

# 2011 年臺灣國際科學展覽會

## 優勝作品專輯

編號：010007

### 作品名稱

圓來如此—西姆松「圓」的研究

### 得獎獎項

三等獎

美國正選代表：美國第 62 屆國際科技展覽會

作者姓名：廖偉恩

就讀學校：國立臺中第一高級中學

指導教師：柯建彰

關鍵字：等角共軛點、西姆松線、九點圓

## 作者簡介



我是廖偉恩，目前就讀台中一中二年級。

平常喜歡下圍棋、五子棋、彈鋼琴、閱讀課外書籍、打球。當然，還有動手玩數學。

國中時開始喜歡數學、玩數學、研究數學。遇到不一樣的題目、不一樣的解法、不一樣的切入角度都令我忘食忘憂，不知老之將至。許多有趣的問題我都嘗試解決並研究：或查資料、或自己思考，或和老師同學討論。西姆松圓是我較為完整的研究，希望能獲得大家的肯定。

## 中文摘要

若從一個三角形的外接圓上取一點，作其對三角形三邊的垂足，我們知道這三點共線，是為西姆松線。

那麼當此點不在圓周上的情形呢？自平面上一點對一三角形的三邊分別做垂線，得到三垂足，並作此三垂足的外接圓，我定義其為：此點對此三角形的西姆松圓。這篇作品主要成果便是對西姆松圓的研究。透過不斷的研究，發現了許多關於西姆松圓的神奇性質，並得到了一些結果，主要的研究方向：討論共點、共圓、相似。

這篇報告是循序漸進的，後面的結果常用到前面的知識為基礎。此篇另一特點是：全篇的證明皆是自己給出的，採用方法皆為一般幾何證明，而沒有用到解析證明。

在研究過程中也得到關於著名的費爾巴哈定理及大上茂喬定理的另一種證明。

# ABSTRACT

## Simson Circle

Given a triangle  $ABC$  and a point  $P$  which lies on the circumcircle of  $\triangle ABC$ , the feet of the perpendiculars from  $P$  to three sides  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  are all on a line, known as the Simson Line.

What if the point  $P$  is not on the circumcircle of  $\triangle ABC$ , but inside or outside it? That's what I want to find out. In a plane with  $\triangle ABC$  and a point  $P$ , we draw the circumcircle of the feet of the perpendiculars from  $P$  to three sides  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ . I define the circle "the Simson Circle." While there are plenty of interesting propositions of Simson Line, I also discovered many impressive specialties about Simson circle. Most of them are mainly about concurrent, circles, and similar figures.

This research is proceeding in an orderly way. The results afterward are based on the knowledge in the front.

During the process of studying, I also find out another proof of some famous theorems, such as Feuerbach's Theorem.

# 壹、前言

## 一、研究動機

一次在九章討論版中看到一個有趣的問題：西姆松的狂想-共點線問題 一  $\triangle ABC$  以其外心為中心旋轉  $120^\circ$  得另一  $\triangle DEF$ ，D、E、F 三點分別對  $\triangle ABC$  作西姆松(Simson)線 請問這三條西姆松線是否三線共點？經過研究後不僅給出了幾何證明，並做了一些推廣。不過後來發現這方面已有很多人做過研究了，我所做的大部分都已有別人做出。於是我開始思考西姆松線有什麼變化的方向。我將點移開圓周後出現了三角形（後來才知有人稱其 pedal 三角形）剛開始，我猜測西姆松線是 pedal 三角形的退化，並努力地尋找其間的關係。然而徒勞無功。後無意間在網路上看到了類似西姆松線的圓的定理，我赫然發現原來西姆松線不是一個三角形，而是一個圓！當點在外接圓圓周上時西姆松圓的圓心將跑到無窮遠，因此圓半徑無限大，而退化成直線。因此我提出了西姆松圓的構想，並展開了研究。

## 二、研究方法

- 1.一開始我先在網路上蒐集資料，但相關資料非常稀少，且往往有結果無證明。因此我研究的第一步便是將網路上找到的結果加以證明。
- 2.第二步是提出猜想並加以驗證，這部分以 GSP 為輔助工具。
- 3.接著就是絞盡腦汁去證明它。很多證明看似非常簡短，但其實要花很大的功夫與時間去證明。

以下是經由網路蒐集資料(西姆松圓是自己定義的)

- 1.過  $\triangle ABC$  的外心畫一直線，則此直線上的任一點作西姆松圓，必通過一定點。

2. 四邊形 ABCD 中，分別作  $\triangle ABC$ ， $\triangle BCD$ ， $\triangle CDA$ ， $\triangle DAB$  的九點圓；分別以 A、B、C、D 對  $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$ 、 $\triangle ABC$  作西姆松圓，則 8 圓共點。(我定其為九點心)

3. 四邊形 ABCD，自一點 P 對  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$  分別作西姆松圓，則此四圓共點。(我定其為西姆松點)

多麼美麗的定理啊！

### 三、研究目的

經由上述三點的啟發，我定下了研究的目的：

1. 研究四邊形中任取 3 頂點產生的 4 個三角形中，西姆松圓心及九點圓圓心所產生的位置關係。
2. 平面上一點對四邊形中任取 3 頂點產生的 4 個三角形作西姆松點的關係？
3. 五邊形中，以任一點對剩下四點作西姆松點，這五點的關係？
4. 在上述中，若將一般四邊形、五邊形改為圓內接四邊形、五邊形，會有何結果？
5. 西姆松圓是否有 N 邊形的推廣？

最後，讓我們進入一連串驚奇的發現之旅吧！

## 貳、研究內容

(以下四、五、、、N 邊形若無特別說明皆可為凹多邊形)

### 一、定義

#### 定義 1-1

自平面一點  $P$  對  $\triangle ABC$  的三邊分別做垂線，得到三垂足，作此三垂足的外接圓，定義為點  $P$  對  $\triangle ABC$  的西姆松圓。

#### 定義 1-2

如圖 1-1 所示，平面上一點  $P$  及  $\triangle ABC$  ( $P$  不在直線  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$  上)，分別作  $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$  關於  $\angle A, \angle B, \angle C$  的內角平分線  $\overline{IA}, \overline{IB}, \overline{IC}$  作對稱，這三條對稱線必然交到一點  $Q$ ，定義  $Q$  點為  $P$  點的等角共軛點。

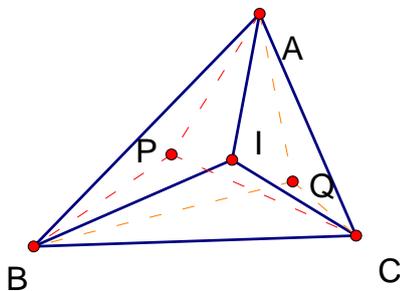


圖 1-1

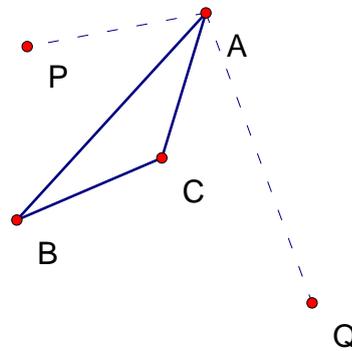


圖 1-2

若  $Q$  為  $P$  的等角共軛點，顯然  $P$  亦為  $Q$  的等角共軛點。

且  $P, Q$  會有  $\angle PAB = \angle QAC, \angle PBC = \angle QBA, \angle PCA = \angle QCB$  的性質。

事實上，若給定 $\triangle ABC$  及一定點  $P$ ，則  $P$  的共軛點  $Q$  必唯一存在。 $P$  和  $Q$  稱為一對等角共軛點。

證明見附錄一

## 二、已知定理

這部分是從文獻中找到關於西姆松圓的資料，由於除了定理 2-1 外，資料中只有定理的描述，而無證明，因此研究過程中我也為其給出了證明，並且作了一些推論。

### 定理 2-1

如圖 2-1 所示，一對等角共軛點的西姆松圓為同一圓，其圓心為其連線的中點。

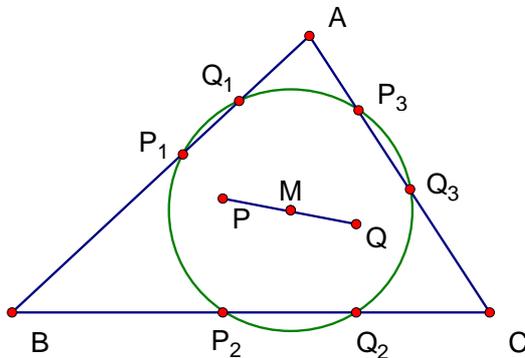


圖 2-1

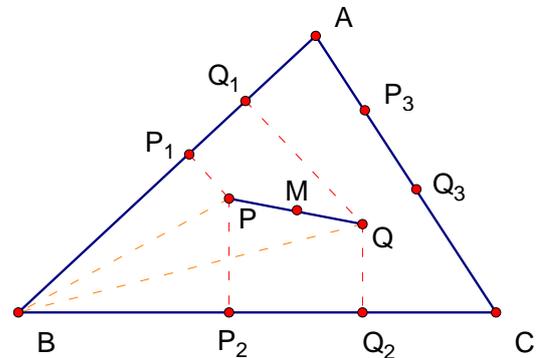


圖 2-2

[證明]

如圖 2-2 所示，令  $P$ 、 $Q$  為  $\triangle ABC$  的一對等角共軛點，自  $P$ 、 $Q$  分別作  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$  的垂足  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  和  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$

$$\because \angle PP_1B = \angle PP_2B = 90^\circ \text{ 及 } \angle QQ_1B = \angle QQ_2B = 90^\circ$$

$\Rightarrow P_1、P、P_2、B$  以及  $Q_1、Q、Q_2、B$  共圓

$\therefore \angle P_1P_2B = \angle P_1PB = 90^\circ - \angle PBP_1 = 90^\circ - \angle QBO_2 = \angle BQQ_2 = \angle Q_2Q_1B$

$\therefore P_1P_2Q_2Q_1$  共圓

由於  $\overline{P_1Q_1}$  的中垂線和  $\overline{P_2Q_2}$  的中垂線都過  $\overline{PQ}$  的中點  $M$

$\therefore M$  為四邊形  $P_1P_2Q_2Q_1$  的外接圓圓心

同理四邊形  $P_2Q_2P_3Q_3$  也共圓，圓心為  $M$

故  $\Delta P_1P_2P_3$  和  $\Delta Q_1Q_2Q_3$  六點共圓，圓心為  $\overline{PQ}$  的中點。

### 推論 2-1

由定理 2-1 可以證明西姆松線：過  $\Delta ABC$  的外接圓上一點  $P$  作  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  的垂足，則此三點共線，是為西姆松線。

如圖 2-5 所示，我們對  $\Delta ABC$  作  $P$  的等角共軛點  $Q$ ，由定義 2 得知

$\angle PAB = \angle QAC$ 、 $\angle PBC = \angle QBA$ 、 $\angle PCA = \angle QCB$

由於  $\angle QCB = \angle QCA + \angle ACB = \angle BCP + \angle BPA = 180^\circ - \angle CBP - \angle APC$

$= 180^\circ - \angle ABQ - \angle ABC = 180^\circ - \angle CBQ$

$\therefore \overline{CQ} \parallel \overline{BQ}$  (同理  $\overline{CQ}$  也平行  $\overline{AQ}$ )

即  $Q$  在無限遠的地方，因而  $\overline{PQ}$  的中點也在無限遠

故  $P$  的西姆松圓半徑變得無限大而成了一條線。

圖 2-3~2-6 為  $P$  點自  $\Delta ABC$  內到  $\Delta ABC$  外的過程：

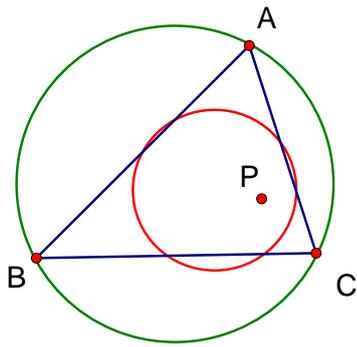


圖 2-3

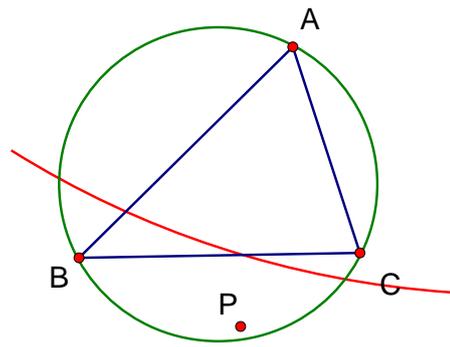


圖 2-4

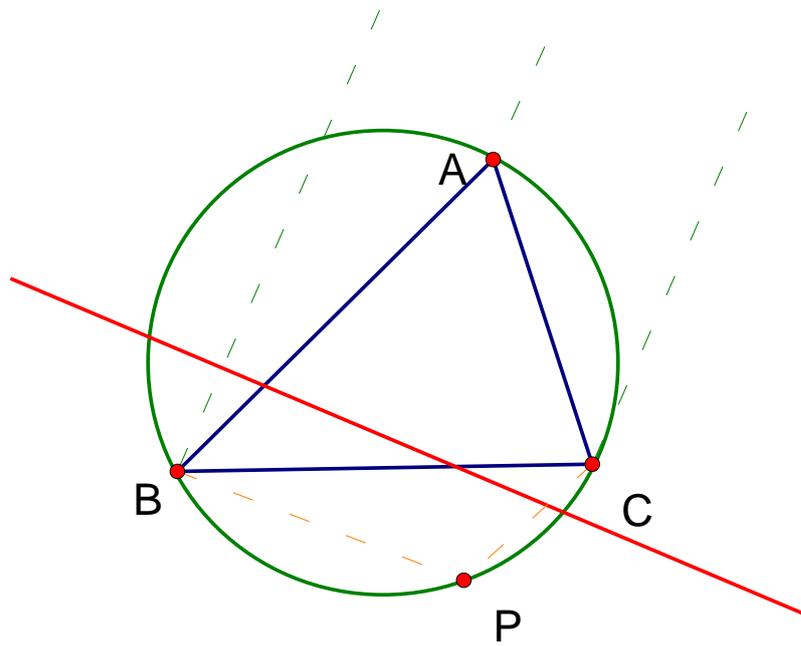


圖 2-5 西姆松圓變成一條線

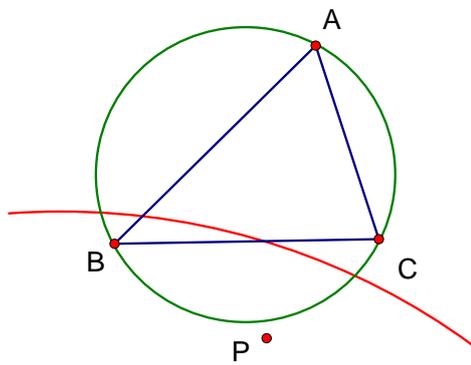


圖 2-6

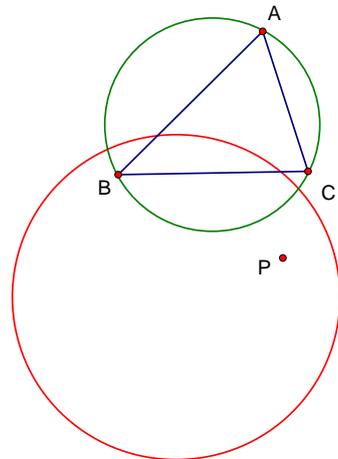


圖 2-7

**定理 2-2**

如圖 2-8、2-9 所示，平面四點 ABCD 中，分別以 A、B 對  $\triangle BCD$ ， $\triangle ACD$  作西姆松圓，則此兩圓有一交點在  $\overline{BC}$  上。

[證明]

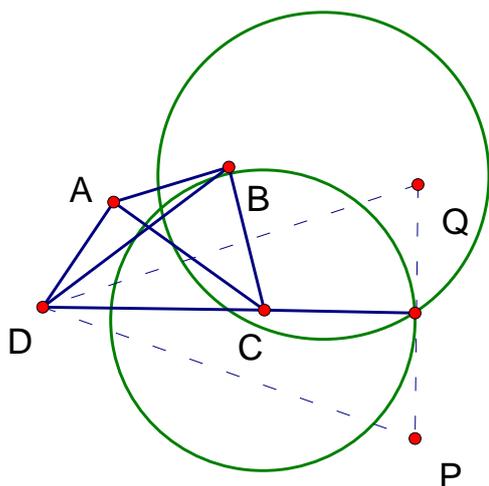


圖 2-8

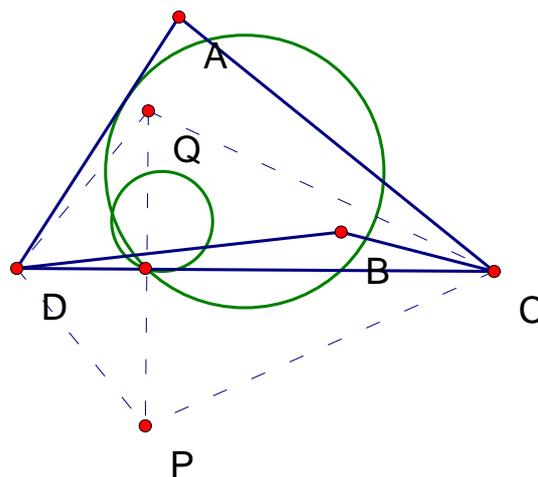


圖 2-9

如圖 2-8 所示，ABCD 為凸四邊形

分別作 A 對  $\triangle BCD$  及 B 對  $\triangle ACD$  的共軛點 P、Q

$$\because \angle PDC = \angle BDA = \angle QDC$$

$$\angle PCD = 180^\circ - \angle ACB = \angle QCD$$

$$\overline{CD} = \overline{CD}$$

$$\therefore \triangle CDP \cong \triangle CDQ (ASA)$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} \perp \overline{CD}$$

令  $\overline{PQ}$  和  $\overline{CD}$  交於 K

則 P 和 Q 對  $\overline{CD}$  的垂足皆為 K

$\therefore$  A 對  $\triangle BCD$  的西姆松圓及 B 對  $\triangle ACD$  的西姆松圓都過 K

又 K 在  $\overline{CD}$  上 故得證。

### 定理 2-3

如圖 2-10 所示，四邊形 ABCD 中，分別作  $\triangle ABC$ ， $\triangle BCD$ ， $\triangle CDA$ ， $\triangle DAB$  的九點圓，則此 4 圓共點。將其稱為 ABCD 的九點心。

[證明]

分別取  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 、 $\overline{BD}$  的中點 M、N、P、Q、L

並令  $\triangle ABD$  及  $\triangle CBD$  的九點圓（即  $\triangle MQL$  及  $\triangle NPL$  的外接圓）交於 L、K

我們只需證明  $\triangle ACD$  和  $\triangle ABC$

的九點圓都過點 K 就行了。

因為  $\angle QKP = \angle QML + \angle PNL =$

$\angle QDL + \angle PDL = \angle ADC$

$\triangle ADC$  的九點圓過 K。

同理  $\triangle ABC$  的九點圓亦過 K

故得證。

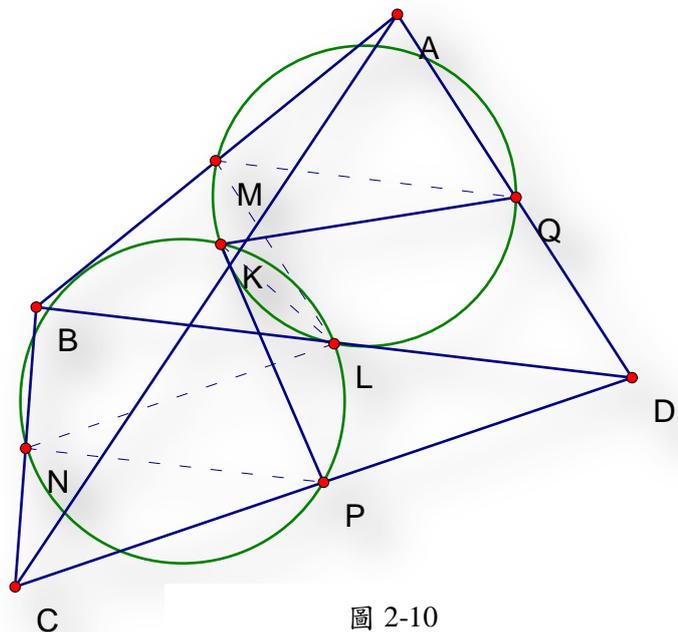


圖 2-10

### 定理 2-4

如圖 2-11 所示，平面 4 點 ABCD 中，分別以 A、B、C、D 對  $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$ 、 $\triangle ABC$  作西姆松圓，則四圓交到一點，且此點為 ABCD 的九點心。

[證明]

令四邊形 ABCD 中，C 在  $\overline{BD}$ 、 $\overline{AD}$  上的垂足分別為 G、F

令 A 在  $\overline{BD}$ 、 $\overline{CD}$  的垂足分別為 I、H

再由定理 2-2，令 A 對  $\triangle BCD$  的西姆松圓及 C 對  $\triangle ABD$  的西姆松圓交於 E、J (J 為兩綠圓異於 E 的交點，為避免圖過於混亂，並未標出)，其中 E 在  $\overline{BD}$  上。令 D 在  $\overline{AC}$  上的垂足為 K。

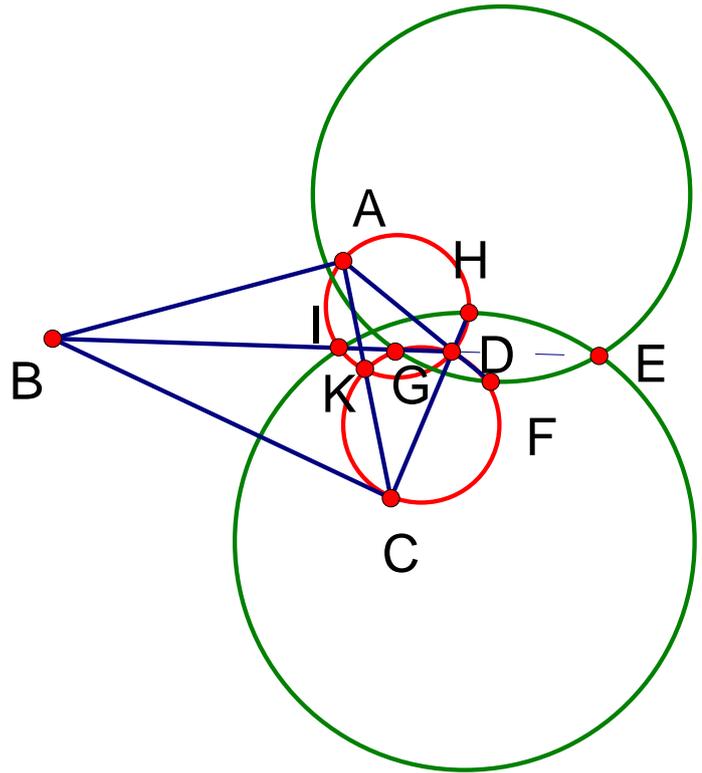


圖 2-11

我們只要證明  $\triangle ABC$  和  $\triangle ACD$  的九點圓都過 J，就證明了 J 為四邊形 ABCD 的九點心。

$$\angle HJF = \angle HJE + \angle FJE = \angle HIE + \angle FG$$

$$= \angle HKD + \angle FKD (\text{AIKDH 五點共圓及 CFDGK 五點共圓}) = \angle HKF$$

$\therefore$  HJKF 共圓

即  $\triangle ACD$  的九點圓過 J

同理  $\triangle ACB$  的九點圓亦過 J

故定理 2-4 得證。

### 定理 2-5

過  $\triangle ABC$  的外心畫一直線，則此直線上的任一點 P 作西姆松圓，必通過一定點。



$$\text{又 } \overline{FJ} = \overline{OP} \sin \angle OPJ$$

$$\angle HFJ = \angle AOP$$

$$\triangle HFJ \sim \triangle AOP (\text{SAS})$$

$$\Rightarrow \angle FHJ = \angle OAP$$

$$\angle HGC = \angle HGF + \angle BAC = \angle OPJ + 180^\circ - \angle BOF = \angle BOP$$

依同法可得  $\triangle KGH \sim \triangle POB$

$$\text{且 } \angle KHG = \angle PBO$$

考慮  $\angle JHK$

$$\angle JHK = \angle GHF - \angle GHK - \angle FHJ = \angle ACB - \angle OAP - \angle OBP$$

$$= \angle ACB + \angle APB - (\angle OAP + \angle OBP + \angle APB)$$

$$= \angle ACP + \angle APB - \angle AOB$$

$$= \angle APB - \angle ACB = \angle PAC - \angle PBC$$

另一方面

$$\angle JNK = \angle PNK - \angle PNJ = \angle PAC - \angle PBC$$

$$\therefore \angle JHK = \angle JNK$$

$\Rightarrow$  JNKH 共圓

由於 H 只和  $\angle AOP$  有關

$\therefore$  直線  $\overline{OP}$  任一點對  $\triangle ABC$  之西姆松圓恆過 H

故得證。

我們將H點稱為P的踏板點。(即過外心一線上的任一點，其踏板點為同一點。)

### 推論 2-2

若 P 對  $\triangle ABC$  的踏板點為 Q， $\triangle ABC$  的外心為 O，P 在  $\overline{BC}$  上的垂足及  $\overline{BC}$  中點分別為 H 及 M，則  $\triangle POA \sim \triangle HMQ$ 。

由於一點 P 對  $\triangle ABC$  的西姆松圓與  $\triangle ABC$  的九點圓交於兩點，由定理 1、2、4 知一點為 ABCP 的九點心 M，另一點為 P 的踏板點 N。

若 P 的共軛點為 Q，因為 Q 對  $\triangle ABC$  的西姆松圓和 P 對  $\triangle ABC$  的西姆松圓為同一圓，所以 M、N 也分別是 ABCQ 的九點心及 Q 的踏板點 N，又因 Q 的踏板點不是 N(當 P、Q、O 不共線)

所以得到：

### 推論 2-3

$\triangle ABC$  及一對等角共軛點對 P、Q，P 的踏板點是 ABCQ 的九點心，Q 的踏板點是 ABCP 的九點心。

**定理 2-6：**四邊形 ABCD，自一點 P 對  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$  分別作西姆松圓，則此四圓共點，稱為 P 對四邊形 ABCD 的西姆松點。

[證明]

如圖 2-13 所示，P 對  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{AC}$  的垂足分別為 F、H、I、G、E、J

設 P 對  $\triangle ABD$  及  $\triangle BCD$  的西姆松圓交

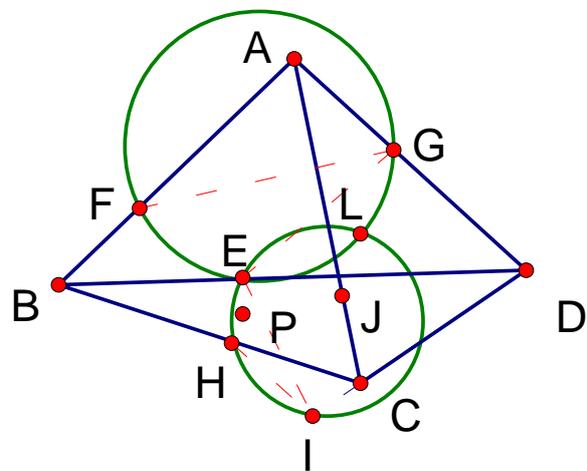


圖 2-13

於 L

我們要證的是 $\triangle ABC$  及 $\triangle CDA$  的西姆松圓皆過 L 即可

$$\angle EGF = \angle PGF - \angle PGE = \angle PAB - \angle PDB (\because PGAF \text{ 共圓、} PEGD \text{ 共圓})$$

$$\text{同理 } \angle EIH = \angle PIH + \angle PIE = \angle PCB + \angle PDB$$

$$\angle FJH = \angle PJF + \angle PJH = \angle PAB + \angle PCB (\because PJAF \text{ 共圓、} PJCH \text{ 共圓})$$

$$\therefore \angle FJH = \angle EGF + \angle EIH = \angle ELF + \angle ELH = \angle FLH$$

$\Rightarrow FLJH$  共圓

即 P 對 $\triangle ABC$  的西姆松圓過 L

同理 $\triangle CDA$  的西姆松圓亦過 L

故得證。

### 三、研究發現

此部分為自己的發現，之前沒有人做過。根據蒐集的資料，我提出了一些猜想並加以驗證，這些構想啟發於一本書——幾何學中的歸納法——裡面常用的技巧：於 N 邊形中，探討任 N-1 個頂點構成的 N-1 邊形(共 N 個)中，其特殊點或圓的關係，例如：九點圓、垂心。

這部分的主要結論可分為三大主題：

1. 神奇圓
2. 西姆松圓
3. 新圓

三大主題間仍彼此互有關聯。

### 神奇圓

## 引言

神奇圓是從踏板點的延伸，從平面上一點  $P$  作四個點  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  中任取三點形成之三角形的踏板點，這四點會有何關係存在？

**定理 3-1：**四邊形  $ABCD$  及一點  $P$ ，以  $P$  分別對  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$  作踏板點，再作  $ABCD$  的九點心以及  $P$  對  $ABCD$  的西姆松點，則此六點共圓。

[證明]

四邊形  $ABCD$  的九點心為  $E$ ，作  $P$  對  $ABCD$  的西姆松點  $F$ 、 $P$  對  $\triangle ABD$  的踏板點  $H$  及  $P$  對  $\triangle BDC$  的踏板點  $I$ 。令  $ABDP$  的九點心為  $K$  (由定理 1 和 2,  $K$  即  $\triangle ABD$  的九點圓與  $P$  對  $\triangle ABD$  之西姆松圓的一交點，另一交點為  $H$ )、四邊形  $BDCP$  的九點心為  $J$ ， $\overline{BD}$  的中點  $M$ ， $P$  在  $\overline{BD}$  上的垂足為  $N$ 。

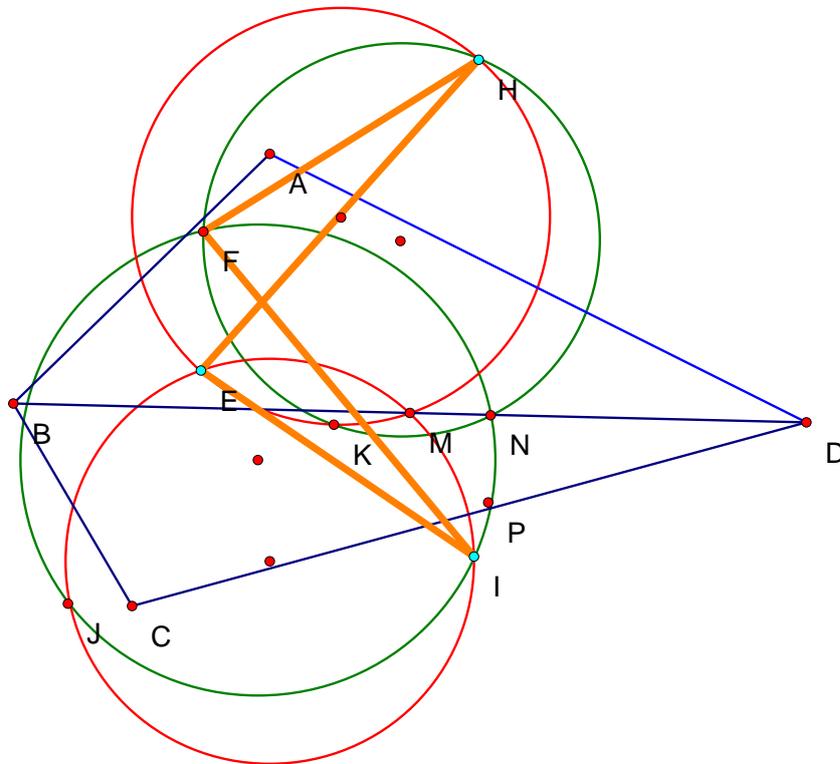


圖 3-1，紅圓為九點圓，綠圓為西姆松圓

由定理 2-4 得知 KJMN 共圓 (即為  $\Delta PBD$  的九點圓)

$$\begin{aligned} \angle EHF - \angle EIF &= (\angle KHF - \angle KHE) - \angle EIF = (\angle KHF - \angle KHE) - (\angle JIF - \angle JIE) \\ &= (\angle KHF - \angle JIF) + (\angle JIE - \angle KHE) \\ &= (\angle KNF - \angle JNF) - (\angle KMF - \angle JMF) = \angle KNJ - \angle KMJ = 0^\circ \\ &\therefore KJMN \text{ 共圓} \end{aligned}$$

故 EHIF 共圓

同理可證 P 對  $\Delta ABC$  及  $\Delta CDA$  的踏板點亦在此圓上

故得證。

我們將上述的圓稱為：點 P 對 ABCD 的神奇圓。

### 定理 3-2

如圖 3-2 所示，P 對四邊形 ABCD 作神奇圓的圓心 T，隨著 P 的移動，點 T 也跟著移動，但 T 點的軌跡會相似於 P 點的軌跡。

[證明]

如圖 3-3 所示，令四邊形 ABCD 中一點 P，  
 $\Delta ABD$  及  $\Delta BCD$  外接圓圓心分別為  $O_1$ 、 $O_2$ ，  
 $\Delta ABD$  和  $\Delta BCD$  的九點圓圓心分別為  $N_1$ 、 $N_2$ ，四邊形 ABCD 的九點心為 M  
 P 對  $\Delta ABD$  和  $\Delta BCD$  的踏板點為  $Q_1$ 、 $Q_2$   
 P 對四邊形 ABCD 的神奇圓圓心 T。

首先證明  $\Delta O_1O_2P \sim \Delta N_1N_2T$  (如圖 3-4 所示)

令  $\overline{BD}$  的中點為 E

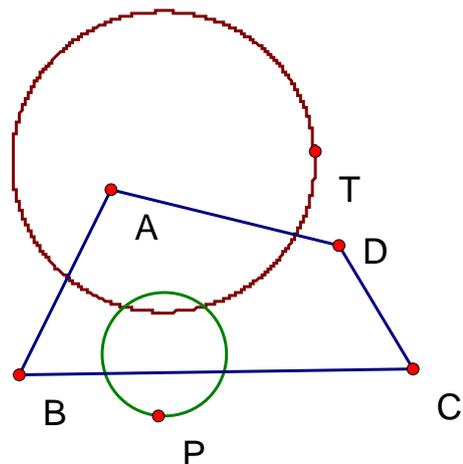


圖 3-2，T 為 P 的神奇圓圓心  
 當 P 繞綠圓走時，T 繞咖啡圓走

$\overline{AB}$  中點為 F

P 在  $\overline{AB}$  上的垂足為 H

$$\because \overline{N_1T} \perp \overline{Q_1M}$$

$$\overline{N_1N_2} \perp \overline{ME}$$

$$\therefore \angle N_1TN_2 = 180^\circ - \angle Q_1ME$$

$$\because \Delta Q_1FH \sim \Delta DO_1P \text{ (推論 2-2)}$$

$$\therefore \angle Q_1ME = \angle EFQ_1 = \angle EFA + \angle Q_1FA$$

$$= \angle DO_1E + (180^\circ - \angle Q_1FH)$$

$$\angle DO_1O_2 + (180^\circ - \angle DO_1P) = 180^\circ - \angle O_1O_2P$$

$$\angle N_1TN_2 = 180^\circ - \angle Q_1ME = \angle O_2O_1P$$

同理  $\Delta O_1O_2P \sim \Delta N_1N_2T$  (AA)

由於  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $N_1$ 、 $N_2$  為定點

故 T 之軌跡相似於 P 之軌跡。

### 推論 3-1

四邊形 ABCD 及一點 P， $\Delta ABD$  及  $\Delta BCD$  外接圓圓心和 P 所構成的三角形相似於  $\Delta ABD$  和  $\Delta BCD$  的九點圓圓心和 P 對四邊形 ABCD 的神奇圓圓心所構成的三角形。

於圖 3-4，即為  $\Delta O_1O_2P \sim \Delta N_1N_2T$ 。

又由於  $\overline{Q_1M} \perp \overline{N_1T}$  及  $\overline{Q_2M} \perp \overline{N_2T}$ ，我們得到：

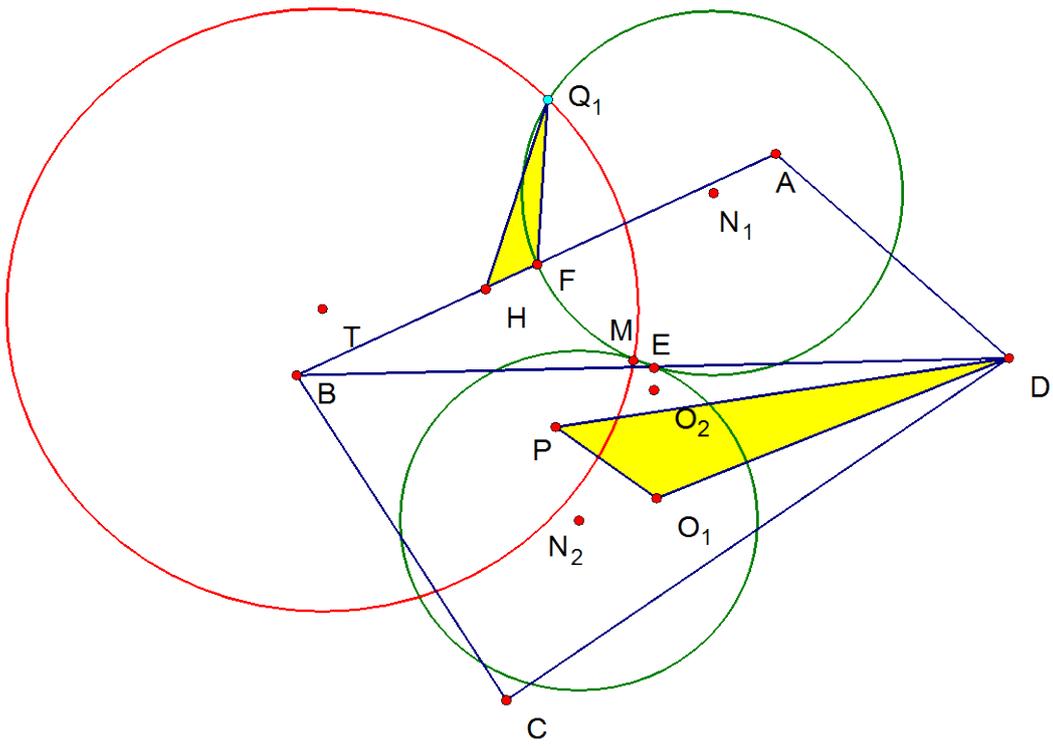


圖 3-3

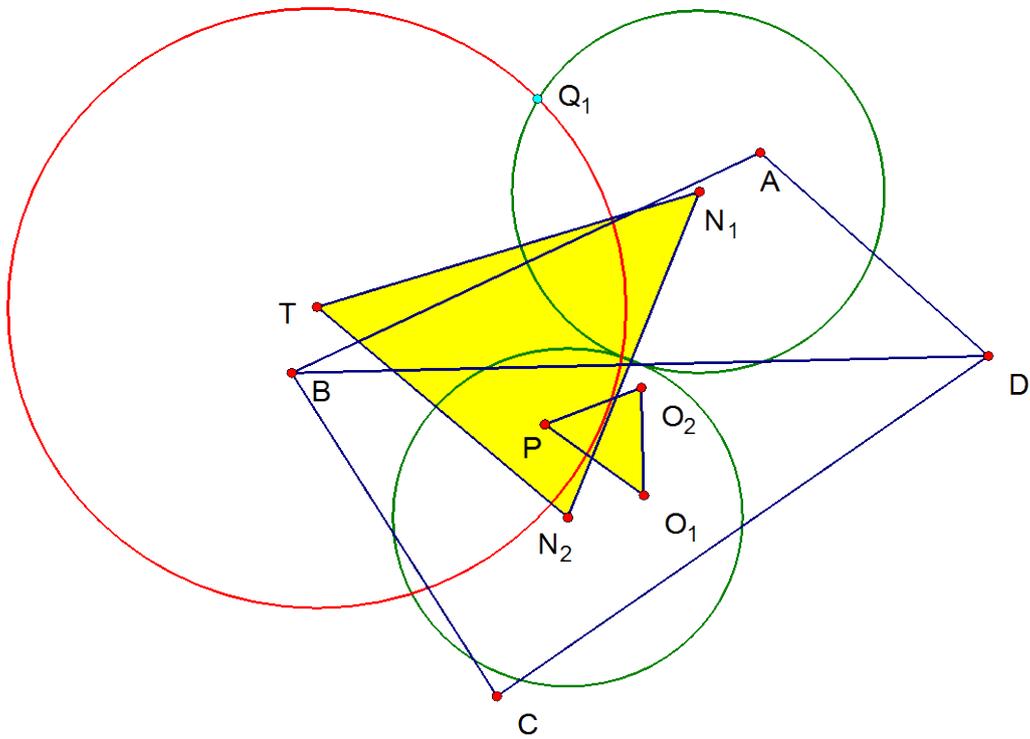


圖 3-4

**推論 3-2**

P 對  $\triangle ABD$  及  $\triangle BCD$  的踏板點在神奇圓上圓心角為  $2\angle O_1PO_2$  ( $O_1$ 、 $O_2$  分別為  $\triangle ABD$  和  $\triangle BCD$  外心)。

另外，當 ABCD 為原內接四邊形時，點 P 對 ABCD 的神奇圓圓心跑到無限遠，可知：

**推論 3-3**

當 ABCD 為圓內接四邊形時，神奇圓會退化為一直線，我們稱之為神奇線。

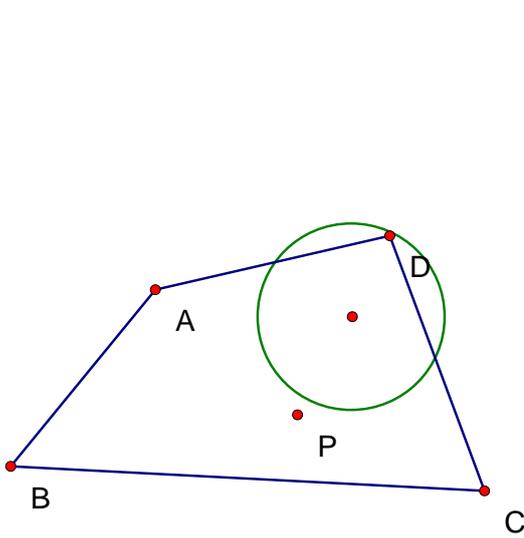


圖 3-5

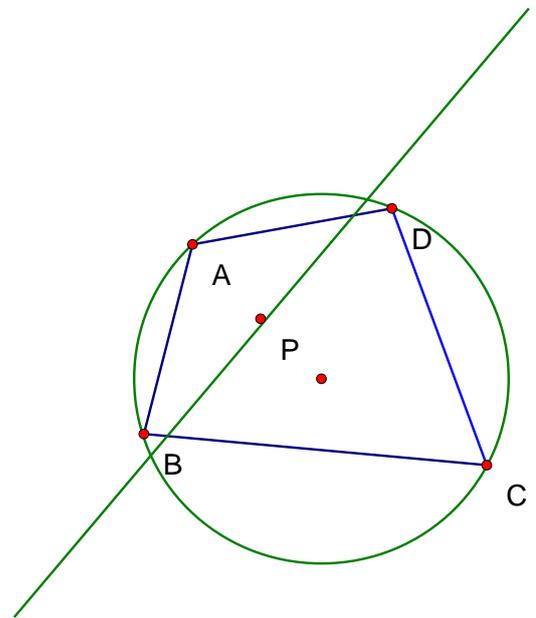


圖 3-6

**定理 3-3**

五邊形 ABCDE 及一點 P，分別以 P 對四邊形 BCDE、CDEA、DEAB、EABC、ABCD 作神奇圓，則此五圓共點，稱作 P 對五邊形 ABCDE 的神奇點。

[證明]

如圖 3-7，五邊形 ABCDE 中一點 P

P 對  $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDE$ 、 $\triangle CAD$  的踏板點為  $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$

$\triangle ABCD$ 、 $\triangle CDE$ 、 $\triangle CAD$  分別為  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$

P 對四邊形  $ABCD$  及  $CDBA$  的神奇圓交於  $K_3$  和  $Q$

首先證明 P 對  $BCDE$  的神奇圓  $c$  亦過  $Q$

由推論 3-2

$$\angle K_1 Q K_2 = \angle K_1 Q K_3 + \angle K_3 Q K_2 = \angle O_1 P O_3 + \angle O_3 P O_2$$

=  $K_1$ 、 $K_2$  在神奇圓  $c$  上的圓周角

即 P 對  $BCDE$  的神奇圓  $c$  亦過  $Q$

同理 P 對  $BCDE$ 、 $CDEA$ 、 $DEAB$ 、 $EABC$ 、 $ABCD$  的神奇圓接過  $Q$

故得證。

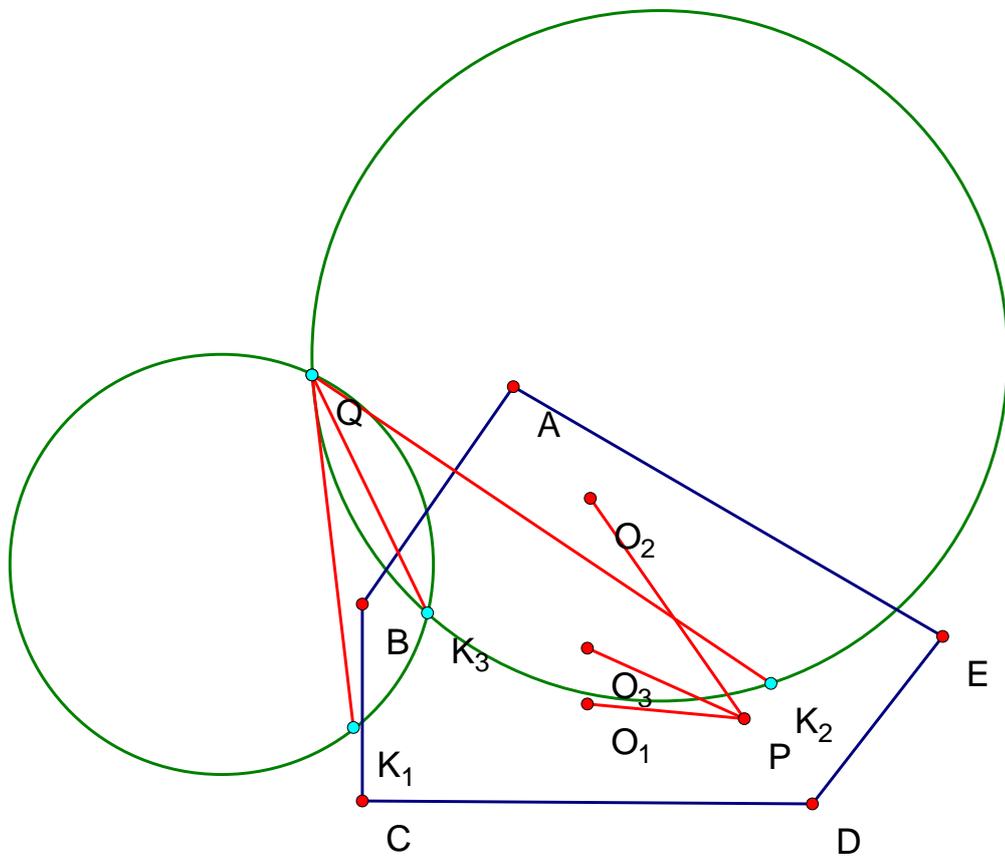


圖 3-7

**定理 3-4**

如圖 3-8 所示，P 對五邊形 ABCDE 的神奇點隨 P 點移動的軌跡相似於 P 的軌跡。

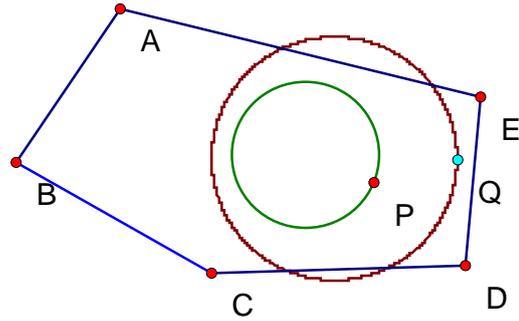


圖 3-8(Q 為 P 對 ABCDE 的神奇點)  
當 P 沿綠圓走時，Q 沿咖啡圓走

[證明]

如圖 3-9 所示，五邊形 ABCDE 及一點 P，

P 對四邊形 ABCD 及 ACDE 的神奇圓圓心分別為  $Q_1$ 、 $Q_2$ ， $\triangle BCD$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ECD$  的外接圓圓心及九點圓圓心分別為  $O_1$ 、 $O$ 、 $O_2$  和  $F_1$ 、 $F$ 、 $F_2$

首先證明  $\angle FQ_2Q_1 = \theta = \text{定值}$  (即不隨 P 改變)

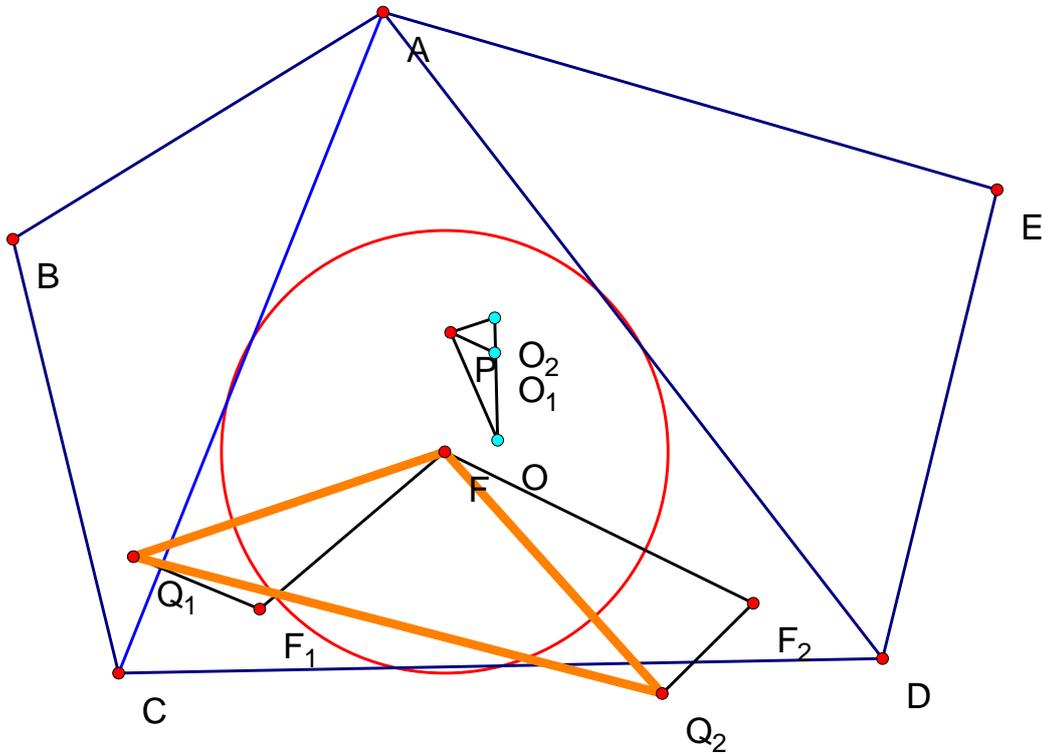


圖 3-9

由推論 3-1 我們知道

$$\Delta FF_1Q_1 \sim \Delta OO_1P$$

$$\Delta FF_2Q_2 \sim \Delta OO_2P$$

$$\therefore \angle Q_1FF_1 = \angle POO_1 = \angle POO_2 = \angle Q_2FF_2$$

$$\therefore \angle Q_1FQ_2 = \angle F_1FF_2$$

$$\text{又 } \frac{\overline{FQ_1}}{\overline{FQ_2}} = \frac{\overline{PO} \times \overline{FF_1}}{\overline{OO_1}} \times \frac{\overline{OO_2}}{\overline{PO} \times \overline{FF_2}} = \frac{\overline{FF_1} \times \overline{OO_2}}{\overline{FF_2} \times \overline{OO_1}} = \text{定值}$$

$\therefore$  無論 P 點的位置在哪裡， $\Delta FQ_1Q_2$  的形狀(不包括大小)都一樣，這就說明了：

$$\angle FQ_2Q_1 = \theta = \text{定值。}$$

如圖 3-10 所示

若 P 對  $\Delta ACD$  的踏板點為 H，P 對 ABCDE 的神奇點為 K

四邊形 ACDE 的九點心為 N

由定理 3-1 可得知 H、K 為圓  $Q_1$  和圓  $Q_2$  的交點(為求簡潔，圓以圓心表示)

並知 N 在圓  $Q_2$  上，且 N 為一定點(即不隨 P 移動)

由於 N 為一定點且  $Q_2$  的軌跡和 P 的軌跡相似(定理 3-2)

欲證 K 點軌跡也和 P 的軌跡相似，只須證明  $\Delta NO_2K$  的形狀不隨 P 改變即可(如此，K

點軌跡就和  $Q_2$  的軌跡相似，即和 P 的軌跡相似)

$$\text{由於 } \overline{Q_2K} = \overline{Q_2N}$$

只需證明  $\angle NQ_2K$  為一定值便行了

以下說明  $\angle NQ_2K = 2\theta$

$$\begin{aligned} \angle NQ_2K &= \angle NQ_2Q_1 - \angle KQ_2Q_1 = (\angle NQ_2Q_1 + \angle Q_1Q_2H) - (\angle KQ_2Q_1 + \angle Q_1Q_2H) \\ &= \angle NQ_2H - \angle KQ_2H = 2(\angle FQ_2H - \angle Q_1Q_2H) = 2\angle FQ_2Q_1 = 2\theta \end{aligned}$$

故得證。

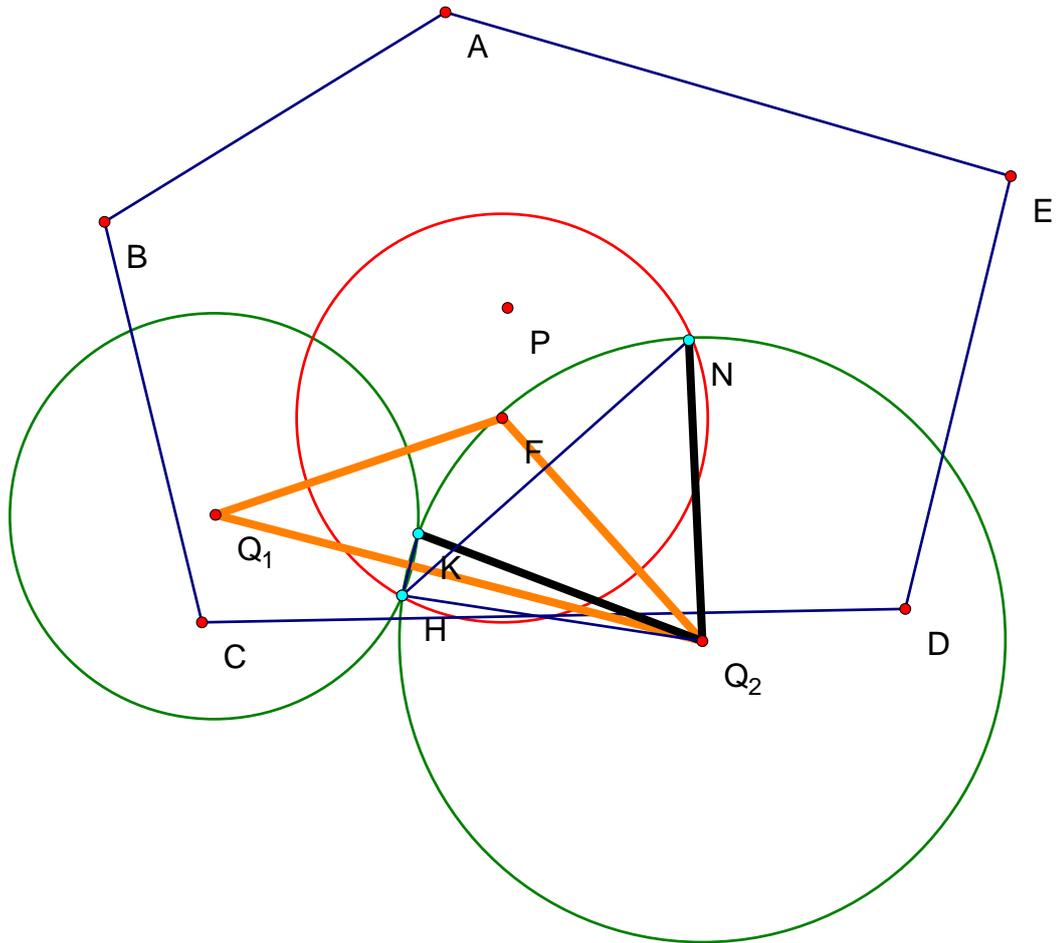


圖 3-10

### 西姆松圓

#### 引言

這一部分主要探討西姆松圓圓心(或西姆松點)的位置關係，以及西姆松圓的  $n$  邊形推廣。

#### 定理 3-5

平面 4 點 ABCD 中，分別以 A、B、C、D 對  $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$ 、 $\triangle ABC$  作西姆松圓，則四圓圓心構成的四邊形和 ABCD 相似。如圖 3-11 所示。

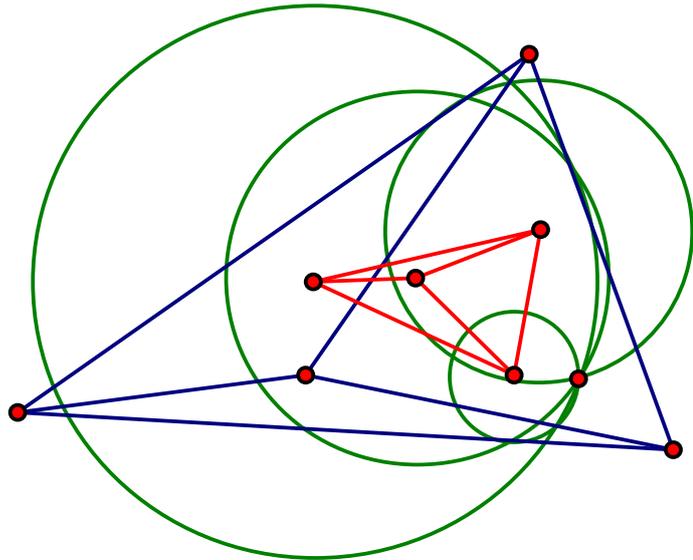


圖 3-11

[證明]

作 A、B、C、D 對  $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$ 、 $\triangle ABC$  的共軛點  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P$

由定理 2-1

我們的目的是證明  $\overline{P_1A}$ 、 $\overline{P_2B}$ 、 $\overline{P_3C}$ 、 $\overline{PD}$  的中點  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O$  形成之四邊形相似於 ABCD

由定理 2-2 的證明中可知  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  分別是 P 對  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$  的對稱點

故  $\overline{PP_1}$ 、 $\overline{PP_2}$ 、 $\overline{PP_3}$  分別垂直  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$

以 P 為中心將  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$  放大兩倍到  $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$ 、 $H$  ( $H$  即為  $D$ ) (如圖 3-12、3-13 所示)

我們只需證  $H_1H_2H_3H$  也相似於四邊形 ABCD 就說明了  $O_1O_2O_3O$  相似於四邊形 ABCD。

由於  $\overline{PP_1H_1A}$  為平行四邊形，所以  $\overline{AH_1}$  亦垂直  $\overline{BC}$

即  $H_1$  落在  $\triangle ABC$  中的垂線  $h_a$  上

同理  $H_2$ 、 $H_3$  也落在  $h_b$ 、 $h_c$  上

令  $\triangle ABC$  之垂心為  $K$ ，如圖 3-13 所示

$$\overline{AB} \times \overline{CH_3} + \overline{BC} \times \overline{AH_1} + \overline{CA} \times \overline{BH_2}$$

$$= \overline{AB} \times \overline{PP_3} + \overline{BC} \times \overline{PP_2} + \overline{CA} \times \overline{PP_1}$$

$$= 2 \times \Delta ABC \text{ 面積}$$

$$= \overline{AB} \times \overline{CK} + \overline{BC} \times \overline{AK} + \overline{CA} \times \overline{BK}$$

$$\text{移向後得 } \overline{AB} \times \overline{KH_3} + \overline{CA} \times \overline{KH_2} = \overline{BC} \times \overline{KH_1}$$

$$\text{即 } \overline{KH_3} \times \sin C + \overline{KH_2} \sin B = \overline{KH_1} \times \sin A$$

$$\because \sin C = \sin \angle BKH_1 \text{ 、}$$

$$\sin B = \sin \angle CKH_1 \text{ 、}$$

$$\sin A = \sin \angle BKC$$

由托勒密逆定理得

$H_1H_2H_3K$  共圓

又依正弦得  $\Delta H_1H_2H_3$  相似

於  $\Delta ABC$

同理四邊形  $H_1H_2H_3H$  相似於四邊

形  $ABCD$

所以四邊形  $O_1O_2O_3O$  相似於四邊

形  $ABCD$

故得證。

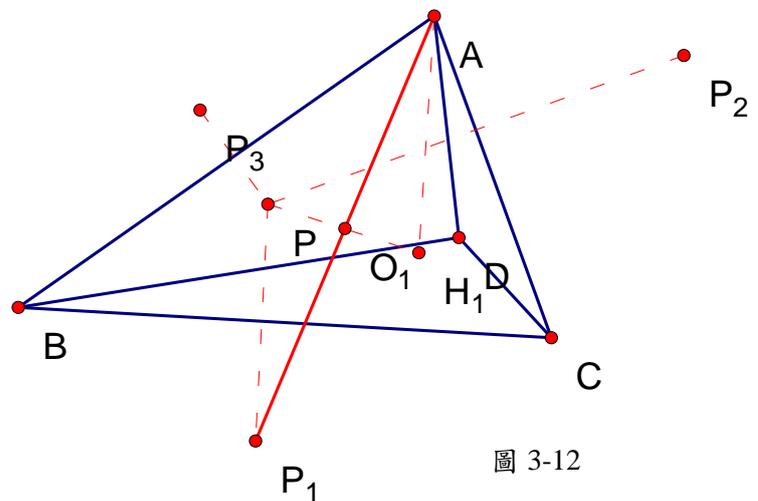


圖 3-12

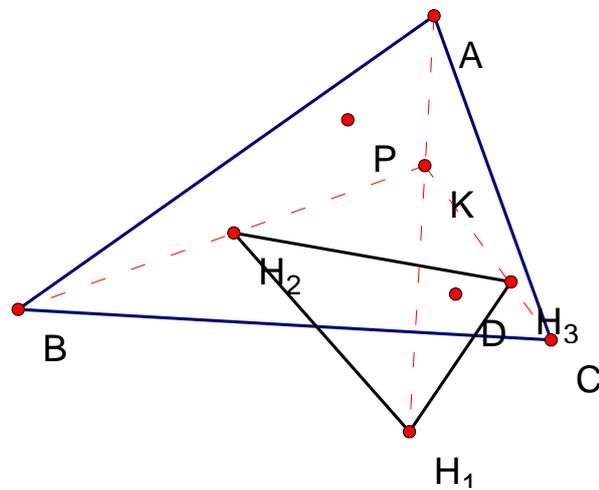


圖 3-13

**定理 3-6**

如圖 3-14 所示四邊形 ABCD 中，分別作  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$  的九點圓的圓心，取其圓心構成之四邊形再作一次，得新的四邊形，則此四邊形和 ABCD 相似。

[證明]

如圖 3-15 所示，令  $\triangle DAB$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$  的九點圓圓心分別為  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ 、 $D_1$  且四圓交於 P (P 即為 ABCD 的九點心)

作兩次後為  $A_2$ 、 $B_2$ 、 $C_2$ 、 $D_2$

令  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$  的中點分別為 M、N

則  $\angle C_1 B_1 A_1 = 180^\circ - \angle NPM (\because \overline{PM} \perp \overline{A_1 B_1}$ 、 $\overline{PN} \perp \overline{B_1 C_1}) = 180^\circ - \angle ABC (\because \text{九點圓})$

同理  $\angle A_2 B_2 C_2 = 180^\circ - \angle C_1 A_1 B_1 = \angle ABC$

同理  $\angle A_2 C_2 B_2 = \angle ACB$  ... 對應角皆相等

故得證。

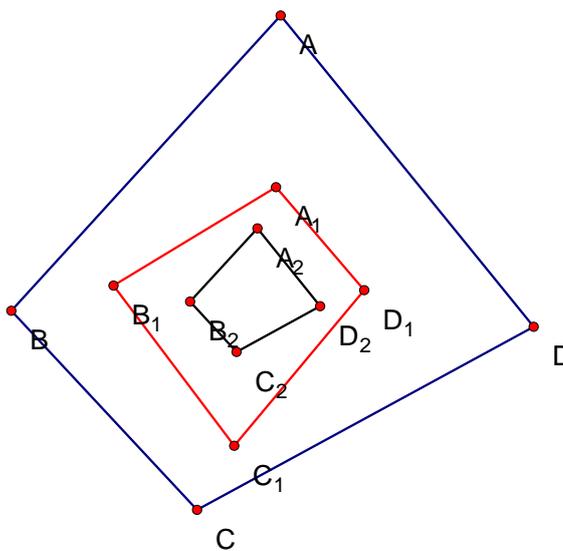


圖 3-14

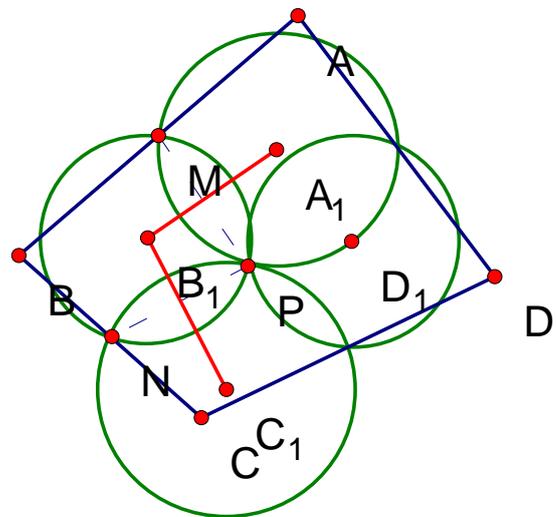


圖 3-15

### 定理 3-7

如圖 3-16 所示，五邊形 ABCDE 中，分別以 A、B、C、D、E 對四邊形 BCDE、CDEA、DEAB、EABC、ABCD 作西姆松點，則此五點形成的五邊形相似於五邊形 ABCDE。

[證明]

令 A、B、C、D、E 對四邊形 BCDE、CDEA、DEAB、EABC、ABCD 的分別為西姆松點分別為  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ 、 $D_1$ 、 $E_1$

首先證明  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

如圖 3-17 所示，分別作 A、B、C 對  $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$  的西姆松圓(圓心分別為  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ )

由定理 3-5  $\Rightarrow \triangle O_1O_2O_3 \sim \triangle ABC$

$\therefore$  只須證明  $\triangle PO_1A_1 \sim \triangle PO_2B_1 \sim \triangle PO_3C_1$  即可

即證明  $\angle A_1O_1P = \angle B_1O_2P = \angle C_1O_3P$

如圖 3-18 所示，令 B 在  $\overline{AC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{CE}$  上的垂足為 T、M、N，則 B、T、N、M、C 共圓

由定理 2-2

令 A 對  $\triangle BCE$  和 B 對  $\triangle ACE$  的西姆松圓(紅)在  $\overline{CE}$  上的交點為 K

A 對  $\triangle BCD$  和 B 對  $\triangle ACD$  的西姆松圓在  $\overline{CD}$  上的交點為 Q(如圖 3-18)

首先，我們證明  $KQB_1A_1$  共圓，由於  $\angle QB_1T = \angle TMC$  ( $\because B_1TMQ$  共圓)

$= 90^\circ + \angle BMT$  ( $\because \overline{BM} \perp \overline{CD}$ )  $= 90^\circ + \angle BNT$  ( $BTMNC$  共圓)

$$= \angle CNT (\because \overline{BN} \perp \overline{CN}) = \angle KB_1T \Rightarrow K, Q, B_1 \text{ 共線}$$

同理  $KQA_1B_1$  四點共線

對照圖 3-17、3-18  $\therefore \angle A_1O_1P = 2\angle A_1QP = \angle B_1O_2P$

同理  $\angle A_1O_1P = \angle B_1O_2P = \angle C_1O_3P$  ( $O_1, O_2$  未標示於圖 3-18, 是綠圓的圓心)

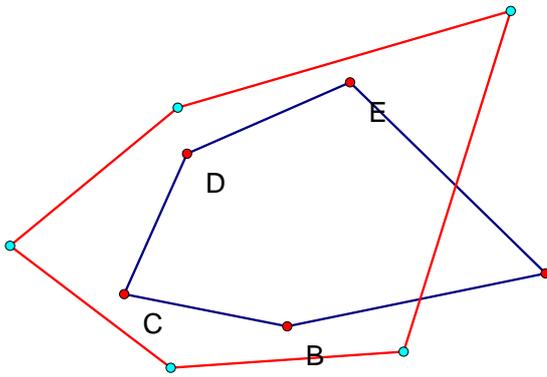


圖 3-16

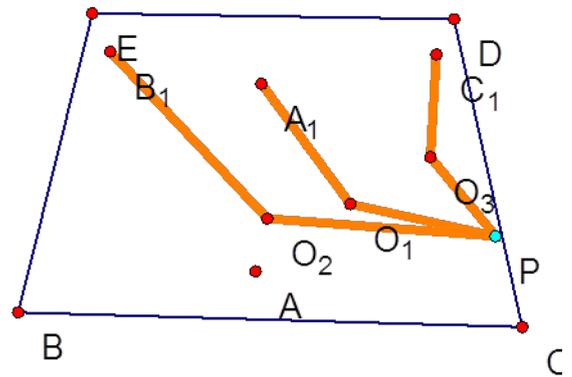


圖 3-17

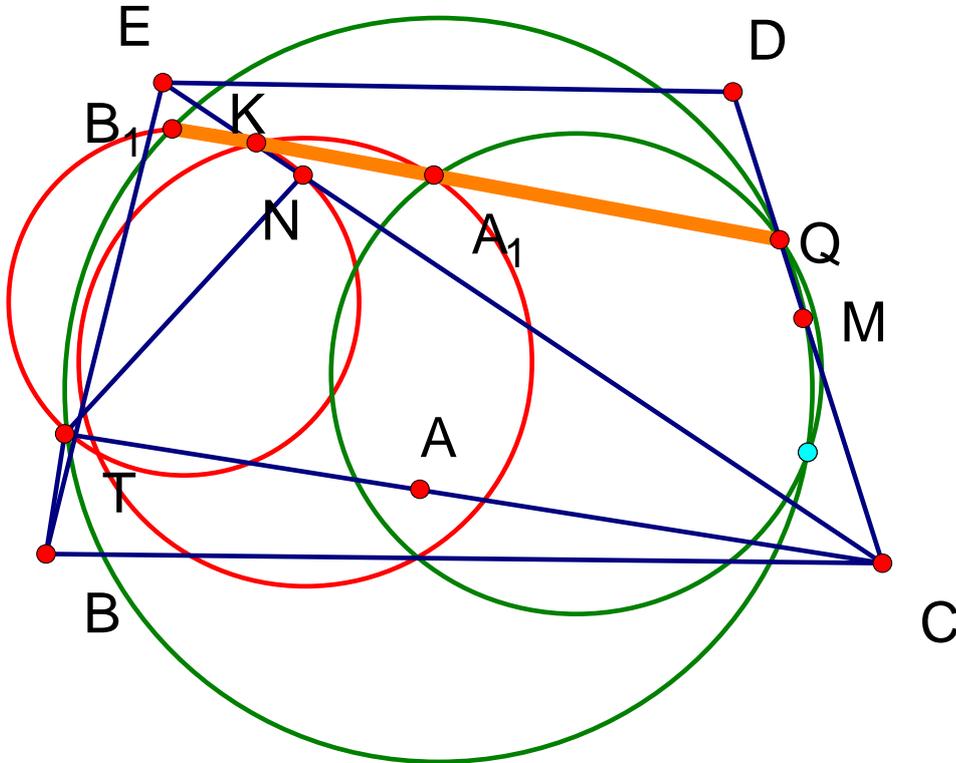


圖 3-18

$$\therefore \Delta PO_1A_1 \sim \Delta PO_2B_1 \sim \Delta PO_3C_1$$

$$\therefore A_1B_1C_1 \sim O_1O_2O_3$$

同理  $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE$  得證。

### 定理 3-8

如圖 3-19，五邊形  $ABCDE$  及點  $P$ ，以  $P$  分別對四邊形  $ABCD$ 、 $BCDE$ 、 $CDEA$ 、 $DEAB$ 、 $EABC$  作西姆松點，則此五點共圓，稱為點  $P$  對  $ABCDE$  得西姆松圓。

依同法可得：若  $n$  為偶數， $P$  對  $n$  邊形有西姆松點。

若  $n$  為奇數， $P$  對  $n$  邊形有西姆松圓。

[證明]

先證五邊形的情形

如圖 3-20，五邊形  $A_1A_2A_3A_4A_5$  及一點  $P$

自  $P$  做  $A_1A_2A_3A_5$ 、 $A_1A_2A_3A_4$ 、 $A_1A_3A_4A_5$ 、 $A_1A_2A_4A_5$  的西姆松點  $P_1P_2P_3P_4$

欲證定理 3-8，我們先證  $P_1P_2P_3P_4$  共圓：

自  $P$  作  $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_1A_3}$ 、 $\overline{A_1A_4}$ 、 $\overline{A_1A_5}$  做垂足  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$ 、 $B_4$

則  $PB_1B_2B_3B_4A_1$  共圓

所以  $\angle B_1B_2B_4 = \angle B_1B_3B_4$

由於  $B_2B_4P_1P_3$  共圓（即  $P$  對  $\Delta A_1A_3A_5$  的西姆松圓）

$B_1B_2P_1P_2$  共圓（即  $P$  對  $\Delta A_1A_2A_3$  的西姆松圓）

$P_4P_2B_3B_1$  共圓（ $P$  對  $\Delta A_1A_2A_4$  的西姆松圓）

$P_4P_3B_3B_4$  共圓 (P 對  $\Delta A_1A_4A_5$  的西姆松圓)

$$\angle B_1B_2B_4 = \angle B_4B_2P_1 + \angle B_1B_2P_1 = \angle P_1P_3B_4 + \angle P_1P_2B_1$$

$$\text{同理 } \angle B_1B_3B_4 = \angle B_1B_3P_4 + \angle B_4B_3P_4$$

$$= \angle P_4P_2B_1 + \angle P_4P_3B_4 (\because P_4P_2B_3B_1 \text{ 共圓}、P_4P_3B_3B_4 \text{ 共圓})$$

$$\therefore \angle P_1P_3B_4 + \angle P_1P_2B_1 = \angle P_4P_2B_1 + \angle P_4P_3B_4$$

$$\Rightarrow \angle P_1P_3B_4 - \angle P_4P_3B_4 = \angle P_4P_2B_1 - \angle P_1P_2B_1 \Rightarrow \angle P_1P_3P_4 = \angle P_1P_2P_4$$

故  $P_1P_2P_3P_4$  共圓

同理 P 對四邊形 ABCD、BCDE、CDEA、DEAB、EABC 的 5 個西姆松點共圓

所以五邊形時得證。

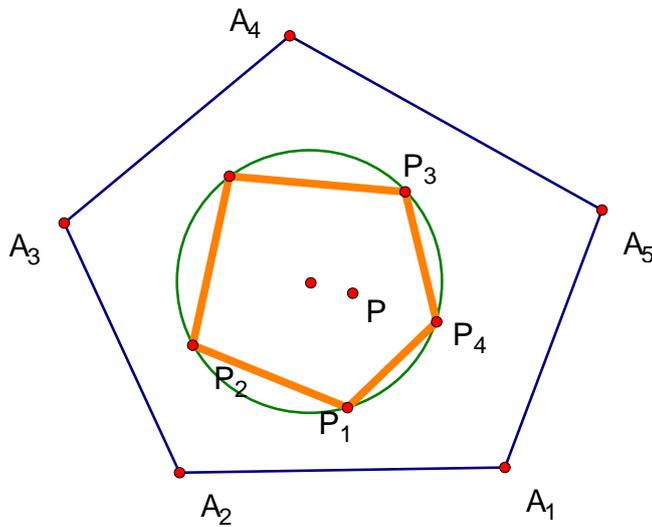


圖 3-19

依數學歸納法

令對所有  $2 \leq K \leq n-1$

K 為奇數時 K 邊形有西姆松圓

K 為偶數時 K 邊形有西姆松點 (令  $K=2$  時西姆松點為垂足)

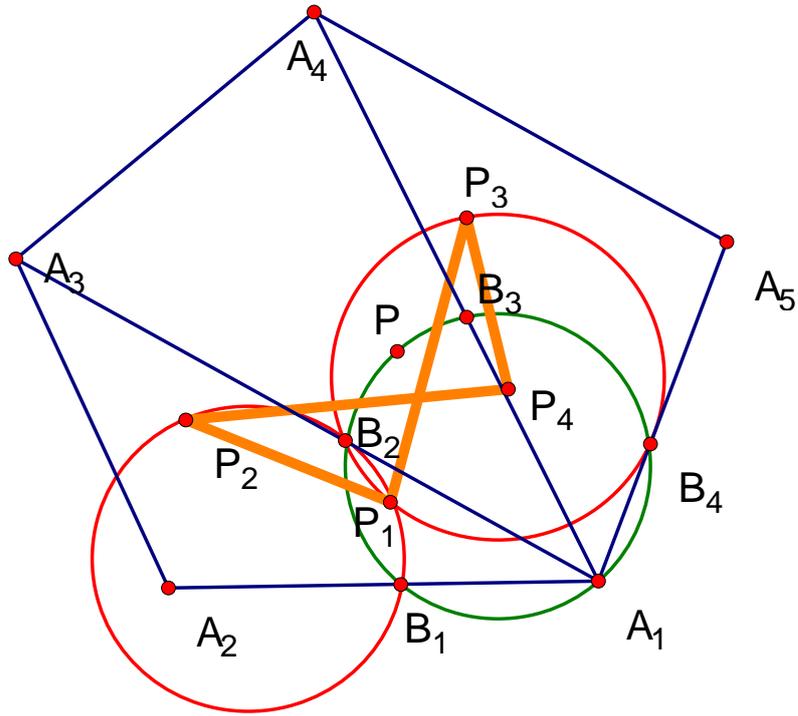


圖 3-20

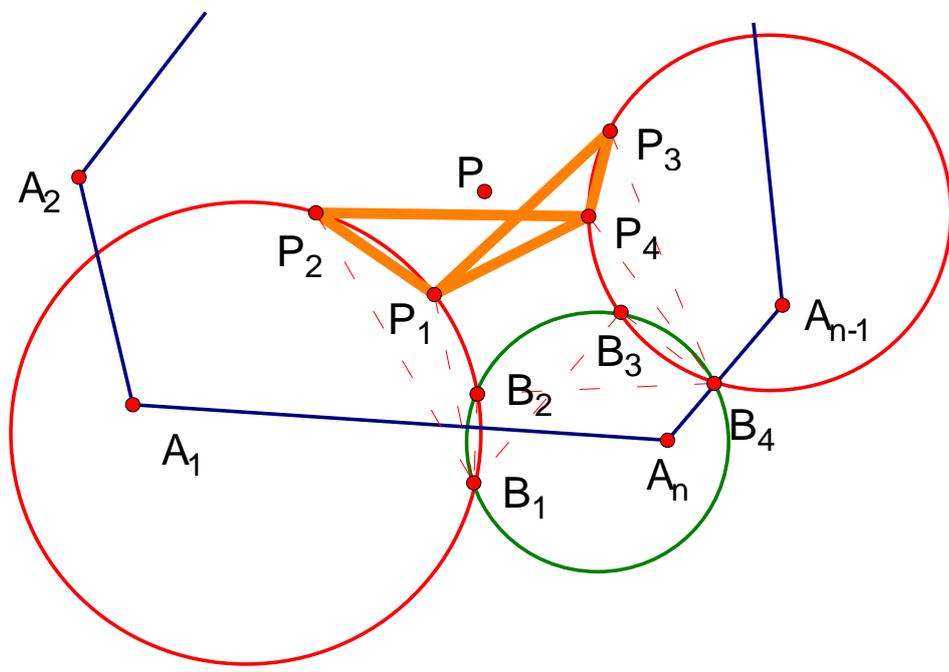


圖 3-21

現在要證  $K=n$  時也成立：

**n 為奇數的證明**

如圖 3-21 所示，作 P 對  $n-1$  邊形

$A_1A_2 \dots \frac{A_{n+1}A_{n+5}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  (即不包括  $\frac{A_{n+3}}{2}$ ) 的西姆松點  $P_2$

$A_1A_2 \dots \frac{A_{n-5}A_{n+1}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  (即不包括  $\frac{A_{n-3}}{2}$ ) 的西姆松點  $P_3$

$A_1A_2 \dots \frac{A_{n-3}A_{n+1}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  (即不包括  $\frac{A_{n-1}}{2}$ ) 的西姆松點  $P_4$

$A_1A_2 \dots \frac{A_{n-1}A_{n+3}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  (即不包括  $\frac{A_{n+1}}{2}$ ) 的西姆松點  $P_1$

和五邊形一樣只需證  $P_1P_2P_3P_4$  共圓即可。

作 P 對  $n-3$  邊形  $A_1A_2 \dots \frac{A_{n-5}A_{n-3}}{2} \frac{A_{n+5}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松點  $B_1$

作 P 對  $n-3$  邊形  $A_1A_2 \dots \frac{A_{n-5}A_{n-1}}{2} \frac{A_{n+5}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松點  $B_2$

作 P 對  $n-3$  邊形  $A_1A_2 \dots \frac{A_{n-5}A_{n+1}}{2} \frac{A_{n+5}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松點  $B_3$

作 P 對  $n-3$  邊形  $A_1A_2 \dots \frac{A_{n-5}A_{n+3}}{2} \frac{A_{n+5}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松點  $B_4$

和五邊形一樣

$B_1B_2B_3B_4$  共圓 (P 對  $n-4$  邊形  $A_1A_2 \dots \frac{A_{n-5}A_{n+5}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松圓)

$B_3B_4P_3P_4$  共圓 (P 對  $n-2$  邊形  $A_1A_2 \dots \frac{A_{n-5}A_{n+1}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松圓)

$B_1B_2P_1P_2$  共圓 (P 對  $n-2$  邊形  $A_1A_2 \dots \frac{A_{n-1}A_{n+5}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松圓)

$B_2B_4P_1P_3$  共圓 (P 對  $n-2$  邊形  $A_1A_2 \dots \frac{A_{n-5}A_{n-1}A_{n+3}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松圓)

$B_1B_3P_2P_4$  共圓 (P 對  $n-2$  邊形  $A_1A_2 \dots \frac{A_{n-3}A_{n+1}A_{n+5}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松圓)

$$\angle B_1B_2B_4 = 360^\circ - (\angle B_4B_2P_1 + \angle B_1B_2P_1) = \angle P_1P_3B_4 + \angle P_1P_2B_1$$

$$\text{同理 } \angle B_1B_3B_4 = 360^\circ - (\angle B_1B_3P_4 + \angle B_4B_3P_4) = \angle P_4P_2B_1 + \angle P_4P_3B_4$$

$$\therefore \angle P_1P_3B_4 + \angle P_1P_2B_1 = \angle P_4P_2B_1 + \angle P_4P_3B_4$$

$$\Rightarrow \angle P_1P_3B_4 - \angle P_4P_3B_4 = \angle P_4P_2B_1 - \angle P_1P_2B_1$$

$$\Rightarrow \angle P_1P_2P_4 = \angle P_1P_3P_4$$

故  $P_1P_2P_3P_4$  共圓

同理 P 對  $n$  個  $n-1$  邊形的西姆松點皆共圓，故  $n$  為奇數情形得證。

### n 為偶數的證明

如圖 3-22 所示，圖中以  $n=8$  為例

$n$  邊形  $A_1A_2 \dots A_n$  中

P 對  $n-2$  邊形

$A_1A_2 \dots \frac{A_nA_{n+6}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  (即不包括  $\frac{A_{n+2}}{2}$  及  $\frac{A_{n+4}}{2}$ ) 的西姆松點  $B_1$

$A_2A_3 \dots \frac{A_{n+2}A_{n+6}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  (即不包括  $\frac{A_{n+4}}{2}$  及  $A_1$ ) 的西姆松點  $B_2$

$A_2A_3 \dots \frac{A_{n-2}A_{n+2}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  (即不包括  $\frac{A_n}{2}$  及  $A_1$ ) 的西姆松點  $B_3$

$A_1A_2 \dots \frac{A_{n-2}A_{n+4}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  (即不包括  $\frac{A_n}{2}$  及  $\frac{A_{n+2}}{2}$ ) 的西姆松點  $B_4$

$A_1A_2 \dots \frac{A_{n-2}A_{n+2}A_{n+6}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  (即不包括及 $\frac{A_n}{2}$ 及 $\frac{A_{n+4}}{2}$ ) 的西姆松點 $B_5$

$A_2A_3 \dots \frac{A_nA_{n+4}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  (即不包括 $A_1$ 及 $\frac{A_{n+2}}{2}$ ) 的西姆松點 $B_6$

若  $P$  對  $n-1$  邊形

$A_1A_2 \dots \frac{A_{n+2}A_{n+6}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松圓(圓 $\frac{C_{n+4}}{2}$ 綠)和 $A_1A_2 \dots \frac{A_{n-2}A_{n+2}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西

姆松圓(圓 $\frac{C_n}{2}$ 綠)交於 $B_5$ 和  $K$

我們需證 $A_1A_2 \dots \frac{A_{n-2}A_{n+2}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松圓(圓 $\frac{C_{n+2}}{2}$ 未畫出)亦過  $K$

即證 $B_1B_6B_4K$ 共圓

作  $P$  對 $A_2A_3 \dots \frac{A_nA_{n+6}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松圓(圓 $d_1$ 紅)和 $A_2A_3 \dots \frac{A_{n-2}A_{n+4}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的

西姆松圓(圓 $d_2$ 紅), 令其交於 $B_6$ 和  $C$ ( $C$  即為 $A_2A_3 \dots \frac{A_{n-2}A_{n+6}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松點)

$$\angle B_5KB_1 - \angle CB_6B_1 = \angle B_5B_2B_1 - \angle CB_2B_1 = \angle B_5B_2C$$

$$\text{同理 } \angle CB_6B_4 - \angle B_5KB_4 = \angle CB_3B_5$$

又 $B_2B_3B_5C$ 共圓(即 $A_2A_3 \dots \frac{A_{n-2}A_{n+2}A_{n+6}}{2} \dots A_{n-1}A_n$  的西姆松圓)

$$\therefore \angle CB_3B_5 = \angle B_5B_2C$$

$$\Rightarrow \angle B_5KB_1 - \angle CB_6B_1 = \angle CB_6B_4 - \angle B_5KB_4$$

$$\Rightarrow \angle B_1B_6B_4 = \angle B_1KB_4$$

$\therefore B_1B_6B_4K$  共圓

即 $\frac{C_{n-2}}{2}$ 亦過  $K$

同理其餘  $n-1$  邊形的西姆松圓皆過  $K$

故偶數情形得證

故由數學歸納法，定理 3-8 得證。

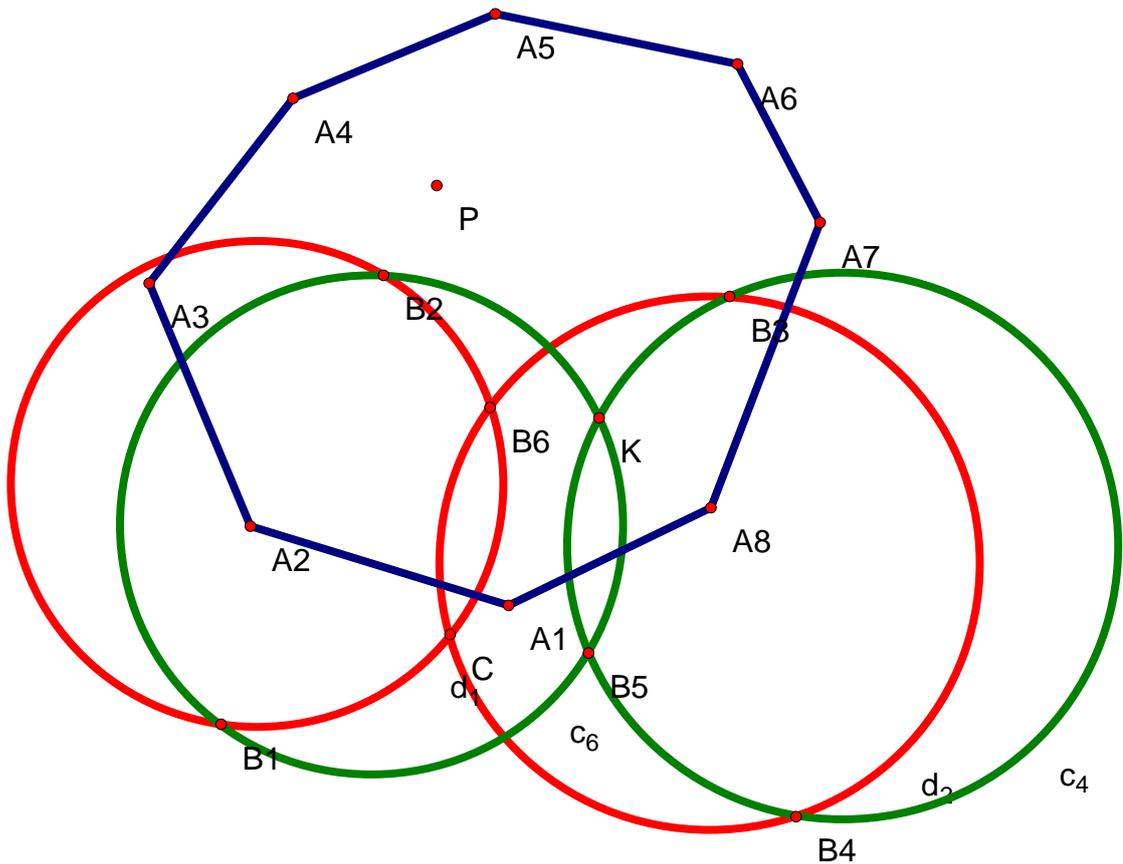


圖 3-22

## 新圓

### 引言

新圓是探討圓內接多邊形的情形，新圓也是類似西姆松圓的一種圓，但其只有在圓內接多邊形時會出現。重要性不亞於西姆松圓。

### 定理 3-9

圓內接四邊形 ABCD 及一點 P，自 P 對  $\triangle DAB$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$  作西姆松圓，圓心分別為  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$ ，則  $O_1O_2O_3O_4$  四點共圓。

[證明]

如圖 3-23 所示，只需證明  $\angle O_1O_2O_4 = \angle O_1O_3O_4$  即可說明  $O_1O_2O_3O_4$  四點共圓

令 P 在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{BC}$  上的垂足分別為 K、M、N、L、T

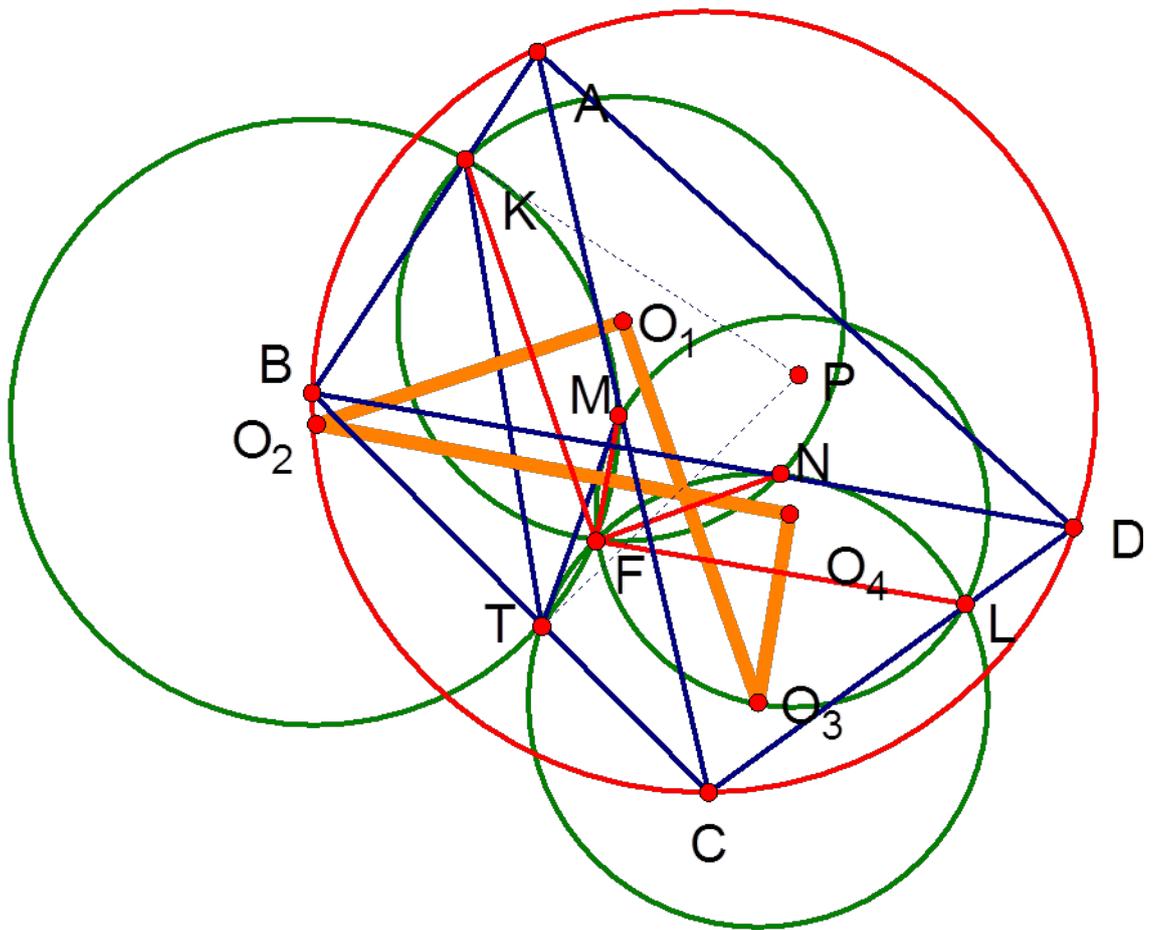


圖 3-23

由於四圓交於一點（西姆松點，令為 F）可知：

$$\angle O_1O_2O_4 = \angle KFM = \angle KTM = \angle PTK - \angle PTM$$

$$= \angle PBA - \angle PCA (\text{PTBK 共圓、PMTTC 共圓})$$

$$= \angle BPC - \angle BAC(\text{蝴蝶結})$$

$$= \angle BPC - \frac{1}{2}\widehat{BC}$$

$$\text{同理 } \angle O_1O_3O_4 = \angle BPC - \frac{1}{2}\widehat{BC}$$

$$\text{所以 } \angle O_1O_2O_4 = \angle O_1O_3O_4$$

故  $O_1O_2O_3O_4$  四點共圓。

我們稱此圓為 P 對圓內接四邊形 ABCD 的新圓。

### 定理 3-10

依定理 12 的方式可得：對任意圓內接 n 邊形都有新圓，並且以 P 對圓內接 n 邊形 n 個子 n-1 邊形的新圓共點，稱為 P 對此 n 邊形的新點。

[證明]

用數學歸納法

令對所有  $4 \leq N \leq K-1$  時 ( $N=4$  時由定理 11 知道成立)，圓內接 N 邊形  $A_1A_2 \dots A_N$  中一點 P，有

(1) P 對 N 個圓內接 N-1 邊形  $A_2A_3 \dots A_N$ 、 $A_1A_3 \dots A_N$ 、 $\dots$ 、 $A_2A_3 \dots A_{N-1}$  的新圓圓心共圓，稱為 P 對圓內接 N 邊形  $A_1A_2 \dots A_N$  的新圓。

(2) P 對 N-1 邊形  $A_2A_3 \dots A_N$ 、 $A_1A_3 \dots A_N$  的新圓圓心在 P 對 N 邊形  $A_1A_2 \dots A_N$  的新圓上所夾的圓心角為  $2(\angle A_1PA_2 - \frac{1}{2}\widehat{A_1A_2})$ 。

(3) P 對 N 個圓內接 N-1 邊形  $A_2A_3 \dots A_N$ 、 $A_1A_3 \dots A_N$ 、 $\dots$ 、 $A_2A_3 \dots A_{N-1}$  的新圓共點，稱為 P 對圓內接 N 邊形  $A_1A_2 \dots A_N$  的新點。

現在證明  $N=K$  時也成立

如圖 3-24 (以  $K=6$  為例)

令  $P$  對  $K-1$  邊形  $A_2A_3 \dots A_K$  的新圓圓心為  $B_1$

$A_1A_3A_4 \dots A_K$  的新圓圓心為  $B_2$

$A_1A_2A_4 \dots A_K$  的新圓圓心為  $B_3$

$P$  對  $K-2$  邊形  $A_1A_4 \dots A_K$  的新圓圓心為  $C_1$

$A_2A_4 \dots A_K$  的新圓圓心為  $C_2$

$A_3A_4 \dots A_K$  的新圓圓心為  $C_3$

令圓  $B_1$  和  $B_3$  交於  $C_2$  及  $Q$  (為求簡潔，直接以圓心表示圓)

由(2)得

$$\begin{aligned} \angle C_1QC_3 &= \angle C_2QC_3 + \angle C_1QC_2 = \angle A_2PA_3 - \frac{1}{2}\widehat{A_2A_3} + \angle A_1PA_2 - \frac{1}{2}\widehat{A_1A_2} \\ &= \angle A_1PA_3 - \frac{1}{2}\widehat{A_1A_3} \end{aligned}$$

故圓  $B_2$  也過  $Q$

同理其餘  $N-1$  邊形的新圓也都過  $Q$

即對  $K$  邊形 (3) 式成立

令  $A_1A_2A_3A_5 \dots A_K$  的新圓圓心為  $B_4$ ，

如圖 3-25 所示

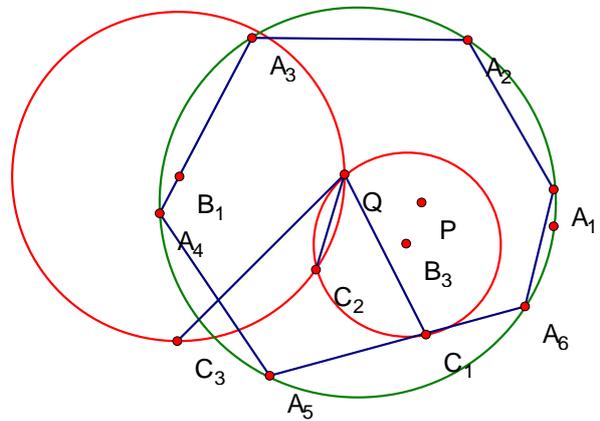


圖 3-24

$\therefore$  圓  $B_1$  和  $B_2$  交於  $C_3$ ，圓  $B_1$  和  $B_3$  交於  $C_2$

$\therefore \angle B_2B_1B_3 = \angle C_3QC_2$  ( $\because \overline{B_1B_3} \perp \overline{QC_2}$ 、 $\overline{B_1B_2} \perp \overline{QC_3}$ )

同理  $\angle B_2B_4B_3 = \angle C_3QC_2$

$$\Rightarrow \angle B_2 B_1 B_3 = \angle B_2 B_4 B_3$$

$\Rightarrow B_1 B_2 B_3 B_4$  共圓

故知任相鄰 4 個  $N-1$  邊形的新圓圓心共圓 因此

對  $K$  邊形 (1) 式成立

$$\text{又 } \angle B_2 B_1 B_3 = \angle C_3 Q C_2 = \angle A_2 P A_3 - \frac{1}{2} \widehat{A_2 A_3}$$

即(2)式也得證

故定理成立。

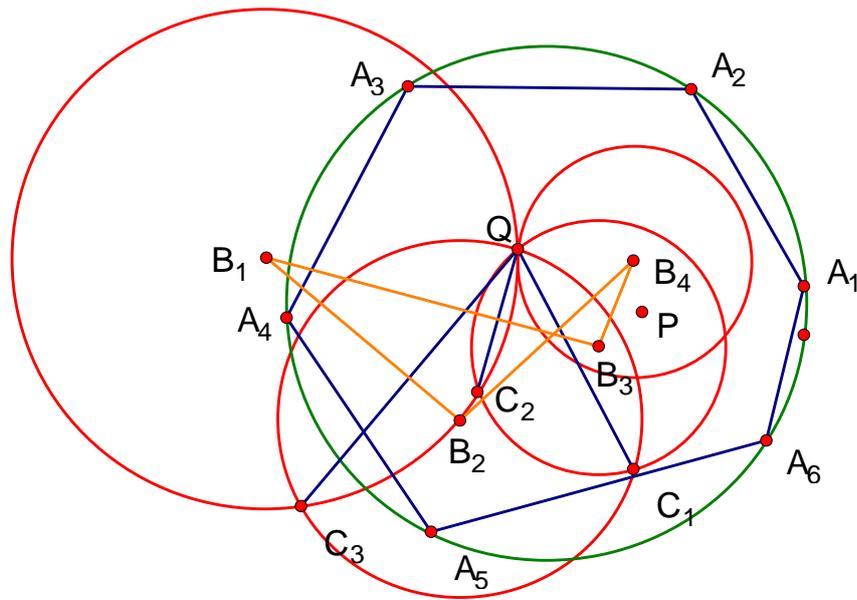


圖 3-25

#### 四、應用

我們引進西姆松圓的概念後。有些原已存在的定理、性質、問題，都可以有新的切入角度。

### 應用 1.:

如推論 2-1，我們可以將西姆松線視為西姆松圓的退化。許多西姆松線的性質將迎刃而解。

例 1.西姆松線有一個性質：取 $\triangle ABC$ 外接圓一直徑的兩端點 $P$ 、 $Q$ ，分別以 $P$ 、 $Q$ 對 $\triangle ABC$ 作西姆松線，則此兩線的交點在 $\triangle ABC$ 的九點圓上。

※說明：事實上，因為 $P$ 、 $Q$ 、外接圓圓心 $O$ 三點共線，由定理 2-5 可知 $P$ 、 $Q$ 的踏板點為同一點，故西姆松線的交點自然在 $\triangle ABC$ 的九點圓上。

例 2.西姆松線的另一個性質：圓內接四邊形 $ABCD$ ，分別以 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 向 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$ 、 $\triangle ABC$ 作西姆松線，則四線共點。

※說明：由定理 2-3，此點即為 $ABCD$ 的九點心。只是西姆松圓退化成西姆松線了。

### 應用 2.:

由於外心 $O$ 和垂心 $H$ 互為等角共軛點，九點圓可視為等角共軛點 $O$ 、 $H$ 的西姆松圓。

例 3.九點圓的性質：九點圓的圓心在尤拉線上(外心和垂心的連線)，並到外心和垂心等距。

※說明：由定理 2-1，因為外心 $O$ 和垂心 $H$ 互為等角共軛點，九點圓為 $O$ 、 $H$ 的西姆松圓，故圓心在 $O$ 、 $H$ 連線的中點上。

\*例 4.大上茂喬定理：圓內接四邊形 $ABCD$ ，分別作 $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$ 的九點圓圓心，則此四點共圓，稱為圓內接四邊形 $ABCD$ 的九點圓；圓內接五邊形 $ABCDE$ ，對圓內接四邊形 $BCDE$ 、 $CDEA$ 、 $DEAB$ 、 $EABC$ 、 $ABCD$ 作九點圓心，

則此五點共圓，稱為圓內接五邊形ABCDE的九點圓，定理可一直推下去。(見絕妙的數學家或幾何明珠)

※說明：因為三角形的九點圓為其外心 O 的西姆松圓，由定理 3-9、3-10，所以 O 對圓內接四邊形 ABCD 的新圓即為圓內接四邊形 ABCD 的九點圓，同樣推得 O 對圓內接 N 邊形的新圓即為它的九點圓。

故大上茂喬定理為定理 3-10 中 P 和 O 重合之情形。

由於圓內接四邊形 ABCD， $\triangle ABC$ ， $\triangle BCD$ ， $\triangle CDA$ ， $\triangle DAB$  的九點圓半徑相等(外接圓的 2 分之 1)又它們交於一點(新點)，所以圓內接四邊形 ABCD 的九點圓圓心就是其新點，又推得圓內接四邊形 ABCD 的九點圓半徑亦為外接圓的一半，同理推廣到圓內接 N 邊形

**應用 3.：**

**三角形之內切圓、傍切圓可視為內心、旁心知西姆松圓。**

\*例 5.著名的費爾巴哈定理：九點圓和內切圓、傍切圓都相切。

※說明：這是個很漂亮的定理，有多種證明，包括有人用反演變換漂亮的解決了這個問題(見幾何學概論)。而這裡我們引進西姆松線的概念後，也可以簡單的處理它。

顯然 $\triangle ABC$  的內心 I(或傍心)的等角共軛點就是自己本身，由推論 2-3，I 的踏板點和 ABCI 的九點心重合，即 I 的西姆松圓和 $\triangle ABC$  九點圓交到的兩點重合，也就說明了九點圓和 $\triangle ABC$  的內切圓、傍切圓均相切。

## 參、研究結果整理

### 定義 1-1

自平面一點 $P$ 對 $\triangle ABC$ 的三邊分別做垂線，得到三垂足，作此三垂足的外接圓，定義為點 $P$ 對 $\triangle ABC$ 的西姆松圓。

### 定義 1-2

平面上一點 $P$ 及 $\triangle ABC$ ( $P$ 不在直線 $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ 上)，分別作 $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 、 $\overline{PC}$ 關於 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的內角平分線 $\overline{IA}$ 、 $\overline{IB}$ 、 $\overline{IC}$ 作反射，這三條反射線必然交到一點 $Q$ ，定義 $Q$ 點為 $P$ 點的等角共軛點。

### 定理 2-1

一對等角共軛點對的西姆松圓為同一圓，其圓心為等角共軛點對連線的中點。

### 定理 2-2

平面四點 $ABCD$ 中，分別以 $A$ 、 $B$ 對 $\triangle BCD$ ， $\triangle ACD$ 作西姆松圓，則此兩圓有一交點在 $\overline{BC}$ 上。

### 推論 2-1

由定理 2-1 可以證明西姆松線

### 定理 2-3

四邊形 $ABCD$ 中，分別作 $\triangle ABC$ ， $\triangle BCD$ ， $\triangle CDA$ ， $\triangle DAB$ 的九點圓，則此4圓共點。

### 定理 2-4

平面 4 點 ABCD 中，分別以 A、B、C、D 對  $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$ 、 $\triangle ABC$  作西姆松圓，則四圓交到一點，且此點為 ABCD 的九點心。

### 定理 2-5

過  $\triangle ABC$  的外心畫一直線，則此直線上的任一點 P 作西姆松圓，必通過一定點。我們將 H 點稱為 P 的踏板點。

### 推論 2-2

若 P 對  $\triangle ABC$  的踏板點為 Q， $\triangle ABC$  的外心為 O，P 在  $\overline{AB}$  上的垂足及  $\overline{AB}$  中點分別為 H 及 M，則  $\triangle POC \sim \triangle HMQ$ 。

### 推論 2-3

$\triangle ABC$  及一對等角共軛點對 P、Q，P 的踏板點是 ABCQ 的九點心，Q 的踏板點是 ABCP 的九點心。

**定理 2-6**：四邊形 ABCD，自一點 P 對  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$  分別作西姆松圓，則此四圓共點，稱為 P 對四邊形 ABCD 的西姆松點。

**定理 3-1**：四邊形 ABCD 及一點 P，以 P 分別對  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$  作踏板點，再作 P 對 ABCD 的西姆松點以及 ABCD 的九點心，則此六點共圓。我們將上述的圓稱為：點 P 對 ABCD 的神奇圓。

### 定理 3-2

P 對四邊形 ABCD 作神奇圓的圓心 T，隨著 P 的移動，點 T 也跟著移動，但 T 點的軌跡會相似於 P 點的軌跡。

### 推論 3-1

四邊形 ABCD 及一點 P， $\triangle ABD$  及  $\triangle BCD$  外接圓圓心和 P 所構成的三角形相似於  $\triangle ABD$  和  $\triangle BCD$  的九點圓圓心和 P 對四邊形 ABCD 的神奇圓圓心所構成的三角形。

### 推論 3-2

P 對  $\triangle ABD$  及  $\triangle BCD$  的踏板點在神奇圓上圓心角為  $2\angle O_1PO_2$  ( $O_1$ 、 $O_2$  分別為  $\triangle ABD$  和  $\triangle BCD$  外心)。

### 推論 3-3

當 ABCD 為圓內接四邊形時，神奇圓會退化為一直線，我們稱之為神奇線。

### 定理 3-3

五邊形 ABCDE 及一點 P，分別以 P 對四邊形 BCDE、CDEA、DEAB、EABC、ABCD 作神奇圓，則此五圓共點，稱作 P 對五邊形 ABCDE 的神奇點。

### 定理 3-4

P 對五邊形 ABCDE 的神奇點隨 P 點移動的軌跡相似於 P 的軌跡。

### 定理 3-5

平面 4 點 ABCD 中，分別以 A、B、C、D 對  $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$ 、 $\triangle ABC$  作西姆松圓，則四圓圓心構成的四邊形和 ABCD 相似。

### 定理 3-6

四邊形 ABCD 中，分別作  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$  的九點圓的圓心，取其圓心構成之四邊形再作一次，得新的四邊形，則此四邊形和 ABCD 相似。

### 定理 3-7

五邊形  $ABCDE$  中，分別以  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  對四邊形  $BCDE$ 、 $CDEA$ 、 $DEAB$ 、 $EABC$ 、 $ABCD$  作西姆松點，則此五點形成的五邊形相似於五邊形  $ABCDE$ 。

### 定理 3-8

五邊形  $ABCDE$  及點  $P$ ，以  $P$  分別對四邊形  $ABCD$ 、 $BCDE$ 、 $CDEA$ 、 $DEAB$ 、 $EABC$  作西姆松點，則此五點共圓，稱為點  $P$  對  $ABCDE$  得西姆松圓。

依同法可得：若  $n$  為偶數， $P$  對  $n$  邊形有西姆松點。

若  $n$  為奇數， $P$  對  $n$  邊形有西姆松圓。

### 定理 3-9

圓內接四邊形  $ABCD$  及一點  $P$ ，自  $P$  對  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$  作西姆松圓，圓心分別為  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$ ，則  $O_1O_2O_3O_4$  四點共圓。稱此圓為  $P$  對圓內接四邊形  $ABCD$  的新圓。

### 定理 3-10

依定理 12 的方式可得 對任意圓內接  $n$  邊形都有新圓，並且以  $P$  對圓內接  $n$  邊形  $n$  個子  $n-1$  邊形的新圓共點，稱為  $P$  對此  $n$  邊形的新點。

## 肆、未來展望

1. 在圓內接  $N$  邊形中，研究西姆松圓(點)和新圓、新點的關係。
2. 神奇圓(點)是否有  $N$  邊形的推廣方式？
3. 推廣到立體中：若自空間中一點對四面體的每個面作 4 個垂足，並作四個垂足的外接球。是否有類似於西姆松圓的性質？推廣到球面上呢？

## 伍、參考資料

### (一)網路資源

1. 絕妙的數學家

網址 [http://www.math.sinica.edu.tw/math\\_media/d163/16306.pdf](http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d163/16306.pdf)

2. [Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles](#)

網址 <http://www.cut-the-knot.org/>

<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/FourNPCircles.shtml#fewwords>

### (二)書籍

1. [L. I. Golovina, I. M. Yaglom](#)著 李冬梅、白世忠譯 幾何學中的歸納法 初版 臺灣九章 2002 年

2. 趙文敏 幾何學概論 二版 台灣 九章 P.160~162 1988 年

3. 黃家禮 幾何明珠 一版 台灣 九章 P.150~156、P.204~212 2000 年

4. J. L. Coolidge, *A Treatise On the Circle and the Sphere*, AMS - Chelsea Publishing, 1971

## 陸、附錄

### 附錄一

平面上一點 $P$ 及 $\triangle ABC$ ( $P$ 不在直線 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 上)，分別作 $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ 關於 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的內角平分線 $\overline{IA}, \overline{IB}, \overline{IC}$ 作反射，這三條反射線必然交到一點 $Q$ ，定義 $Q$ 點為 $P$ 點的等角共軛點。

[證明]

先作 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 關於 $\overline{IA}, \overline{IB}$ 的反射線交於 $Q$ ，由於兩條線交一點， $Q$ 點被唯一確定。這時 $\angle PAB = \angle QAC, \angle PBC = \angle QBA$

連 $\overline{QC}$ ，由西瓦定理得

$$\sin \angle PAB \sin \angle PBC \sin \angle PCA = \sin \angle PAC \sin \angle PBA \sin \angle PCB$$

$$\sin \angle QAC \sin \angle QBA \sin \angle QCB = \sin \angle QAB \sin \angle QBC \sin \angle QCA$$

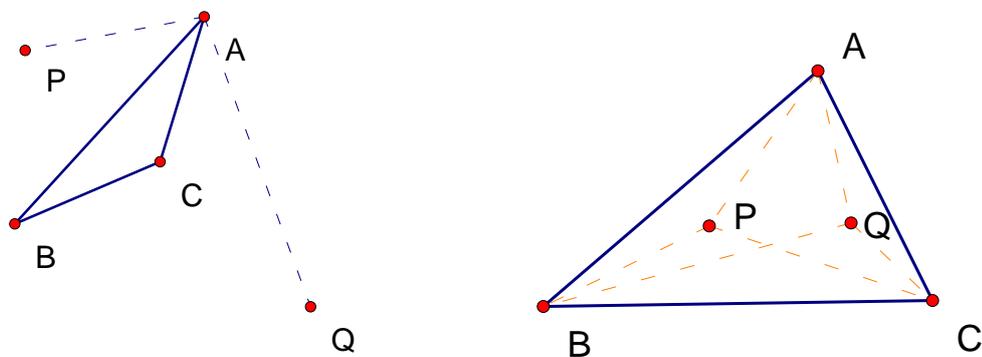
$$\text{又 } \angle PAB = \angle QAC, \angle PBC = \angle QBA \text{ (以及 } \angle PAC = \angle QAB, \angle PBA = \angle QBC \text{)}$$

$$\therefore \frac{\angle PCA}{\angle PCB} = \frac{\angle QCB}{\angle QCA}$$

$$\Rightarrow \angle PCA = \angle QCB$$

$$\Rightarrow \angle PCI = \angle QCI$$

故 $\overline{PC}$ 和 $\overline{QC}$ 也關於 $\overline{IC}$ 對稱，故得證。



## 評語

本研究是針對西姆松「圓」的專門研究，只運用基本幾何的方法，深入探討西姆松「圓」的性質，發現了不少結果，而且範圍頗廣，值得鼓勵。建議日後研究可考慮深入探討西姆松點與三角形內各「心」之間的關係。建議研究者對文字說明小心進行檢查，在精確度方面仍有可改善的空間，在符號方面亦宜小心檢查。

# 2011 年臺灣國際科學展覽會

## 優勝作品專輯

編號：010007

### 作品名稱

**How to Discover Infinitely Many Theorems Related to  
the Pedal Circles?**

### 得獎獎項

三等獎

美國正選代表：美國第 62 屆國際科技展覽會

### 作者姓名

**Wayne Liao**

## Abstract

Given a point and a triangle, the pedal circle is the unique circle determined by the perpendicular feet from the point to three sides.

By using the dynamic geometry software GSP, we have discovered chains of infinitely many theorems of the pedal circle:

Chain 1: For a point and a quadrilateral, the four pedal circles, formed by omitting each vertex in turn, are concurrent in a point, named the pedal point. For a point and a pentagon, the five pedal points similarly formed, are concyclic, named the pedal circle. This process can be extended repeatedly.

Chain 2: Given a point and a cyclic quadrilateral, the centers of the four pedal circles so formed, lie on a circle  $CP(3; 4)$ . Given a point and a cyclic pentagon, the five centers of the corresponding circles  $CP(3; 4)$ , formed by omitting each vertex in turn, lie on a circle  $CP(3; 5)$ . This process can be extended repeatedly.

Chain 3: Given a point and a cyclic hexagon, the centers of the six pedal circles (with respect to pentagon) so formed, lie on a circle  $CP(5; 6)$ . Given a point and a cyclic heptagon, the seven centers of the corresponding circles  $CP(5; 6)$ , lie on a circle  $CP(3; 7)$ . This process can be extended repeatedly.

Chain  $n$ : Established by repeating the process above by starting with cyclic  $(2n)$ -polygon.

## Notations

1.  $PC(n)$ : The pedal circle of a point with respect to an  $n$ -polygon. ( $n$  is odd and  $n \geq 3$ )
2.  $PP(n)$ : The pedal point of a point with respect to an  $n$ -polygon.  
( $n$  is even and  $n \geq 4$ )
3.  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_n)$ : The pedal circle of point  $P$  with respect to the  $n$ -polygon  $A_1A_2 \dots A_n$ .
4.  $PP(P; A_1, A_2, \dots, A_n)$ : The pedal point of point  $P$  with respect to the  $n$ -polygon  $A_1A_2 \dots A_n$ .
5.  $CP(m; n)$ : The pedal circle started from the pedal circle of  $m$ -polygon, of a point with respect to a cyclic  $n$ -polygon.

## Main Results

### Chain 1: The Chain of Pedal Circles and Pedal Points (Fig. 1)

First, let “ $PC(3)$ ” denotes the pedal circle of a point with respect to a triangle.

Let  $P$  be a given point in the plane.

Considered  $P$  and a quadrilateral, then the four corresponding circles  $PC(3)$ , formed by omitting each vertex in turn, are concurrent in a single point  $PP(4)$  (named the pedal point).

Considered  $P$  and a pentagon, then the five corresponding point  $PP(4)$  of  $P$  are concyclic on a circle  $PC(5)$  (named the pedal circle).

...

In general, when a  $2n$ -polygon is given, then the  $2n$  corresponding circles  $PC(2n - 1)$  of  $P$  are concurrent in a single point  $PP(2n)$ .

When a  $(2n + 1)$ -polygon is given, then the  $2n + 1$  corresponding  $PP(2n)$  of  $P$  are concyclic on a circle  $PC(2n + 1)$ .

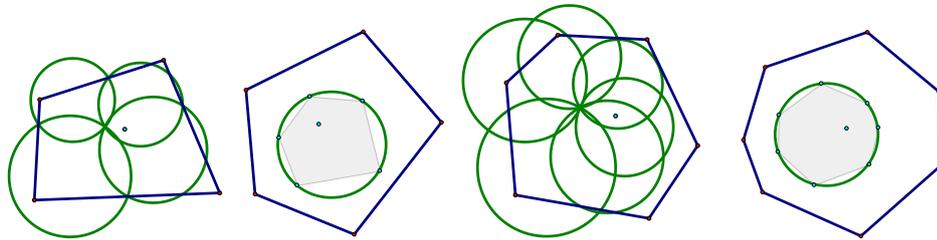


Fig. 1 Chain 1

### Chain 2: Pedal Circles Started From a Triangle (Fig. 2)

Let  $P$  be a given point in the plane.

Considered  $P$  and a cyclic quadrilateral, the centers of the four corresponding circles  $PC(3)$  of  $P$  are concyclic on a circle  $CP(3,4)$ .

Considered  $P$  and a cyclic pentagon, the centers of the five corresponding circles  $CP(3,4)$  of  $P$  are concyclic on a circle  $CP(3,5)$ .

...

In general, given a cyclic  $n$ -polygon ( $n \geq 5$ ), then the  $n$  corresponding circles  $CP(3, n - 1)$  of  $P$  are concyclic on a circle  $CP(3, n)$ .

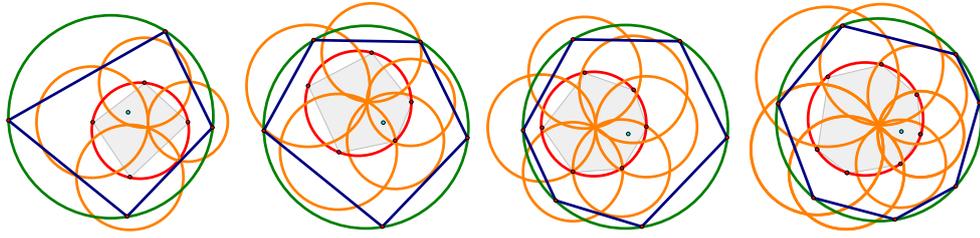


Fig. 2 Chain 2

### Chain 3: Pedal Circles Started From a Pentagon (Fig. 3)

Considered a point  $P$  and a cyclic hexagon, the centers of the six corresponding circles  $PC(5)$  of  $P$  are concyclic on a circle  $CP(5,6)$ .

Considered  $P$  and a cyclic heptagon, the centers of the seven corresponding circles  $CP(5,6)$  of  $P$  are concyclic on a circle  $CP(5,7)$ .

...

In general, given a cyclic  $n$ -polygon ( $n \geq 7$ ), then the  $n$  corresponding circles  $CP(5, n - 1)$  of  $P$  are concyclic on a circle  $CP(5, n)$ .

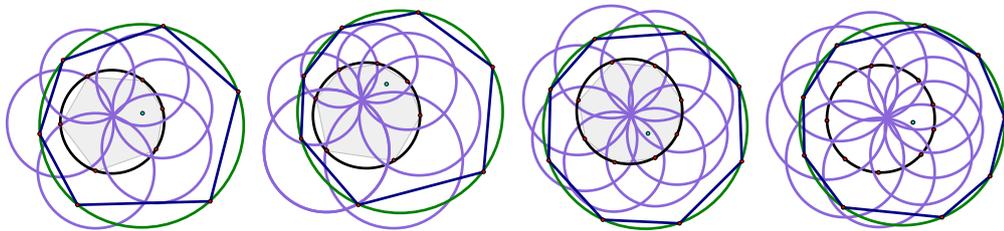


Fig. 3 Chain 3

...

### Chain $M$ : Pedal Circles Started From a $M$ -polygon

Let  $P$  be a given point in the plane.

Considered  $P$  and a cyclic  $2M$ -polygon, the centers of the  $2M$  corresponding circles  $PC(2M - 1)$  of  $P$  are concyclic on a circle  $PC(2M - 1, 2M)$ .

...

In general, given a cyclic  $n$ -polygon ( $n \geq 2M + 1$ ), then the  $n$  corresponding

circles  $PC(2M - 1, n - 1)$  are concyclic in a circle  $PC(2M - 1, n)$ .

Triangle	$PC(3)$	*	*	*	*	*	*	*
4-polygon	$CP(3,4)$	$PP(4)$	*	*	*	*	*	*
5-polygon	$CP(3,5)$	*	$PC(5)$	*	*	*	*	*
6-polygon	$CP(3,6)$	*	$CP(5,6)$	$PP(6)$	*	*	*	*
7-polygon	$CP(3,7)$	*	$CP(5,7)$	*	$PC(7)$	*	*	*
8-polygon	$CP(3,8)$	*	$CP(5,8)$	*	$CP(7,8)$	$PP(8)$	*	*
9-polygon	$CP(3,9)$	*	$CP(5,9)$	*	$CP(7,9)$	*	$PC(9)$	*
⋮	⋮	*	⋮	*	⋮	*	⋮	⋮

Fig. 4 Chain of chains \* = Undefined

# Sketch of Proof

## I. Chain 1

Let a point  $P$  and a quadrilateral  $ABCD$  be given in the plane. Construct four circles with diameters  $PA, PB, PC, PD$  respectively. Updating the perspective, let us rename the circles to be  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Let point  $H_{ij}$  be the intersection of  $C_i$  and  $C_j$  other than  $P$ .

Now the circle  $PC(3)$  is the circumcircle of  $H_{ij}, H_{jk}, H_{ki}$ . For example,  $PC(P; A, B, C)$  is the circumcircle of  $H_{12}, H_{23}, H_{31}$ . (Fig. 5)

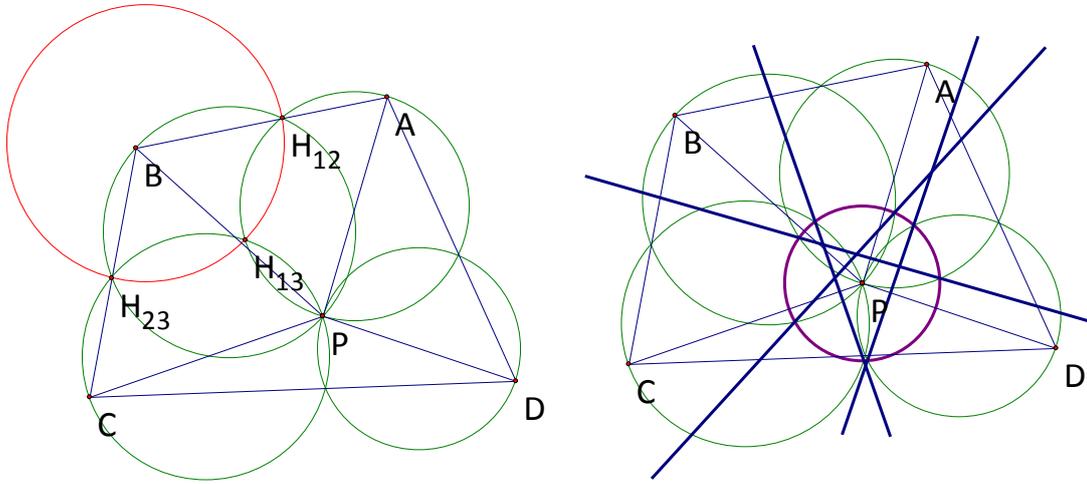


Fig.5

Fix a circle  $k$  with the center  $P$ . Take the inversion with respect to  $k$ . Then circles  $PC(P; A, B, C), PC(P; B, C, D), PC(P; C, D, A), PC(P; D, A, B)$  are transformed to circle to circles  $IC(P; A, B, C), IC(P; B, C, D), IC(P; C, D, A), IC(P; D, A, B)$  respectively, and circle  $C_i$  is transformed to line  $L_i$ . (Fig. 5)

Since  $IC(P; A, B, C), IC(P; B, C, D), IC(P; C, D, A), IC(P; D, A, B)$  are the circumcircle of the triangle enclosed by  $L_1, L_2, L_3, L_4$ , formed by omitting each line in turn, it follows from the Clifford Chain Theorem [4] that they concur at the point  $IP(P; A, B, C, D)$ . (Fig. 6)

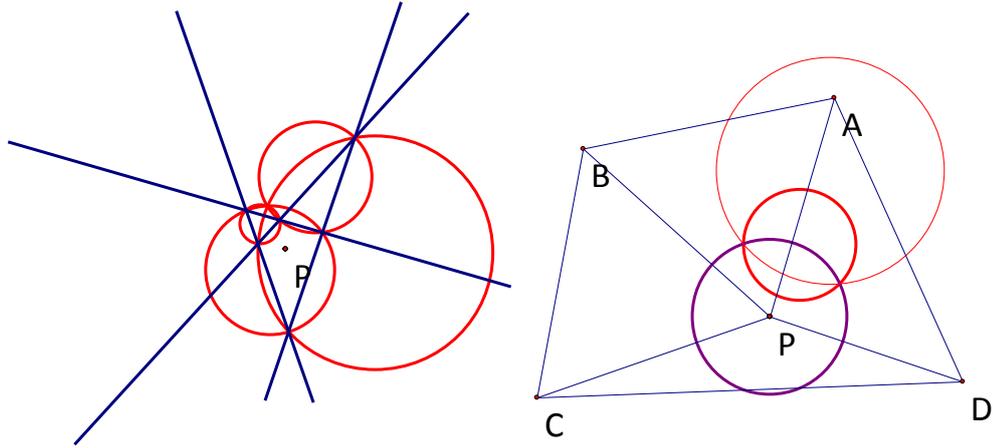


Fig. 6

Let a point  $P$  and a pentagon  $ABCDE$  be given, we similarly invert the five corresponding points  $PP(4)$  of  $P$  into five points  $IP(P; A, B, C, D)$ ,  $IP(P; E, B, C, D)$ ,  $IP(P; A, E, C, D)$ ,  $IP(P; A, B, E, D)$ ,  $IP(P; A, B, C, E)$ . Base on Clifford Chain Theorems [4], the five points are concyclic, so are the five corresponding points  $PP(4)$ .

## Dictionary

We have discovered a dictionary to translate Clifford's results into our results!

We are standing on the shoulder of a giant, William Kingdom Clifford. This dictionary is engineered by inversion.

## II. Chain of Chains

Lemma1: The radius of the pedal circle is equal to:

$$PA \times PB \times PC / |R^2 - d^2|.$$

( $R$  is the radius of the circumcircle and  $d$  is the distant between  $P$  and the circumcenter.)

Lemma2: Given a quadrilateral  $ABCD$  and a point  $P$ , let the centers of pedal circles of  $P$  with respect to the triangles  $ABC$  and  $DBC$  be  $C_A, C_D$  and the perpendicular foot from  $P$  to side  $BC$  be  $H$ . We have that:

$$\angle APD = \angle C_A H C_D.$$

Lemma3: The pedal triangle of  $P$  with respect to triangle  $ABC$  is similar to the triangle formed by the intersections, other than  $A, B, C$ , of line  $AP, BP, CP$  with respect

to the circumcircle.

### First step

To prove the chain of chains, we first need to show that the centers of circles  $PC(2n + 1)$  are concyclic. ( $n \in \mathbb{N}$ )

Consider a point  $P$  and a circle with some given points  $A_1, A_2, \dots$  on the circumference. Let  $A'_1, A'_2, \dots$  be other points on the circle such that  $A_i, P, A'_i$  are collinear. For any other points  $B_1, B_2, \dots, B_m$  belong to the circle, we have that:

$$n \in \mathbb{N}.$$

Consider the cyclic  $2n$ -polygon  $A_1A_2 \dots A_{2n}$ :

The polygon formed by  $PP(P; A_1, A_2, \dots, A_{2n})$  and the centers of  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_{2n}, B_i)$  is similar to the polygon formed by  $P$  and  $B_i$ .

(When  $n=1$ , let  $PP(P; A_1, A_2)$  be the perpendicular foot from  $P$  to  $A_1A_2$ )

Consider the cyclic  $(2n+1)$ -polygon  $A_1A_2 \dots A_{2n+1}$ , we have:

The polygon formed by  $PP(P; A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}, B_i)$  is similar to the polygon  $B_1B_2 \dots B_m$ .

Consider the cyclic  $(2n+2)$ -polygon  $A_1A_2 \dots A_{2n+2}$ :

The polygon formed by  $PP(P; A_1, A_2, \dots, A_{2n+2})$  and the corresponding centers of  $PC(2n + 1)$  is similar to polygon  $PA'_1A'_2 \dots A'_{2n+2}$ .

Consider the cyclic  $(2n+3)$ -polygon  $A_1A_2 \dots A_{2n+3}$ , we have:

The polygon formed by the corresponding points  $PP(2n + 2)$  is similar to the polygon  $A'_1A'_2 \dots A'_{2n+3}$ .

Proof

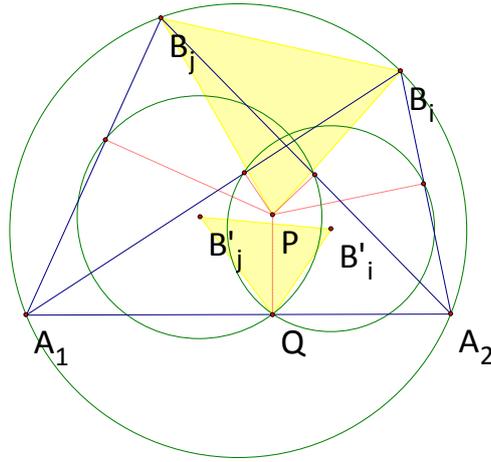


Fig. 7

(1)  $n=1$ :

- (a) (Fig. 7) Let  $Q$  be the perpendicular foot from  $P$  to  $A_1A_2$ , and  $B_i$  be the center of  $PC(P; A_1, A_2, B_i)$ . We want to show that:

$$QB_1B_2 \dots B_m \sim PB_1B_2 \dots B_m.$$

Consider two points  $B_i, B_j$ . Since  $PC(P; A_1, A_2, B_i)$  and  $PC(P; A_1, A_2, B_j)$  both pass through  $Q$ , by lemma1 and lemma2, we can easily obtain that:

$$\Delta QB_iB_j \sim \Delta PB_iB_j.$$

Therefore,  $PB_1B_2 \dots B_m \sim QB_1B_2 \dots B_m$ .

(b) (Fig. 8) Let:

- $B_i$  be the point  $PP(P; A_1, A_2, A_3, B_i)$ ;
- $C_i$  be the center of  $PC(P; A_1, A_2, B_i)$ ;
- $R$  be the center of  $PC(P; A_1, A_2, A_3)$ ;
- $Q$  be the perpendicular foot from  $P$  to  $A_1A_2$ .

We are now to show that:

$$B_1B_2 \dots B_m \sim B_1B_2 \dots B_m.$$

Consider two points  $B_i, B_j$ , we have:

$$C_iR \perp B_iQ;$$

$$C_j R \perp B_j Q.$$

Therefore:

$$\angle B_i Q B_j = 180 - \angle C_i Q C_j.$$

By (a) we have:

$$\Delta C_i Q C_j \sim \Delta B_i A_3 B_j.$$

Hence, we have that the confederal angle of  $B_i, B_j$  with respect to  $PC(P; A_1, A_2, A_3)$  is equal to that of  $B_i, B_j$  with respect to the original circle, which indicates that result:

$$B_1 B_2 \dots B_m \sim B_1 B_2 \dots B_m.$$

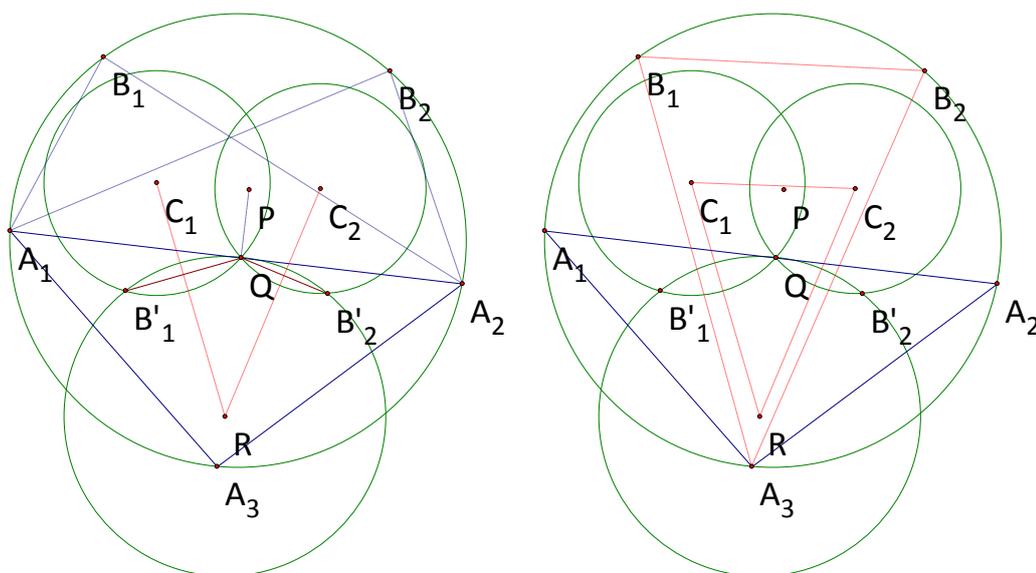


Fig. 8

(c) (Fig. 9) Let:

- $C_i$  be the center of  $PC(3)$  formed by omitting the vertex  $A_i$ ;
- $R$  be the point  $PP(P; A_1, A_2, A_3, A_4)$ ;
- $Q$  be the perpendicular foot from  $P$  to  $A_1 A_2$ ;

We want to show that:

$$\Delta R C_1 C_2 C_3 C_4 \sim \Delta P A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Since  $R$  and  $Q$  are the two common points of  $PC(P; A_1, A_2, A_3)$  and  $PC(P; A_1, A_2, A_4)$ , we can see that  $R$  is the reflection of  $Q$  with respect to line  $C_3C_4$ . Thus:

$$\Delta RC_3C_4 \cong \Delta QC_3C_4.$$

On the other hand, from (a) we have:

$$\Delta QC_3C_4 \sim \Delta PA_4A_3.$$

But,

$$\Delta PA_4A_3 \sim \Delta PA_3A_4.$$

Thus  $\Delta RC_3C_4 \sim \Delta PA_3A_4$ , therefore, similarly we have:

$$\Delta RC_1C_2C_3C_4 \sim \Delta PA_1A_2A_3A_4.$$

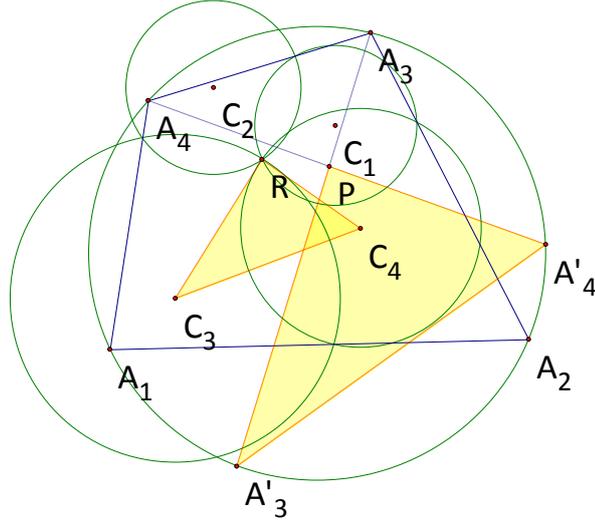


Fig. 9

- (d) (Fig. 10) Let  $C_i$  be the  $PP(4)$  formed by omitting the vertex  $A_i$ . We are going to show that:

$$C_1C_2C_3C_4C_5 \sim A_1A_2A_3A_4A_5.$$

Let  $D_i$  ( $i = 3,4,5$ ) be the center of  $PC(P; A_1, A_2, A_i)$ , and  $Q$  be the perpendicular foot from  $P$  to  $A_1A_2$ .

Since  $Q$  and  $C_5$  are two common points of  $PC(P; A_1, A_2, A_3)$  and  $PC(P; A_1, A_2, A_4)$ , therefore:

- $C_5$  is the reflection of  $Q$  with respect to the line  $D_3D_4$ .

Similarly,

- $C_4$  is the reflection of  $Q$  with respect to the line  $D_3D_5$ .
- $C_3$  is the reflection of  $Q$  with respect to the line  $D_4D_5$ .

On the other hand, from (a) we have:

$$QD_3D_4D_5 \sim PA_3A_4A_5.$$

By lemma3, we can see that the triangle  $C_3C_4C_5$  is similar to triangle  $A_3A_4A_5$ . Therefore,

$$C_1C_2C_3C_4C_5 \sim A_1A_2A_3A_4A_5.$$

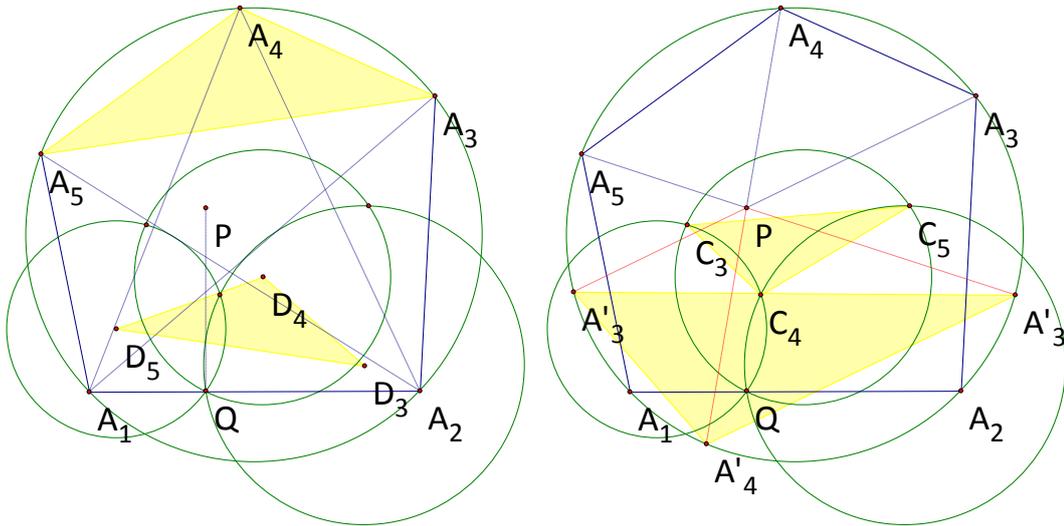


Fig. 10

(2) Suppose when  $n \leq k$ , (a), (b), (c), (d) are correct. Then we are going to prove that when  $n=k+1$ , they are also correct.

(a) Let:

- $Q$  be the point  $PP(P; A_1A_2 \dots A_{2k+2})$ ;
- $R$  be the center of  $PC(P; A_1A_2 \dots A_{2k+1})$ ;
- $B_i$  be the center of  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+2}, B_i)$ ;

- $O$  be the center of the center of original circle.

We want to show that:

$$PB_1B_2 \dots B_m \sim QB_1B_2 \dots B_m.$$

Consider a point  $B_i$ . Let  $T$  be the point  $PP(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+1}, B_i)$ .

Since  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+2}, B_i)$  and  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+1})$  meet at  $Q$  and  $T$ , we have:

$$\angle RB_iQ = \frac{1}{2} \angle TB_iQ;$$

$$\angle B_iRQ = \frac{1}{2} \angle TRQ;$$

On the other hand, by (b) and (d), we have:

$$\angle TB_iQ = 2\angle B_iPA_4 - \angle B_iOA_4;$$

$$\angle TRQ = \angle B_iOA_4.$$

Thus:

$$\angle RB_iQ = \frac{1}{2} \angle TB_iQ = \angle B_iPA_4 - \angle B_iA_4A_4 = \angle B_iA_4A_4;$$

$$\angle B_iRQ = \frac{1}{2} \angle TRQ = \angle B_iA_4A_4.$$

Hence:

$$\Delta \angle B_iRQ \sim \Delta B_iA_4P(AA).$$

Similarly for other point  $B_j$ :

$$\Delta \angle B_jRQ \sim \Delta B_jA_4P(AA).$$

Therefore we have:

$$\Delta \angle B_iQB_j \sim \Delta B_iPB_j.$$

It indicates our result:

$$\angle QB_1B_2 \dots B_m \sim \angle PB_1B_2 \dots B_m.$$

(b) Let:

- $B_i$  be the point  $PP(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+3}, B_i)$ ;

- $C_i$  be the center of  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+2}, B_i)$ ;
- $R$  be the center of  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+3})$ ;
- $Q$  be the  $PP(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+2})$ .

We are now to show that:

$$B_1 B_2 \dots B_m \sim B_1 B_2 \dots B_m.$$

Consider two points  $B_i, B_j$ , we have:

$$C_i R \perp B_i Q;$$

$$C_j R \perp B_j Q.$$

Therefore:

$$\angle B_i Q B_j = 180 - \angle C_i Q C_j.$$

By (a) we have:

$$\Delta C_i Q C_j \sim \Delta B_i A_{2k+3} B_j.$$

Hence, we have that the conferential angle of  $B_i, B_j$  with respect to  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+3})$  is equal to that of  $B_i, B_j$  with respect to the original circle, which indicates that result:

$$B_1 B_2 \dots B_m \sim B_1 B_2 \dots B_m.$$

(c) Let:

- $C_i$  be the center of  $PC(2k + 3)$  formed by omitting the vertex  $A_i$ ;
- $R$  be the point  $PP(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+4})$ ;
- $Q$  be the point  $PP(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+2})$ ;

We want to show that:

$$\Delta R C_1 C_2 \dots C_{2k+4} \sim \Delta P A_1 A_2 \dots A_{2k+4}.$$

Since  $R$  and  $Q$  are the two common points of circles  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+3})$  and  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+4})$ , we can see that  $R$  is the reflection of  $Q$  with respect to line  $C_3 C_4$ . Thus:

$$\Delta R C_{2k+3} C_{2k+4} \cong \Delta Q C_{2k+3} C_{2k+4}.$$

On the other hand, from (a) we have:

$$\Delta QC_{2k+3}C_{2k+4} \sim \Delta PA_{2k+4}A_{2k+3}.$$

But,

$$\Delta PA_{2k+4}A_{2k+3} \sim \Delta PA_{2k+3}A_{2k+4}.$$

Thus  $\Delta RC_{2k+3}C_{2k+4} \sim \Delta PA_{2k+3}A_{2k+4}$ , therefore, similarly we have:

$$\Delta RC_1C_2 \dots C_{2k+4} \sim \Delta PA_1A_2 \dots A_{2k+4}.$$

(d) Let  $C_i$  be the  $PP(2k+4)$  formed by omitting the vertex  $A_i$ . We are going to show that:

$$C_1C_2 \dots C_{2k+5} \sim A_1A_2 \dots A_{2k+5}.$$

Let  $D_i$  ( $i = 2k+3, 2k+4, 2k+5$ ) be the center of  $PC(P; A_1, A_2 \dots A_{2k+2}, A_i)$ , and  $Q$  be the point  $PP(P; A_1, A_2 \dots A_{2k+2})$ .

Since  $Q$  and  $C_{2k+5}$  are two common points of circle  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+3})$  and  $PC(P; A_1, A_2, \dots, A_{2k+4})$ , therefore:

- $C_{2k+5}$  is the reflection of  $Q$  with respect to line  $D_{2k+3}D_{2k+4}$ .

Similarly,

- $C_{2k+4}$  is the reflection of  $Q$  with respect to line  $D_{2k+3}D_{2k+5}$ .
- $C_{2k+3}$  is the reflection of  $Q$  with respect to line  $D_{2k+4}D_{2k+5}$ .

On the other hand, from (a) we have:

$$QD_{2k+3}D_{2k+4}D_{2k+5} \sim PA_{2k+3}A_{2k+4}A_{2k+5}.$$

By lemma3, we can see that the triangle  $C_{2k+3}C_{2k+4}C_{2k+5}$  is similar to triangle  $A_{2k+3}A_{2k+4}A_{2k+5}$ . Therefore,

$$C_1C_2 \dots C_{2k+5} \sim A_1A_2 \dots A_{2k+5}.$$

(3) By mathematical induction, our results have been proved.

So now, by (b), we have:

The polygon formed by  $PP(P; A_1, A_2, \dots, A_{2n+2})$  and the corresponding centers of  $PC(2n+1)$  is similar to polygon  $PA_1A_2 \dots A_{2n+2}$ .

Since  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+2}$  lie on a circle, we can easily deduct that the corresponding centers of  $PC(2n + 1)$  are also concyclic (on the circle  $CP(2n + 1, 2n + 2)$ ).

## Second Step

We are now going to show that for any positive integer  $t \geq 2n + 1$ , the centers of the corresponding circle  $CP(2n + 1, t)$  are concyclic. (Let  $CP(2n + 1, 2n + 1)$  be the circle  $PC(2n + 1)$ ).

Consider a point P and a circle with points  $A_1, A_2, \dots, A_{t+2}$  on the circumference. Let  $A_1, A_2, \dots, A_{t+2}$  be other points on the circle such that  $A_i, P, A_{i+2}$  are collinear. We have that:

- I. The polygon formed by the centers of the corresponding circles  $CP(2n + 1, t)$  is similar to the polygon  $A_1A_2 \dots A_{t+1}$ .
- II. The centers of the corresponding circles  $CP(2n + 1, t)$  are concyclic on the circle  $CP(2n + 1, t + 1)$ .
- III. The corresponding circles  $CP(2n + 1, t + 1)$  are concurrent at a point.

Proof

(1)  $t = 2n + 1$

- I. By (b), we have:

The polygon formed by the corresponding centers of  $PC(2n + 1)$  is similar to polygon  $A_1A_2 \dots A_{2n+2}$ .

- II. Since  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+2}$  lie on a circle, we can easily deduct that the corresponding centers of  $PC(2n + 1)$  are also concyclic (on the circle  $CP(2n + 1, 2n + 2)$ ).

- III. The corresponding circles  $PC(2n + 1)$  have on point in common, the  $PP(2n + 2)$ .

(2) Suppose when  $t \leq k$ , I, II, and III are correct, we are going to show that when  $t = k + 1$ , they are also correct.

Considered polygon  $A_1, A_2, \dots, A_{k+2}$ , let:

- $B_i$  be the center of the circle  $CP(2n + 1, k + 1)$  formed by omitting the vertex  $A_i$ ;
- $C_{ij}$  be the center of the circle  $CP(2n + 1, k)$  formed by omitting the vertices  $A_i, A_j$ ;
- $Q$  be the common point of the corresponding circles  $CP(2n + 1, k + 1)$

I. We want to show that:

$$B_1 B_2 \dots B_{k+2} \sim A_1 A_2 \dots A_{k+2}$$

Considered any three points  $B_i, B_j, B_m$ , since:

$$B_i B_m \perp QC_{im};$$

$$B_j B_m \perp QC_{jm};$$

hence,

$$\angle B_i B_m B_j = \angle C_{im} Q C_{jm}.$$

On the other hand, due to I. because  $\angle C_{im} Q C_{jm}$  is the circumferential angle, we have:

$$\angle C_{im} Q C_{jm} = \angle A_i A_m A_j.$$

Similarly,

$$\angle B_m B_i B_j = \angle A_m A_i A_j.$$

$$\angle B_m B_j B_i = \angle A_m A_j A_i.$$

Therefore the triangle  $B_i B_m B_j$  is similar to  $A_i A_m A_j$ , which indicate our result:

$$B_1 B_2 \dots B_{k+2} \sim A_1 A_2 \dots A_{k+2}.$$

- II. Since  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+2}$  lie on a circle, we can easily deduct that the corresponding centers of  $CP(2n + 1, k + 1)$  are also concyclic on the circle  $CP(2n + 1, k + 2)$ .
- III. Considered  $A_1, A_2, \dots, A_{k+3}$ , let  $D_{ij}$  be the  $CP(2n + 1, k + 1)$  formed by omitting the vertices  $A_i A_j$ . Let  $Q$  be the common point of the

two circles  $CP(2n + 1, k + 2)$ , formed by omitting the vertices  $A_1, A_3$  respectively. By I., we have:

$$\angle D_{12}QD_{23} = \angle D_{12}QD_{13} + \angle D_{13}QD_{23} = \angle A_1A_2A_3.$$

Therefore, the circle  $CP(2n + 1, k + 2)$  formed by omitting the vertex  $A_2$  also passes through Q. Hence Q is the common point of the corresponding circles  $CP(2n + 1, k + 2)$ .

(3) By mathematical induction, the chain of chains has been proved.

## Application

Suppose five people share a secret locked in a box. The box will open when five passwords are correctly entered.

Now here, each password takes the form of a point. The box will be unlocked when the key circle  $PC(5)$  is computed from the coordinate five passwords points.

As shown with the GSP experiment, if one of the five password is incorrect, then the  $PC(5)$  so constructed will not be able to unlock the box.

As the number of people gets larger, based on the new discovered chains, the secret can also be locked in the box.

## Literature Review

### a. The Simson Line:

William Wallace discovered in 1799 that if a point belongs to the circumcircle of a given triangle, then the three perpendicular feet from the point to three sides are concyclic. This line is commonly known as, however, the Simson line.

On the other words, when a point lies on the circumcircle, then its pedal circle becomes a right line, i.e. the Simson line.

### b. The Clifford Chain:

Given four straight lines in a plane, the circumcircles of the four triangles, formed by omitting each vertex in turn, are concurrent in a point  $P_4$ .

Given five straight lines in a plane, we obtained (formed by omitting each vertex in turn) five corresponding points  $P_4$ , and these lie on a circle  $C_5$ .

Given six straight lines in a plane, we obtained (formed by omitting each vertex in turn) six corresponding circles  $C_5$ , and these are concurrent in a point  $P_4$ .

Generally:

Given  $n$  coplanar lines in a plane ( $n$  even and greater than 3), we obtained  $n$  corresponding circles  $C_{n-1}$ , and these are concurrent in a point  $P_n$ , and

Given  $n$  coplanar lines in a plane ( $n$  odd and greater than 3), we obtained  $n$  corresponding points  $P_{n-1}$ , and these lie on a circle  $C_n$ .

## References

- [1] J. L. Coolidge, “A Treatise on the Circle and the Sphere”, American Mathematical Society (2004), pp. 48-52, 123.
- [2] J. H. Lawlor, Pedal Circles, The Mathematical Gazette, Vol. 9, No. 130 (Jul., 1917), pp. 127-130.
- [3] K. V. Mollison, Pedal Circle and the Quadrangle”, The Mathematical Gazette, Vol. 42, No. 339 (Feb., 1958), pp. 17-20.
- [4] J. L. Coolidge, Some Circles Associate with the Concyelic Points”, The Mathematical Gazette, Vol.12, No. 1 (Oct., 1910), pp. 39-44.