上限。

- 四、 P ：一長邊和一短邊所需的金額，即 $P = ma + nb$ 。

- 五、 R ：投資報酬率，即圍出面積(A)和所需總金額($2P$)的比值。

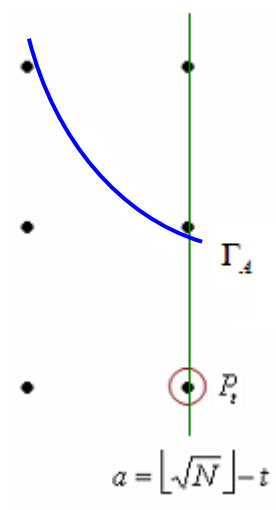
因為 $\frac{A}{2P} \propto \frac{A}{P}$ ，所以為了方便計算，將 R 定義為圍出面積(A)和一長邊一短邊所需的金額(P)的比值，即 $R = \frac{A}{P}$ 。

R 在 ab 座標平面上隨 a 、 b 值變動而描繪出的圖形稱為 Γ_R 。

- 六、 最佳解：在 $A \leq N$ 的範圍之內 R 值最大的圍法；將其表示為 $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ m & n \end{bmatrix}$ ，即面積不超過 N 的時候， $a = \alpha$ ， $b = \beta$ 為最經濟的圍法。

七、 P_t : 直線 $a = \lfloor \sqrt{N} \rfloor - t$ 上 (t 為任意整數), 在 Γ_A 和 a 、 b 軸圍成的區域範圍內

最靠近 Γ_A 的格子點(參考下圖)。 $P_t(a, b)$ 所對應的解即為 $\begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix}$ 。



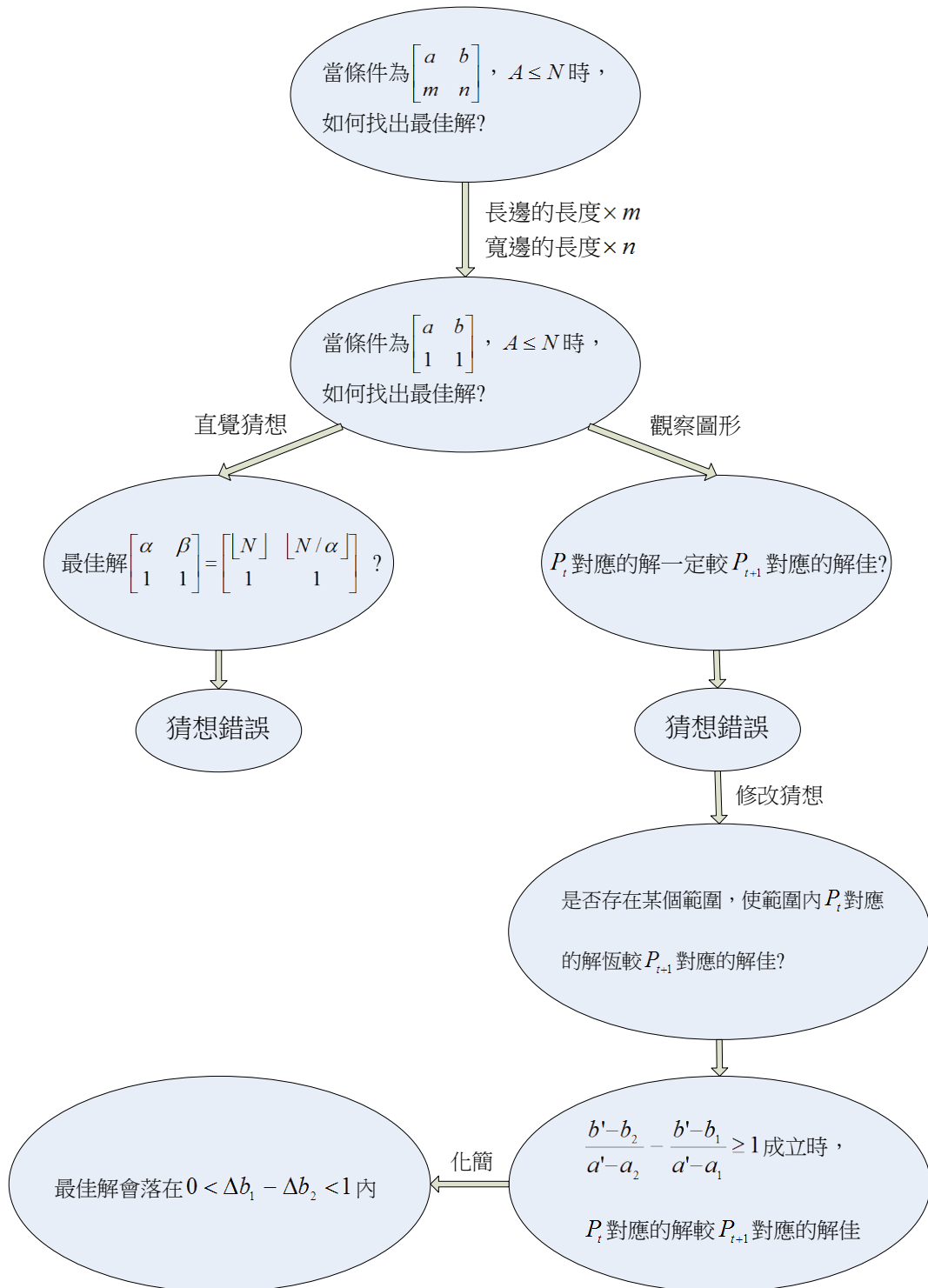
藉由以上的名詞定義，我們的研究問題如下：

一、 如何以不同的方法，找出條件為 $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A \leq N$ 時的最佳解？

二、 當條件為 $\begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix}$ ， $A \leq N$ 時，如何找出最經濟的圍法？

三、 是否存在某個範圍，使「 P_t 對應的解較 P_{t+1} 對應的解佳」恆成立？

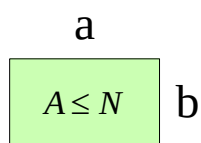
肆、研究過程：



問題〈一〉

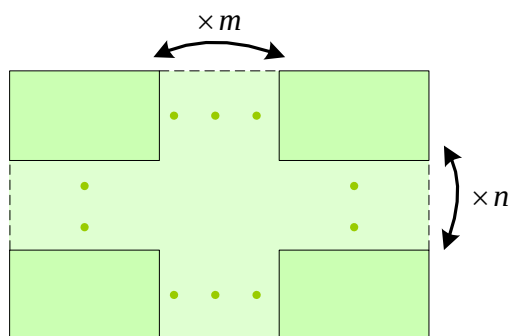
當條件為 $\begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix}$ ， $A \leq N$ 時，如何找出最佳解？

原本的條件為「 $\begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix}$ ， $A \leq N$ 」(如圖(一))



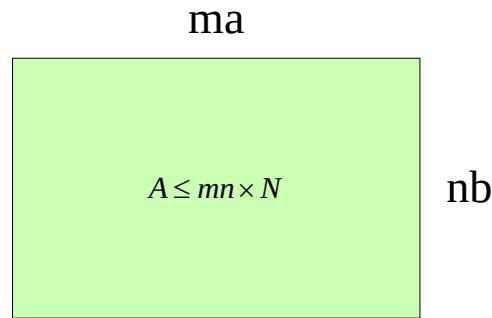
圖(一)

將 a 的長度 $\times m$ ， b 的長度 $\times n$ ，即將條件更改為「 $\begin{bmatrix} ma & nb \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 」(如圖(二))



圖(二)

將新圖形的條件視為「 $\begin{bmatrix} ma & nb \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A \leq mn \times N$ 」(如圖(三))



圖(三)

藉由以上的轉換，問題即可回到原始的論文《Farmer Ted Goes Natural》的研究主題：

問題〈二〉

當條件為 $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 時，在 $A \leq N$ 的範圍之下，如何找出最經濟的圍法？

根據論文《Farmer Ted Goes Natural》的結論，問題〈二〉已經被解決。但是將找出的最佳解 $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 還原成 $\begin{bmatrix} \alpha/m & \beta/n \\ m & n \end{bmatrix}$ 後， $\frac{\alpha}{m}$ 和 $\frac{\beta}{n}$ 不一定是整數，也就不符合動機中提到的「邊長為整數」的要求。為了解決這個問題，我們決定回到原點，以不同的角度切入問題〈二〉。

首先我們以直覺做出猜想：不考慮邊長為整數解，面積不超過 N 的最佳圍法顯然是 $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ ；加上整數解的限制後，最佳解應該是由最靠近 $\sqrt{N}$ 的整數構成，即 $\alpha = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ ， $\beta = \left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor$ 。

猜想〈一〉

最佳解 $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lfloor \sqrt{N} \rfloor & \lfloor N/\alpha \rfloor \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。

但是觀察表(一)的數據後，不難發現這個猜想是錯誤的。

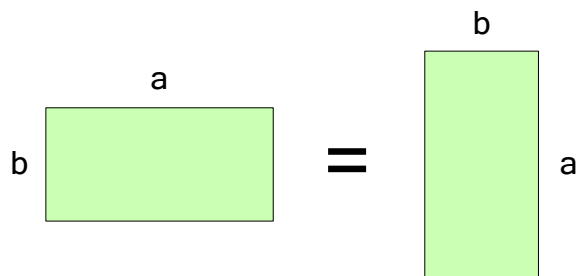
表(一) 猜想值和實際值的落差

N	$\sqrt{N}$	猜想值	實際值
416	$\sqrt{416} = 20.396$	$20 \times 20 = 400$	$18 \times 23 = 414$
417	$\sqrt{417} = 20.420$	$20 \times 20 = 400$	$18 \times 23 = 414$
418	$\sqrt{418} = 20.445$	$20 \times 20 = 400$	$19 \times 22 = 418$
419	$\sqrt{419} = 20.469$	$20 \times 20 = 400$	$19 \times 22 = 418$
420	$\sqrt{420} = 20.493$	$20 \times 21 = 420$	$20 \times 21 = 420$

我們試著藉用幾何圖形來解釋猜想〈一〉為何錯誤：

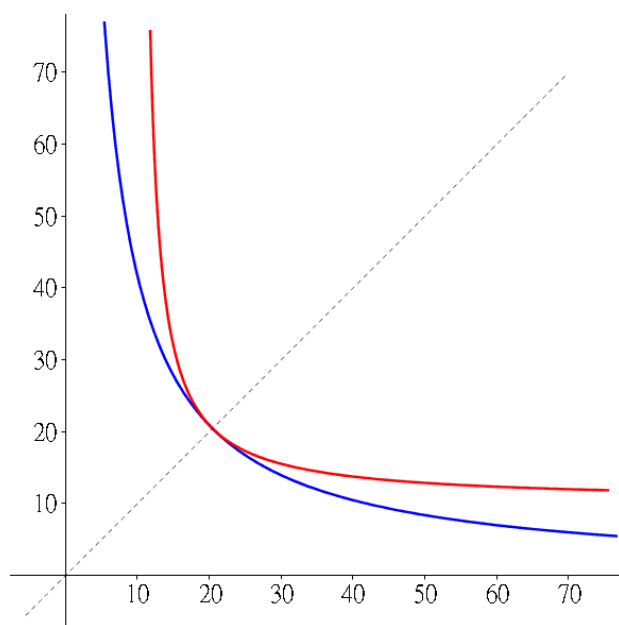
如圖(四)，令 $N = 418$ ，藍色部分代表 $A = 418$ ，為 Γ_A ；紅色部分代表 $R = k$ ，為 Γ_R 。虛線部分代表 $a = b$ ，可以視為整個圖形的對稱軸。已知 k 值愈大，代表圍法愈經濟， Γ_R 會愈靠外面；但是 A 不得超過 $N = 418$ ，即找到的 a 、 b 值必須位在 Γ_A 和 a 軸、 b 軸所夾的區域。

因為問題〈二〉的條件為 $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，明顯可知 $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (如下圖)，因此不失一般性，令 $a \leq b$ ，即以下說明均只需對應圖形中對稱軸 $a = b$ 的左半部分。



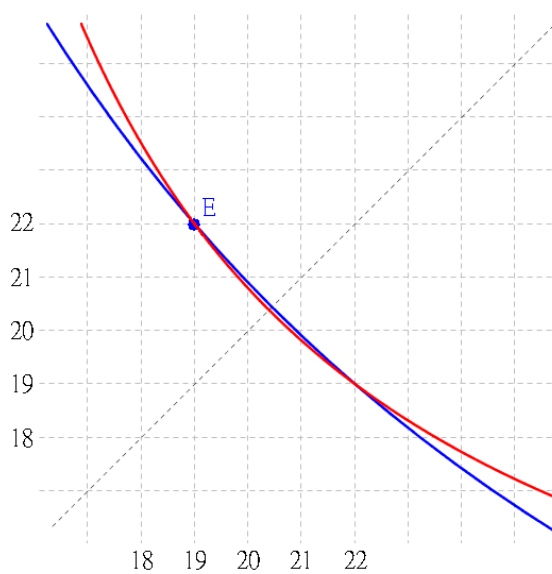
圖(四)中， Γ_A 和 Γ_R 恰好交於 $a = b = \sqrt{418}$ 時，這是 Γ_R 最靠外面的時候，也就

是不考慮整數解時的最佳解。



圖(四) 不考慮整數解時的最佳解

如果考慮邊長為整數，需將 Γ_R 稍微往內移動，尋找第一個被碰到的格子點，由數據可知此格子點即為 (19,22)，如圖(五)中的點 E 。



圖(五) 考慮整數解時的最佳解

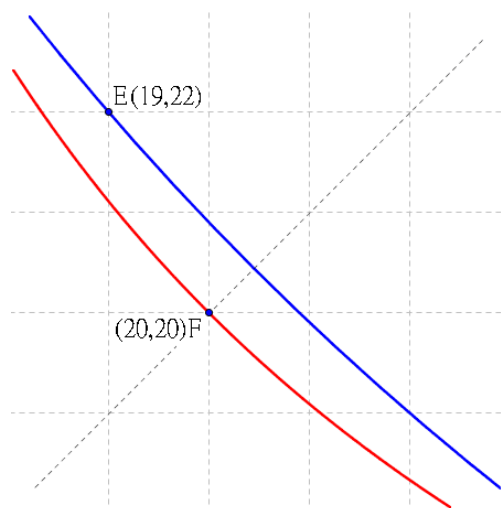
如果猜想〈一〉是正確的，最佳解應當位於(20,20)，但是仔細觀察下一頁放大後的圖(圖(六-1)、圖(六-2))，我們發現在 Γ_R 向內移動的過程中，會先碰到(19,22)(點 E)，再碰到(20,20)(點 F)。用文字表示，即在 Γ_R 向內移動的過程中，先碰到 P_1 ，才碰到 P_0 ；換句話說，在 $t=0$ 的情況下， P_{t+1} 對應的解較 P_t 對應的解佳。

因此從幾何角度來看，若要使猜想〈一〉成立，「 P_t 對應的解較 P_{t+1} 對應的解佳」必須先成立；也就是說，若「 P_t 對應的解較 P_{t+1} 對應的解佳」恆成立，猜想〈一〉就會是對的。

所以，我們提出了第二個猜想：「 P_t 對應的解較 P_{t+1} 對應的解佳」恆成立。



圖(六-1) Γ_R 先碰到 (19,22) ...



圖(六-2) ...再碰到 (20,20)

猜想〈二〉

「 P_t 對應的解較 P_{t+1} 對應的解佳」恆成立。

由於猜想〈二〉成立的前提 Γ_R 在移動的過程中會先碰到 P_t ，再碰到 P_{t+1} ($t \geq 0$)；但是圖(六-1)、圖(六-2)中， Γ_R 先碰到 P_{t+1} ，再碰到 P_t ，這就是猜想錯誤的地方。之所以會發生這種現象，是因為藍色的 Γ_A 限制了格子點的範圍，使 (20,21) 被阻擋在外， P_0 變成 (20,20)。

雖然「最佳解」不一定是「最靠近的解(P_0)」，但是觀察表(一)的數據，它的確是「在附近的解」。因此我們進一步思考，是否能夠加上某些條件讓猜想〈二〉成立？如此一來，我們只需要在猜想〈二〉不成立的範圍內，以窮舉法找出「最佳解」，而不用每次都從 $A=1$ 找到 $A=N$ 。

問題〈三〉

是否存在某個範圍，使範圍內「 P_t 對應的解較 P_{t+1} 對應的解佳」恆成立？

引理(一)

Γ_A 、 Γ_R 相切時，在 $0 < a \leq b$ 的範圍下，同樣的 a 座標， $\Gamma_R: \frac{ab}{a+b} = k$ 的切線斜率恆小於 $\Gamma_A: ab = N$ 的切線斜率(且兩者都小於 0)

〈證明〉

$\Gamma_A: ab = N$ 的切線斜率

$$b = \frac{N}{a} = N \times a^{-1}$$

$$\Rightarrow b_A' = N \times (-1)a^{-2} = \frac{-N}{a^2}$$

$\Gamma_R: \frac{ab}{a+b} = k$ 的切線斜率

$$\frac{ab}{a+b} = k \Rightarrow (a-k)b = ak \Rightarrow b = \frac{ka}{a-k} > 0 \quad (a-k > 0, a \neq k)$$

$$\Rightarrow b_R' = \frac{k(a-k) - ka}{(a-k)^2} = \frac{-k^2}{(a-k)^2}$$

$$\Gamma_A、\Gamma_R \text{ 相切時， } k = \frac{N}{2\sqrt{N}} \Rightarrow k^2 = \frac{N^2}{4N} = \frac{N}{4}$$

欲證明 $0 < a \leq b$ 時， $0 > b_A' \geq b_R'$

$$\Leftrightarrow \frac{N}{a^2} \leq \frac{k^2}{(a-k)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-k)^2}{a^2} \leq \frac{k^2}{N} \quad (\because N, (a-k)^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-k)^2}{a^2} \leq \frac{1}{4} \quad \left(\because k^2 = \frac{N}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-k}{a} \leq \frac{1}{2} \quad (\because a, (a-k) > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2a - 2k \leq a$$

$$\Leftrightarrow a \leq 2k$$

$$\because b = \frac{ka}{a-k} \geq a$$

$$\therefore \frac{ka}{a-k} - a \geq 0$$

$$\therefore \frac{ka - a^2 + ka}{a-k} \geq 0$$

$$\therefore \frac{a(2k-a)}{a-k} \geq 0$$

$$\therefore a(2k-a)(a-k) \geq 0$$

$$\because a > 0, a-k > 0$$

$$\therefore 2k-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 2k \quad (Q.E.D.)$$

引理(二)

Γ_R 愈往內移會跑得愈快，即在 $0 < a \leq b$ 的範圍下，同樣的 a 座標， $\Gamma_{R1} : \frac{ab}{a+b} = k$ 的

切線斜率恆小於 $\Gamma_{R2} : \frac{ab}{a+b} = k-t \ (t > 0)$ 的切線斜率。

〈證明〉

$$\Gamma_{R1} : \frac{ab}{a+b} = k \Rightarrow b_1 = \frac{ka}{a-k}$$

$$\Gamma_{R2} : \frac{ab}{a+b} = k-t \ (t > 0) \Rightarrow b_2 = \frac{(k-t)a}{a-k+t}$$

$$\because b_1 = \frac{ka}{a-k}$$

$$\therefore b_1' = \frac{k(a-k) - ka}{(a-k)^2} = \frac{-k^2}{(a-k)^2}$$

$$\because b_2 = \frac{(k-t)a}{a-k+t}$$

$$\therefore b_2' = \frac{-(k-t)^2}{(a-k+t)^2}$$

欲證明 $b_1' < b_2'$

$$\Leftrightarrow \frac{-k^2}{(a-k)^2} < \frac{-(k-t)^2}{(a-k+t)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{(a-k)^2} > \frac{(k-t)^2}{(a-k+t)^2}$$

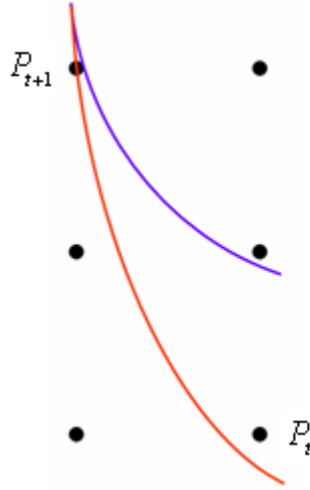
$$\Leftrightarrow \frac{k}{a-k} > \frac{k-t}{a-k+t} \quad (\because k, (a-k), (k-t), (a-k+t) > 0)$$

$$\because k > k-t, a-k < a-k+t$$

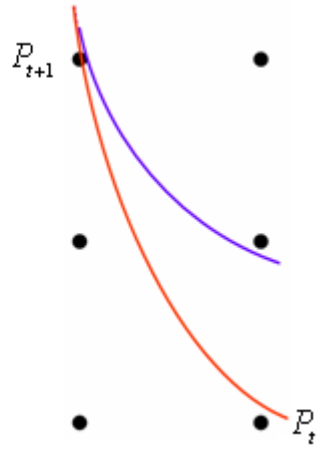
$$\therefore \frac{k}{a-k} > \frac{k-t}{a-k+t} \quad (Q.E.D)$$

引理(一)、(二)中，我們證明了「 a 座標固定時，不論 k 值為何， Γ_R 的切線斜率恆小於 Γ_A 的切線斜率(且兩者均小於0)」，換句話說，就是 Γ_R 永遠跑得比 Γ_A 快。

參考圖(七-1)、圖(七-2)，雖然兩圖中的紅色曲線(Γ_R)均跑得比藍色曲線(Γ_A)快，但是還是會出現不符合猜想〈二〉的情況。圖(七-1)表示 Γ_R 碰到 P_{t+1} 前已經先碰到 P_t (符合猜想)，圖(七-2)則恰好相反(不符合猜想)。

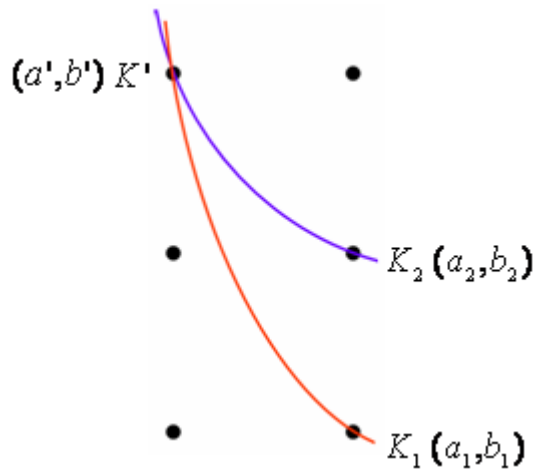


圖(七-1)



圖(七-2)

將以上兩圖的臨界狀況繪成圖(七-3)並觀察之，發現關鍵不在於是否跑得比較快，而是在於是否快超過 1 格。也就是說，當 $\frac{b'-b_2}{a'-a_2} - \frac{b'-b_1}{a'-a_1} \geq 1$ 時，圖形如圖(七-1)；反之，則如圖(七-2)。



圖(七-3) 臨界狀況

結論〈一〉

$\frac{b'-b_2}{a'-a_2} - \frac{b'-b_1}{a'-a_1} \geq 1$ 成立時， P_t 對應的解較 P_{t+1} 對應的解佳。

意思是說，符合 $\frac{b'-b_2}{a'-a_2} - \frac{b'-b_1}{a'-a_1} \geq 1$ 的時候猜想〈二〉是成立的，即 a 值愈靠近

$\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ ，圍法愈經濟：這就是問題〈三〉要尋找的範圍。所以若以窮舉法找最佳解，

只需檢查 $\frac{b'-b_2}{a'-a_2} - \frac{b'-b_1}{a'-a_1} < 1$ 的範圍就好。而 $\frac{b'-b_2}{a'-a_2} - \frac{b'-b_1}{a'-a_1} < 1$ 表示成一般式，可以寫成 $\frac{\Delta b_2}{\Delta a_2} - \frac{\Delta b_1}{\Delta a_1} < 1$ ；又因為 $a \leq b$ 的部份 Γ_R 跑得比較快， $\frac{\Delta b_2}{\Delta a_2} - \frac{\Delta b_1}{\Delta a_1} > 0$ 恆成立；所以

需要窮舉的範圍可以寫得更完整： $0 < \frac{\Delta b_2}{\Delta a_2} - \frac{\Delta b_1}{\Delta a_1} < 1$ 。甚至，因為 $a_1 = a_2$ ，我們可

以令 $\Delta a_1 = \Delta a_2 = -1$ ，把不等式簡化： $0 < \Delta b_1 - \Delta b_2 < 1$ 。

結論〈二〉

最佳解會落在 $0 < \Delta b_1 - \Delta b_2 < 1$ 的範圍內。

但是，由於 Γ_R 會移動，即 k 值會不停變動；加上原本的變數 a ，使結論〈二〉的不等式包含雙重變因，變得十分複雜。因此，為了方便，我們將 $\Gamma_R: R=k$ 中的 k 值固定為 $\frac{N}{2\sqrt{N}}$ ，即把 Γ_R 固定在和 Γ_A 相切於 $a=b$ 的情況(參考圖(四))。如此一來，

Γ_R 不再移動， k 變成常數。且根據引理(二)，我們知道 Γ_R 愈往內移會跑得愈快，

所以 $R = \frac{N}{2\sqrt{N}}$ 時符合 $\frac{b'-b_2}{a'-a_2} - \frac{b'-b_1}{a'-a_1} \geq 1$ 的部份，還原成 $R=k$ 後一定也符合

$$\frac{b'-b_2}{a'-a_2} - \frac{b'-b_1}{a'-a_1} \geq 1。$$

註：解不等式可以用以下的方法：

利用 Taylor's polynomials

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a)$$

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a) \quad (\text{一次逼近})$$

$$\text{若 } f(x) = 0 \Rightarrow f(a) + (x-a)f'(a) = 0 \Rightarrow x-a = \frac{-f(a)}{f'(a)} \Rightarrow x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

以牛頓逼近法(a 值可任取)

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \quad a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)}, \quad \dots$$

即可逼近我們所需要的範圍。

● 當條件為 $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A \leq N$ 時，如何找出最佳解？

1. 算出相切時的比例 $R = \frac{N}{2\sqrt{N}}$ 。

2. 解出 $\Gamma_R: R = \frac{N}{2\sqrt{N}} = k$ 上 a 和 b 的關係式 $b = \frac{ka}{a-k}$ 。

3. 解出 $\Gamma_A: A = N$ 上 a 和 b 的關係式 $b = \frac{N}{a}$ 。

4. 令 $\Delta a_1 = \Delta a_2 = -1$ ，此時 $\Delta b_1 = \frac{k(a-1)}{(a-1)-k} - \frac{ka}{a-k}$ ， $\Delta b_2 = \frac{N}{(a-1)} - \frac{N}{a}$ 。

5. 列出不等式 $0 < \Delta b_1 - \Delta b_2 < 1$ ，解出 a 的範圍。

6. 檢查這個範圍內的所有圍法，找到 R 值最大的解就是最佳解。

我們已經成功的以幾何的角度解決問題〈二〉，接下來就可回歸到問題〈一〉。

事實上，以我們的切入角度來看，問題〈一〉和問題〈二〉其實是同一件事。

因為我們找最佳解的方法是在範圍內進行窮舉，所以處理問題〈一〉時只須利用解問題〈二〉的方法，且窮舉時只要找符合 $m|a$ 且 $n|b$ (或 $n|a$ 且 $m|b$) 的部分即可。

- 當條件為 $\begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix}$ ， $A \leq N$ 時，如何找出最佳解？
1. 將原條件改為 $\begin{bmatrix} ma & nb \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，並視為 $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。
 2. 算出相切時的比例 $R = \frac{N}{2\sqrt{N}}$ 。
 3. 解出 $\Gamma_R: R = \frac{N}{2\sqrt{N}} = k$ 上 a 和 b 的關係式 $b = \frac{ka}{a-k}$ 。
 4. 解出 $\Gamma_A: A = N$ 上 a 和 b 的關係式 $b = \frac{N}{a}$ 。
 5. 令 $\Delta a_1 = \Delta a_2 = -1$ ，此時 $\Delta b_1 = \frac{k(a-1)}{(a-1)-k} - \frac{ka}{a-k}$ ， $\Delta b_2 = \frac{N}{(a-1)} - \frac{N}{a}$ 。
 6. 列出不等式 $0 < \Delta b_1 - \Delta b_2 < 1$ ，解出 a 的範圍。
 7. 檢查這個範圍內所有符合 $m|a$ 且 $n|b$ (或 $n|a$ 且 $m|b$) 的圍法，找到 R 值最大的解就是最佳解。
 8. 將此最佳解還原成 $\begin{bmatrix} \alpha/m & \beta/n \\ m & n \end{bmatrix}$ (或 $\begin{bmatrix} \alpha/n & \beta/m \\ n & m \end{bmatrix}$) 的形式。

以 $\begin{bmatrix} a & b \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ， $A \leq 218$ 為例子說明：

1. 將原條件改為 $\begin{bmatrix} 5a & 7b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A \leq 5 \times 7 \times 218 = 7630$ ，可視為 $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A \leq 7630$ 。
2. 算出相切時的比例 $R = \frac{7630}{2\sqrt{7630}}$ 。
3. 解出 $\Gamma_R: R = \frac{7630}{2\sqrt{7630}}$ 上 a 和 b 的關係式

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{7630}{2\sqrt{7630}}$$

$$\Rightarrow 7630a + 7630b = (2a\sqrt{7630})b$$

$$\Rightarrow (2a\sqrt{7630} - 7630)b = 7630a$$

$$\Rightarrow b = \frac{7630a}{2a\sqrt{7630} - 7630} = \frac{\sqrt{7630}a}{2a - \sqrt{7630}}$$

4. 解出 $\Gamma_A: A = N$ 上 a 和 b 的關係式

$$ab = 7630 \Rightarrow b = \frac{7630}{a}$$

5. 令 $\Delta a_1 = \Delta a_2 = -1$

$$\text{此時 } \Delta b_1 = \frac{\sqrt{7630}(a-1)}{2(a-1) - \sqrt{7630}} - \frac{\sqrt{7630}a}{2a - \sqrt{7630}}, \quad \Delta b_2 = \frac{7630}{(a-1)} - \frac{7630}{a}$$

6. 列出不等式 $0 < \Delta b_1 - \Delta b_2 < 1$

$$0 < \left(\frac{\sqrt{7630}(a-1)}{2(a-1) - \sqrt{7630}} - \frac{\sqrt{7630}a}{2a - \sqrt{7630}} \right) - \left(\frac{7630}{a-1} - \frac{7630}{a} \right) < 1$$

解出 $72 \leq a \leq 88$

7. 檢查 $72 \leq a \leq 88$ 範圍內的所有符合 $5|a$ 且 $7|b$ (或 $7|a$ 且 $5|b$) 圍法

$5|a$ 且 $7|b$:

$$75 \times 98 \rightarrow R = 42.485$$

$$80 \times 91 \rightarrow R = 42.573$$

$$85 \times 84 \rightarrow R = 42.248$$

$7|a$ 且 $5|b$:

$$77 \times 95 \rightarrow R = 42.529$$

$$84 \times 90 \rightarrow R = 43.448$$

R 值最大

8. 找到最佳解 $\begin{bmatrix} 84 & 90 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，此時 $A = 7560$

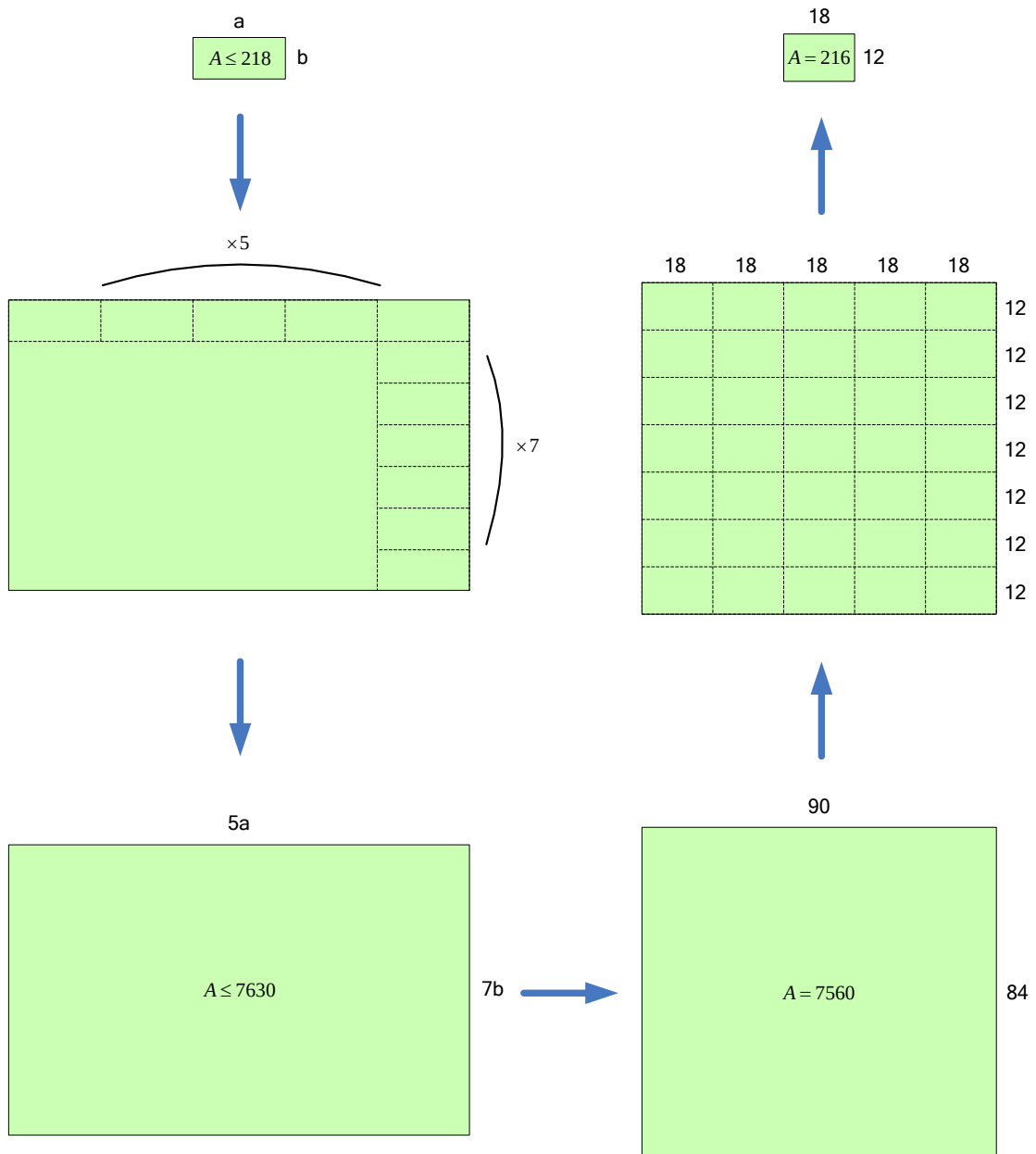
9. 將 $\begin{bmatrix} 84 & 90 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 還原成 $\begin{bmatrix} 84/7 & 90/5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

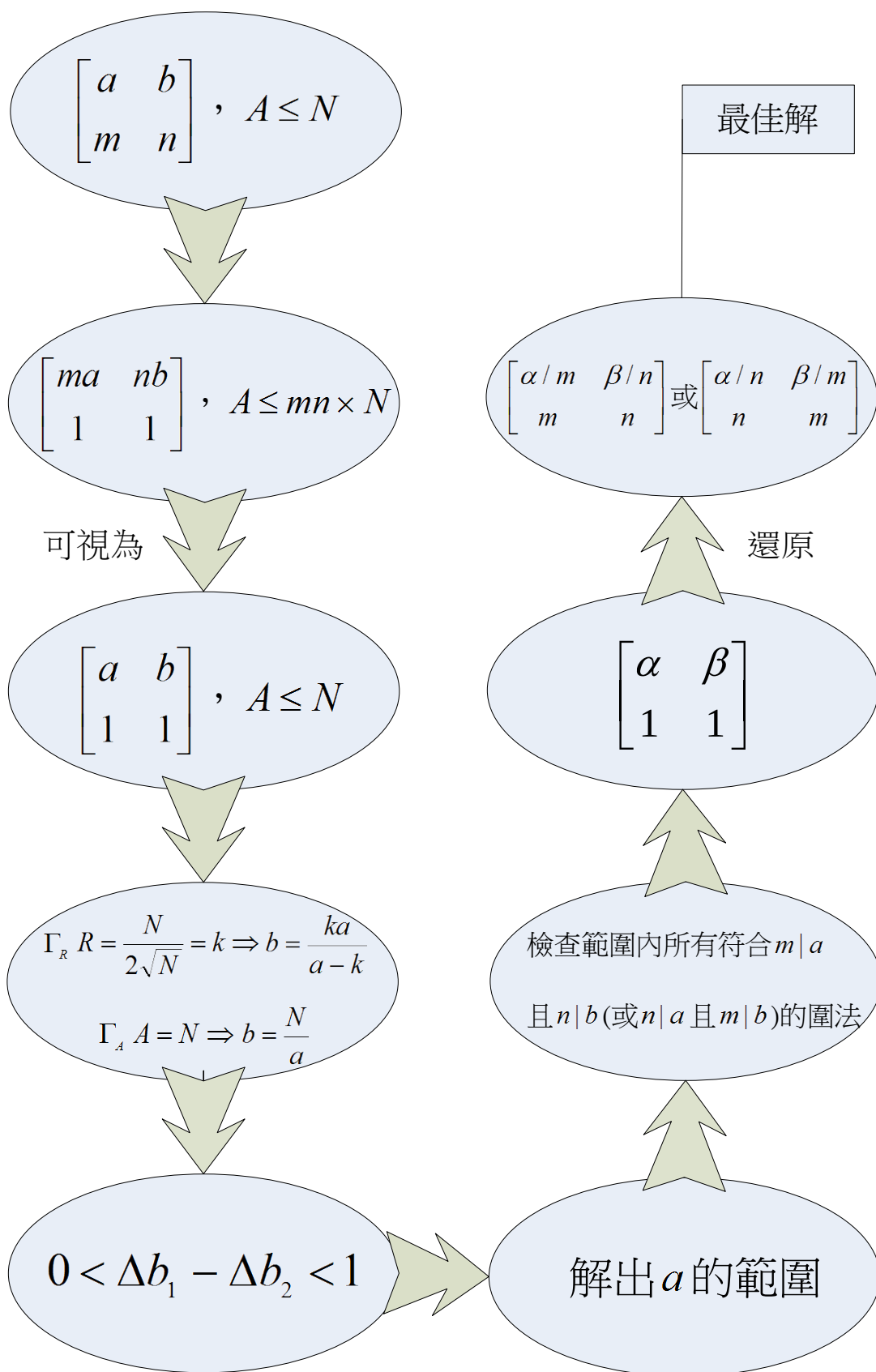
還原後 $A = 7560 \div (5 \times 7) = 216 (= 18 \times 12)$

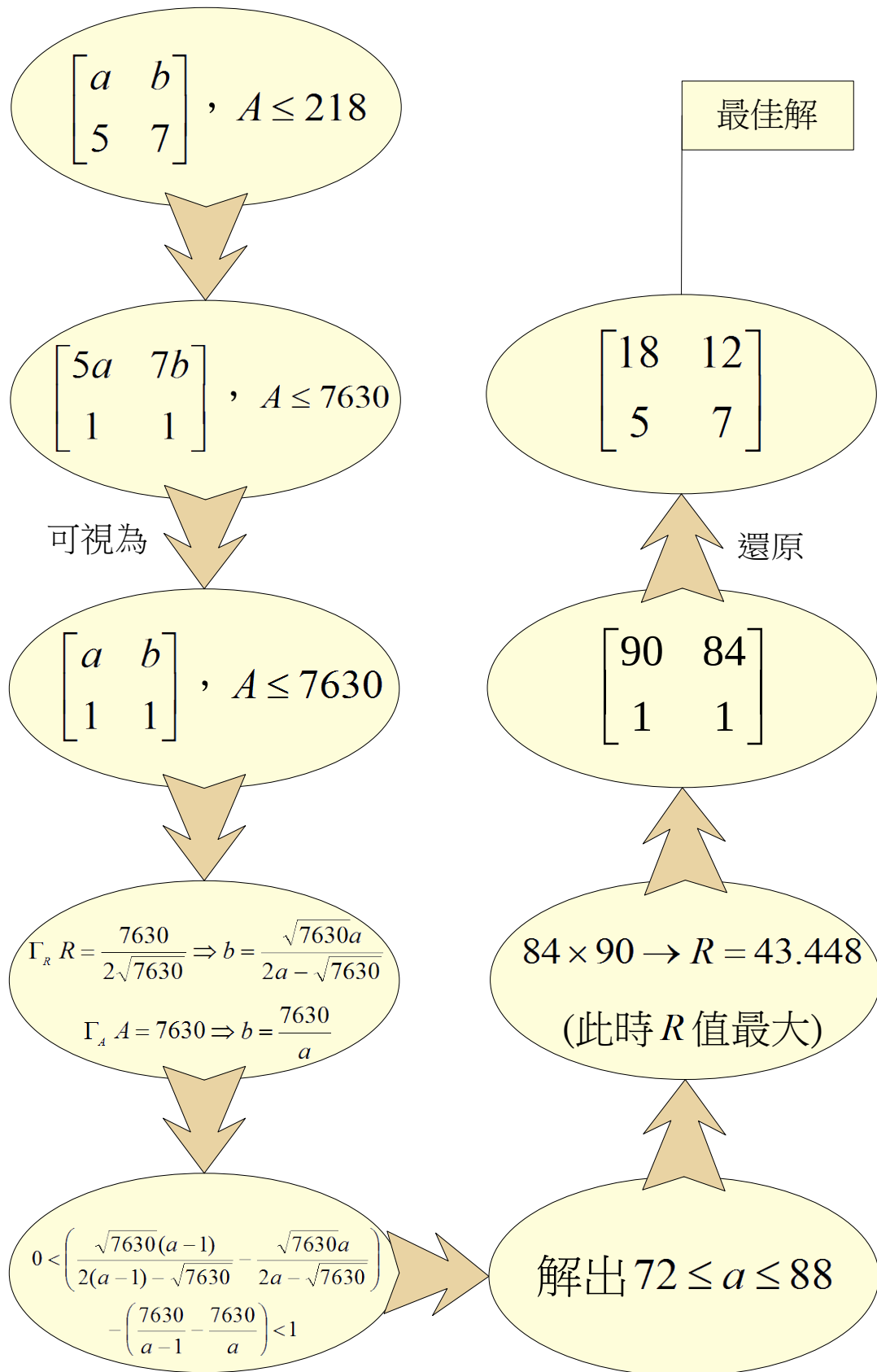
10. 所以 $\begin{bmatrix} a & b \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ， $A \leq 218$ 的最佳解: $\begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ， $A = 216$

(參考下一頁圖形的變換)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, A \leq 218 \text{ 解題時圖形的變換}$$







伍、研究結果:

當 $\frac{b'-b_2}{a'-a_2} - \frac{b'-b_1}{a'-a_1} \geq 1$ 成立時， P_t 對應的解較 P_{t+1} 對應的解佳，即 a 值愈靠近 $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ ，

圍法愈經濟；換句話說，最佳整數解會落在 $0 < \frac{b'-b_2}{a'-a_2} - \frac{b'-b_1}{a'-a_1} < 1$ 內，因此以窮舉法

找最佳解時只需檢查此範圍即可。而且 $0 < \frac{b'-b_2}{a'-a_2} - \frac{b'-b_1}{a'-a_1} < 1$ 可簡化為

$0 < \Delta b_1 - \Delta b_2 < 1$ ，所以簡單來說，最佳解會落在 $0 < \Delta b_1 - \Delta b_2 < 1$ 的範圍內。

基於以上的研究結果，尋找單價比為 $m:n$ 時之最佳整數解的方法如下：

1. 將原條件改為 $\begin{bmatrix} ma & nb \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，並視為 $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。
2. 算出相切時的比例 $R = \frac{N}{2\sqrt{N}}$ 。
3. 解出 $\Gamma_R: R = \frac{N}{2\sqrt{N}} = k$ 上 a 和 b 的關係式 $b = \frac{ka}{a-k}$ 。
4. 解出 $\Gamma_A: A = N$ 上 a 和 b 的關係式 $b = \frac{N}{a}$ 。
5. 令 $\Delta a_1 = \Delta a_2 = -1$ ，此時 $\Delta b_1 = \frac{k(a-1)}{(a-1)-k} - \frac{ka}{a-k}$ ， $\Delta b_2 = \frac{N}{(a-1)} - \frac{N}{a}$ 。
6. 列出不等式 $0 < \Delta b_1 - \Delta b_2 < 1$ ，解出 a 的範圍。
7. 檢查這個範圍內的所有符合 $m|a$ 且 $n|b$ (或 $n|a$ 且 $m|b$) 的圍法，找到 R 值最大的解就是最佳解。
8. 將此最佳解還原成 $\begin{bmatrix} \alpha/m & \beta/n \\ m & n \end{bmatrix}$ (或 $\begin{bmatrix} \alpha/n & \beta/m \\ n & m \end{bmatrix}$) 的形式。

陸、未來展望:

解決了平面矩形的部分，這個問題或許可以繼續推廣到圍出平面多邊形的情況；或是可以像另一篇論文《Farmer Ted Goes 3D》一樣，將籬笆變成木板，探討如何使不同材質的木板組成的長方體盒子體積最大，要價最少；甚至可以將兩者合併，研究空間中的多面體最經濟的組裝方法。

柒、參考文獻:

1. Bobbe Cooper (2009). Classifying α -Almost-Squares. *Mathematics Magazine*, 82
2. Martin Greg (1999). Farmer Ted Goes Natural. *Mathematics Magazine*, 72
(from: <http://www.math.ubc.ca/~greg/papers/downloads/FTGN.pdf>)
3. Shawn Alspaugh (2005). Farmer Ted Goes 3D. *Mathematics Magazine*, 78

評語

這類型的問題，困難的地方在於加上整數限制式。此時，問題的複雜度就變成 NP-hard，然而此作品的應用性很高，因為橋不能只蓋 $2/3$ 。困難的整數限制式恰巧就是實用價值高的地方，因此值得好好探討。作者 們很巧妙的找出一些條件，使得窮舉的範圍大幅縮減，是這份作品最重要的貢獻，建議需要改進之處如下：

1. 關鍵詞處：應該寫「整數規劃」而不是「非線性規劃」。
2. 圖形標示不清楚，沒有座標軸，紅藍線也沒有清楚說明和標示。
3. 所得結論是個最佳解之必要條件，可以找出充分條件嗎？（這比推廣到多面體要有意義的多！）
4. 這個計算方法所要窮舉的範圍雖已被縮減，請問這範圍會隨那些特定參數增長？增長速度有多快？