2011 年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

編號：010011

作品名稱

傑克船長的心機

得獎獎項

二等獎

加拿大正選代表:2011 年加拿大科學展覽會

作者姓名：王新博

就讀學校：臺北市立建國高級中學

指導教師：曾俊雄

關鍵字：群論、歸納法、鴿籠原理

作者簡介

我喜歡閱讀、打球、摺紙，最喜歡的則是數學。

回顧第一次接觸數學競賽後，開啟了我數學美麗殿堂的大門。也因此有機會參加各式各樣不同的競賽，不但增廣見聞，我也結識了許多同好。更從此深深著迷於變化多端的數學。除了上學的時間外，假期中，我參加了一些數學活動及俱樂部，如：九章數學愛好者聯誼、數學夏令營等，最有趣的還是加拿大 Alberta 大學辦的「加拿大青少年數學夏令營」。

摘要

作者受考題（ International Mathematics Tournament of the Towns, Senior A-Level Paper, Fall 2009, No. 7 ）啓發而展開此研究。經搜尋文獻發現，這系列命題可追溯自 Scientific American （ Feb 1979 ）中 Martin Gardner 的文章 The Rotating Table 。

命題之操作原在正方形桌上執行，後被 Ted Lewis & Stephen Willard 推廣至正多邊形（1980），又再被 Richard Ehrenborg & Chris M. Skinner 推廣至任意置換群（1995）。

本文從均勻多面體的情形出發，藉諸自創的證明方式，重新詮釋上述論文之結果，給出較簡潔自然的證明。同時，作者改變命題裡的關鍵限制，發展全新的研究方向；並針對不同的情形（多邊形、多面體、置換群）分別求出各變數之上、下限。

本文使用到的技巧包括：群論、歸納法、組合設計。充分性之證明過程提供的演算法能應用於同步連絡管道，允許匿名用戶之間建立連線。

Abstract

The inspiration for this study comes from the problem < International Mathematics Tournament of the Towns, Senior A-Level Paper, Fall 2009, No. 7 >. The problem can be traced back to Martin Gardner's article The Rotating Table, which appeared in Scientific American in Feb. 1979.

The original problem used a square table. This was generalized by Ted Lewis & Stephen Willard to all regular polygons (1996), and then by Richard Ehrenborg & Chris M. Skinner to arbitrary permutation groups (1997).

This study starts with the case of uniform polyhedron, and arrives at the conclusions of the listed studies through the author's own, more natural methods of proof. The author also modifies some of the problem's restrictions and finds upper and lower bounds for each of the different cases (polygons, polyhedrons, permutation groups).

The techniques applied in this study include group theory, mathematical induction, and combinatorial design. The algorithm used in proofs of the lower bounds can be applied to sync communication devices, allowing anonymous users to connect with each other.

傑克船長的心機

目錄

一、動機

筆者第一次看到這個命題原出自「環球城市數學競賽， 2009 秋季賽」，其中的「高中組、高級卷、問題七」，以下是它的中文命題。

（一） 命題 - 環球版

- 阿里巴巴寶庫的山洞入口有一圓形轉盤，它是開啟山洞門的機關。轉盤的圓周上有 N 個完全相同的桶子，任何相鄰桶子的距離都相等。在每一個桶子內各放置有一隻頭朝上或頭朝下的青魚。
- 阿里巴巴每次操作都可以選擇任何位置、任何數量的桶子（數量從 1 個到 N 個）全部上下翻轉。當每次操作結束，圓盤立即開始轉動，如果所有桶內的青魚頭全部朝上或全部朝下，則山洞門就會打開。否則當圓盤停止轉動後，任何人都無法再辨認哪些桶子曾被翻轉過。
- 無論這些青魚如何擺置，若阿里巴巴必有數學策略保證可以打開山洞門，請問所有可能的 N 值是什麼？(十四分)

來自財團法人台北市九章數學教育基金會[1]。

解決這個問題之後，我們發現類似的架構曾經出現在約二十年前的書上，以下是它的中文命題。

（二） 命題 - Gardner 版

- 有一個四角方桌，能以其中心為軸旋轉。桌子的每個角落都有一個深孔，每個孔底都放置一個酒瓶，酒瓶可能朝上也可能朝下放置。您無法看到深孔內的情況，但您可以用手伸入深孔內並經觸摸得知酒瓶是朝上或朝下。
- 而一次操作的定義如下：旋轉桌子，待到它停止後，將雙手伸入不同的深孔內。您可以隨意選擇調整酒瓶的朝向，意即您可以不翻轉、或擇一翻轉，或兩個酒瓶都翻轉。接著再度旋轉桌子後重複以上的操作，也就是第二次的操作。

---

[1] http://www.chiuchang.org.tw/modules/news/article.php?storyid=473

- 當桌子旋轉停止後，任何人都無法辨認哪些深孔內的酒瓶曾被觸摸過。因此，接下來您只有兩種選擇：您可以選擇任一條對角線上的兩個酒瓶、或選擇任意相鄰兩個酒瓶。您的目標是設法使四個酒瓶的朝向全都一致：全朝上或全朝下。當目標達成時，鈴聲會響起表示任務成功。
- 初始時，四個深孔內的酒瓶是隨機朝上或朝下放置的。若一開始這些瓶子朝向都一致，鈴聲立即響起，您不需要任何動作即完成目的。因此，我們可以假設初始時，這些瓶子的朝向不全相同。問是否存在一個程序，保證在有限次操作內可以使鈴聲響起？

來自財團法人台北市九章數學教育基金會[2]。

分析

這兩個命題的差異在於：操作者能不能「看」到魚頭-酒瓶的指向，以及它們對「手」的限制。這就引起我們研究的興趣，我們想知道這兩個命題的解答會因此產生什麼樣的變化，同時還有沒有更多類似的問題？

簡單來說，在環球版的設定中，操作者沒有辦法看到魚頭的指向，也沒有被限制一次可以同時倒置多少桶子。事實上，正因為沒有辦法看到魚頭的指向，反而沒有充分限制手的數量。這顯示命題的原意是考驗學生「如何避免把對的弄成錯的」，手越多反而越容易把轉盤搞亂。

另一方面，在Gardner版的設定中，顯然四隻手只需要一次操作就能達到目標，但是命題限制操作者只能用兩隻手。這就引發了一個問題：既然四隻手跟兩隻手都能達到目標，那手的數量再改變的話呢？意即，只用一隻手或是用三隻手對這個方桌有會有怎麼樣的策略？

[2] 私人通信

二、目的

我們找到上述兩個相似的命題之後，又發現另外一個混合兩者規則的命題。之後，我們再推廣了這個命題，並試著以一致的方式解答它們。以下列出幾個各個可能的研究方向。

（一） 環球版命題

- 希望求得保證打開山洞門的充分必要條件。

範例

我們知道 $N = 1$ 時，由於唯一的魚頭不是「全部朝上」就是「全部朝下」，所以山洞門一定會開。若是 $N = 2$ 且山洞門緊閉，代表兩隻青魚頭並不是指到同一個方向、我們稱它為「相背」。此時，隨意倒置其中一個桶子必會使門開啓。

而 $N = 3$ 時，假設門還是關的，我們想證明阿里巴巴的操作會沒完沒了、不保證在有限次操作之內結束。以下是說明：

不妨考慮其中兩隻相背的魚頭，如果阿里巴巴的下一步想倒置其中一個桶子，我們就（偷偷）旋轉圓盤讓他摸到另外一個桶子，使原本的兩隻魚頭還是相背的。反之，若阿里巴巴想倒置兩個，就讓他摸到這兩個相背的桶子，使得同時倒置之後還是相背的。這樣也沒有辦法使門開啓。

此外，一次倒置三個桶子絕對不會有幫助，相背的魚頭依然相背，什麼桶子也不碰更是無法解決問題。於是 $N = 3$ 時，傑克就輸了，但其它數量的桶子又如何呢？這是我們想知道的。

（二） Gardner 版命題

- 希望可以找到使鈴聲響起的方法。
- 希望可以對不同數量的深孔，（排成正多邊形，）找到使鈴聲響起的充分必要條件。

範例

（若是）做完四個深孔的情況，我們就可以試著討論不同數量的深孔。例如，只有一個深孔的話，鈴聲就會直接響起。而有兩個深孔時的時候，只要隨意倒置其中一個酒瓶即可，也不需要知道酒瓶的指向。

有三個深孔時，只靠一隻手是不夠的，因為它很有可能一直摸到同一個酒瓶。當另外兩個酒瓶相背時，操作者可能就永遠沒有辦法改正它們，無法在有限次操作之內結束。

三隻手則是一定足夠的，而且一次操作（將三個酒瓶都翻到同方向）就能達到目標了。但是，恰好兩隻手（介於兩者之間）的情形又如何？這是我們想知道的。

（三） 推廣問題

- 希望可以對其它種類的對稱形式，（如柏拉圖正多面體，）找到使鈴響的充要條件。

範例

以正四面體為例，我們知道它「任意兩個頂點都相鄰」。因此只有兩隻手是不夠的，因為這兩隻手摸的酒瓶一定相鄰，從而會有機會一直摸到相同的兩個酒瓶。於是，當另外兩個酒瓶一開始就指到不同的方向時，它們就可能會永遠相背下去，操作也就無窮無盡。

假設已經求出三隻手是足夠的，就可以考慮當酒瓶分佈在更複雜的立體上時，又會產生什麼難題。例如兩個正四面體的疊合，三隻手可能就不夠了，但那又要幾隻手才夠呢？這是我們想知道的。

（四） 變化規則

- 希望可以求得遇到摸錯、轉錯方向等等「突發狀況」時的應對方式。

範例

假設今天是由機器人代勞觸摸、倒置酒瓶，您可以指示機器人觸摸相鄰、或是相對的酒瓶，而機器人會告訴您這兩個酒瓶的指向是相同還是相背，而不是它們分別指向哪裡。操作時，你可以指示機器人要到至幾個酒瓶，而不能指定要倒置哪一個。請問應該如何命令機器人呢？

這個版本的規則又稍微比 Gardner 版還弱一些，類似地也可以規定機器人會不小心轉錯、或是判斷錯等。遇到這樣礙手礙腳的情形，又有什麼方法可以解決問題呢？這是我們想知道的。

（五） 一般化

- 希望可以列出一些標準作業程序，能有助於解決類似的問題。

範例

對於任意給定的 M 與作用在 M 上的置換群 G ，能不能透過考察 (G, M) 中的不變量或性質，求出解決問題的必要、或充分條件。尤其是在更仔細研究群的結構之前，就能先掌握一些限制、或者方法，是很值得追究的一部份。

甚至，若是這些置換沒有強到足以形成群，我們可以利用的性質又更少了。此時，又有什麼數量的手可以解決問題，以及，我們能有什麼快速方便的方法可以估計答案呢？這是我們想知道的。

三、方法

為了方便之後的研究，筆者要在這個地方統一所有命題的用語。之後除非是直接引用文獻的討論，否則所有的辭彙將以此處的故事背景為準。對照表詳見文末。

（一） 研究主題 - 環球版

雖然這個版本是以環球的命題為基礎，但為了之後的推廣，我們全部改成比較彈性的詞。

命題

- 傑克船長好不容易找到了寶藏，卻被一具圓盤形狀的鎖擋住去路。圓盤的邊緣平均安裝數顆柱狀「磁鐵」，每顆磁鐵都無法從外觀區分，個別磁鐵的磁極指向也無從得知。幸好，除非傑克伸手去倒置磁鐵，否則磁極的指向不會改變。
- 古老的設計圖透露了它的結構：每一顆磁鐵底下都是一個活塞，活塞本身也是一個小磁鐵，當大磁鐵的 S 極朝下時會被吸引往上，反之則被排斥至底。而當活塞處於相同位置時，不論是全上或全下，旋轉整個圓盤數圈會立刻使結構解體。
- 故破解鎖的唯一方法，便是倒置某些磁鐵後旋轉整個圓盤。運氣好的話，磁鐵已被翻到相同的指向而鎖具解體，運氣不好的話，圓盤會維持原樣並漸漸停下來。但傑克再也無法認出哪些磁鐵曾被翻過，因此問題又回到原點。
- 傑克數過磁鐵的個數，掂了掂口袋裡的石頭。縱使惡運纏身，他仍有強大的策略，可以保證只要旋轉有限次圓盤，就能讓鎖具解體。請問：磁鐵的個數究竟為何，傑克才敢如此妄下豪語？

由筆者改編自「環球城市數學競賽， 2009 秋季賽」，
「高中組、高級卷、問題七」。

分析

在此我們用了兩個很鮮明的詞：「惡運纏身」和「強大策略」。根據常理，傑克在鎖前試得越久，打開鎖的機率自然越高。但我們希望傑克能「保證」在「有限次操作」之內結束，就算冥冥之中有海神故意修理傑克也一樣。

因此，在做這個問題的時候，我們比較傾向於把它想成是一個雙人遊戲：傑克在倒置磁鐵而海神負責旋轉圓盤。海神當然知道所有磁鐵的指向，也能事先得知傑克的策略，並且讓圓盤停在她認為對傑克最不利的位置。同時，她亦可決定最初的磁鐵指向該如何分佈，但不能在遊戲開始之後任意更改，

假設海神和傑克都極為聰明，會竭盡所能地完成目標。在這樣嚴苛的條件下，如果傑克仍讓鎖具解體，我們就稱呼傑克「贏」了，否則，當海神可

以讓操作永遠無法結束時，我們稱傑克「輸」。而原題相當於要求考生找出哪些「磁鐵的顆數」會讓傑克贏、又哪些會輸，並證之。

我們說這個問題是「好的」，因為對任意的整數 m（代表磁鐵的數量），要麼傑克贏、存在滿足題意的策略（以中文、英文、數學語言、甚至程式碼寫成），要麼傑克輸、策略不可能存在。因此，所有的正整數理當屬於兩者之一，而這樣的分類即為所求。

稍微修改最末段即可得到第二個版本問題的推廣。

（二） 研究主題 - Gardner 盤

傑克舊地重遊後，故事將從上題的最後一段重新開始。

命題

- 傑克數過磁鐵的顆數，掂了掂口袋裡的石頭。縱使惡運纏身，他仍有強大的策略，可以保證只要旋轉有限次圓盤，就能讓鎖具解體。因為那一把石頭其實是（記取上次教訓、）特別準備的磁性物質，可以幫助判斷磁極的指向。
- 可惜的是，「指南針」用過之後需要靜置一段時間才會消磁，因此，每一根指南針一次至多只能測量一顆磁鐵的指向。而指南針都被用過之後，傑克可以從剛剛那些被測量的磁鐵中，策略性地挑選某幾顆並倒置它們、接著再旋轉圓盤。
- 運氣不好的話，圓盤會維持原樣並漸漸停下來。但傑克再也無法認出哪些磁鐵曾被看過、翻過，只得待到指南針消磁完成之後再操作一次。請問：磁鐵和指南針顆數的關係究竟為何，傑克才敢如此妄下豪語？

由筆者改編自 Fractal Music, Hypercards and More[3]*，*
第十一章，自 167 頁始，原作者為 Martin Gardner。

分析

這是（推廣自）Gardner 書中的版本。

---

3 參考文獻四

一個很明顯的推論是，指南針的數量越多就越容易贏——最好跟磁鐵的數量一樣多，傑克只要「看」一次就能翻正所有的磁鐵。同時，指南針的數量比磁鐵還多是沒有意義的，因為磁鐵並不會亂動，測量一顆磁鐵至多消耗一根指南針。

又或者，傑克可以暫時不要旋轉圓盤，不斷地等指南針完成消磁以測量其它尚未被看過的磁鐵。但這樣又比上述的例外還無趣，因此我們假設傑克是急性子，每一次用盡所有的指南針後會立刻倒置適當的磁鐵並旋轉圓盤。

另一方面，當我們嘗試減少指南針的數量時，會發現，自從某個臨界起，傑克就再也贏不了了。而這個臨界至少會是正的，理由是，命題要求「從這些已知指向的磁鐵中挑選他喜歡的某幾顆並倒置它們」。若是傑克沒有攜帶任何指南針，就無法倒置任何磁鐵，自然無法開鎖。

在某種意義下，上述的限制條件可說是多餘的，只是純粹向原作者致敬而已。因此，在更推廣的問題中，我們會將測量和倒置區分開來，討論「磁鐵數、指南針數、手數」與傑克的輸贏關係。

此版本的問題也是「好的」，因為對於所有的正整數 n（代表磁鐵數量），總有那麼一個臨界（的指南針數量），把「傑克贏」與「傑克輸」區分開來，而這樣的臨界即為所求。

臨界示意圖。

四、過程

過程裡包含了所有的推導及證明。

（一） 研究主題 - 環球版

環球城市數學競賽（International Mathematics Tournament of the Towns）源於 1980 年，目前由俄羅斯科學院主辦、提供命題，各國的協辦單位可依需求自行翻譯原題，為消歧義，在此列出英文命題。（中文命題見「動機」。）（文件抬頭：International Mathematics Tournament of the Towns, Senior A-Level Paper, Fall 2009.）

英文原題

- At the entrance to a cave is a rotating round table. On top of the table are n identical barrels, evenly spaced along its circumference. Inside each barrel is a herring either with its head up or its head down.
- In a move, Ali Baba chooses from 1 to n of the barrels and turns them upside down. Then the table spins around.When it stops, it is impossible to tell which barrels have been turned over.
- The cave will open if the heads of the herrings in all n barrels are up or are all down. Determine all values of n for which Ali Baba can open the cave in a finite number of moves.

以上資料取自 Tournament of Towns and Math. Kangaroo at Toronto[4] 。

因為主辦單位並不提供解答，現有之「標準答案」大部份是各協辦單位整理該區學生的作答而來。台灣地區於 1999 秋季第一次參賽，由台北市九章數學教育基金會協辦，而該題在台灣區的標準答案正好選自筆者提供的作答。

以下是筆者的作答。（圖示是事後加的，格式及用詞也已重新編排，原命題亦被加強，詳見解末分析。）

[4] http://www.math.toronto.edu/oz/turgor/archives.php

證明分成兩個部份：1.當 $n = 2^k$ 時此題有解；2.當 $n \neq 2^k$ 時此題無解。

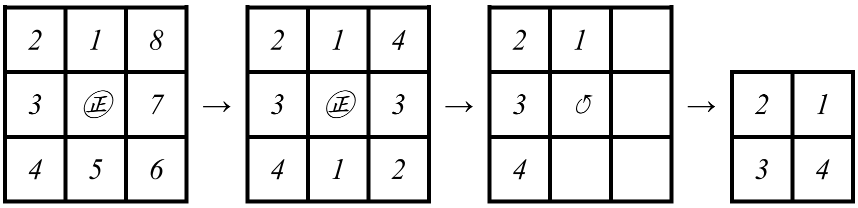
解答 - 充分性

下用歸納法證，當 $n = 2^k$ 時此題有解。

顯然 $n = 2^0$ 時是有解的；假設 $n = 2^k$ 時有解，考慮 $n = 2^{k+1}$ 的情況。現稱圓盤上的磁鐵和它對面的那顆是「一對」，所以共有 2^k 顆磁鐵對。我們想做到以下這兩種任務：

- 在一系列的操作中存在某一刻，每一對磁鐵對都是同調的。(所謂「同調」的意思是：這兩顆磁鐵的 S 極指到相同的方向。)
- 把一對磁鐵對當成一顆新的磁鐵，然後依照已知的策略翻這些磁鐵。

假如第一個任務已經達成，如何進行第二個任務呢？如果傑克原本在對抗 2^k 顆磁鐵時，某一步翻的是第 $a_1, a_2, \dots , a_i$ 顆磁鐵（磁鐵從哪顆開始數不重要）；那麼此時在 2^{k+1} 顆磁鐵這邊，傑克只要翻第 $a_1, a_2, \dots , a_i$ 顆以及第 $a_{1+2^k}, a_{2+2^k}, \dots , a_{i+2^k}$ 顆即可。



原本有八顆磁鐵，但是相對的磁鐵同調，故視為四顆磁鐵。

另一方面，在致力於達成第一個任務的過程中，為了要把握住第一個任務達成的瞬間，也就是每一對磁鐵都同調這稍縱即逝的剎那，就必須在每一次的操作之後，「檢查」是不是每一對磁鐵都同調。

如何檢查呢？我們只要在每一次操作後，都自以為是地假裝現在每一對都是同調的，直接進行第二個任務。要是鎖開了，就開了；要是鎖沒有打開，就代表還有些「磁鐵對」相背，那我們就裝作沒事，繼續執行下一步。顯然「檢查」並不影響各對磁鐵是否同調，畢竟同一對磁鐵都會同時翻動。

$$W_1 \to X \to W_2 \to X \to W_3 \to X \to \dots$$

W_i 是第一個任務的步驟而 X 是「檢查」。

至於如何把每一對磁鐵轉成同調的呢？可定義一片新的、大小為 2^k 圓盤，若某一對磁鐵同調，就對應到新圓盤上的一顆 S 極朝下的磁鐵，反之對應到 S 朝上的磁鐵。顯然新圓盤的規則和傑克遇到的圓盤一模一樣。於是由歸納法得證。

2	1	8
3	米	7
4	5	6

→

2^6	1^5	
3^7	㊣	
4^8		

→

A	9	
B	↺	
C		

→

A	9
B	C

「 ^ 」代表二元運算「 XOR 」，
這裡用來表示「判斷相對的磁鐵同調與否」。
A, B, C 分別是 16 進制的 10, 11, 12 。

解答 - 必要性

下證明 $n \neq 2^k$ 時無法在有限次操作之內達成任務。在此想像有個命運之神、海神，可以控制圓盤的轉法來阻撓傑克成功，於是我們要證明：不管傑克有甚麼策略來轉動磁鐵，海神都有辦法轉動圓盤讓傑克喪心喪意，無功而返。

先看一個例子：假如 n 是奇數。在每一次轉動中，海神可以先看傑克下一步準備要翻哪些磁鐵，在這其中一定有兩處相鄰的位置，傑克在下一步都有翻，或是都沒有翻（因為 n 是奇數）；現在我們再回過頭來看現在圓盤上的磁鐵。

因為傑克還沒有成功，所以一定能夠找到兩顆相鄰的磁鐵，它們的 S 極指向恰好一上一下。於是，海神只要把這兩顆磁鐵對準那兩處相鄰的位置，這樣傑克在下一步翻磁鐵後，這兩顆磁鐵仍然是一上一下。只要一直重複這個步驟下去，傑克根本無法達成任務。

D	D	D	U	U	=	D	D	D	U	U	=	U	U	D	U	D
翻	止	止	翻	翻	⇒	翻	翻	止	止	翻						

「 D 」代表 S 極朝下（ Down ）、「 U 」代表 S 極朝上（ Up ）
雙箭號「 ⇒ 」代海神表對準的過程，箭號「↗」代表傑克翻磁鐵的過程。

一般情形中，若 $n \neq 2^k$，那麼 n 一定有一個奇質因數 p。此時，考慮第 $n/p, 2n/p, \ldots, (p-1)n/p, pn/p = n$ 這 p 顆磁鐵，與上述同樣的方法可以原封不動地運用在這 p 顆磁鐵身上。於是當 $n \neq 2^k$ 時，傑克可能無法達成任務。

D		*D*		*D*		*U*		*U*		=	*U*	*U*	*D*	*U*	*D*
翻		*止*		*止*		*翻*		*翻*		⇒	*翻*	*翻*	*止*	*止*	*翻*

「（空白）」代表不重要的位置。

以上資料取自財團法人台北市九章數學教育基金會[5]。

至此，所有的情況都討論完了。

分析

這份作答裡其實偷偷將加強了原命題，我們變成要求，門開的條件是「所有的 S 極朝下」。而這個條件已經包含了原條件「所有磁鐵指到相同的方向」、也就是「全部的 S 極朝下」這個方向。

同時，我們可以從作答裡發現以下的概念：遍歷、格雷碼、河內塔。遍歷各種的指向分佈是一定會發生的，由於傑克必須有能力把所有可能的磁鐵指向分佈都翻到「完全同調」，反過來說，就有辦法將完全同調翻回所有可能的磁鐵指向分佈。

我們可以試著展開所有的步驟，（操作是固定的，因為沒有任何事物可以影響傑克的決定，他負責翻而已。）很容易發現類似「 A, B, A, C, A, B, A, D, ... 」這樣的操作排列，就像河內塔的操作一樣。原因是，兩者都複製既有的策略，再於步驟之間插入屬於這個層級的特殊操作。

解決了這個問題的同時，我們也解決了一部份的 Gardner 盤問題。至少我們知道，對於 2^{k+1} 顆磁鐵，2^k 根指南針就足以解決問題。而證明下限也是容易的，類似於此處逆命題的證明：若是指南針數量不足，就總是存在兩顆相鄰（且相背）的磁鐵不會被看到，故傑克輸。

[5] http://www.chiuchang.org.tw/modules/news/article.php?storyid=473

U	*U*	*U*	*D*	*D*	*D*	*U*	*U*	=	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*U*	*D*
止	*看*	*止*	*止*	*看*	*止*	*看*	*止*	↗									

指南針不足時，總會存在相鄰、相背的磁鐵不被看到、翻到。

（二） 研究主題 - Gardner 版

這個命題最早可以追溯到 1979 年 Scientific American 雜誌（二月號），在 Martin Gardner 的專欄 Math Game 。後集結至著作：Fractal Music, Hypercards and More ，以 The Rotating Table 為該問題命名，以下是書中的命題敘述。（中文命題見「動機」。）

命題

- Imagine a square table that rotates about its center. At each corner is a deep well, and at the bottom of each well is a drinking glass that is either upright or inverted. You cannot see into the wells, but you can reach into them and feel whether a glass is turned up or down.
- A move is defined as follows: Spin the table, and when it stops, put each hand into a different well. You may adjust the orientation of the glasses any way you like, that is, you may leave them as they are or turn one glass or both.
- Now, spin the table again and repeat the same procedure for your second move. When the table stops spinning, there is no way to distinguish its corners, and so you have only two choices: you may reach into any diagonal pair of wells or into any adjacent pair.
- The object is to get all four glasses turned in the same way, either all up or all down. When this task is accomplished, a bell rings.

節錄自 Fractal Music, Hypercards and More[6] 。

[6] 參考文獻四

分析

從這裡我們可以看到，在原本的命題中，是操作者將手伸入深孔中，並在伸出來之前決定是否倒置酒瓶。不同於筆者提出的磁鐵模型中，隱含了「先用指南針測量某些磁鐵」再「伸手倒置另一些磁鐵」。（雖然額外新增規定禁止這項行為。）

但就如同之前提到的，磁鐵模型提供了研究問題的另一種可能。以本題四顆磁鐵為例，環球版的策略告訴我們，它是可以「盲解」的，傑克不用依靠指南針，只要兩隻手就能贏。意即，他對「手」和「指南針」的需求是不相同的，兩者不僅可以分開來討論，還會產生不同的答案。

但除了二的冪之外，是否仍有其它的情形，可以產生比 Gardner 版還要好的答案。例如，什麼時候也會需要大量的手，但不需要太多指南針？或者，又有什麼時候，只需要一顆指南針和一些手就可以達到目標？這將留到後面討論。現在，我們要先解決 Gardner 版的命題。

定義 - 復位

提出解答之前，我們先引入一個概念。原本在環球版的問題中，一顆磁鐵只允許兩種操作：翻或不翻。但是 Gardner 版允許使用指南針，因此可以在操作中加入判斷條件，例如：「如果 S 極朝上就翻，否則不要動作」這個操作，會讓所有被看到的磁鐵都變為 S 極朝下。

於是我們就有一種新的描述解答的方法：用「復位」代表「無論如何把 S 極翻至朝下」。這種操作敘述起來非常簡單，也會很常見，畢竟傑克本來就是希望將所有的磁鐵都復位，或是反復位、代表將 S 極翻至朝上。

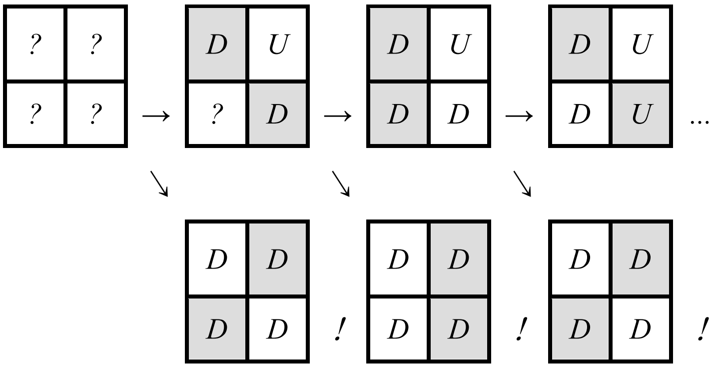
$$\boxed{U} \rightarrow \textit{翻} \rightarrow \boxed{D} \leftarrow \textit{止} \leftarrow \boxed{D}$$

倒置磁鐵當且僅當 S 極朝上。

解答

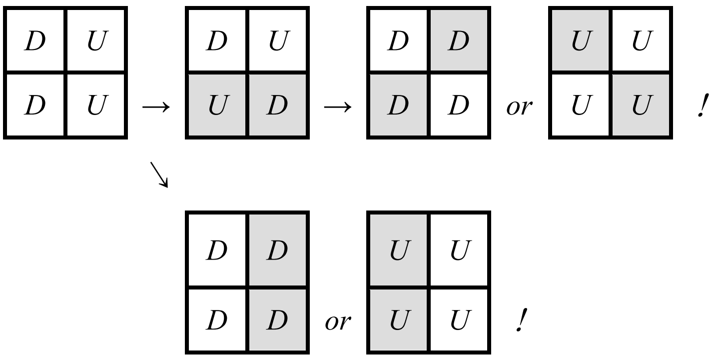
首先把位於某條對角線上的兩顆磁鐵「復位」，接著再把某兩顆相鄰的磁鐵「復位」。到目前為止，遊戲不是結束了，就是只剩一顆磁鐵 S 極朝上。此時測量其中一條對角線上的磁鐵，若發現上述「 S 上」的磁鐵，將

它復位即可。若是看到兩顆已復位的磁鐵，則反復位（其實就是倒置）其中一顆。



被看到的磁鐵以灰色網底表示。
「？」代表指向未知。
「方桌」的右下角：「！」代表鎖具解體、「 ... 」代表尚未成功。

接下來倒置兩顆相鄰的磁鐵，（就不用測量了直接倒置。）運氣好的話，會抽到兩顆同調的磁鐵，倒置後遊戲結束。否則會形成兩條對角線上的磁鐵各自同調，而兩條對角線彼此不同調，此時，倒置任意對角線的磁鐵即可。



被看到的磁鐵以灰色網底表示。
「 or 」代表兩者之一會出現。

至此，所有的情況都討論完了。

環球版和 Gardner 版的命題是整個研究的開端，也順利地被完全解決了。接下來，我們混合了環球版的「圓盤」、與 Gardner 版的「指南針」，構造出新的遊戲，取名為 Gardner 盤。從現在起，我們將專注於 Gardner 盤的探討，因為它才是整個研究的核心。

（三） 推廣 - Gardner 盤

「方法」中第二版的命題欲求指南針數和磁鐵數的關係，現假設共有 m 根指南針及 n 顆磁鐵。我們宣稱：傑克會贏，若且唯若 $n\text{-}m \le n/p$ ，其中 p 是 n 最大的質因數。（此處為了讓 $n = 2^k$ 也能適用，便沒像某些的數論函數要求 p 是奇質數。）

$$n - m \le \frac{n}{p}$$

Gardner 盤得解的充分必要條件。

之前在環球版的分析最後有提到，環球版的做法可以移植到 Gardner 盤上。當時，我們推論一個有 2^k 顆磁鐵的圓盤至少需要 2^{k-1} 隻手，否則可能存在兩顆相鄰、相背的磁鐵一直沒有被看到、翻到，傑克就輸了。

U	*U*	*U*	*D*	*D*	*D*	*U*	*U*
止	*看*	*止*	*止*	*看*	*止*	*看*	*止*

=

D	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*U*	*D*

指南針不足時，總會存在相鄰、相背的磁鐵不被看到、翻到。

若是以該條件、即 $n = 2^k$ 代入上述的關係式檢驗，我們會得到 $n\text{-}m \le n/2$ ，和先前的結果相符。除此之外，由於任意的質數 p 都不比二小，故不論 n 的因數分解為何，根據我們的猜測，都會有 $n\text{-}m \le n/p \le n/2$ ，沒有例外。

$$n - m \le \frac{n}{2}$$

二冪 Gardner 盤得解的充分必要條件，
也是所有情形的必要條件。

一方面，正是因為 $n\text{-}m \le n/2$ 而 $n\text{-}m \le m$ ，我們才以 $n\text{-}m$ 作為比較的標準。另一方面，我們試著賦予 $n\text{-}m$ 新的意義，並說明直接考慮 $n\text{-}m$ 比較接近命題本質。例如以下當 n 為質數 q ，代入得到 $q\text{-}m \le q/q = 1$ 。這可以翻譯成，當磁鐵的顆數為質數時，傑克至多只能少帶一根指南針，否則就無法讓遊戲結束。

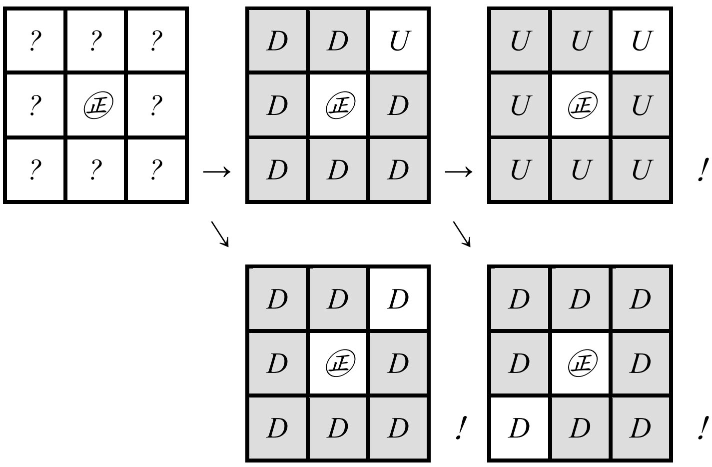
證明 - 當 $n=q$ 是質數

我們希望能證明：傑克會贏，若且唯若 $q\text{-}m \leq q/q = 1$ 。如果它是對的，就代表存在某些情況，一旦短少兩根指南針就沒有辦法解決。同時，依定義我們知道不等號的右邊一定是正整數，而它的下限、也就是 *1* ，在磁鐵數為質數時取到了。

$$n - m \leq 1$$

質數 Gardner 盤的充分必要條件。
也是所有情形的充分條件。

證明充分性（策略存在）的方法如下：第一步「復位」其中 *q-1* 顆磁鐵，若是遊戲尚未結束，就再測量 *q-1* 顆磁鐵，如果發現「 S 上」的磁鐵，便將其復位。相反地，如果傑克沒有看到尚未復位的磁鐵，就倒置眼前已復位的所有磁鐵，此時連同第 *q* 顆在內，所有的磁鐵都是「 S 上」。



被看到的磁鐵以灰色網底表示。

表格是方的所以暫時假設 q = 8 *是質數。*

必要性（下限）的證明稍嫌複雜，不同於環球版的命題。若是傑克自始至終看不到磁鐵的指向，即便是翻到相背的磁鐵，他仍會忠實地同時倒置它們，而兩顆磁鐵還是不同調。但是在 Gardner 盤中，（如果他有看到的話，）傑克可以選擇只倒置其中一顆磁鐵，所以勢必得讓他「看不到」相背的磁鐵。

定義 - 金幣

假裝傑克同時會用金幣補足短少的指南針，並試圖測量剩餘的磁鐵，惟金不具磁性，沒有辦法判斷磁鐵的指向，所以原命題不變。同時，金幣的枚

數恰好就是剛剛提到的 n-m ，或寫成 l 。我們希望證明 $l = n$-$m \le 1$ 時策略才存在，意即，存在兩枚金幣時遊戲無法結束。

$$l + m = n$$

金幣數加指南針數為磁鐵數。

證明的方法是考慮所謂「有限策略」中的最後一步，它的特色為，可以將所有尚未結束的遊戲玩完。前提是必須有某些磁鐵還不同調，否則遊戲早就結束了、便不能算是「最後一步」。接著設法找到一個海神的策略，讓傑克的最後一步無論如何都不能達到目標，從而和「存在策略」矛盾。

$$l \le 1$$

質數 Gardner 盤的充分必要條件。

也是所有情形的充分條件。

現假設遊戲尚未結束、並非所有磁鐵都同調，考慮某兩枚金幣擺放的位置，令它們的距離為 k 。（取決於它們之間的邊數，意即兩磁鐵隔了 k-1 顆其它磁鐵。）我們知道第 k 顆跟第 $2k$ 顆磁鐵必須同調，否則教海神將這兩處位置對準金幣，讓遊戲無法在這步之後結束。（因為傑克「看不到」！）

1	*2*	*D*	*4*	*5*	*U*	*7*	=	*1*	*2*	*D*	*4*	*5*	*U*	*7*	…
		止	⇤	⇥	*止*										

這裡 n = 7, k = 3 ，

若是第 k *顆磁鐵和* 2k *磁鐵不同調則遊戲無法結束。*

1	*2*	*D*	*4*	*5*	*U*	*7*
		止	⇤	⇥	*止*	

所以這兩顆磁鐵一定同調，不妨設為 S 下。

類似的道理，第 $2k$ 顆磁鐵跟第 $3k$ 顆磁鐵也必須同調、 第 $3k$ 顆磁鐵跟第 $4k$ 顆磁鐵也必須同調。依此類推，我們證明了所有的磁鐵都同調，（因為 k, p 互質、故 ik 遍歷 p 的剩餘系，）這與該步為最後一步、遊戲尚未結束的假設矛盾，故得證。

1	*D*	*D*	*4*	*5*	*D*	*7*
⇥	止				止	⇤

同理，第 2k 和第 3k 顆磁鐵也必須同調。

1	*D*	*D*	*4*	*D*	*D*	*7*
	止	⇤	⇥	止		

依此類推，第 ik 和第 (i+1)k 顆也必須同調。

D	*D*	*D*	*4*	*D*	*D*	*7*
止				止	⇤	⇥

+)

D	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*

圓盤疊加之後會發現矛盾。

分析

解答中可以發現有趣的現象：「少數服從多數」或「多數尊重少數」。在充分性的證明裡，傑克首先復位其中 *q-1* 顆磁鐵（製造多數），緊接著又測量了一次，如果看到那顆不同調磁鐵，便將其復位（服從多數），否則只能把眼前的 *q-1* 顆磁鐵反復位（尊重少數）。從現在起，我們將以上的操作稱為「表決」。

?	*?*	*?*	*?*	*?*	*?*	*?*

↓

D	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*U*

↙ ↘

D	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*	*D*

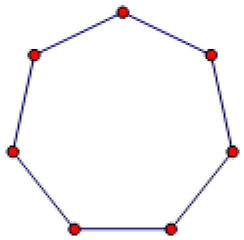
U	*U*	*U*	*U*	*U*	*U*	*U*

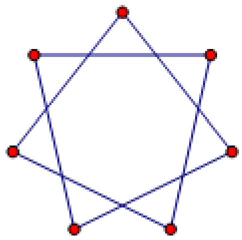
表決流程圖。

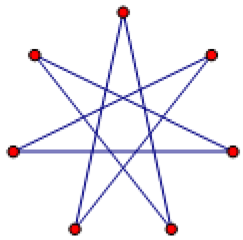
左邊是「少數服從多數」、右邊是「多數尊重少數」。

在第二部份、必要性的證明中，我們用到了質數的性質：所有小於某質數的正整數 k 都和它互質。所以，當 ik 遍歷整個剩餘系時，也就證明了每個剩餘類對應的磁鐵都同調。

同時也給出一個可以推廣的想法：當我們可以用某段跨度遍歷所有的磁鐵時，反而會導致給出跨度的這兩枚金幣不能存在。也就是說，傑克必須使除了一顆以外的所有磁鐵都各配到一根指南針，這概念將在推廣中賦予它新名字。





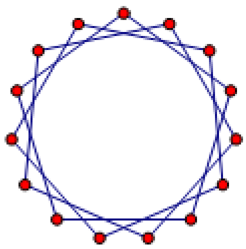


三種「遍歷」。

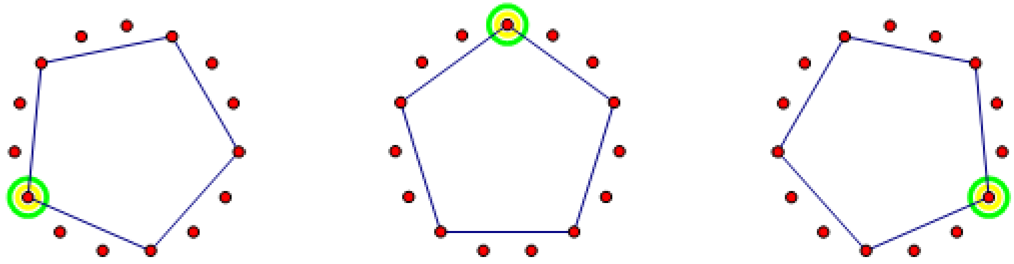
藍色線段代表不同跨度的金幣。

證明 - 當 n 不是質數 - 必要性

類似環球版的第二階段證明，任何正 $n = pr$ 邊形（ p 仍然是質數）都可以分成 r 個正 p 邊形疊合，而每一個正 p 邊形都不允許超過一枚金幣。所以至多 $r = n/p$ 枚金幣。這個式子對 n 所有的質因數都有效，因此取最大的質因數 p 去計算下限。



正十五邊形可分解為三個正五邊形，



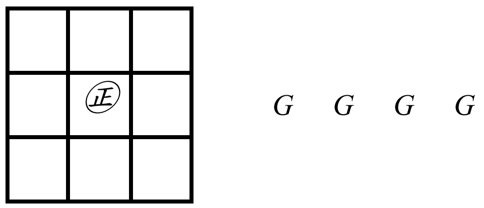
所以至多存在三枚金幣。

接下來我們想證明充分性，但在那之前，先介紹兩個輔助用的工具。

（%） 工具 - 消去法

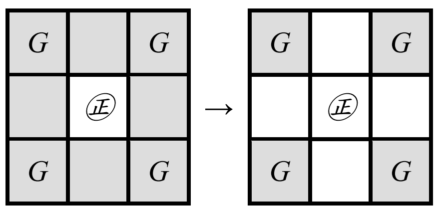
- 若 $n\text{-}m \leq n/p$ 成立，就有策略能在有限次操作之內將其中 $n\text{-}1$ 顆磁鐵復位。

$n = q$ 為質數的情況，也就是 $q\text{-}m \leq 1$ 的做法剛剛已經演示過了，直接將 $q\text{-}1$ 顆磁鐵復位即可。但是 $n = pr$ 時情況稍嫌複雜，此時傑克有 r 枚金幣，但是條件只允許一顆磁鐵沒有復位。



「G」代表金幣，
這裡 n = 8 , p=2 , r = 4 。

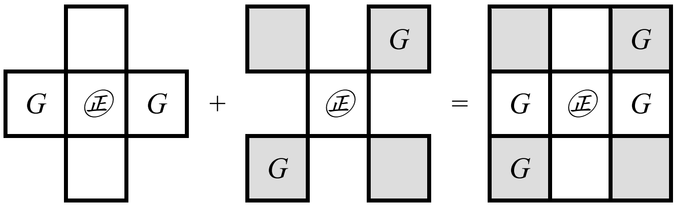
方法如下：教傑克先把所有的金幣擺成正 r 邊形的形狀，然後將其它所有的磁鐵復位。此時，考慮任意兩顆相鄰（也就是最接近）的金幣，它們之間的「距離」將是 p ，這是因為 $n = pr$ 。至此，尚未復位的磁鐵恰好組成一個正 r 邊形。



金幣所擺的位置會讓磁鐵無法復位。

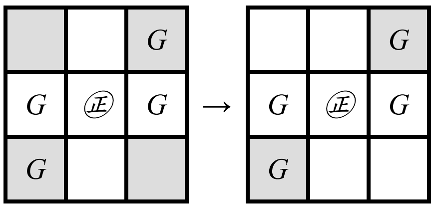
尚未復位的磁鐵以灰色網底表示。

接著我們把 r 再質因數分解，得到 $r = r_1 = p_2r_2$ ，其中 $p_2 \leq p_1 = p$ 是一個比較小的質數。再教傑克用這個質數操作一次：把所有的金幣擺成正 r_2 邊形，在每一個正 r 邊形上都各擺一次，共 p_1 份拷貝，並且將其它所有的磁鐵復位。



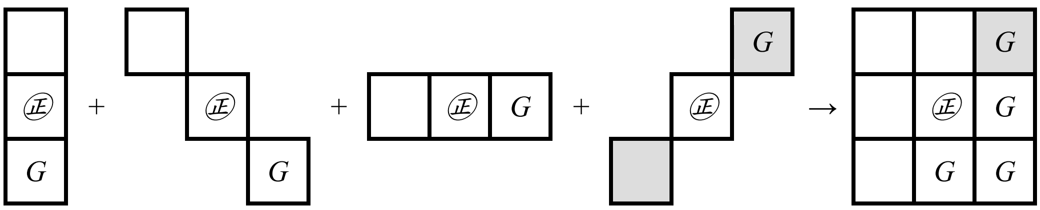
兩個正方形各分配了兩枚金幣。

這樣傑克一共需要 $p_1r_2 \geq p_2r_2 = r_1$ 枚金幣，（可能會不夠，但）其實可以拿指南針來充數，假裝看不到那幾根指南針的測量結果即可。做完這步之後，尚未復位的磁鐵剩下原本正 r_1 邊形中的正 r_2 邊形。



金幣擺到已復位的磁鐵上不會影響。

我們再分解一次 $r_2 = p_3r_3$ ，做完這步之後，尚未復位的磁鐵剩下剛剛正 r_2 邊形中的 正 r_3 邊形。在這個分解裡，我們每一次都取 r_i 的質因數 p_{i+1} ，直到最後當某個 r_{k-1} 自己就是質數時，$r_{k-1} = p_i$ 而 $r_k = 1$，這個「正 r_k 邊形」上唯一的磁鐵便成為唯一（可能）尚未復位的磁鐵，從而命題得證。

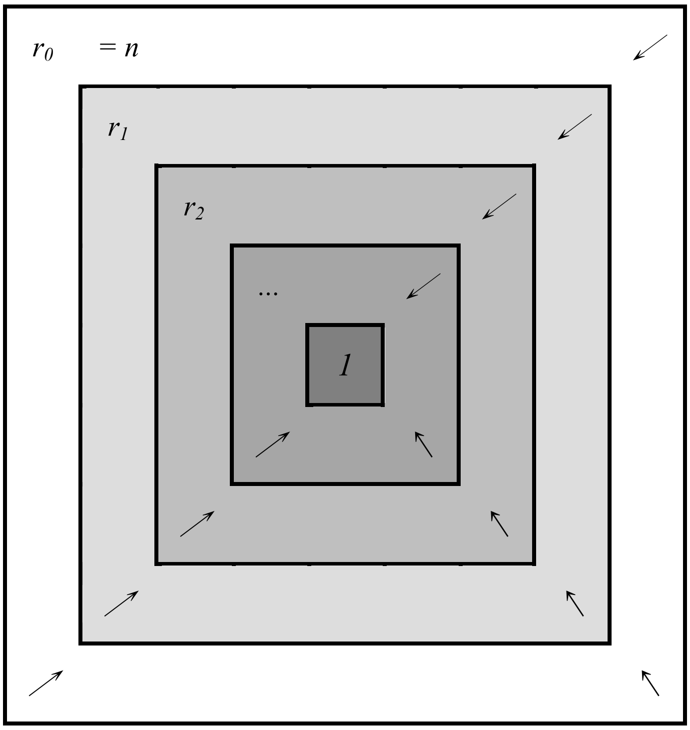


做完最後一步之後，至多剩下一顆磁鐵尚未復位。

分析

作為輔助充分性的工具，可能有人認為消去法比原題稍弱一些。但事實上它們的訴求是不一樣的，原題只說要所有磁鐵都同調，沒有規定指向。工具卻同時要求指向：S 極朝下。因此，兩者的強度是差不多的。

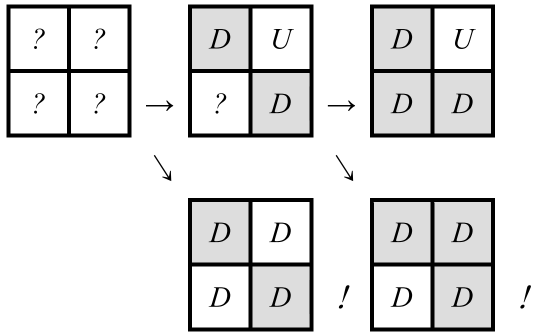
而消去法的功用是，它可以將圓盤中的 S 上磁鐵「消去」到只剩一顆不同調，（而且至多只需要 $log_2 n$ 次操作就能達成。）這代表，只要我們有辦法解決只有一顆磁鐵不同調的圓盤，就可以解決所有的情形，大幅減少了冗長的策略敘述。



一次一次地，尚未復位的磁鐵越變越少。

稍微回顧一下 Gardner 版、質數 Gardner 盤（特別是前者）的解答，其實已經出現過類似消去法的方法。如下：

- 把位於某條「對角線」上的兩顆磁鐵復位，接著再把某兩顆「相鄰」的磁鐵復位。



提醒：即使是未復位的磁鐵也還是有可能同調。

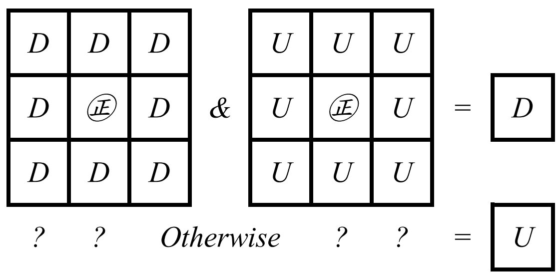
這些步驟可視為 $n = 2*2$ 的消去法「展開」的結果。一條「對角線」就是一個「正二邊形」，第二步則教傑克在兩個「正二邊形」中各擺一個「正一邊形」組成的金幣，那麼這兩枚金幣在正方形裡就會「相鄰」。

完成消去之後，我們要再做另外一件事情。

（%） 工具 - 二分法

- 將較大的圓盤換小，使大圓盤的策略能套用小圓盤的解策略。

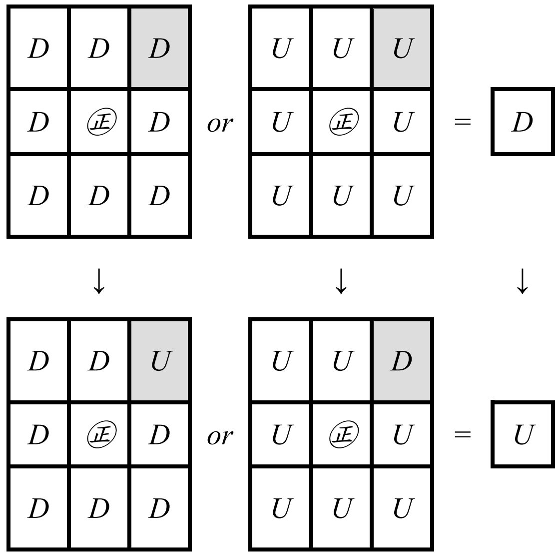
沿用上述的質因數分解 $n = r_0 = p_1 r_1$ ，我們想像一片新的圓盤 T_1 ，由排成正 r_1 邊形的磁鐵組成，每一顆磁鐵代表一個正 p_1 邊形。接著我們定義對應關係：當某個正 p_1 邊形上的磁鐵都同調時，它對應到 T_1 上的磁鐵就復位，否則（一旦有任何一顆磁鐵不同調時，） T_1 這顆磁鐵 S 上。



有兩種情形（中間以「 & 」相隔）對應到復位的磁鐵。

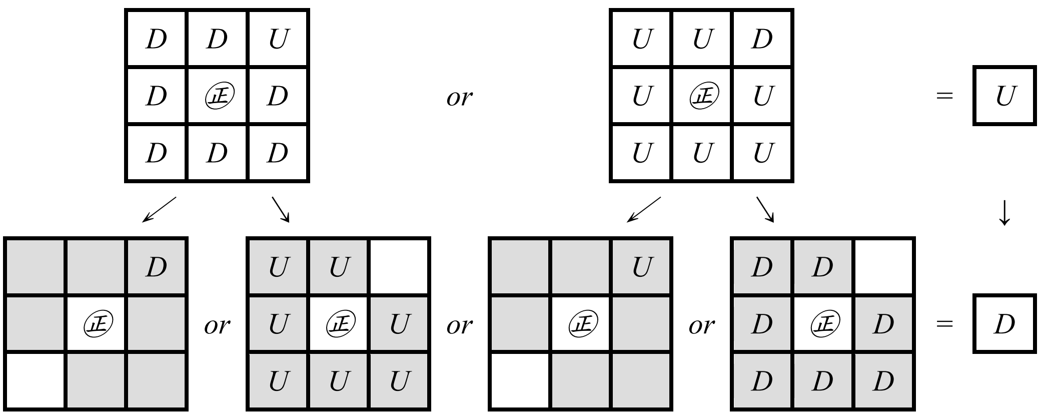
其它所有的情形（ Otherwise ）則視為尚未復位。

在 T_1 上，如果某一步把某顆磁鐵從 S 下翻至 S 上，那這顆磁鐵對應到的正 p_1 邊形原本會處於完全同調的狀態，為了破壞同調，規定傑克必須倒置其中一顆磁鐵。（恰好一顆，不能多也不能少。）



指向更動的磁鐵以灰色網底表示。

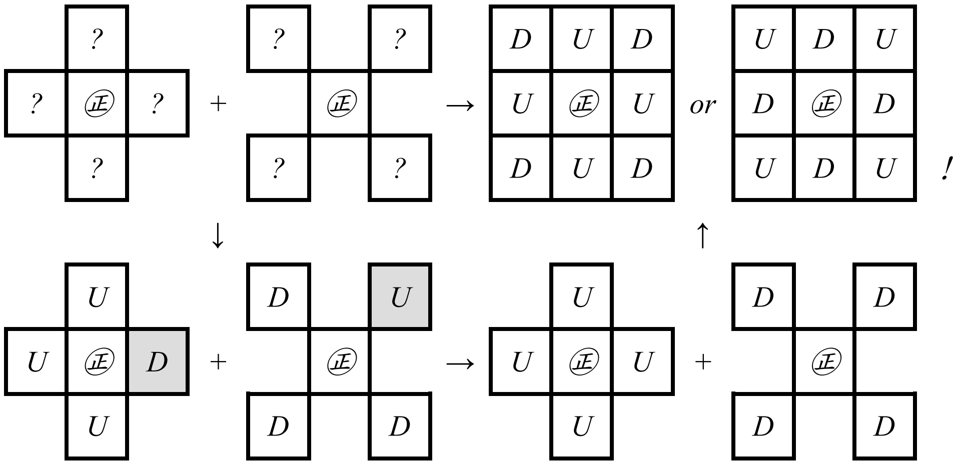
相反地，若是從 S 上翻至 S 下，就測量對應回去的其中 p_1-1 顆磁鐵，如果發現有某一顆磁鐵和別顆都不同調，就把它倒置。否則代表不同調的磁鐵是傑克沒有看到的那顆，此時倒置其餘全部的磁鐵（讓所有磁鐵同調）即可。（這就是剛剛提過的「表決」！）



指南針擺放的位置以灰色網底表示。

指向未被更動的磁鐵省略不寫。

當 T_1 解體時，可以推得 T_0 有兩種最終狀態，每一個正 p_1 邊形都各自同調，或者每一個正 p_1 邊形都恰有一顆磁鐵（與該正 p_1 邊形）不同調。前者可像環球版的解答一樣用歸納法，而後者只要再對每個正 p_1 邊形表決一次即可。



和正 p 邊形不同調的磁鐵以灰色網底表示。

在以上的步驟中，包括表決在內，容易驗證所需的指南針數都在範圍內，也就是 $n\text{-}m \geq n/p$ （其中 p 是 n 的最大質因數），從而條件成立。

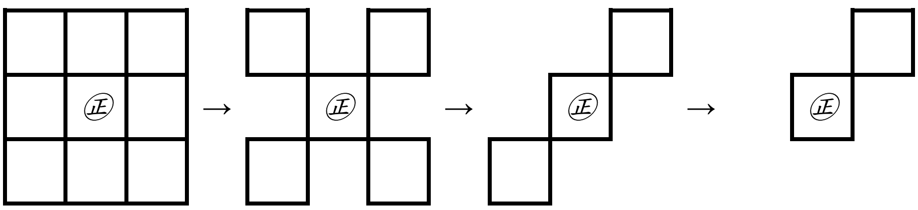
$$n - m \geq \frac{n}{p}$$

使用的指南針數量沒有超過限制。

分析

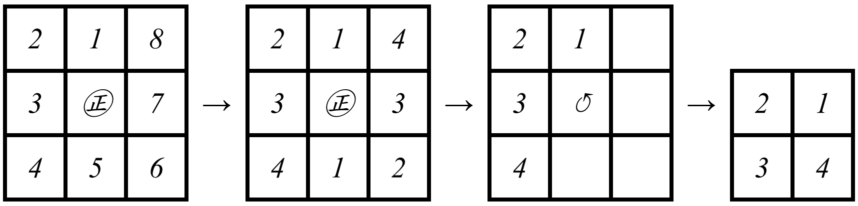
特別注意到，由於二分法是接在消去法之後做的，使得當時整個圓盤至多只有一顆磁鐵尚未復位。按照我們定義的關係，只會有一個正 p_1 邊形不同調，所以 T_1 上至多也只有一顆（代表該正 p 邊形的）磁鐵不同調。

藉由二分法「非下即上」的對應方式，類似於我們在環球版所作的歸納，就可以把 T_1 的做法擴展到 T_0 上。而 T_1 做法（如果 r_1 還不是質數的話）自然可由 T_2 產生，接下去顯然還有 $T_3, T_4, T_5, \ldots$ 。



正八邊形的「圓盤退化史」。

也就是說，除了先用 T_1 的做法將 r_1 個正 p_1 邊形做成各自同調，接下來，只剩下將 r_1 個各自同調的正 p_1 邊形各視為一顆磁鐵 ，並再類比一次。當 T_1 上的磁鐵同調時，對應到 T_0 上的每個正 p_1 邊形彼此之間也同調、這代表所有的 $n = p_1r_1$ 顆磁鐵都同調，遊戲一定會結束。



讓我們再回想一次環球版的證明。

要特別強調的是，這個策略是推廣自環球版和 Gardner 版的解答，如果花一點時將 $n = 4$ 或 $n = 2^k$ 代入上述的命題，會發現這些策略都是差不多的。就如同我們之前提到環球版的策略很像河內塔，畢竟@@它們的策略都是用遞迴產生的。

A, B, A, C, A, B, A, D, A, B, A, C, A, B, A

階數為四的的河內塔做法。

最後我們來總結一下，完成充分性的證明。

證明 - 當 n 不是質數 - 充分性

（首先注意到不管是不是質數，都已經無所謂了！）

第一步是用消去法，使得至多一顆磁鐵不同調。接著套用二分法，使得每一個正 p_1 邊形都各自同調。再將其視為一個新的正 r_1 邊形，（稱呼為 T_1 ，）其中每顆磁鐵都代表 T_0 中的一個正 p_1 邊形。最後，用我們已知的策略解決 T_1 ，從而解決了 T_0 。

至此，所有的圓盤、Gardner 盤都討論完了。

分析

仔細計算的話，會發現我們一共用了三次歸納法，分佈在消去法（一次）和二分法（兩次）裡。同時，每一次的歸納法都會再包含「去-分」裡的三次小歸納，因此我們粗估本題的複雜度是 $3\text{^}\log_2 n = n\text{^}\log_2 3 = n\text{^}1.6$ （多項式時間！）

$$3^{\log_2 n} \approx n^{1.6}$$

本題的複雜度是多項式時間！

此外，在證明中我們一直略過比較簡單的情形，直接討論最不幸的狀況。事實上，上述的解答中不乏因為歸納法而隱藏起來的步驟，就像環球版的解答提到的：

- 就必須在每一次的操作之後，「檢查」是不是每一對磁鐵都同調。

一方面，筆者不希望將精神消耗在檢查每一個細節上，而是專注於我們如何一步一步地接近目標，也就是整個研究的精髓。另一方面，我們也盡量修正策略，讓每一步操作中所產生、並忽略的「枝節」盡量明顯易懂，使得真正的驗證工作不至於太複雜。

（四） 推廣 - Gardner 正多面體

延續上述的規則，接下來我們把圓盤換成「柏拉圖正多面體」。我們規定磁鐵將被擺放在所有的「頂點」上，而不是傳統上用來命名的面。事實上，如果希望討論磁鐵在面上、甚至是邊上的情形，都還有相應的對偶、或削稜立體。這將放在後面討論，現在先討論正多面體，其性質可見下表或文末。

（英文）名稱	面數	頂點數	磁鐵數	邊數	對稱數
• Tetrahedron	4	4	4	6	12
• Octahedron	8	6	6	12	24
• Cube/Hexahedron	6	8	8	12	24
• Icosahedron	20	12	12	30	60
• Dodecahedron	12	20	20	30	60

到目前為止我們只要管「磁鐵數」。（或是頂點數，兩個是一樣的。）

正四面體（ Tetrahedron ）

證明將分為必要性及充分性。

首先注意到正四面體的「任何兩個頂點都相鄰」，所以如果傑克有兩枚金幣，鎖具又有兩顆磁鐵相背，海神就可以一直把這兩顆相背的磁鐵轉到金幣的位置，遊戲就永遠無法結束。

又若開始時只有一枚金幣，就先做一次消去法，之後至多再表決一次即可。因此，正四面體形狀的鎖共需要三根指南針。

Tetrahedron, from Wikipedia[7].

正八面體（ Octahedron ）

正八面體可視為兩個「正 *3* 邊形」的疊合，故至多存在兩枚金幣。（在兩個三角形上分別出現一枚。）

[7] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/25/Tetrahedron.png

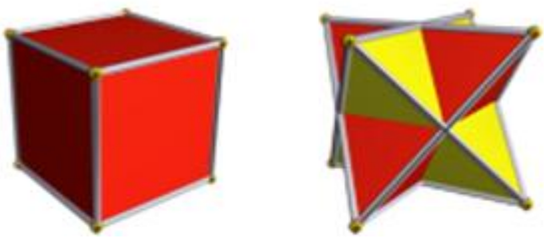
又若開始時只有兩枚金幣，就先做一次消去法，接著再做一次二分法，（將三對頂點視為「正 *2* 邊形」，）即可將三個二邊形翻成各自同調、再翻成彼此同調。共需要四根指南針。

Octahedron, from Wikipedia[8].

正六面體／正方體（ Cube / Regular Hexahedron ）

正六面體可視為兩個「正四面體」的疊合[9]，故至多存在兩枚金幣。（在兩個四面體上分別出現一枚。）

又若開始時只有兩枚金幣，就先做一次消去法，接著再做一次二分法，（將四對頂點視為「正 *2* 邊形」，）即可將四個二邊形翻成各自同調、再翻成彼此同調。共需要六根指南針。



Hexahedron and Stellated Octahedron, from Wikipedia[10][11].

分析

首先注意到的是，這裡並不遵守破除了 $n\text{-}m \leq n/p$ 。以正四面體為例，四個頂點必須分配三顆磁鐵才行，（就好像四質數一樣。）理由是，我們無法在它上面找到所謂的「正 *2* 邊形」可以用來歸納。事實上，由於四面體屬於

---

[8] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f5/Octahedron.png
[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Stella_octangula
[10] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/33/Hexahedron.png
[11] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/79/Compound_of_two_tetrahedra.png

三維結構，因此所有「正 2 邊形」都能「橫跨」任何一種分組，故不存在有效的分組。

此外，如果再接下去討論正二十面體，會發現我們沒有辦法套用類似的證法。

- 正二十面體可視為兩個「正 6 邊形」的疊合，故至多兩枚金幣。（在兩個六邊形上分別出現一枚。）又若開始時只有兩枚金幣，那就先做一次消去法，接著再做一次二分法...

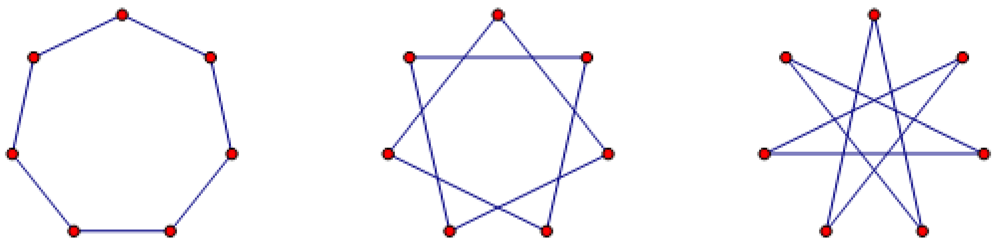
但事實上，雖然傑克可以找到幾個六邊形，但是沒有辦法證明每個六邊形至多只允許一枚金幣。稍候將會提到，在正十二面體特殊的對稱形式之下，我們仍然可以找到兩個「類六邊形」來完成必要性的證明。但是在那之前，我們要先用一個引理來為「類多邊形」鋪路。

（%） 引理 - 套幣

- 對於給定套幣的相對位置，所需指南針的數量和錢途大小有關。

套幣由兩枚金幣組成，它的概念來自之前我們證明 $n = q$ 是質數的 Gardner 盤後，在分析裡做出的結論，最初我們寫成這兩枚金幣的「跨度」：

- 當我們可以用某段跨度遍歷所有的磁鐵時，反而會導致給出跨度的這兩枚金幣不能存在。



三種「遍歷」。

藍色線段代表不同跨度的金幣。

當時，我們討論質數的方法是，無論任兩枚金幣之間的跨度為何，都有方法可以遍歷所有的磁鐵，從而推得這些磁鐵必須同調、而矛盾。現在我們用「套幣」代表這兩枚被考慮的金幣，並且稱呼它們所有的軌跡是「錢途」。接著，我們設法找出這些概念在多面體上的對應。

不幸的是，由於多面體的對稱形式要比平面的圓盤還複雜，我們決定退而求其次：現只針對一組固定的套幣、用它對應到的唯一一組跨度，算出它在多面體上的錢途。也就是說，若限制這兩枚金幣只能靠僅有的距離移動，則它們最遠可以「走」到幾處地方？

這個數值將由多面體的種類和套幣本身的相對位置唯一確定，又若將這個多面體上所有的套幣組都抓出來討論，便可以得到一個最小的錢途。而傑克至少需要這個值少一的指南針數，以行表決，同時去-分兩法也都需要。

更巧妙地，如果可以證明某組（、或某些）套幣一定會出現，那我們也可以只討論這組（、或這些）套幣的錢途。這樣一來，求出來的最小值就不會被其它錢途較小的套幣壓低。

分析

讓我們再回顧一次過去的證明，並試著將它用新的引理解釋、替代，以下節錄自 Gardner 盤必要性的證明：

- 正 pr 邊形可以分成 r 個正 p 邊形疊合，而每一個正 p 邊形都不允許超過一枚金幣。

新的證明是，如果其中一個正 p 邊形上存在兩枚金幣、也就是一組套幣的時候，這組套幣的錢途就會是整個正 p 邊形。它反而導致這個正 p 邊形需要 p-1 根指南針，與套幣存在的假設矛盾。

在更早之前，環球版的解答也用了類似的方式：

- 一定有兩處相鄰的位置，傑克在下一步都有翻，或是都沒有翻。
- 因為還沒有成功，所以一定能夠找到兩顆相鄰的磁鐵，它們的 S 極指向恰好一上一下。

第一點告訴我們只需要找「距離為 1 」的套幣，而且一定有，（因為圓盤上有奇數顆磁鐵。）第二點則是用這組套幣去「走」過整個圓盤，直到找到兩顆相背的磁鐵，從而導出所希望的矛盾。

正二十面體（ Icosahedron ）

正二十面體可視為六個「正 *2* 邊形」的疊合，若傑克有五枚金幣，必有一組套幣位在不同的兩角形上。容易驗證，除了最長的跨度（、取於遙遙相對的頂點）之外，其它所有套幣的錢途就會是整個正二十面體，它反而導致這個多面體需要十一根指南針，與超過兩枚金幣的假設矛盾。

又若開始時只有兩枚金幣，就先做一次消去法，接著再做一次二分法，（將六對頂點視為「正 *2* 邊形」，）即可將六對二邊形翻成各自同調、再翻成彼此同調。共需要六根指南針。

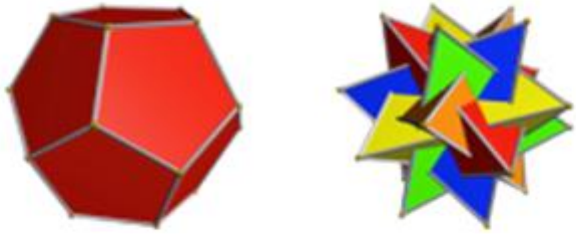
Icosahedron, from Wikipedia[12].

正十二面體（ Dodecahedron ）

正十二面體可視為五個「正四面體」的疊合[13]，若傑克有五枚金幣，必有一組套幣位在不同的四面體上。容易驗證，除了最長的跨度（、取於遙遙相對的頂點）之外，其它所有套幣的錢途就會是整個正十二面體，它反而導致這個多面體需要十九根指南針，與超過四枚金幣的假設矛盾。

又若開始時只有四枚金幣，就先做一次消去法，接著再做一次二分法，（將五個正四面體視為「正 *4* 邊形」，）即可將五個四面體翻成各自同調、再翻成彼此同調。共需要十六根指南針。

[12] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/63/Icosahedron.png
[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Compound_of_five_tetrahedra



Dodecahedron and Compound of five Tetrahedra, from Wikipedia[14][15].

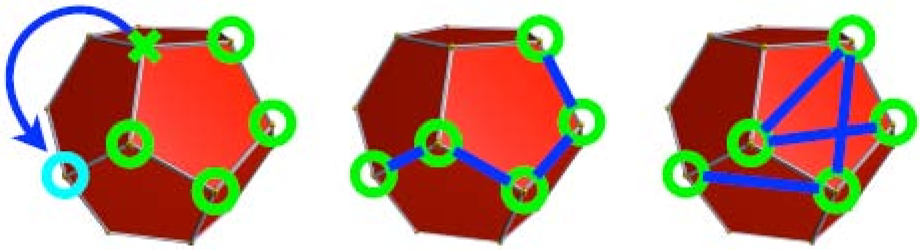
分析

在正十二面體的證明中，並沒有出現類五邊形。我們知道類五邊形也是某幾組套幣的錢途，並且期待寫出如下的證明：

- 正十二面體可視為四個「類 *5* 邊形」的疊合，故至多四枚金幣。（在四個五邊形上分別出現一枚。）...

但是從某方面來說，它的對稱群也不是完全沒有辦法暴力討論，我們才略過分成數組類五邊形的步驟，直接把整個多面體走完。但是分組討論錢途在推廣中會變得比較方便，所以筆者決定以它作為例子，類五邊形的取法如下：

先選定一面，它由五個點、五條邊圍成，先去掉其中一個頂點，剩下四個點、三條邊、連成一條鏈，鎖定其中一個端點，它有三個鄰居：一個被去掉了、一個在鏈上，再把剩下那個加進來即可。容易驗證這是套幣的錢途，且只用四個就可以不重複地拼出正十二面體。



類五邊形的取法、兩組套幣的錢途。

事實上，正十二面體也是所有柏拉圖多面體裡最奇特的，只有它允許超過兩枚金幣，也因此我們沒有辦法以「頂點對」做二分法。另一方面，照這

---

14 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/33/Dodecahedron.png
15 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/6/6c/Compound_of_five_tetrahedra.png

樣的標準，正方體其實也有特殊之處：它可以選擇用頂點對或是正四面體做二分法。

（五） 推廣 - Gardner 半正多面體

延續上述的規則，接著我們把柏拉圖正多面體換成「阿基米德立體」。

阿基米德立體，一稱「半正多面體」，可由柏拉圖正多面體切削得來，或是用適當的正多邊形拼成。我們可以用以下任何一種方式，完全確定一個半正多面體：

- 來源多面體及切法。（通常會用來命名，也是瞭解其對稱最好的方式。）
- 面的形狀與個數（二到三組數字，不如字母冗長，藉著觀察數字也能猜出其名稱。）
- 頂點特色。（顯示每個頂點依序與哪些多邊形相鄰，伴隨著所有頂點都等價。）

其中，截「半」正多面體由正多面體各邊的中點連接而成。除了正四面體的中點連接成正八面體，其餘的每一個都和它的對偶產生一樣的截半，並反應在英文名稱上。我們將上述的三種描述方式並列，詳見下表或結果：

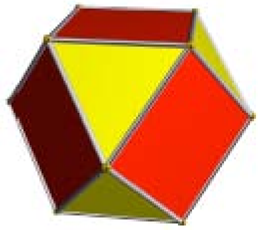
（英文）名稱	邊數	個數	邊數	個數	頂點特色	磁鐵數
• Cuboctahedron	3	8	4	6	3, 4, 3, 4	12
• Icosidodecahedron	3	20	5	12	3, 5, 3, 5	30

截半立方體（ Cuboctahedron ）

截半立方體可由八面體截半而來，（從而有八個三角形作為它的面，）或是由六面體截半而來，（從而有六個正方形作為它的面，）三角形和正方形不相鄰，因此每個邊都連結一個三角形和一個正方形。

截半立方體可視為三個「正 *4* 邊形」的疊合，故至多六枚金幣。（在三個正方形上分別出現兩枚。）另一方面，它也可視為四個「正 *3* 邊形」的疊合，故至多四枚金幣。（在四個三角形上分別出現一枚。）

又若開始時只有四枚金幣，那就先做一次消去法，接著再做一次二分法，（將三個正方形視為「正 *4* 邊形」，）即可將三個正方形翻成各自同調、再翻成彼此同調。共需要八根指南針。



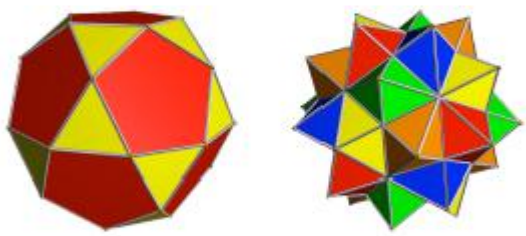
Cuboctahedron, from Wikipedia[16].

截半二十面體（ Icosidodecahedron ）

截半二十面體可由二十面體截半而來，（從而有二十個三角形作為它的面，）或是由十二面體節而來，（從而有十二個五邊形作為它的面，）三角形和五邊形不相鄰，因此每個邊都連結一個三角形和一個正方形。

截半二十面體可視為五個「正八面體」的疊合[17]，故至多十枚金幣。（在五個八面體上分別出現兩枚。）另一方面，它也可視為六個「正 5 邊形」的疊合，故至多六枚金幣。（在六個五邊形上分別出現一枚。）

又若開始時只有六枚金幣，那就先做一次消去法，接著再做一次二分法，（將五個八面體視為「正 6 邊形」，）即可將五個八面體翻成各自同調、再翻成彼此同調。共需要二十四根指南針。



Icosidodecahedron and Compound of five Octahedra, from Wikipedia[18][19].

分析

仔細觀察的話，可以發現 Gardner 立體的說明都具有一定的胚騰，方便之後可以將證明本身推廣。以上述的截半二十面體為例：我們把它分解成正五邊形（作為 p ）和正八面體（作為 r ）的「乘積」。前者被用來證明必要

[16] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a6/Cuboctahedron.png
[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Compound_of_five_octahedra
[18] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/02/Icosidodecahedron.png
[19] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/8/8a/Compound_of_five_octahedra.png

性（ $n\text{-}m \geq n/p$ ），後者則（當作二分法中的「正 r 邊形」，）用來證明充分性。

而對於性質不好的多面體，例如正二十面體和正十二面體，就沒有辦法找到這樣漂亮的分解，只能用暴力討論的方式驗證我們提出的充分性證明是不是臨界。但事實上，即使是暴力討論也有一定的規則可循，其中又以正十二面體最明顯：看似需要十九根指南針，卻還是被（神奇的）正四面體限制在十六根。

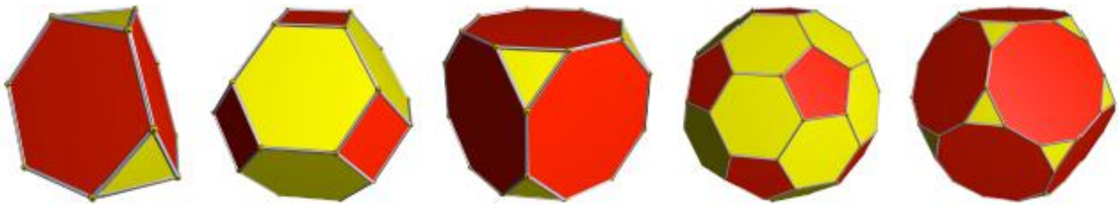
下表整理自之前所有的證明，顯示了我們處理不同鎖具的方法。必要性之下列出我們使用的錢途，充分性指的則是（二分法中）歸納的對象。

鎖具	磁鐵-金幣數		必要性	充分性
・正 p 邊形	p	1	正 p 邊形	直接表決
・正 n 邊形	n	n/p	正 p 邊形	正 n/p 邊形
・正四面體	4	1	正四面體	直接表決
・正八面體	6	2	正三角形	頂點對
・正六面體	8	2	正四面體	頂點對、四面體
・正二十面體	12	2	正二十面體、類五邊形	頂點對
・正十二面體	20	4	正十二面體、類六邊形	四面體
・截半立方體	12	4	正三角形	三角形、正方形
・截半二十面體	30	6	正五邊形	五邊形、八面體

截角多面體

截角多面體是由各正多面體自頂點切掉一部份而來，相當於由各邊的「三分點」連結而成。不同於截半會重複，每一個正多面體都可以產生一個新的截角，並反應在英文名稱上。我們將上述的三種描述方式並列，詳見下表或結果：

（英文）名稱	邊數（個數）		頂點特色	磁鐵數
・Truncated Tetrahedron	3(4)	6(4)	3, 6, 6	12
・Truncated Octahedron	4(6)	6(8)	4, 6, 6	24
・Truncated Cube	3(8)	8(6)	3, 8, 8	24
・Truncated Icosahedron	5(12)	6(20)	5, 6, 6	60
・Truncated Dodecahedron	3(20)	10(12)	3, 10, 10	60

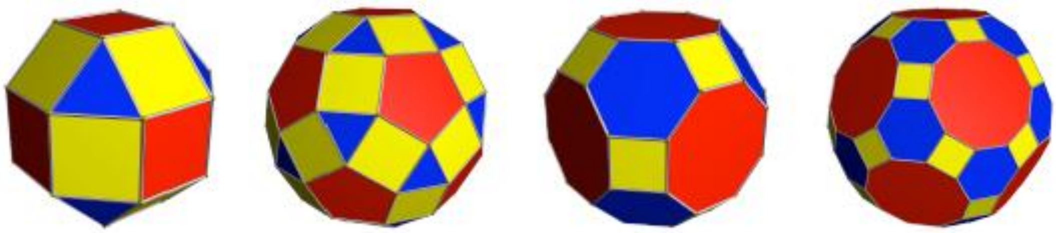


Truncated Polyhedrons, from Wikipedia[20][21][22][23][24].

而正是因為截角多面體的所有頂點都在原正多面體的邊上，它的頂點的對稱形式就會和截半多面體相似（或同態）。更特別地，前者以各邊上的兩個點構成而後者恰只用到一個，於是前者可視為後者的「兩倍」，對每一邊行二分法即可，從而所有的截角多面體都是傑克贏。

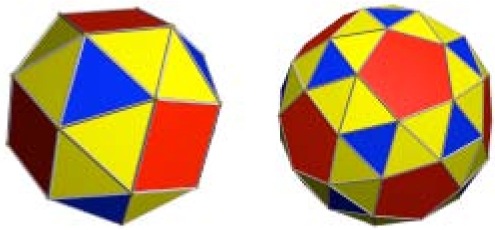
以截角四面體為例，它的頂點剛好來自正四面體每一條邊的三等分點。而若取正四面體每一邊的中點，則會得到「截半四面體」（其實就是正八面體）。於是，我們只要把每一雙三等分點對應到該邊的中點，就完成了二分法所需的對應。

餘下的六個半正多面體也有類似的「倍數關係」，都可以依賴截半多面體的策略。我們在此略過它們的證明，僅於「結果」中列出各個立體所需的指南針數。



Rhombic Polyhedrons, from Wikipedia[25][26][27][28].

20 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/75/Truncated_tetrahedron.png
21 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/95/Truncated_octahedron.png
22 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Truncated_hexahedron.png
23 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c3/Truncated_icosahedron.png
24 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6a/Truncated_dodecahedron.png
25 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ad/Small_rhombicuboctahedron.png
26 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c8/Great_rhombicuboctahedron.png
27 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/31/Small_rhombicosidodecahedron.png
28 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a3/Great_rhombicosidodecahedron.png



Snub Polyhedrons, from Wikipedia[29][30].

（六） 推廣 - Gardner 多面體

除了均勻多面體之外，尚可用某些變換，（如對偶，）或是遵守特並的規則，（用適當的多邊形）拼出新的立體。這些立體擁有各自的對稱形式，因此也是值得推廣、討論的一群。下面列出另外三種立體及它們的討論，但沒有證明，僅於「結果」中列出各個立體所需的指南針數。

卡塔蘭立體

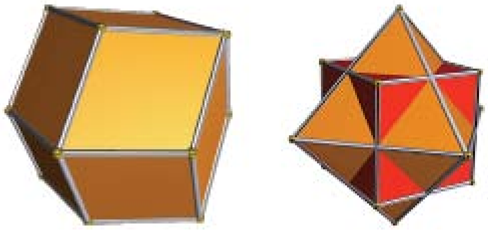
需要特別注意，之前出現過的所有立體，其上的每一個頂點都等價。相反地，正因為它們的面不完全相同，阿基米德立體的對偶，（又稱為卡特蘭立體，）並沒有完全等價的頂點群。

在頂點集不等價的情況下，一個顯然的策略就是把它們依照等價關係分類，並分別解決每組等價類的頂點。情況就好比傑克一次遇到兩個不同形狀的圓盤鎖：分節進擊（ Divide and Conquer ）即可。而最終，一個立體所需的指南針數即為所需指南針最多的等價類，或是次大等價類的總磁鐵數。

以菱形十二面體為例，它是截半立方體的對偶，故它頂點的相對位置對應到後者的面。又我們知道截半立方體的正方形來自正方體、三角形來自正八面體，從而可以宣稱菱形十二面體的頂點形態是正八面體(正方體的對偶）和正方體（正八面體的對偶）的混合。共需要六根指南針。

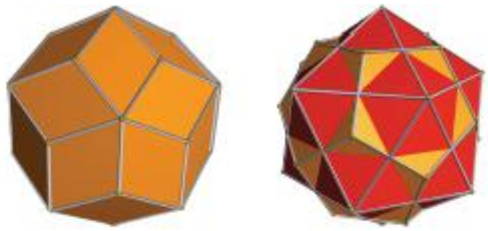
---

[29] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Snub_hexahedron.png
[30] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0d/Snub_dodecahedron_ccw.png



Rhombic Dodecahedron and Compound, from Wikipedia[31][32].

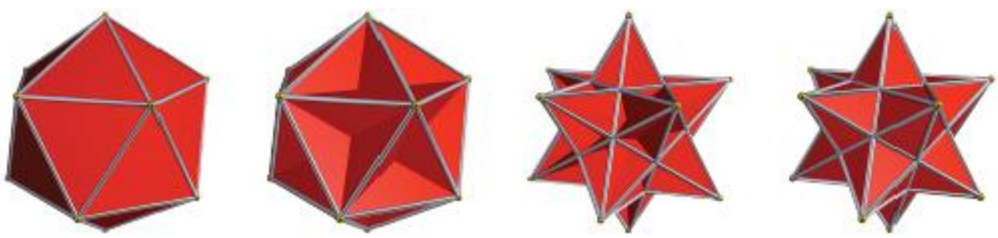
類似地，截半二十面體的對偶：菱形三十面體，也可視為正十二面體和正二十面體的複合。共需要十六根指南針。我們再次略去其餘的卡特蘭立體的證明，僅於「結果」中列出各個立體所需的指南針數。



Rhombic Triacontahedron and Compound, from Wikipedia[33][34].

星狀體、複合體

星狀體和複合體互成對偶，前者可由選取一些某多面體的截面而來，後者則是比較複雜的多面體疊合。以克卜勒立體為例，即便外表和凸多面體如此不同，但其實它們的頂點都還「留」在正多面體上，因此直接套用正多面體的策略即可。



Icosahedron and Star Polyhedrons, from Wikipedia[35][36][37].

---

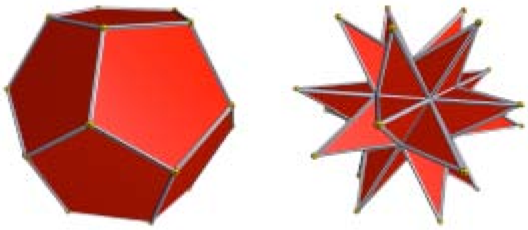
31 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/d/d8/Rhombic_dodecahedron.png

32 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/e/ef/Compound_of_cube_and_octahedron.png

33 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/a/ae/Rhombic_triacontahedron.png

34 http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/d/d0/Compound_of_dodecahedron_and_icosahedron.png

以上是三種克卜勒立體，注意到它們除了擁有和正二十面體等價的頂點外，後兩個立體甚至連邊都相同。此外尚有一個克卜勒立體，它的頂點和正十二面體的頂點等價，亦可直接套用其策略。



Dodecahedron and Star Polyhedron, from Wikipedia[38].

稜柱、雙角錐、反稜柱、偏方面體

最後是多面體家族中，對稱性最弱的一類立體。這並不是說它們對稱數較少，相反地，反而可以要多大就多大。只是對稱軸都是同一條，而不是比較棘手的空間對稱。

稜柱和雙角錐互成對偶，前者可視為圓盤「兩倍」，後者可視為圓盤加上一對頂點對。反稜柱和偏方面體也互成對偶，基本上也和另外一類有相同的策略。

至此，所有的 Gardner 體都討論完了。

分析

我們從平面的正多邊形圓盤，一直做到普通空間中的正多面體、半正多面體。從辛辛苦苦證明引理，中間經過累人的暴力討論，一直到掌握了三維對稱。情況就好比倒吃甘蔗，除了令人生畏的均勻多面體可以應付自如，更重要的是我們也累積了許多有趣的現象。

有了這些點子，我們可以把它擴展成最終的推廣版本，就從圓盤開始！

---

[35] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Great_dodecahedron.png
[36] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/77/Small_stellated_dodecahedron.png
[37] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/Great_icosahedron.png
[38] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/77/Great_stellated_dodecahedron.png

（七） 定義 - 置換

令圓盤上的所有磁鐵 m_i 組成集合 M ，其中 m_i 有個別的「指向」。操作時，傑克得選取 M 的一個子集 M' ，以指南針測量這些磁鐵的指向，故 $|M'| \leq m$ （ m 是指南針數而不是磁鐵數）。但事實上，由於圓盤會先行轉動 $g: M\to M$（也就是 M 上的置換），傑克真正看到的磁鐵其實是 $g^{-1}(M)$ 這個集合。

由於圓盤構造的不同，所有的置換 g_i 組成的集合 G 便不同。以圓盤為例，所有的置換（也就是旋轉）組成 n 階「循環群」 $\langle g\rangle$ ，其中 g 是將轉盤旋轉 $2\pi/n$ 度。（順時針或逆時針皆可，或者是 $2k\pi/n$ 也行，但是 k, n 要互質。）

我們知道循環群是阿貝爾群，可以依其階數分解成數個 p-群 。再弱化一點的條件則是（非交換）群，其中一個例子是前述的空間對稱群。非交換群不如阿貝爾群容易「分解」，分解過後的培集也不一定可以組成新的群。

但是筆者要強調一點，只要給定任意的「作用」：(G, M) ，就一定存在一個數字： $0 \leq m \leq |M|$ ，使得這樣數量的指南針能夠達到目標。其中的置換集 G 當然可以不用是群，而我們的終極目標自然是設法對每種置換集找到 m 和解答。而目前，我們已經找出一些有趣的引理。

引理 - 偏序

・只考慮部份置換不用增加指南針數：$\mu(G, M) \geq \mu(G', M)$ 。

・只考慮部份磁鐵不用增加指南針數：$\mu(G, M) \geq \mu(G, M')$ 。

「 μ 」對應到拉丁字母「 m 」，此處用來表示「要贏至少需要幾根指南針」這個函數，以避免和未知（的指南針）數混淆。上述這兩點都可以用反證法證明，當偏序關係成立時，我們只要各證明一次必要、充分性，便能確定某個臨界就是答案，或是將答案壓縮到某個區間。

注意到「考慮部份置換」雖然會讓置換數減少，但是反過來，如果我們讓「置換數減少」，但是偷偷增加一些置換的話，可能會需要更多磁鐵。不

過，這牽涉到我們增加了哪些類型的置換，究竟置換的個數是如何影響指南針數，是一個有待研究的問題。

工具 - 表決

・$0 < m < |M|$ 對大部份的作用成立。

左邊是顯然的，沒有指南針就無法操作，除非只有一顆磁鐵的情況。（因為遊戲會在開始之後立刻結束，所以不考慮）右邊則來自表決的概念：先復位其中 $|M|-1$ 顆磁鐵，再視情況決定要服從多數磁鐵「將尚未復位的磁鐵翻下」，或是尊重少數磁鐵「把眼前的所有磁鐵都翻上」。

表決僅僅需要兩次操作，而且對不是群的置換也有效。是最直接、廣義，也是最鬆的結果。

引理 - 磁場

・指南針數必須能滿足所有的磁場。

・指南針數至少和次大的磁場一樣大。

磁場定義成是群論裡用來描述旅途的「軌道」，也是之前提過「等價類」的概念。如果指南針連處理一個磁場（或稱軌道、等價類）都不夠的話，自然沒有辦法處理多個磁場的疊合，因此第一點得證。

此外，不妨想像最大（ F_1 ）和次大（ F_2 ）的磁場都已經各自同調，彼此卻不同調，為了達到目標，傑克需要 $|F_2|$ 根指南針把 F_2 裡的磁鐵都倒置。否則，（用反證法，）最大的兩個磁場： F_1 和 F_2 上至少各有一枚金幣。而這兩枚金幣總可以被安置到任意兩顆相背的磁鐵上，傑克就輸了。

引理 - 幣值

・兩組作用取直積後，其幣值為原作用中較大者。

・兩組作用取半直積，其幣值為原作用中較大者。

幣值的概念來自 Gardner 盤中的「 p 」，取「磁鐵和金幣數之比值」的簡稱，也可以想像成是一枚金幣可以買到、或處理多少磁鐵。更一般地，在

Gardner 多面體裡，我們用將錢途當成「類 p 邊形」以證明必要性時，幣值就是錢途的大小。

以直積為例，由於直積會保持個別作用的結構，自然錢途等性質也會延續。類似我們在 Gardner 盤的解答裡取「最大質因數」，此處我們就取原作用的「最大幣值」。理由是，我們永遠可以在直積上找到「類 p 邊形」，而它可以用來證明必要性。

充分性的證明稍嫌複雜，尤其是半直積的部份：它可以想像成很多子圓盤安裝在大圓盤上，並且每次可以旋轉不同的角度，偏偏傑克又無法分辨子圓盤。但其實它們都可以用消去法和二分法處理，惟所需的操作數將以指數成長。

五、結果

我們解決了環球版的命題。

- 山洞門保證打能開若且唯若 n 是 2 的冪。

我們解決了 Gardner 版的問題。

- 只需要五次操作就能使鈴聲響起。

我們解決了 Gardner 盤的問題，包括：

- 磁鐵數為質數。
- 磁鐵數不為質數。
  - 最大金幣數總是磁鐵數除以最大質因數、即 n/p 。

以上是已知但重新證明的結果。

我們解決了 Gardner 體的問題，包括：

- 柏拉圖正多面體。
- 阿基米德立體。
- 卡塔蘭立體。
- 星狀體、複合體。
- 稜柱、雙角錐、反稜柱、偏方面體。

我們用正式的語言描述問題，並設法逼近上下限。

- 必要性、下限的引理包括：
  - 偏序
  - 磁場
  - 幣值
- 充分性、上限的工具包括：
  - 表決

•消去

•二分

以上是全新的結果。

（一） 表格 - 均勻多面體

下面列出部份立體的結果，請注意它不是按照傳統的方法排序，而是依據磁鐵數和出現的順序。分解則列出是歸納途中的每個 p_i ，也就是金幣數為一的單位。首先，我們討論了均勻多面體，也就是每個頂點都等價的立體：

（英文）名稱	頂點特色	磁鐵-金幣數		分解
•Tetrahedron	3, 3, 3	4	1	4
•Octahedron	3, 3, 3, 3	6	2	2*3
•Cube/Hexahedron	4, 4, 4	8	2	2*4
•Icosahedron	3, 3, 3, 3, 3	12	2	2*6
•Dodecahedron	5, 5, 5	20	4	4*5
•Cuboctahedron	3, 4, 3, 4	12	4	2*2*3
•Icosidodecahedron	3, 5, 3, 5	30	6	2*3*5
•Truncated Tetrahedron	3, 6, 6	12	4	2*2*3
•Truncated Octahedron	4, 6, 6	24	8	2*2*2*3
•Truncated Cube	3, 8, 8	24	8	2*2*2*3
•Truncated Icosahedron	5, 6, 6	60	12	2*2*3*5
•Truncated Dodecahedron	3, 10, 10	60	12	2*2*3*5
•Rhombicuboctahedron	3, 4, 4, 4	24	8	2*2*2*3
•Rhombicosidodecahedron	3, 4, 5, 4	60	12	2*2*3*5
•Truncated cuboctahedron	4, 6, 8	48	16	2*2*2*2*3
•Truncated icosidodecahedron	4, 6, 10	120	24	2*2*2*3*5
•Snub cube	3, 3, 3, 3, 4	24	8	2*2*2*3
•Snub dodecahedron	3, 3, 3, 3, 5	60	12	2*2*3*5

（二） 分類 - 均勻多面體

一個換過順序的表格比較能展現所謂的遞迴關係，從正四面體開始：

•Tetrahedron	3, 3, 3	4	1	4
•Cube/Hexahedron	4, 4, 4	8	2	4*2
•Dodecahedron	5, 5, 5	20	4	4*5

然後是正八面體和它的倍數：

•Octahedron	3, 3, 3, 3	6	2	3*2
•Icosahedron	3, 3, 3, 3, 3	12	2	6*2
•Truncated Tetrahedron	3, 6, 6	12	4	3*2*2

接下來是截半立方體和它的倍數：

•Cuboctahedron	3, 4, 3, 4	12	4	3*2*2
•Snub cube	3, 3, 3, 3, 4	24	8	3*2*2*2
•Truncated Octahedron	4, 6, 6	24	8	3*2*2*2
•Truncated Cube	3, 8, 8	24	8	3*2*2*2
•Rhombicuboctahedron	3, 4, 4, 4	24	8	3*2*2*2
•Truncated cuboctahedron	4, 6, 8	48	16	3*2*2*2*2

最後是截半二十面體和它的倍數：

•Icosidodecahedron	3, 5, 3, 5	30	6	5*3*2
•Snub dodecahedron	3, 3, 3, 3, 5	60	12	5*3*2*2
•Truncated Icosahedron	5, 6, 6	60	12	5*3*2*2
•Truncated Dodecahedron	3, 10, 10	60	12	5*3*2*2
•Rhombicosidodecahedron	3, 4, 5, 4	60	12	5*3*2*2
•Truncated icosidodecahedron	4, 6, 10	120	24	5*3*2*2*2

（三） 表格 - 對偶多面體

第二部份是卡塔蘭立體，解決這些立體的方法之前提過，就是辨認出它的頂點的等價類。在這裡我們就不列出它們的名字，而是直接用原立體的英文名稱和頂點特色以描述它們：

（原立體）名稱	簡稱		頂點特色	等價系
•Tetrahedron	T	(=4)	3, 3, 3	T (Self-Dual)
•Octahedron	O	(=3*2)	3, 3, 3, 3	C
•Cube/Hexahedron	C	(=T*2)	4, 4, 4	O
•Icosahedron	I	(=6*2)	3, 3, 3, 3, 3	D
•Dodecahedron	D	(=T*5)	3, 3, 3, 3, 3	I
•Cuboctahedron	CO	(=3*2*2)	3, 4, 3, 4	C / O
•Icosidodecahedron	ID	(=O*5)	3, 5, 3, 5	I / D
•Truncated Tetrahedron			3, 6, 6	T / T
•Truncated Octahedron			4, 6, 6	C / O
•Truncated Cube			3, 8, 8	C / O
•Truncated Icosahedron			5, 6, 6	I / D
•Truncated Dodecahedron			3, 10, 10	I / D
•Rhombicuboctahedron			3, 4, 4, 4	C / O / CO
•Rhombicosidodecahedron			3, 4, 5, 4	I / D / ID
•Truncated cuboctahedron			4, 6, 8	C / O / CO
•Truncated icosidodecahedron			4, 6, 10	I / D / ID
•Snub cube	SCO	(=CO*2)	3, 3, 3, 3, 4	C / O / SCO
•Snub dodecahedron	SID	(=ID*2)	3, 3, 3, 3, 5	I / D / SID

（四） 分類 - 對偶多面體

一個換過順序的表格比較能展現所謂的遞迴關係，從正四面體開始：

•Tetrahedron	3, 3, 3	T (Self-Dual)
•Octahedron	3, 3, 3, 3	C
•Icosahedron	3, 3, 3, 3, 3	D
•Truncated Tetrahedron	3, 6, 6	T / T

然後是兩個幾乎獨立的立體：

•Cube/Hexahedron	4, 4, 4	O
•Dodecahedron	3, 3, 3, 3, 3	I

接下來是截半立方體和它的倍數：

•Cuboctahedron	3, 4, 3, 4	C / O
•Truncated Octahedron	4, 6, 6	C / O
•Truncated Cube	3, 8, 8	C / O
•Rhombicuboctahedron	3, 4, 4, 4	C / O / CO
•Truncated cuboctahedron	4, 6, 8	C / O / CO
•Snub cube	3, 3, 3, 3, 4	C / O / SCO

最後是截半二十面體和它的倍數：

•Icosidodecahedron	3, 5, 3, 5	I / D
•Truncated Icosahedron	5, 6, 6	I / D
•Truncated Dodecahedron	3, 10, 10	I / D
•Rhombicosidodecahedron	3, 4, 5, 4	I / D / ID
•Truncated icosidodecahedron	4, 6, 10	I / D / ID
•Snub dodecahedron	3, 3, 3, 3, 5	I / D / SID

六、討論

筆者相信已經在「分析」中提供了許多想法，但是作為一個有趣的命題，線性的發展是不太夠的。包括之前文中暗示過的推廣在內，這裡再蒐集幾個可能的方向。惟受限研究尚未完全，只能做簡短介紹而沒有證明。

（一） 推廣 - 機器人

一開始呼應「目的」中提到的「變化規則」，靈感來自 Gardner 的書中。命題建構於 Gardner 版上：現有四顆磁鐵和兩根指南針，每次測量只會告訴傑克，待測的磁鐵是相背或同調，操作時也只能指定「翻兩顆」、（隨機）「翻一顆」、「不翻」，問傑克能不能贏？

眼尖的讀者會發現，（雖然很可能不是作者的原意，但）本題事實上是包含進環球版裡的。意即，不考慮最小操作次數的話，使用環球版的方法就能讓遊戲結束。而若希望總操作次數最小的話，其實還是有只需要五次操作的策略，和 Gardner 版的答案一樣。

而另有兩種變化規則：「看錯」、「翻錯」。可惜它們就比較不有趣了，因為發生這兩種事情都不會贏。以翻錯為例，即使是一次操作至多一顆磁鐵翻錯，但還是可能會一直沒有辦法把最後一顆磁鐵翻正，傑克就輸了。

至於看錯就比較微妙，因為（就如同我們一直強調的，）環球版的命題可以靠「盲解」，傑克不需要測量磁鐵，自然不用在乎看錯。因此，得要磁鐵顆數有奇質因數時，海神才能讓發揮功用。而海神的工作量也不會太大，只要在操作即將結束、表決的時候擾亂傑克即可。

（二） 推廣 - 針與手

又或者，我們可以取消 Gardner 盤中「從被測量的磁鐵中挑選某幾顆倒置」這項規定，將指南針的數量和手的數量區分開來討論。也就是說，傑克要看幾顆磁鐵、或翻幾顆磁鐵是分開計算的，兩者的對象亦無須重複，可以看的和翻的磁鐵不一樣，再也沒有任何多餘的限制。

而答案一下多出了許多種可能，即使固定了磁鐵的數量，我們仍然可以問：什麼樣的指南針、手的組合能讓傑克贏。例如盲解：不須指南針但要 2^{k-1} 隻手，或是質數顆磁鐵時，需 $q-1$ 根指南針但只要一隻手。

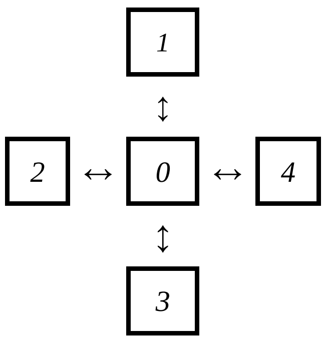
平常，傑克受限於只能翻他看過的磁鐵，因此才會有「尊重少數」，但現在，一旦傑克找到不同調的磁鐵在哪裡，就可以直接行使「服從多數」。因此，比較困難的問題將發生在指南針不多的時候：若傑克無法確定這一次看到的是哪顆磁鐵，就沒有辦法找出不同調的磁鐵在哪裡、也沒辦法表決。

以三顆磁鐵、一根指南針、兩隻手的情況為例：若是一直看到同一顆磁鐵，那麼另外兩顆磁鐵（到頭來）還是只能靠盲解。又我們已經知道只有三顆指南針、只有三隻手、或一石一手都無法達到目標，因此三顆磁鐵的充要條件為「兩石一手」或「一石兩手」這兩種。

（三） 推廣 - 不成群

不滿足群公理的作用很難計算磁場（軌道）和相乘（直積、半直積等），但是反過來說，若一個策略即使是對不是群的作用也有效，那肯定也能套用在群作用上。意即，研究構造簡單的作用可以讓我們掌握更多命題架構的本質，難點在於，大部份的有時候很難找到一個「好的」、卻不是群的作用。

以「狡兔多窟」為例，考慮置換集 $\{ (0\ 0), (0\ 1), (0\ 2), (0\ 3), ..., (0\ n) \}$ 作用在對象 $\{ 0, 1, 2, ..., n \}$ 之上，即「 0 」可以和任何其它元素交換位置、或不動。在這樣的情形下，我們很容易認為它非 $n-1$ 根指南針不可。否則，不僅抓不到兔子，連表決都沒有辦法確定兔子有沒有混在其中。



n = 4 *的例子，狡兔可以選擇躲進某個窟中。*

但事實上，如果配合復位的概念去想，「只要把窟全部復位」，就可以逼得狡兔表態：究竟是和窟同調而遊戲結束，還是尚未復位而操作繼續？即使是後者，就再反復位所有的窟即可。方法很簡單，照順序(反)復位 *{ 0,1 }*、*{ 0,2 }* 、*{ 0,3}* 、依此類推，操作完一整圈就可以保證窟都同調，只要兩顆指南針！

這件事打破了我們的預設立場：「磁場越大所需的指南針越多」。它只會發生在作用形成群、每一顆磁鐵的磁場都得一樣大的時候。否則，只有一隻狡兔亂跑不會影響結果，因為多數可以尊重少數。

（四） 推廣 - 三極鐵

這一次我們再換個角度思考：誰說磁鐵一定只有兩極？不幸的是，本推廣套用到環球版的命題時傑克就輸了，因為多一種磁極緩衝，海神就可以讓某兩顆磁鐵一直相背。但是，對 Gardner 盤的影響更出乎意料，根據初步的研究結果，無論有多少種磁極都不會影響答案，先前提到的的關係式仍是充分必要條件！

不妨再回想一次表決的過程，當我們讓多數尊重少數時，由於最後一顆磁鐵的指向只剩下一種可能、非上即下，因此頂多表決一次就好。而現在若無法確定該磁鐵的指向，傑克只好把每一種候選的磁極都試試看。意即，就算是百極鐵，試個百次總有一次會對！

L	*L*	*U*		*D*	*D*	*U*		*R*	*R*	*U*		*U*	*U*	*U*	
L	正	*L*	→	*D*	正	*D*	→	*R*	正	*R*	→	*U*	正	*U*	
L	*L*	*L*		*D*	*D*	*D*		*R*	*R*	*R*		*U*	*U*	*U*	!

一個箭頭代表一次表決。

當然，在歸納的過程中，隨意的增加兩倍、或是九十九倍，可能會讓總次數變得非常大，（雖然還是有限。）但是消去法在的幫助下，我們可以節省一點時間，它讓我們只要煩惱最後一顆磁鐵，因此，操作次數頂多乘上磁極的數量。

L	*L*	*U*		*D*	*D*	*U*		*R*	*R*	*U*		*U*	*U*	*U*		
L	㊣	*L*	→	*D*	㊣	*D*	→	*R*	㊣	*R*	→	*U*	㊣	*U*		
L	*L*	*L*		*D*	*D*	*D*		*R*	*R*	*R*		*U*	*U*	*U*		*!*

一個箭頭代表一套完整的操作。

這個概念其實也不能算是全新的，至少可以追朔到二分法：「為什麼不能是三分法？」在一些初步的研究裡，筆者發現先用消去法把盤面「清空」之後，兩種以上的磁極、狀態可以用來儲存磁鐵的資訊，並在稍候用以不同的指向分辨磁鐵，反而更好發揮。

七、結論

表面上，環球版的命題做完之後，看似就再也沒有任何發展了，但就如同名作家 George Bernard Shaw 說的[39]：

Science is always wrong.

It never solves a problem without creating ten more.

考慮「可以看到」磁鐵的指向之後，的確多了很多值得推廣的地方。

例如，做完 Gardner 盤之後，我們發現不一定要把遊戲限制在圓盤上，並將其改成正多面體，稍候又再推廣成群作用，甚至是不滿足群公理的作用。接下來，我們把焦點拉回到操作本身，把「指南針」和「手」分開來討論，又產生了新的目標。

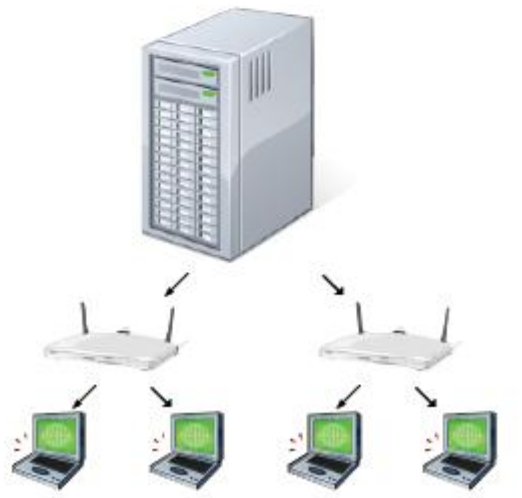
整體而言，筆者研究的重點並不是「哪個多面體需要幾隻手」等等，而是把注意力是放在「充分性」及「必要性」證明，想知道究竟它們之間有沒有交互關係。以 Ramsey Theorem 為例，由於估計-構造之間沒有絕對的連結，因此出現了上下限背離的情況，造成只能給出答案的區間而不是精確的數字。

截至目前為止，唯一的奇異點出現在 Icosahedron 和 Dodecahedron ，我們用了比較麻煩的方式去處理它的下限。藉著這項指標，以及對不成群作用的探討，筆者希望這些不穩定的因素其實是一個更好的理論的特例，並且找到它！

[39] http://en.wikiquote.org/wiki/Science

八、應用

以下簡述一個樹狀的網路模型，並以此示範可能的應用。網路的最頂端是一台伺服器，底下連結兩台路由器，每台路由器又各連結兩名用戶。節點之間的通訊都是加密過的，因此外人、即便貴如管理員，無法辨認出個別用戶的資訊。如圖：



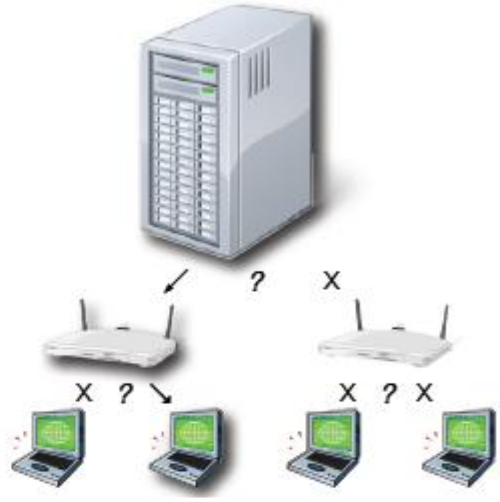
Clipart form Microsoft.[40]

（一） 故事背景

基於某種原因，四位用戶希望可以找到一個共同的頻道召開線上會議。已知現有兩個候選頻道，並且依靠在伺服器端的管理員以手動的方式調整每位用戶所在的頻道，並在調整之後告知用戶，教它們檢查是否所有人都位於同一頻道上。如果檢查的結果是肯定的，管理員會立刻收到頻道正式啓用的通知。

但由於終端電腦採取匿名制，因此管理員無法直接命令某位用戶切換至特定頻道。他只可以傳送「換頻請求」給（隨機）一台路由器，讓路由器轉達給（隨機）一位用戶。或者，讓隨機一台路由器轉達給旗下的兩位用戶，教它們同時換頻，當然，也可以一次讓兩台路由器分別轉達給一位它們旗下的用戶。

[40] http://office.microsoft.com/en-us/images/



管理員不能決定「換頻請求」目的地，

但至少他可以決定訊息的份數。

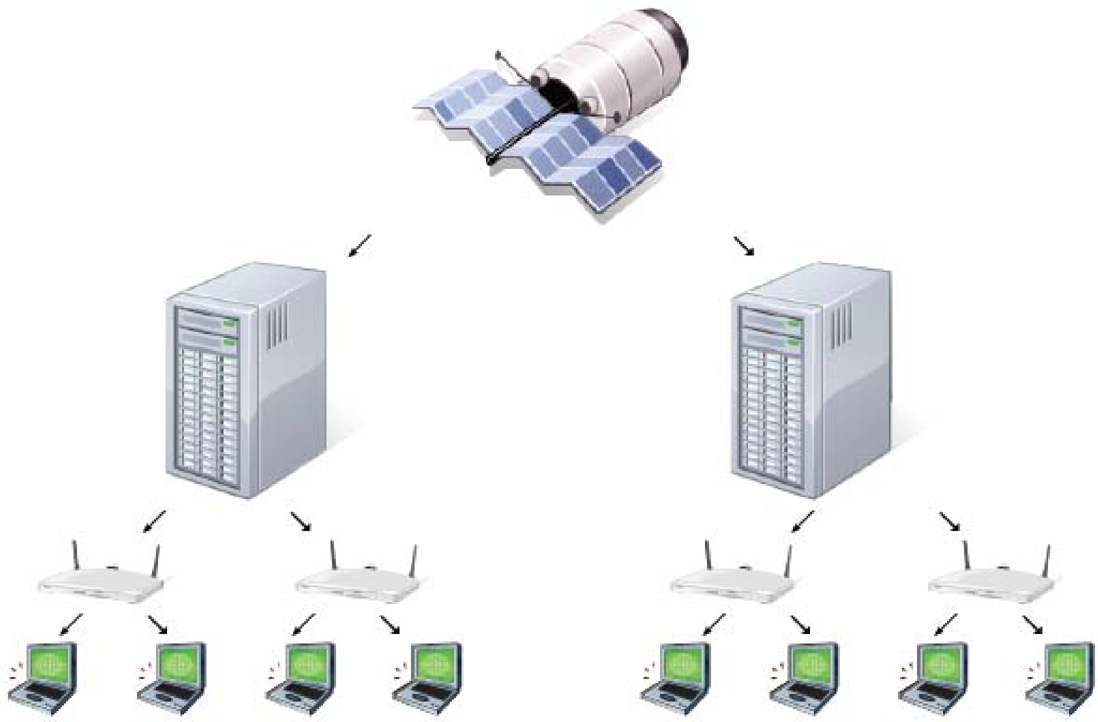
問：管理員是否存在傳送請求的策略，保證能讓用戶在有限時間內都切換到同一頻道？

以上的模型和 n = 4 的環球盤完全等價。

（二） 環球版

從以上的模型可以想像，四位用戶位於正方形的頂點，而兩台路由器分別代表它的兩條對角線。如果兩台路由器底下的用戶都「各自同頻」，那就再傳送一次「同時換頻」給某一台路由器，就能讓他們「彼此同頻」，目標就會達成。

現時生活中的網路可能會有更多層，而且可能不只有四位用戶。例如，兩個國家的伺服器之間依靠衛星傳訊，而管理員在太空站上控制它們的頻道。



類似地，管理員可以選擇將請求傳送給一台或兩台伺服器，並再指示伺服器轉轉達請求給特定數量的路由器、和用戶。而僅僅依靠憑藉這樣簡單的操作，能不能讓所有的用戶切到相同頻道？

以上的模型和 n = 8 的環球盤完全等價。

依照對環球盤的研究，三個用戶連結同一台路由器時，傑克就輸了，因為我們總是可以找到兩位頻道相背的用戶，使它們同時換頻之後還是相背。為此，我們可以再為這個網路設置一些新功能。

以上的模型和 n = 3 的環球盤完全等價。

（三） Gardner 盤 - Gardner 體

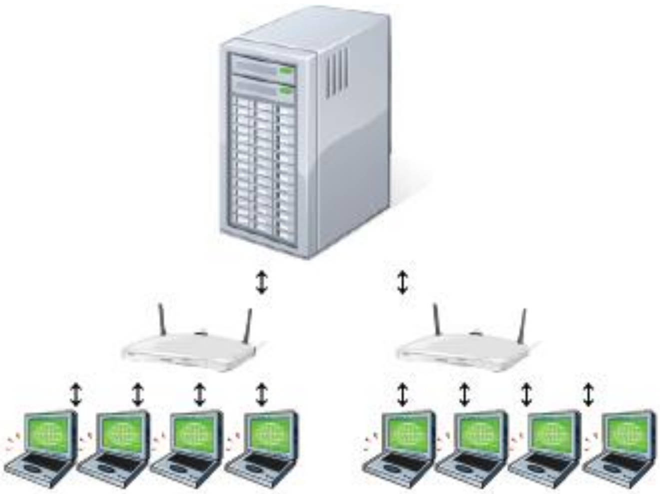
假設管理員和個別使用者之間可以短暫地建立雙向連線，讓特定的幾個用戶傳回目前所在的頻道，並由管理員決定是否更換。但是同時能夠建立的

連線數量有限，且當用戶端檢查是否位於同樣頻道時，與管理者的連線會被放棄且永久失效。

意即，管理員只能要求路由器，他要與旗下的幾個用戶連線，而且連線總數必須小於系統限制。更甚者，管理員無法指定和上次一樣的用戶，因為路由器也沒有紀錄哪個用戶建立過連線。

允許雙向傳訊的模型，和 n=3 Gardner 盤等價。

這樣的關係當然也可以有很多層，而且每一層到下一層之間的連結個數也可以不用固定，同一層也可能有變化。自然，管理員可以選擇要連絡幾台路由器、再與它們下游的幾位用戶建立連線。



和「Gardner 正六面體」等價。

（四） 其它

再更進一步地，管理員可以要求某些用戶傳入他們目前所在的頻道，統整之後再送出更換頻道的方法。他可以在命令裡加入條件，使尚未連線的用戶不要輕易變換頻道。也可以逆向操作，只要求尚未連線的用戶更換頻道等等。

允許分批傳訊的模型，和「石手分離」等價。

而當用戶之間彼此又有祕密連線的時候，會讓路由器遭受干擾，在分派命令的時候產生特殊的規律而不完全隨機。這樣的模型則對應到不成群的作用，至於最後一個推廣：三極鐵，顯然是對應到候選頻道不只兩個的情況

萬能模型，超過兩個頻道並且存在干擾。

至此，所有的推廣都討論完了。

九、參考文獻

期刊

- Richard Ehrenborg & Chris M. Skinner, 1995, The Blind Bartender's Problem, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 70, Page 249-266.
- Ted Lewis & Stephen Willard, 1980, The Rotating Table, Mathematics Magazine, 53, Page 174-175.
- Albert G. Stanger, 1987, Variations on the Rotating Table Problem, Journal of Recreational Mathematics, 19, Page 307-308.
- Albert G. Stanger, 1988, Variations on the Rotating Table Problem, Journal of Recreational Mathematics, 20, Page 312-314.
- Hsin-Po Wang, 2010, Congo Bongo, Math Horizons, XVIII, Page 18-21.

圖書

- Martin Gardner, Fractal Music, Hypercards and More..., W H Freeman & Co (Sd), Page 167-184, 1991.
- William T. Laaser & Lyle Ramshaw, Mathematical Gardner, John Wiley & Sons, Page 285-307, 1981.
- Joseph J. Rotman A First Course in Abstract Algebra, Prentice Hall, Page 106-208, 2010.

網頁

- Wikipedia http://www.wikipedia.org/ （相關來源詳見各頁註腳。）
- 九章數學教育基金會 http://www.chiuchang.org.tw/

十、索引

這裡列出所有重要的用詞，希望藉由更精確的定義消歧。

（一） 故事背景

- 推廣版所用的詞將作為小標題。
- 環球版所用的詞將標記「 T 」，代表 Tournament of Town 。
- Gardner 版所用的詞將標記「 M 」，代表 Martin Gardner 。

圓盤

- 轉盤（ T ）、方桌（ M ）、多面體、鎖具
- 對稱的圓盤使傑克無法分辨磁鐵，因此圓盤的旋轉形態是問題的關鍵。
- 可視為置換作用的類比。

磁鐵

- 桶子-魚頭（ T ）、深孔-酒瓶（ M ）。
- 命題要求將所有磁鐵翻到同調以開鎖。
- 可視為置換作用的對象集合。

指南針

- 手「摸」（ M ）。
- 用來判斷磁鐵指向的工具，本研究探討策略存在時，指南針數量的最小值。
- 可視為對象集合的子集，因操作而異。

手

- 手（ T ）、手（翻）（ M ）。
- 將磁鐵調整至同調的動作，在討論中我們介紹了（獨立於指南針的）手的最少數量。
- 也可視為對象集合的子集，因操作而異。

（二） 概念簡稱

以下的詞語被用來敘述比較複雜的概念，或簡稱某些特殊的策略。

相背

- 稱呼兩顆指向不同的磁鐵，相當於兩顆磁鐵不同調
- 在證明必要性時，我們用的條件是「永遠存在兩顆相背的磁鐵」。

同調

- 指磁鐵（或它的某個子集）指向相同，兩堆磁鐵可分為「各自同調」與「彼此同調」。
- 遊戲結束的條件就是所有磁鐵都同調。

輸贏

- 若傑克能在有限次操作內讓遊戲結束，則稱呼傑克「贏」。
- 若海神能使操作持續而永遠不會結束，則稱呼傑克「輸」。

磁場

- 指某顆磁鐵在置換下的軌道，相當於所有錢途的聯集。
- 磁場之間可以獨立討論，不像錢途彼此相關。

（三） 必要性

以下的詞語被用來解釋、證明必要性（下限）。

金幣

- 因為指南針不足而無法測量的磁鐵，我們教傑克用金幣「測量」之。（當然不會有結果！）
- 可視為指南針集對磁鐵的補集，也是我們比較數量的對象。
- 詳見 p17

套幣

- 任兩兩枚金幣都可以稱為套幣，一組套幣對應到一段跨度。
- 套幣所在的位置上的磁鐵必須同調，否則這兩顆磁鐵經過操作後還是相背。
- 詳見 p31

錢途

- 對於任一組套幣，它們可以走到的地方稱為它們的錢途。
- 錢途相當於「類多邊形」，一條錢途至多允許一枚金幣。
- 詳見 p32

幣值

- 磁鐵和金幣之比值，相當於一枚金幣值多少磁鐵。
- 當我們用將錢途當成「類 p 邊形」以證明必要性時，幣值就是錢途的大小。
- 詳見 p43

（四） 充分性

以下的詞語被用來解釋、證明充分性（上限）。

復位

- 使用足夠的指南針，無論如何把 S 極翻至朝下。
- 復位相當於「同調化」，因此在策略上，造成環球版和 Gardner 版的（答案如此）不同。
- 詳見 p14

表決

- 只存在一枚金幣時，先復位再決定要「服從」或是「尊重」。

- 表決是傑克在指南針短少的情況下仍能贏的關鍵，任何形式的策略都無法避免。
- 詳見 p19, 43

消去

- 在指南針數允許時，不斷復位直到至多一顆磁鐵不同調。
- 當從兩種磁極跨入多種磁極時，消去法讓我們（幾乎）不用考慮額外的磁極。
- 詳見 p21

二分

- 將磁鐵分組討論，使需要考慮的等效磁鐵減少。
- 只要設法找出一組作用的分解，套用二分法相當於對作用做歸納。
- 詳見 p24

評語

作者從彈簧鎖的原理以及環球城市數學競賽試題，設計出「Gardner 盤」的遊戲，並証明出遊戲一定會贏的情形，磁石和磁鐵個數必須滿足不等式之充要條件，特別是非質數情形之必要性證明並不容易。作者有完整的分析並將計算複雜度估算出來。作品接續討論 Gardner 盤推廣到多面體以及阿基米德立體上，並以群論的角度做歸納，說明其之前非質數必要性証明所發展的技巧。適用於更一般性的情形。整個作品成熟、完整，從題目設計到研究手法及所得結論，一氣呵成，屬難得之優良作品。然而部分內容和 Journal of combinational Theory 之論文內容類似，因此有幾點意見提供參考修正：

1. 為避免整份報告過於繁雜，已知結果但重新證明之部分，請儘量精簡或直接刪除。
2. 應多使用數學公式，遞迴式來表達思路，少用口語敘述性的描述，「金幣」、「錢途」實為證明所需用到的，但如此定義，沒增添多少趣味，卻減損不少數學性，實應避免。
3. 如果遊戲開始後，磁鐵指向在傑克調整後會以二項分佈之方式「突變」，請問還有贏的策略嗎？平均次數可以算嗎？
4. Pg.42 中所提偏序所確定某個臨界點就是答案，或將答案壓縮到「某個區間」。請問此區間可否精確給出？臨界又是指什麼？
5. Pg.44 指數性成長請給例子。
6. Pg.53 奇異點及下限的處理沒講清楚。
7. 請將「八、應用 」換到「結論」之前。

2011 年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

編號：010011

作品名稱

The Rotating Table

得獎獎項

二等獎

加拿大正選代表:2011 年加拿大科學展覽會

作者姓名

Hsin-Po Wang

The Rotating Table

Abstract

The inspiration for this study comes from the problem “International Mathematics Tournament of the Towns, Senior A-Level Paper, Fall 2009, No. 7”. The problem can be traced back to Martin Gardner's article The Rotating Table, which appeared in Scientific American in Feb. 1979.

The original problem used a square table. This was generalized by Ted Lewis & Stephen Willard to all regular polygons (1996), and then by Richard Ehrenborg & Chris M. Skinner to arbitrary permutation groups (1997).

We will analyze the generalization of this problem onto the Platonic solids with the following rules:

・Imagine a spherical table that rotates about its center. At each vertex is a deep well, and at the bottom of each well is a drinking glass that is turned either up or down.

・You cannot see into the wells, but you can reach into them and feel whether a glass is turned up or down.

・A move is defined as follows: Spin the table, and when it stops, put each of k hands into a different well. You may adjust the orientation of the glasses any way you like, that is, you may leave the glasses as they are or turn any number of them.

・Now, spin the table again and repeat the same procedure for your second move. After each spinning of the table, you have no way to distinguish the vertices except by their relative position.

・The object is to get all glasses turned in the same way, either all up or all down. When this task is accomplished, a bell rings.

We now start discussion of the various cases from the easiest one.

Tetrahedron

There are 4 vertices within a tetrahedron. According to Ted Lewis and Stephen Willard's analysis, we have the number of hands "k" satisfied that

(writing on "The Rotating Table" in Mathematics Magazine (53, 1980,pp. 174-1 75))

$$k \geqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right) n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) 4 = 2$$

which says that two hands are enough to ring the bell.

Lower bound

However this isn't right. Since any two vertices of a tetrahedron are adjacent, the table can always spin the vertices into the two positions that haven't been covered by the hands.

The 4 vertices of the "tetrahedron" behave like an irreducible number, forcing us to require 3 hands.

$$k \geqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right) n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) 4 = 3$$

Upper bound

To show 3 hands are enough, we can first turn any 3 glasses up. On our second move, we again pick any 3 glasses. If we feel any glass turned down, we turn it up, and all the glasses will be up; otherwise, we turn all 3 glasses we feel down, and all 4 glasses will be down.

Octahedron

The octahedron has 6 vertices. From the preceding discussion we find

$$k \geqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right) n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) 6 = 4$$

Which says that 4 hands are enough.

This is correct because we can really use the strategy from the hexagon on the octahedron! (Strictly speaking, the octahedron is harder because its permutation group is larger, but luckily our strategy is still valid.)

The correspondence is as follows. We split the octahedron's vertices into three pairs: front and back, left and right, and top and bottom. These can be corresponded to the three opposing pairs of the hexagon.

Lower bound

The proof of the lower bound is similar. Consider two opposing faces (both triangles) of the octahedron. If the number of hands is less than four, then one of these triangles will only be probed by one hand. We have just proved that under this condition, there is no way to guarantee that the glasses in this triangle can be flipped to matching orientations, not to mention the entire octahedron.

Upper bound

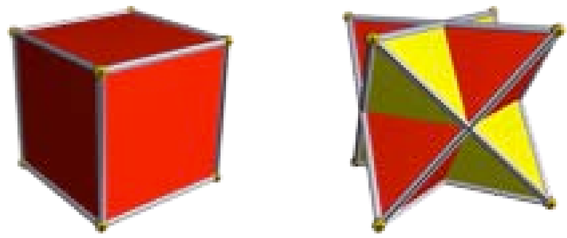
The strategy is essentially the same as the one used for the hexagon: flip two opposing pairs to face down, and then flip one triangle of glasses to face down. Now, if the bell hasn't rung, then there's exactly one glass facing up.

Now, pick two opposing pairs to probe. If the glass facing up is found, flip it to face down, and the bell will ring. Otherwise (all four glasses are facing down) flip one glass from each pair to face up. Now, every opposing pair of glasses is oriented in different directions.

Now, pick an arbitrary triangle of glasses and flip all of them, so that every opposing pair of glasses is oriented in the same direction. The rest of the strategy is the same as the triangle.

Cube

Again, we observe that the cube can be seen as two superposed tetrahedrons:



Thus, even though the cube has eight vertices, its "prime decomposition" is actually:

$$\text{Cube}(8) = 2 \times \text{Tetrahedron}(4)$$

So the previous relationship should be written:

$$k \geqslant \left(1 - \frac{1}{\text{Tetrahedron}(4)}\right) \text{Cube}(8) = 6$$

Lower bound

Similar to the previous lower bounds, we consider the two tetrahedrons that combine to form the vertices of the cube. If there are less than six hands, then one of the tetrahedrons will only receive two hands, and we have proved that the goal cannot be reached under this condition. So, again, since this tetrahedron cannot be completed, the whole cube cannot be completed either.

Upper bound

The strategy is very similar to the octahedron. First, flip three opposing pairs of glasses down. Next, flip one tetrahedron of glasses down. Now, if the bell hasn't rung, exactly one glass is still facing up.

Now, touch three pairs of opposing pairs again. If the glass facing up is felt, then the bell will ring when we flip it. Otherwise (all six glasses face down) we can flip one glass from each pair. Now, every pair of opposing glasses is facing in opposite directions.

Now, we flip any four glasses that form a tetrahedron. We can now use the strategy for the tetrahedron to complete the task.

Icosahedron

We can prove that the icosahedron can be seen as six pairs of “2-gon”, so:

$$k \geqslant \left(1 - \frac{1}{6}\right) 12 = 10$$

Lower bound

We will call any position without a hand a “foot”.

If there are three or more “feet”, then there must be two feet whose distance is not equal to 3. Now, whether this distance is 1 or 2, we can construct a “walk” across the vertices of the icosahedron with this distance. Then, as long as the glasses are not all oriented the same way, one of the steps in our walk will pass through two glasses oriented differently.

If the table always rotates so that the pair of feet coincides with this step, we won’t be able to flip either of these two differently oriented glasses. This means that we will never be able to force a “last step” that will complete the icosahedron. So, if we have 3 or more feet, the table can force the operations to go on forever.

Upper bound

Again, a strategy similar to the octahedron can be applied. First, flip five pairs of opposing glasses down. Second, pick one glass from each opposing pair, and flip all these glasses down. Now, if the bell hasn’t rung, then exactly one glass is still facing up.

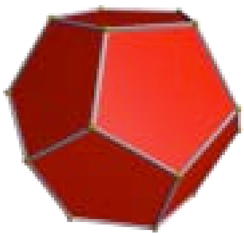
Now, touch five pairs of opposing glasses again. If the glass facing up is found, the bell will ring once we flip it. Otherwise (when all ten glasses face down), flip one glass from each pair up, so that each pair is facing in opposite directions. Now, each pair of opposing glasses is oriented differently.

Finally, we flip one glass from each pair of opposing glasses, so that each pair of opposing glasses is oriented identically. The rest of the strategy is the same as that for an "irreducible hexagon".

Dodecahedron

The dodecahedron can be seen as the combination of five tetrahedrons:

$$k \geqslant \left(1 - \frac{1}{5}\right) 20 = 16$$



Lower bound

Once more, we call any position without a hand on it a "foot".

If there are five or more feet, then some pair of feet must have a distance not equal to 3; thus, the distance must be 1, 2, or 4. Then, we can construct a "walk" across the vertices of the dodecahedron with this distance. As long as the glasses of the dodecahedron are not all oriented the same way, one of the steps in our walk will coincide with a pair of differently oriented glasses.

So again, the table can rotate so as to force this pair of feet to coincide with a pair of differently oriented glasses. Then, since we won't be able to flip either glass of this pair, we can never complete the dodecahedron.

Upper bound

The strategy is again similar to the octahedron. First, except for some five glasses which form a pentagonal face, flip all the glasses to face down; next, flip four of the tetrahedrons to all face down. Now, if the bell hasn't rung, then exactly one glass is still facing up.

Now, touch four of the tetrahedrons. If the glass facing up is touched, the bell will ring after we flip it. Otherwise, if all the glasses we touch are facing down, flip one from each tetrahedron, so that each tetrahedron has just one glass facing up.

The last step is to apply the second step from the strategy of the tetrahedron simultaneously on all the tetrahedrons, so that the glasses in each individual tetrahedron are oriented the same way. Now, the dodecahedron can be completed by a similar strategy to the pentagon.

Reference

Periodical

Richard Ehrenborg & Chris M. Skinner, 1995, The Blind Bartender's Problem, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 70, Page 249-266.

Ted Lewis & Stephen Willard, 1980, The Rotating Table, Mathematics Magazine, 53, Page 174-175.

Albert G. Stanger, 1987, Variations on the Rotating Table Problem, Journal of Recreational Mathematics, 19, Page 307-308.

Albert G. Stanger, 1988, Variations on the Rotating Table Problem, Journal of Recreational Mathematics, 20, Page 312-314.

Hsin-Po Wang, 2010, Congo Bongo, Math Horizons, XVIII, Page 18-21.

Books

Martin Gardner, Fractal Music, Hypercards and More..., W H Freeman & Co (Sd), Page 167-184, 1991.

William T. Laaser & Lyle Ramshaw, Mathematical Gardner, John Wiley & Sons, Page 285-307, 1981.