

# 2010 臺灣國際科學展覽會

## 優勝作品專輯

編號：140033-15

### 作品名稱

Wonderful Bubbles-

不同立體框架與形成之肥皂膜的關係

### 得獎獎項

物理與太空科學科大會獎三等獎

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者姓名：黃筠涵、康婷雅

指導老師：施銘哲

關鍵詞：肥皂膜、表面張力、立體結構

## 作者簡介



我是黃筠涵(圖右),就讀台南女中數理資優班二年級,平常喜歡閱讀、思考。從國中開始對數理有很高的興趣,上高中之後特別喜歡物理,所以參加了台灣大學舉辦的高中物理科學人才培育計畫,覺得獲益良多。這是第一次參加國際科展,在實驗過程中儘管過程辛苦、出現許多問題,但是在合作及努力下,問題不僅解決了,也學到解決問題的方法。未來希望能夠繼續參加科學研究,並培養科學精神。

我是康婷雅(圖左),目前就讀台南女中二年級。平時喜歡繪畫、觀看地理頻道、和生物相關書籍,也喜歡和同學一起討論物理、化學問題。這次因為在高一時偶然發現的主題,而開始著手一連串的實驗,在過程中和隊友靠著自己去設計實驗,自己去找出問題的答案,加上老師們的指導,從每個小步驟中都學到了許多,是一次很難得的經驗。

## 摘要

如果將各種形狀不一的中空框架放入肥皂水中，框架上會結構出不同形式的肥皂膜。本研究中包含了許多不同的實驗以探討各種常見錐體、柱體的肥皂膜形狀，其邊數對肥皂膜面數的影響，及肥皂膜面積和模型邊長的比例關係。

第一部分的實驗中，我們探討不同的溶液、不同濃度對形成肥皂膜面數、模式的影響；第二部分的實驗討論了 $n$ 角錐所形成的肥皂膜模式，並且得到其形成的肥皂膜面數與角錐邊數 $n$ 存在著「肥皂膜面數 $= 3n - 3$ 」的關係；第三部分的實驗討論了 $n$ 角柱所形成肥皂膜的模式，得到肥皂膜面數與柱體邊數 $n$ 存在著「肥皂膜面數 $= 3n + 1$ 」的關係，其中三角柱為例外，一共只形成九面肥皂膜；第四部分則討論了正八面體等其他形狀的模式；第五、第六部分的實驗則分析了肥皂膜的大小與框架比例間的關係。

## Abstract

When a hollow frame is submerged into soap water, different shape of membrane will be formed within the frame. In this work experiments were carried out to study the effect of frame geometry, such as a pyramid or a prism, on the form of the soap membrane. In particular, the relationship between the side number of the frame and the number of membrane in the frame as well as the proportion between the membrane area and frame side length were figured out.

The experiments were divided into six parts. In the first part, effects of the solution and concentration on the number and form of the membrane were investigated; while the membrane modes formed within the pyramid of  $n$  sides were studied in the second part of the experiment. The experimental results show that the number of membrane,  $m$ , equals  $3n-3$ . In the third part, membrane modes formed within the prism of  $n$  sides were examined and the results show that  $m$  equals  $3n+1$ ; with only one exception, namely the membrane formed within the triangular prism has only nine faces. The fourth part of the experiment investigated the membrane modes formed within the frame of a octahedron. The last two parts of the experiment examined the relationship between the frame size and the membrane size. Mathematical analysis was also carried out to provide a theoretical value for this relationship and compared favorably with the experimental results.

Keywords: soap membrane, surface tension, stereoscopic frame

# 一、前言

## (一) 研究動機

高一時和學姊一起看了一支數學短片，其中簡略的介紹了許多不同實驗，而其中之一正是將柱體、錐體等支架放入肥皂水中，讓它們形成各種不同形狀的肥皂膜。原本以為肥皂膜將會沿著錐體、柱體原有的面形成，結果卻不然。取而代之地，肥皂膜構成了出人意料之外、更複雜更多變的形狀。有的看似不甚穩定；其他一些甚至出現曲面的情形。

而將肥皂膜在更多不同模型中形成的形狀是否有規律？同一種框架的結果是否只有一種？將支架拉離水面的速度是否又會對肥皂膜的形狀造成改變？不同的溶液呢？這些在短片中卻未曾被提到過。

因此我們希望能藉著這次的科展和學校的專題研究課程，藉由自己的力量找出這些問題的答案。

## (二) 研究目的

透過實驗和物理、數學理論的推演，我們希望這一次的研究能夠達到以下幾項研究目的。

首先，對於同一種框架而言，我們希望可以確認哪些因素會或者不會影響形成肥皂膜的形式，例如提高溫度是否形成的膜就會從三片增加至五片；肥皂水的濃度是否可以使某一面膜消失或分裂；以不同的角度將框架拉起是否影響其形成的肥皂膜的形式等等。

第二，我們希望研究出各種柱體、錐體以及其他幾何圖形（例如：雙三角錐、正八面體。）等的立體框架，將可以結構出什麼樣的肥皂膜，期待能夠從中找出某些規律，或是更深入地理解肥皂膜在「空間中」存在的方式。經由實驗的結果，

我們想要將各種不同形狀的架構進行歸納與分類，以期待找出某些規則，能夠對尚未實驗的圖形做出提前而且正確的推測。

再者，由於不可能將所有比例的框架都以實驗加以研究（例如：比例不相等的長方體。），我們希望能應用所學的表面張力、空間幾何、微積分等物理及數學知識，找出肥皂膜的邊長、面積與框架邊長、形狀或是大小之間的比例關係，同樣期待找出可以推測其他情形的數學規則、通式。

最後，我們希望能將研究的結果再分析，並結合各種不同領域間的知識以找出結論實際上的應用，讓這一次的研究不只停留在理論的驗證，而能夠使生活、甚至是學術領域上有所進步。

## 二、研究方法及過程

### （一）實驗設計

1. 材料：金屬條、強力膠、肥皂、水、水桶、相機/攝影機

2. 準備過程：

• 框架部份

(1) 將金屬條裁剪成不同長度。

(2) 以強力膠將其黏合。

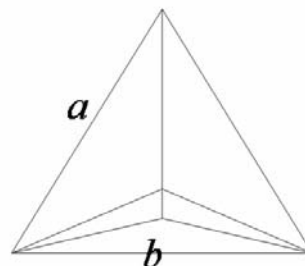
• 錐體

三角錐 ( $\frac{a}{b}=1$ 、 $\frac{a}{b}=1.6$ 、 $\frac{a}{b}=1.8$ )

四角錐

五角錐

六角錐



- 柱體

  - 三角柱

  - 四角柱

  - 五角柱

  - 六角柱

- 其他

  - 雙三角錐

  - 正八面體

- 溶液部份

  - (1) 將肥皂削成絲狀。

  - (2) 在水桶中配置成肥皂水溶液。

- 架設相機/攝影機

### 3. 實驗流程

  - (1) 將金屬框架置入肥皂水中，再緩慢拉起。

  - (2) 等待肥皂膜停止收縮（達到平衡狀態），觀察並拍照、紀錄。

  - (3) 變換不同的角度、拉起速率，重複實驗。

  - (4) 更換模型重複上述實驗步驟。

## （二）實驗值測量

本研究中所計算之肥皂膜與框架邊長的比值，皆由拍照後之圖片所量得，故只列出比值而無長度。

### (三) 理論值推算

討論液體的表面張力現象，因為位於表面膜內的分子屬於分子位能較大者，又自然界有趨向低未能的趨勢，故欲系統之總分子位能下降，則表面膜內分子數須減少，及表面膜之體積須減少。又表面膜之厚度為一定，故欲體積小則其面積需縮小。可知表面膜必有收縮（即縮小面積）之趨勢，故表面膜必存在收縮之力。

因此在本研究中所討論之理論值（例如肥皂膜的大小與框架邊長之關係）皆建立在形成之肥皂膜的面積為最小值的情況，且因為肥皂膜的質量甚小，故暫時忽略重力對肥皂膜大小所產生的效益。

## 三、研究結果及討論

### (一) 研究結果

#### 實驗一 各種環境變因對形成的膜的影響

##### 變因一 溶液種類

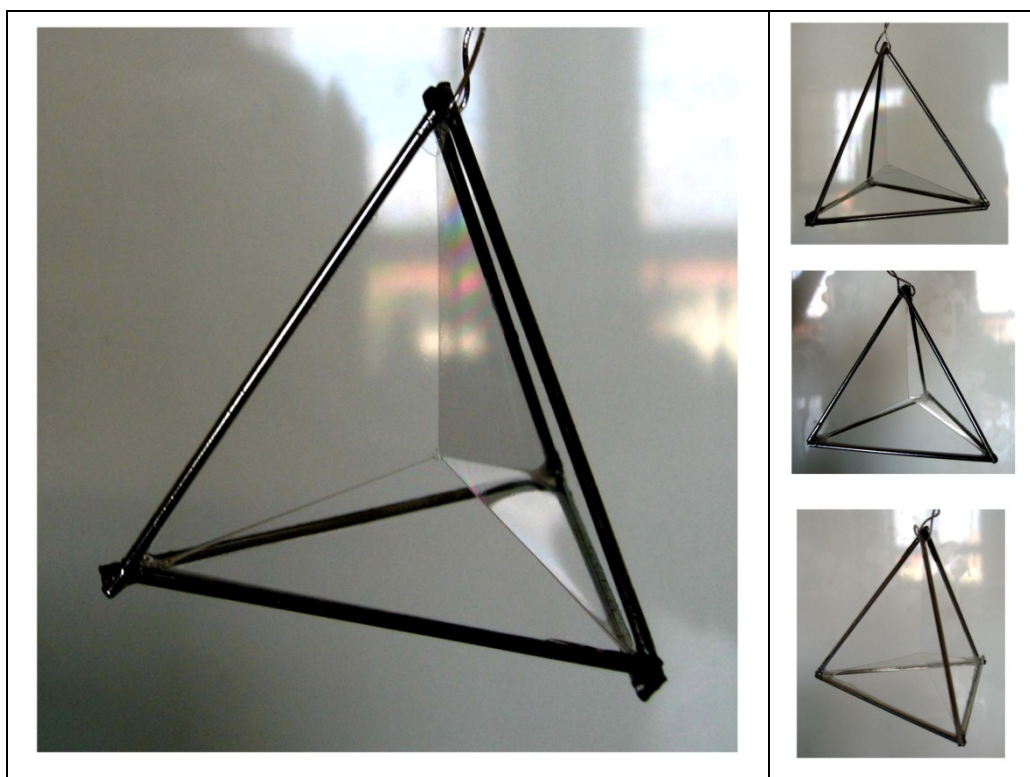
在這一部分的實驗中，我們選用了市面上可以取得的肥皂和洗碗精調配成溶液，針對三角錐、三角柱形成的肥皂膜模式做簡單的比較、拍照並記錄。

選擇模式較簡單的三角錐模型和三角柱模型來做討論，將其分別置入肥皂水溶液和洗碗精水溶液中，所得圖片如下。

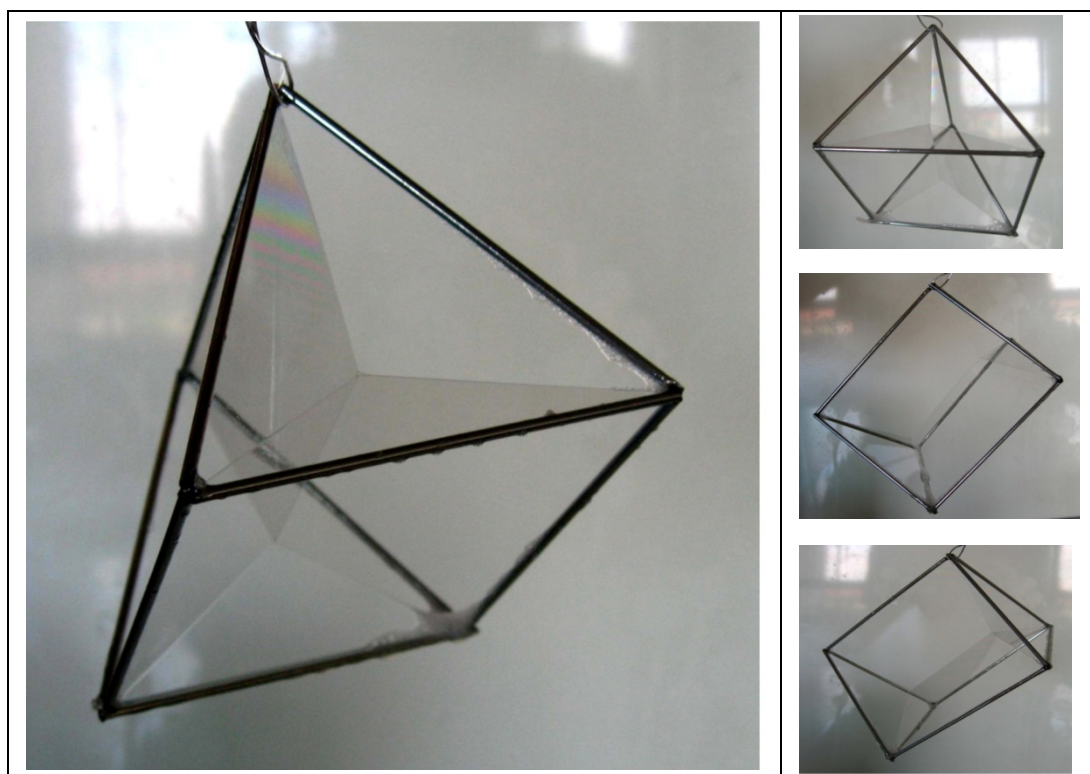


(1)肥皂水溶液：

1.三角錐

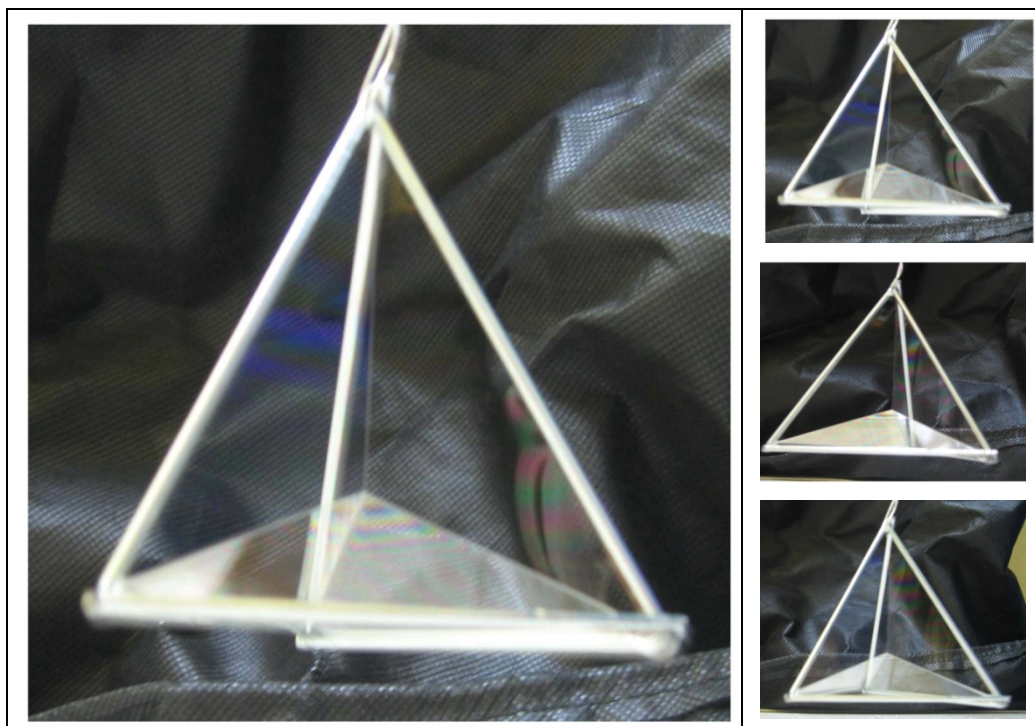


2.三角柱

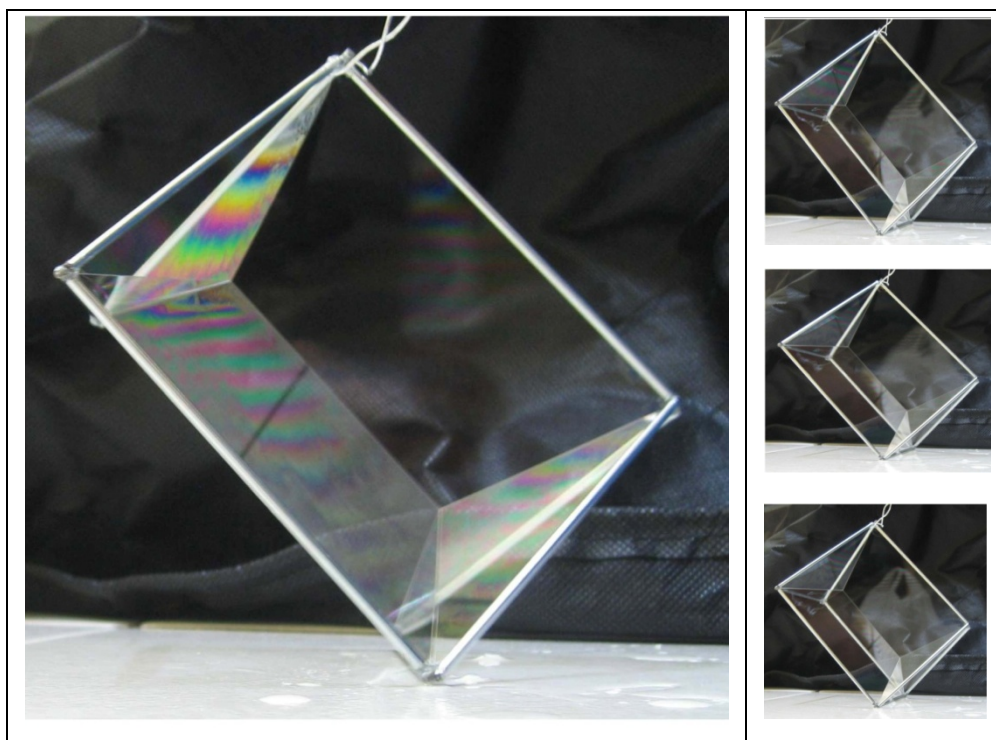


(2) 洗碗精水溶液：

1. 三角錐



2. 三角錐



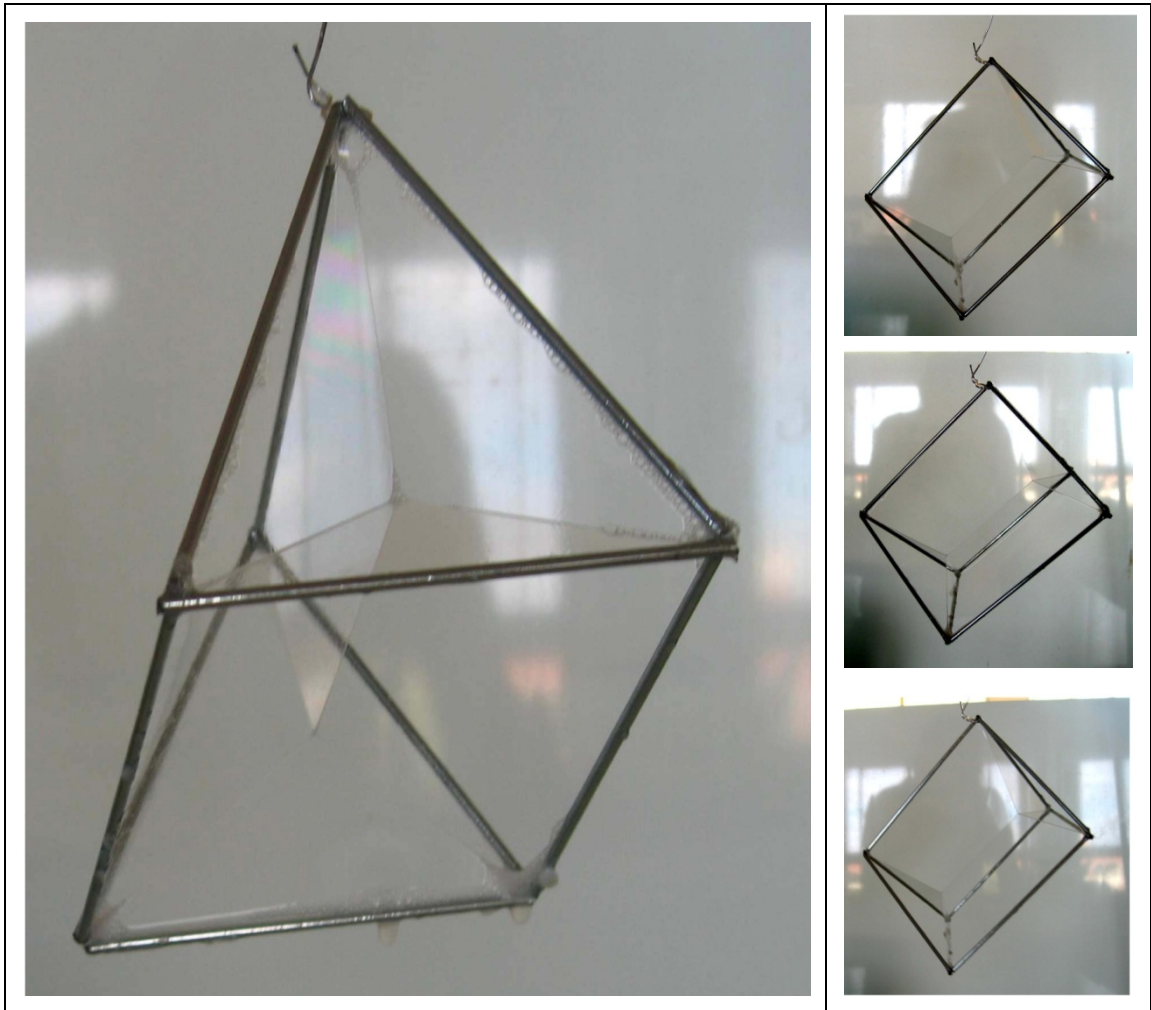
## 變因二 溶液濃度

在這一部分的實驗中，我們以肥皂作為溶質，定義濃度  $C = \frac{\text{溶質的重量(g)}}{\text{溶劑的體積(L)}}$

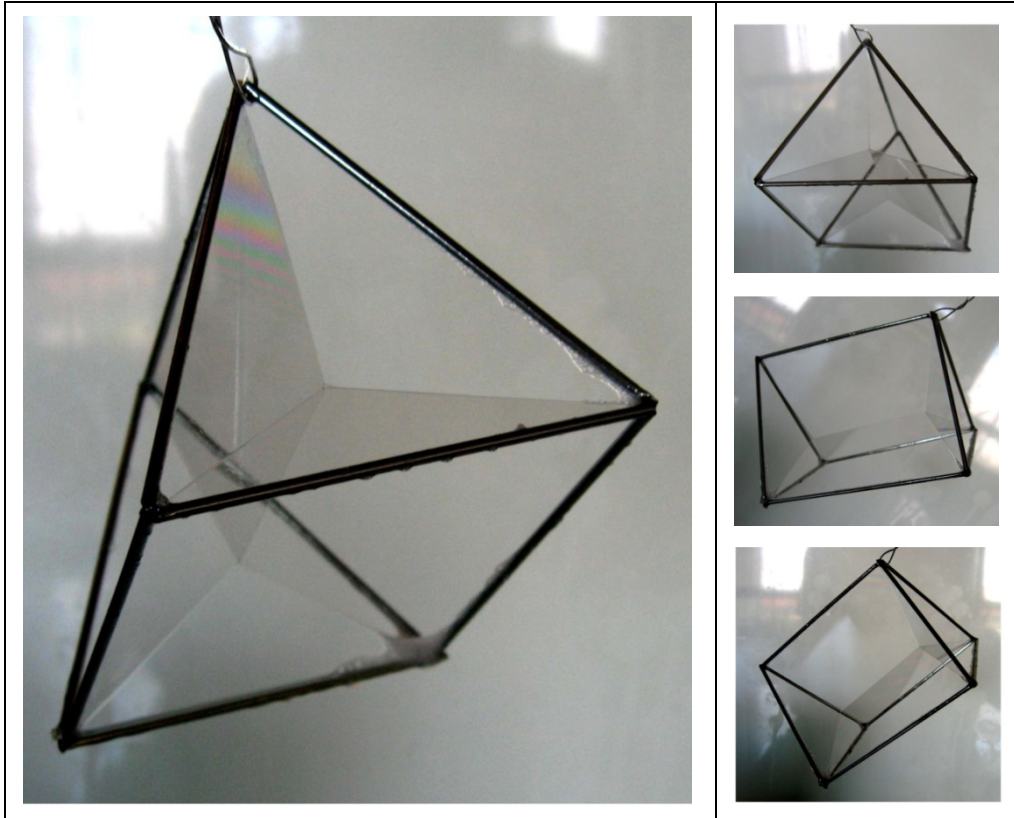
分別比較當  $C = 20$ 、 $C = 10$ 、 $C = 5$  時，三角錐、三角柱形成肥皂膜的模式。

### (1) 三角柱

#### a. $C = 20$



b.  $C = 10$

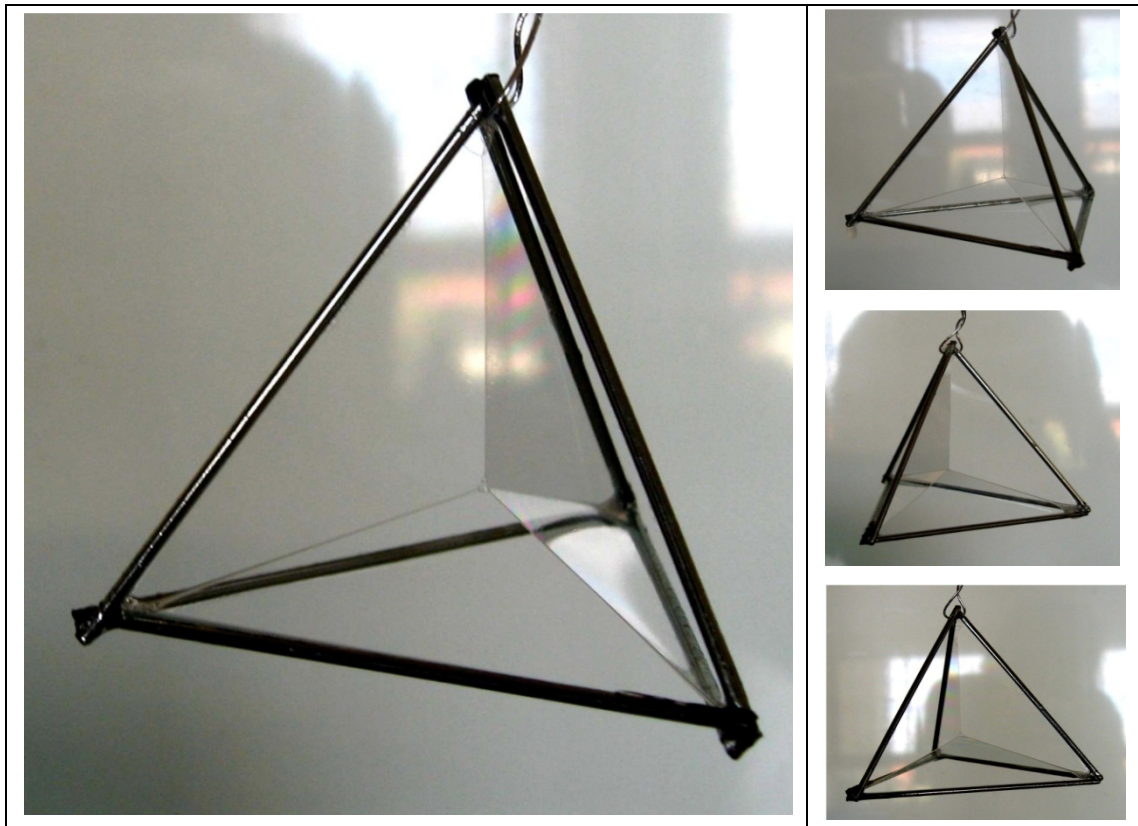


c.  $C = 5$



(2) 三角錐

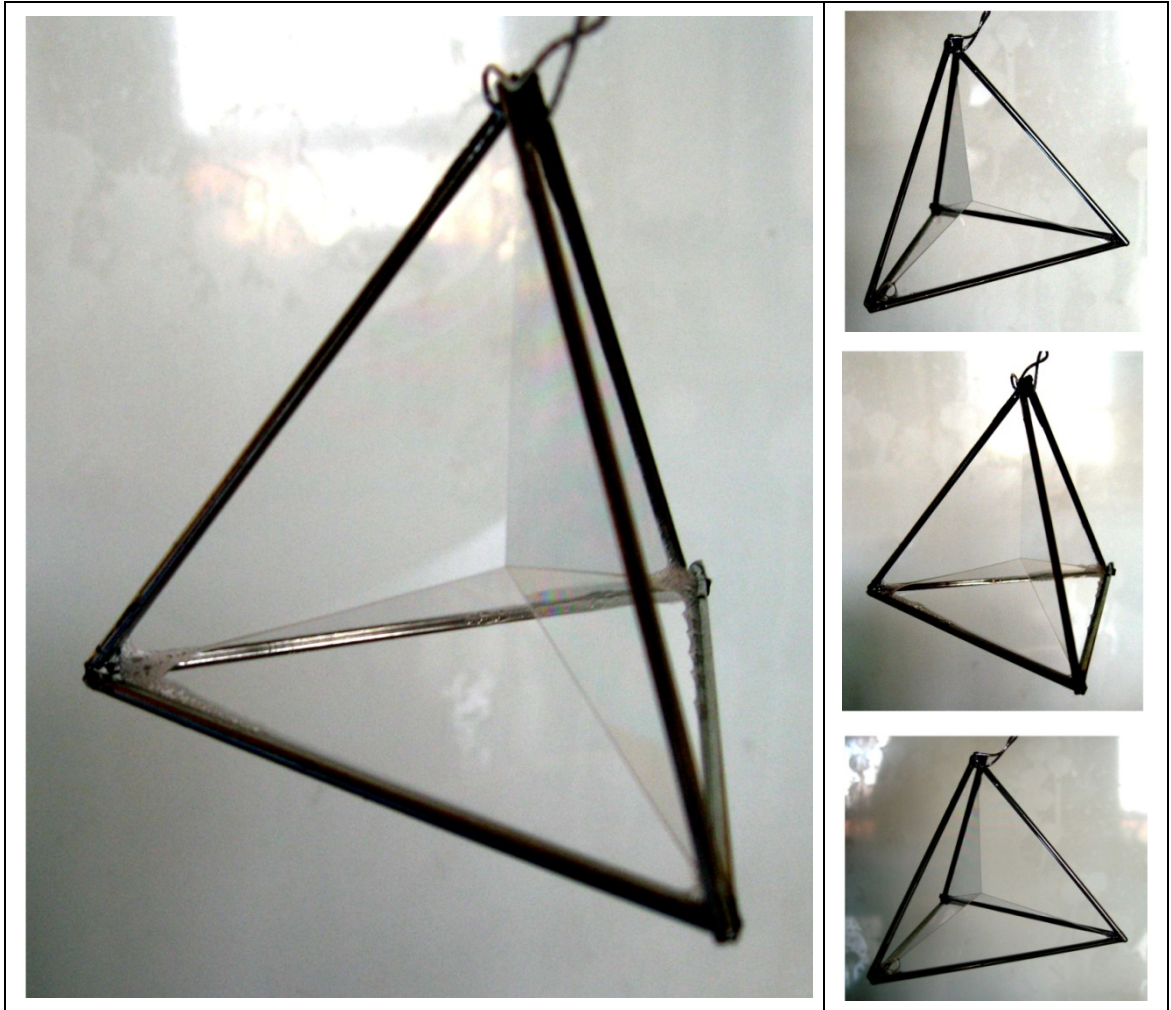
a.  $C = 20$



b.  $C = 10$

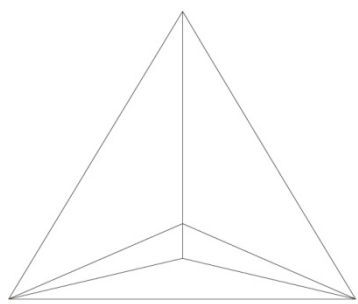


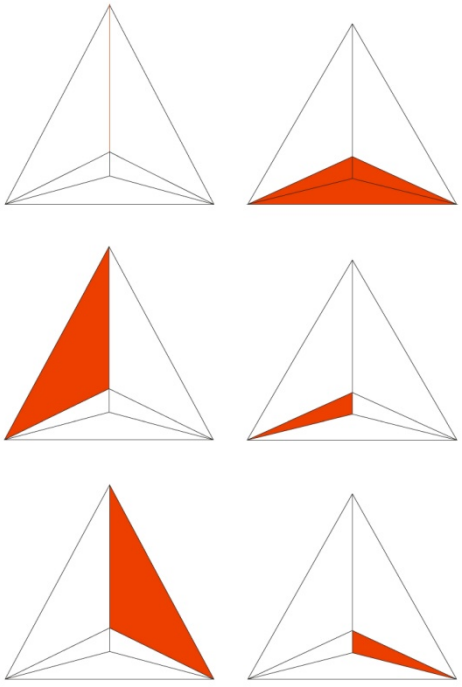


c.  $C=5$

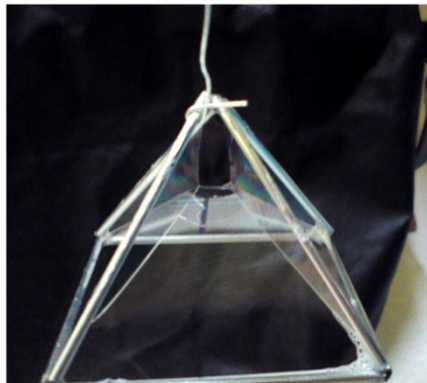
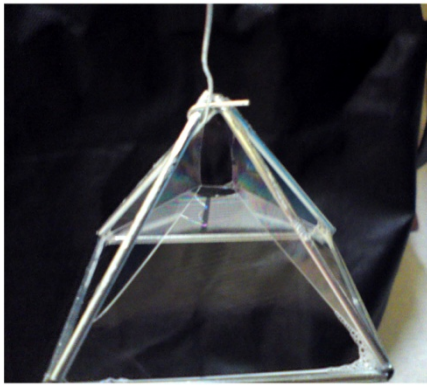
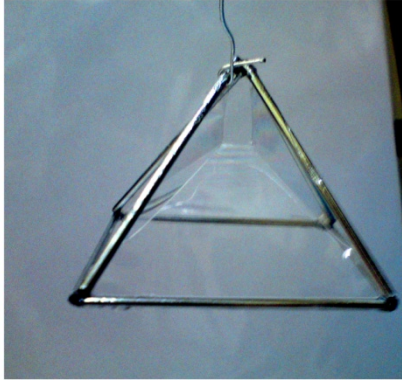
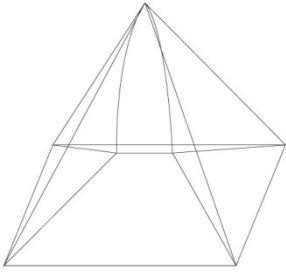


## 實驗二 $n$ 角錐形成肥皂膜的形式

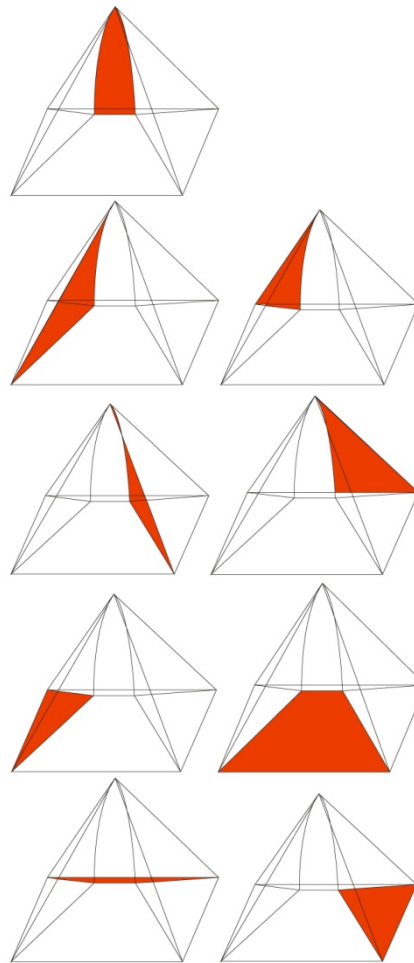
實驗目的：透過各種不同的框架實驗找出同類型框架形成肥皂膜的規律。

<p>【錐體】三角錐</p> 	
 	
<p>• 結果： 正四面體內部中央出現一個點，連接到其四頂點構成四條新的邊。四條新的邊與原來四面體的六個邊編一共形成六個三角形面。</p> <p>• 推論： 視覺上六個面的面積大約相等，所以其形成的膜的中心點可能在正四面體的中心位置。</p>	

【錐體】四角錐



圖示



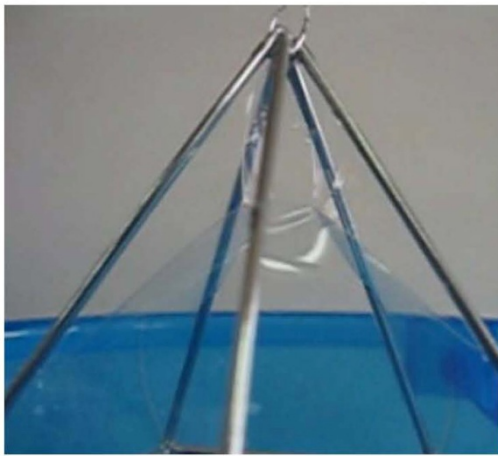
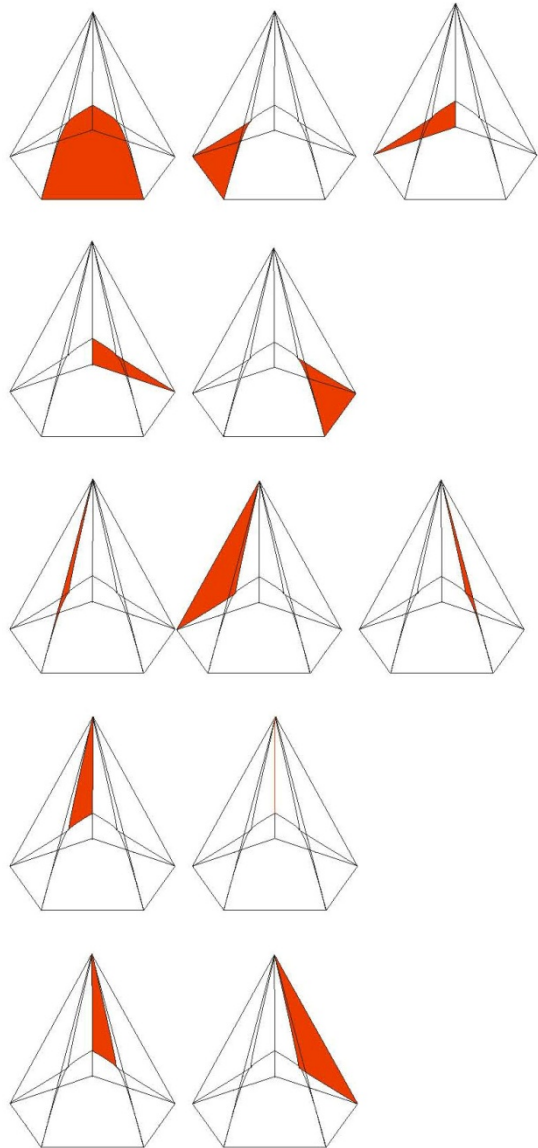
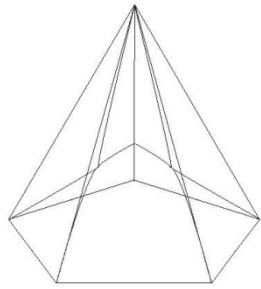
• 結果：

在四角錐型框架的實驗中，所形成的肥皂膜出現了弧邊，且該面肥皂膜的所有邊皆不為金屬框架，而是連接著數面肥皂膜。

在這一部分的實驗中，我們觀察到四角錐形的框架一共產生了九面肥皂膜，且肥皂膜相連接的邊不再都是直線。



【錐體】五角錐

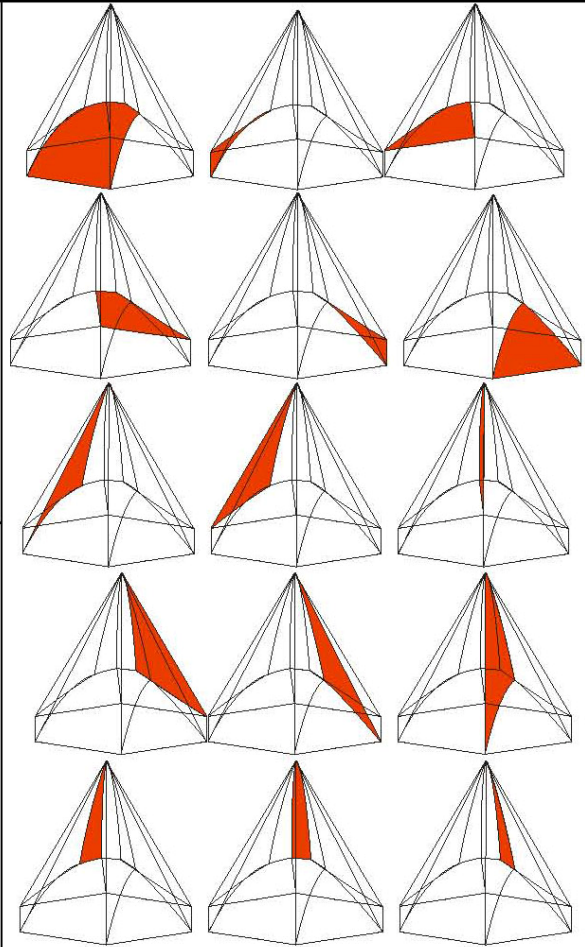
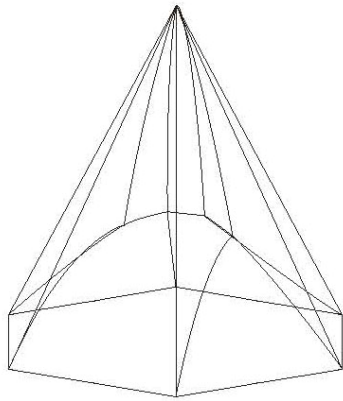


• 結果：

在進行五角錐實驗時，我們發現上述肥皂膜形成的時間並不長，第一張電腦圖示所標示的肥皂膜及容易因為與頂點距離過近，而向上靠近頂點導致肥皂膜有相互合併的現象，即原本的12片肥皂膜合為5片，分別沿著五角錐的五個側面形成三角形的膜。

以上圖示與照片皆呈現了肥皂膜尚未互相合併前的肥皂膜。主要原因是因為我們在先前幾次未拍照紀錄的實驗中，並沒有發現這類的現象，即肥皂膜形成的模式與模擬圖一致，至於肥皂膜合併的真正原因，仍有待討論。

【錐體】六角錐



(由於實驗過程中，六角錐形成的肥皂膜內縮的速度太過快速，以致於難以記錄，故此處無法呈現照片，僅以圖示表示支。)

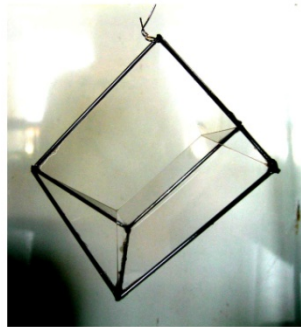
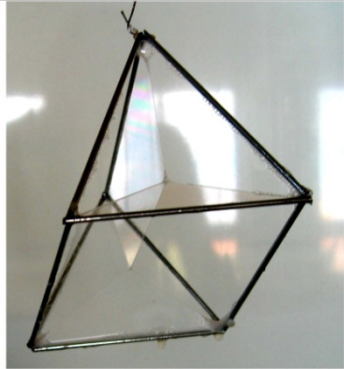
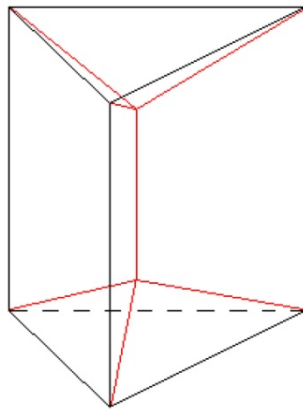
• 結果：

六角錐的情況與五角錐類似，也有部分肥皂膜向上內縮且相互合併的狀況。由於這也是我們在先前實驗裡沒有觀察到的現象，所以暫時只列出了肥皂膜尚未向上內縮前的圖示，往後的角錐討論也暫時以此種模式為主。

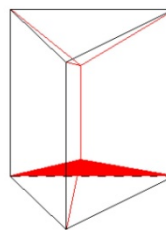
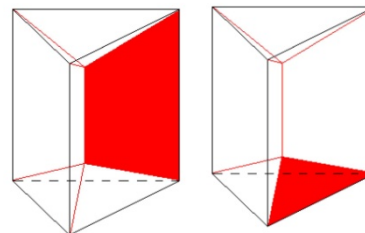
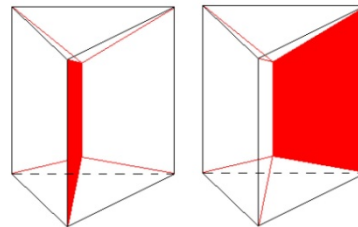
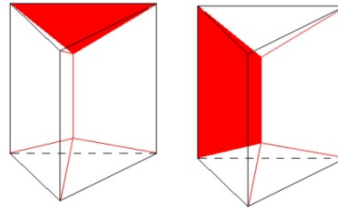
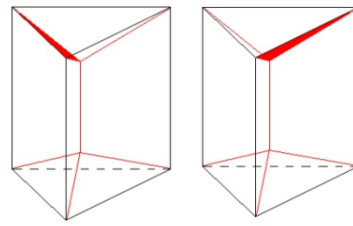
因此在肥皂膜內縮前，六角錐型的框架一共形成了十五片膜。

實驗三  $n$  角柱形成肥皂膜的形式

【柱體】三角柱



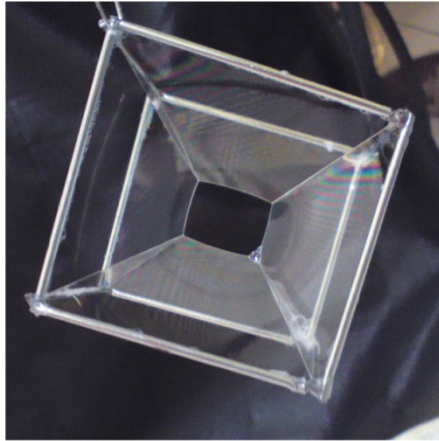
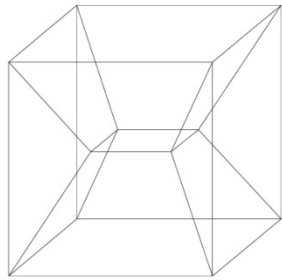
圖示



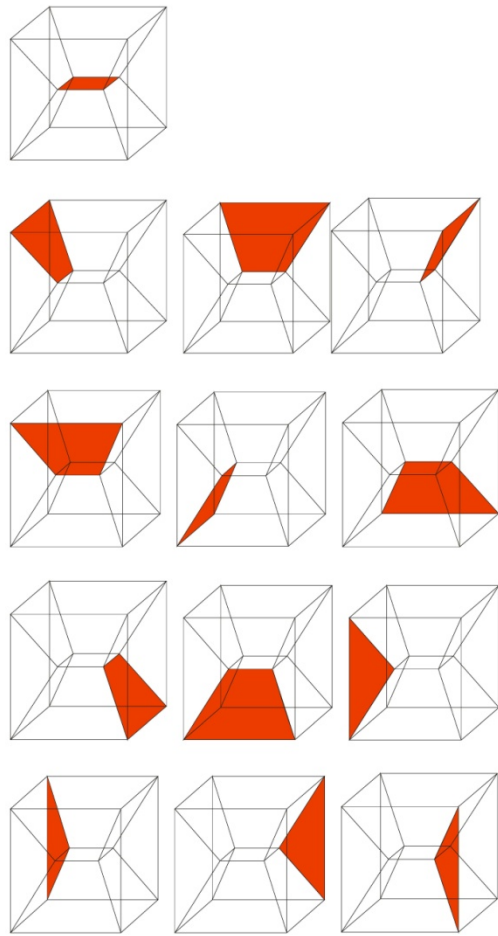
• 結果：

九個肥皂膜，鉛直的梯形膜共三個，傾斜並和底面其中一邊接合的三角形膜共六個。肥皂膜形式似二個鉛直方向相反的三角錐肥皂膜，以鉛直三面交線相互接合之結合。

【柱體】四角柱



圖示

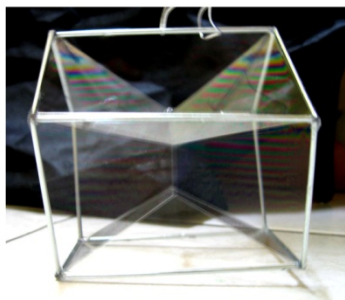
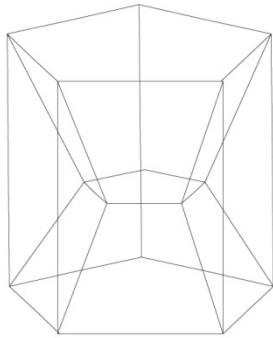


• 結果：

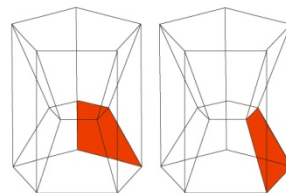
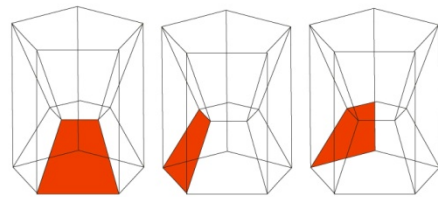
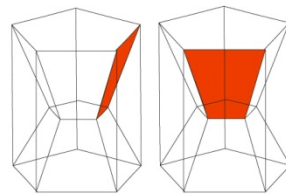
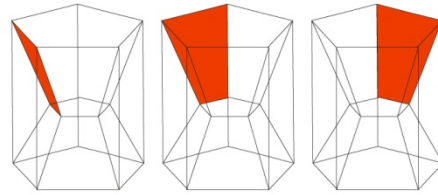
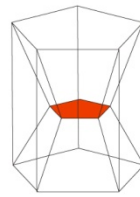
四角柱模型的中央形成一個平行底面的水準正方形，且中央正方形肥皂膜的各邊平行二底面正方形的各邊。鉛直方向自中央正方形肥皂膜各邊延伸至二底面

相對的各邊，形成八個梯型肥皂膜，以中央正方形模為較短底、二底面相對邊為較長底。

【柱體】正五角柱



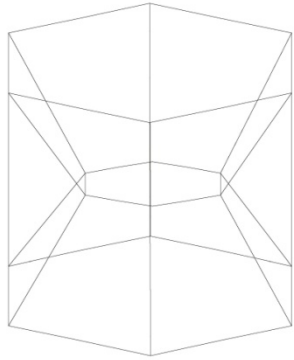
圖示



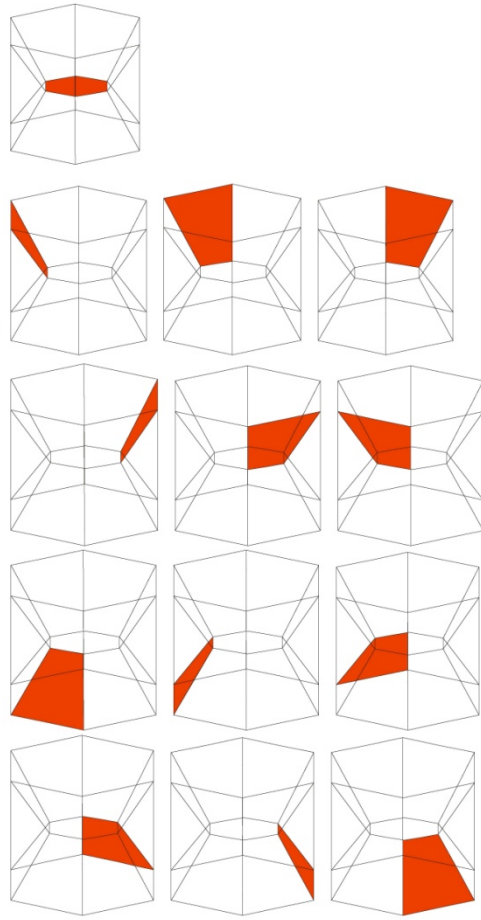
• 結果：

在五角柱模型的中央形成一個平行底面的水準五邊形，且中央五邊形肥皂膜的各邊平行二底面五邊形的各邊。鉛直方向自中央五邊形肥皂膜各邊延伸至二底面相對的各邊，形成十個梯型肥皂膜，以中央五邊形模為較短底、二底面相對邊為較長底。

【柱體】正六角柱



圖示



• 結果：

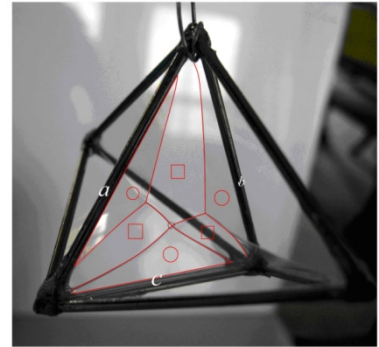
在六角柱模型的中央形成一個平行底面的水準六邊形，且中央六邊形肥皂膜的各邊平行二底面六邊形的各邊。鉛直方向自中央六邊形肥皂膜各邊延伸至二底面相對的各邊，形成十二個梯型肥皂膜，以中央六邊形模為較短底、二底面相對邊為較長底。

實驗四 其他框架形成之肥皂膜

<p>雙三角錐</p>	<p>圖示</p>

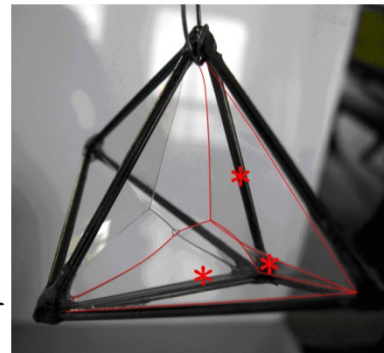
• 結果：

雙三角錐中央形成的肥皂膜為三個曲面扭曲相接（下圖以□註記），側邊延伸出三面近似三角形的肥皂膜與邊 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 連接（下圖以○註記），共六個面，如右圖。

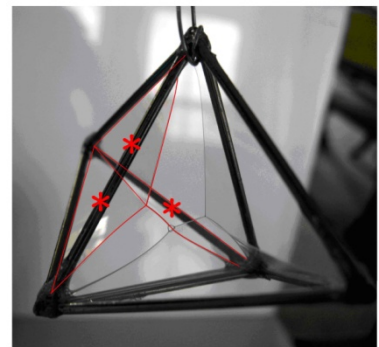


另外，自三個扭曲面（□）的交會點連線至雙三角錐的兩個頂點，會發現有六面肥皂膜連結至邊上。（以\*註記如右圖）

因此雙三角錐一共形成十二個面。

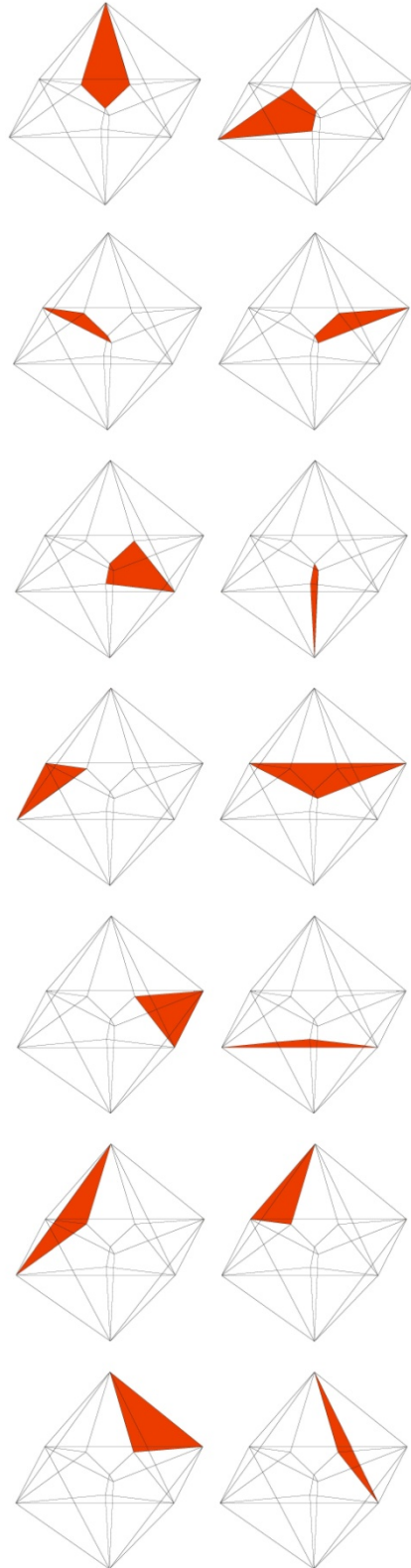
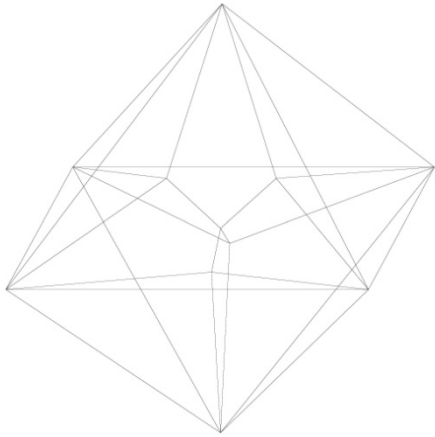


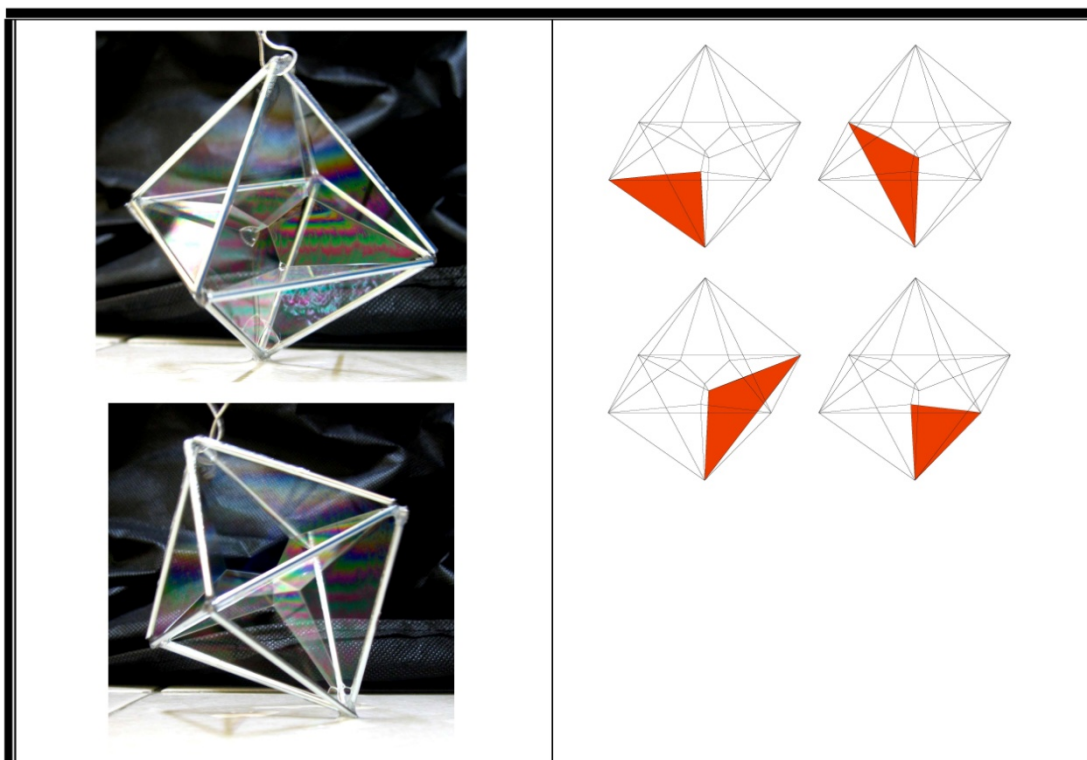
及





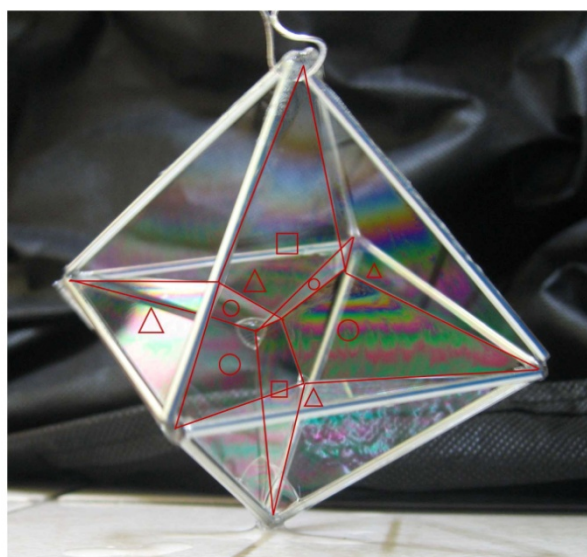
正八面體





結果：

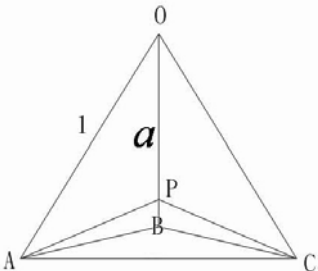
正八面體模型形成鉛直方向兩個(□)、水準方向四個(○)箏形肥皂膜，六箏形短邊相交頂點交在正八面體中央。水準方向箏形長邊相鄰四個傾斜三角形(△)；鉛直方向二箏形的長邊和模型的非水準邊各形成四個三角形。一共十八個面。(如下圖)



## 實驗五 探討肥皂膜長度與框架比例——錐體

### (1) 正四面體

#### a. 理論值

	<p>已知正四面體OABC 的稜長為1，其高上一點P至O 的距離為<math>a</math>。</p> <p>設<math>A</math>  <math>=\triangle OAP+\triangle OBP+\triangle OCP+\triangle APB+\triangle BPC+\triangle CPA</math></p> <p>求<math>A</math> 存在最小值時<math>a</math> 的值。</p>
---	--

1.

$$\because \triangle OAP = \triangle OBP = \triangle OCP,$$

$$\therefore \triangle OAP + \triangle OBP + \triangle OCP = 3\triangle OAP = 3 \times \left( \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

2.

$$\because \triangle APB = \triangle BPC = \triangle CPA,$$

$$\therefore \triangle APB + \triangle BPC + \triangle CPA = 3\triangle APB = 3 \times \left( \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} \right) =$$

$$\frac{3}{2} \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}\sqrt{6}a + \frac{3}{4}}$$

3.

由1. 2.知

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} a + \frac{3}{2} \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}\sqrt{6}a + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( a + \sqrt{3a^2 - 2\sqrt{6}a + \frac{9}{4}} \right)$$

4.

將 $A$  對 $a$  微分， $\frac{dA}{da} = 0$  時的 $a$  值即為所求

$$\frac{dA}{da} = 1 + \frac{6a - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{3a^2 - 2\sqrt{6}a + \frac{9}{4}}} = 0, \quad 1 + \frac{3a - \sqrt{6}}{\sqrt{3a^2 - 2\sqrt{6}a + \frac{9}{4}}} = 0$$

$$\sqrt{3a^2 - 2\sqrt{6}a + \frac{9}{4}} = -(3a - \sqrt{6}), \quad 6a^2 - 4\sqrt{6}a + \frac{15}{4} = 0$$

$$a = \frac{4\sqrt{6}a \pm \sqrt{96 - 90}}{12} = \frac{4\sqrt{6}a \pm \sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ or } \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

但  $0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3}$  ,  $\therefore a = \frac{\sqrt{6}}{4}$

b. 實驗值 ( I )

※定義「比值」為  $r$ 。(即左圖中  $\overline{OP}$  與  $\overline{OA}$  的比值。)

※由理論值部份之結果  $r = \frac{\sqrt{6}}{4}$  可知  $r \doteq 0.612$ ，下表所列之誤差及由此數值代入  
 運算。

實驗次數	比值	誤差
第一次	0.595920	-2.68664%
第二次	0.597921	-2.3598%
第三次	0.631611	3.141703%
第四次	0.589226	-3.77971%
第五次	0.592514	-3.24287%
第六次	0.594088	-2.98583%
第七次	0.604004	-1.36655%
第八次	0.576147	-5.91547%
第九次	0.608621	-0.61261%
第十次	0.614340	-0.38235%
平均	0.600439	-1.88902%

b. 實驗值(II)

在這裡我們另外做了兩組實驗，讓三角錐的比例(參照第4頁的定義)分別為  $\frac{a}{b}$   
 $= 1.6$ 、 $\frac{a}{b} = 1.8$ ，以下呈現了數據，與理論值是否符合則在討論部分再加以探討。

(1)  $\frac{a}{b} = 1.6$

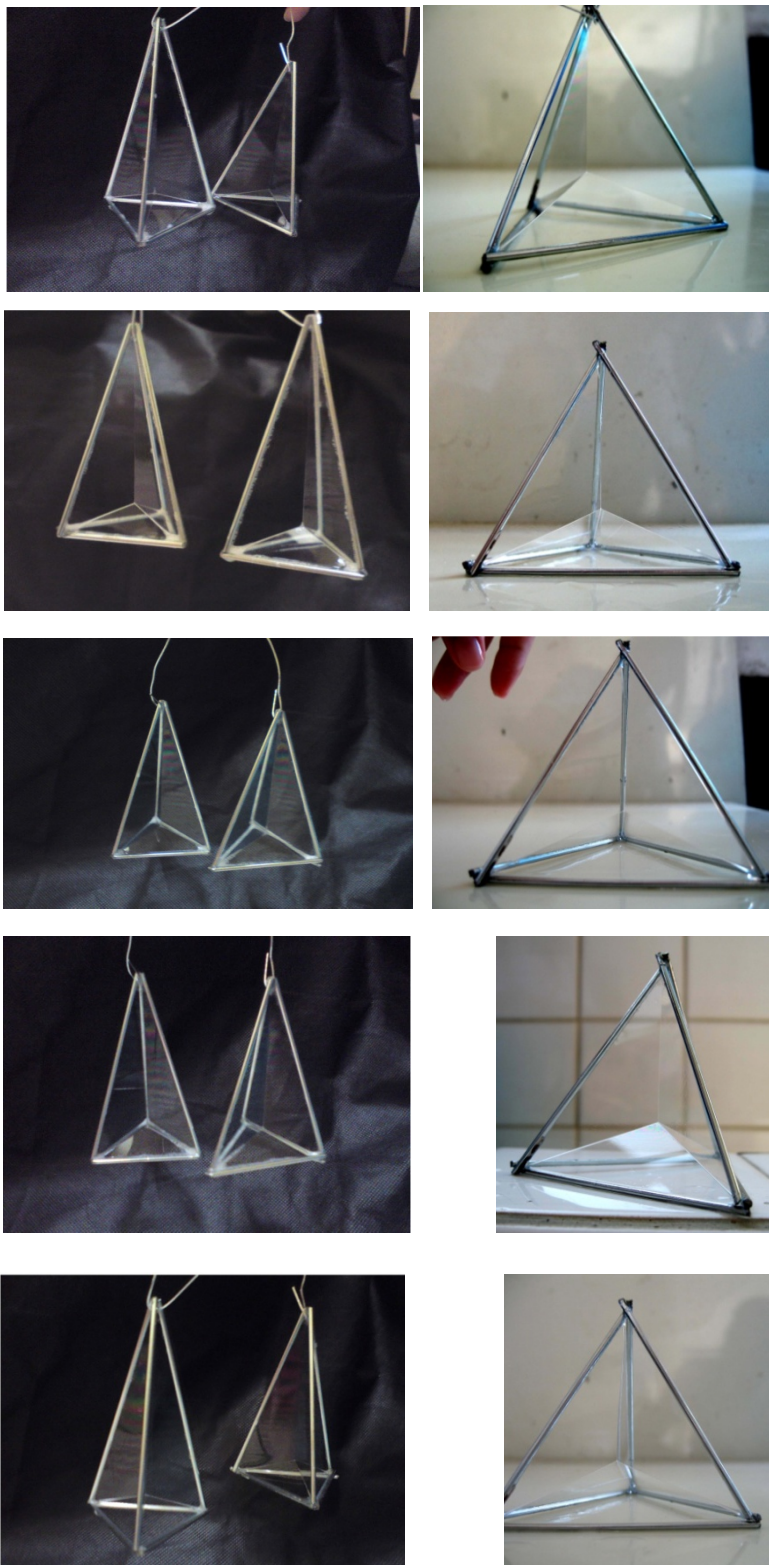
(2)  $\frac{a}{b} = 1.8$

實驗次數	比值
第一次	1.577383
第二次	1.464855
第三次	1.455484
第四次	1.446999
第五次	1.582196
平均	1.505383

實驗次數	比值
第一次	1.743394
第二次	1.51336
第三次	1.323649
第四次	1.35228
第五次	1.796696
平均	1.545876

本頁則呈現了前述三組實驗的照片，左欄為比值為 $\frac{a}{b} = 1.6$ 、 $\frac{a}{b} = 1.8$ 的三角錐

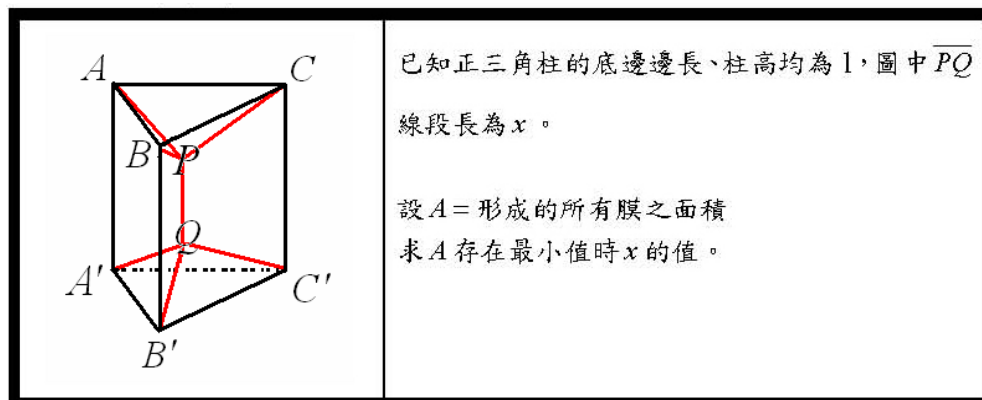
框架；右欄則為 $\frac{a}{b} = 1$ 的三角錐框架。



## 實驗六 探討肥皂膜長度與框架比例——柱體

### (1) 三角柱

#### a. 理論值(I)



1. 圖中三角形部分面積為

$$6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{3}{2} \sqrt{x^2 - 2x + \frac{4}{3}}$$

2. 梯形面積為

$$3 \times \frac{1}{2} \times (1+x) \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} (x+1)$$

3. 總面積為

$$A = \frac{3}{2} \sqrt{x^2 - 2x + \frac{4}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} (x+1) = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3x^2 - 6x + 4} + x + 1)$$

4. 將 $A$ 微分求極值， $\frac{dA}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{6x-6}{2\sqrt{3x^2-6x+4}} + 1 = 0, \quad 3x-3 = -\sqrt{3x^2-6x+4}, \quad 6x^2-12x+5=0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{6} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\because 0 < x < 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{\sqrt{6}}$$

理論值(II)

因為使用的模型邊長比例並非為底邊：高=1：1，而是大約1： $\frac{6}{5}$ ，所以在  
此討論當底邊：高的比例為1： $\frac{6}{5}$ 時，所形成的肥皂膜大小。

	<p>已知正三角柱的底邊邊長為1、柱高為<math>\frac{6}{5}</math>，圖中 <math>\overline{PQ}</math>線段長為<math>x</math>。</p> <p>設<math>A</math> = 形成的所有膜之面積 求<math>A</math>存在最小值時<math>x</math>的值。</p>
--	---

仿照理論值(I)的作法，可得

1. 圖中三角形部分面積為

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{3\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + 1}$$

2. 梯形面積為

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x + \frac{6}{5}\right)$$

3. 總面積為

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{3\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + 1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x + \frac{6}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \sqrt{3\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + 1} + \left(x + \frac{6}{5}\right) \right]$$

4. 將 $A$  微分求極值

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{6x - \frac{36}{5}}{2\sqrt{3\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + 1}} + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \pm \frac{1}{6}$$

$$\because 0 < x < \frac{6}{5}$$

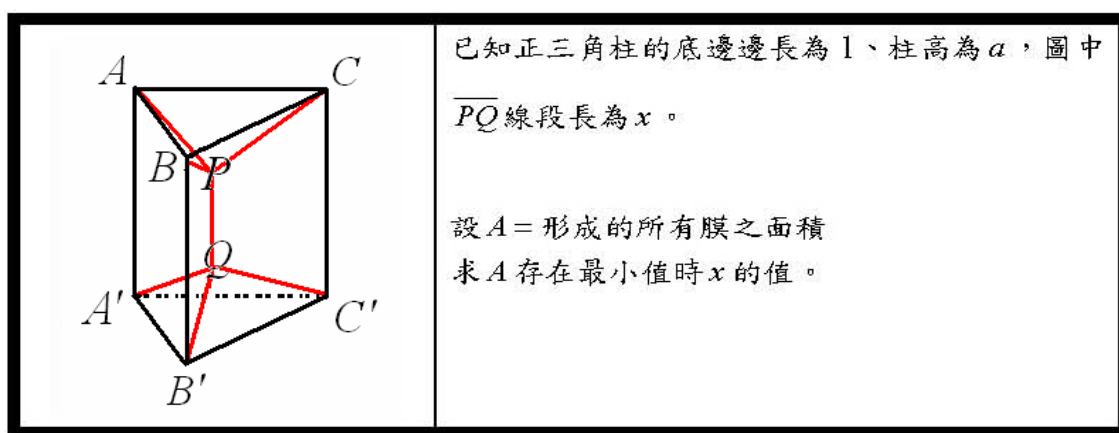
$$\therefore x = \frac{6}{5} - \frac{1}{\sqrt{6}}$$

理論值(III)

由理論值(I)、理論值(II)我們觀察到，底邊邊長相同的三角柱，點 $P$  至的距離似乎都是固定的。 $(d = \frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{1}{2} \times \left[ \frac{6}{5} - \left( \frac{6}{5} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right])$ ，建立在 $d(P, \text{平面}ABC)$

$= d(Q, \text{平面}A'B'C')$ 的前提下，即不考慮重力對肥皂膜的影響)

因此，我們討論當三角柱擁有任意高 $a$ 的情況。



仿照理論值(I)的作法，可得

1. 總面積為

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{a-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 6 + (a+x) \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} \times 3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \sqrt{3(a-x)^2 + 1} + (a+x) \right] \end{aligned}$$

2. 將 $A$ 微分求極值

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{6x - 6a}{2\sqrt{3(a-x)^2 + 1}} + 1 = 0 \Rightarrow x = a \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\because 0 < x < a$$

$$\therefore x = a - \frac{1}{\sqrt{6}}$$

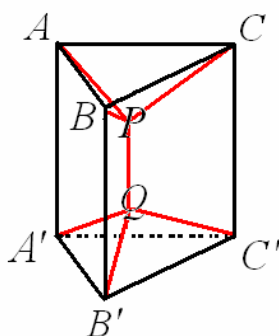


3. 即表格中  $\overline{PQ}$  線段長為  $a - \frac{1}{\sqrt{6}}$ 。又我們假設所形成的肥皂膜不會因為重力等因素的作用而扭曲，而與框架一樣是對稱的，即  $d(P, \text{平面}ABC) = d(Q, \text{平面}A'B'C')$

$$\Rightarrow d(P, \text{平面}ABC) = \frac{1}{2} \left[ a - \left( a - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right] = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

關，與三角柱的高無關。

b. 實驗值



由理論可知，實際上所算出的比值  $\frac{\overline{PQ}}{AB}$  應為  $\frac{6}{5} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cong 0.791752$ ，此處

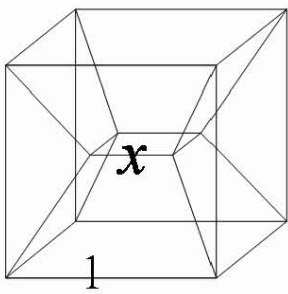
列出了我們的實驗數據，誤差值以 0.791752 代入計算。

實驗次數	比值	誤差	實驗次數	比值	誤差
第一次	0.738323	-6.74812%	第六次	0.705808	-10.8549%
第二次	0.704577	-11.0104%	第七次	0.700866	-11.479%
第三次	0.88547	11.83684%	第八次	0.732079	-7.53675%
第四次	0.70571	-10.8673%	第九次	0.7546	-4.69232%
第五次	0.764628	-3.4258%	第十次	0.74241	-6.23202%
			平均	0.743447	-6.10098%

比較此次的實驗與三角錐的比例實驗，我們發現誤差值稍微大了一些，但仍仍在合理範圍。推測可能是測量上造成的誤差，或是肥皂膜面積增加、重量變重，使得重力相對於表面張力而言有了更顯著的影響力，進而將整個肥皂膜向下拉扯，影響到形成的膜的長度。

(2) 正立方體

a. 理論值

	<p>已知正立方體的邊長為 1，其中中央形成的小正方形邊長為 <math>x</math>。</p> <p>設 <math>A</math> = 形成的所有膜之面積 求 <math>A</math> 存在最小值時 <math>x</math> 的值。</p>
---	---

1. 正立方體中央形成之小正方形面積 =  $x^2$

2. 其餘之梯形面積 =  $8 \times \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2} = 2(x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$

3. 其餘之三角形面積 =  $4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}(1-x)}{2} = \sqrt{2}(1-x)$

4. 總面積  $A = x^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{2}(1-x)$

5. 將  $A$  對  $x$  微分， $\frac{dA}{dx} = 0$  時的  $x$  值即為所求

$$\frac{dA}{dx} = 2x + 2 \left[ 1 \times \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{(2x-2)(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \right] + (-\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{2x^2 - 2x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{x^2 - 2x + 2} = -(2x^2 - 2x + 1)$$

等號兩側同時平方

$$\Rightarrow \left(x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 2) = 4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1$$

$$\Rightarrow 3x^4 + (-6 + 2\sqrt{2})x^3 + \left(\frac{11}{2} - 2\sqrt{2}\right)x^2 + (-3 + 2\sqrt{2})x = 0$$

$\because 0 < x < 1$  即  $x \neq 0$

$$\Rightarrow 3x^3 + (-6 + 2\sqrt{2})x^2 + \left(\frac{11}{2} - 2\sqrt{2}\right)x + (-3 + 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^4 + \left(-2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)x^3 + \left(\frac{11}{6} - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x^2 + \left(-1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)x = 0$$

b. 理論值

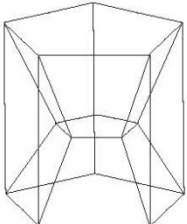
由於目前的我們還沒有辦法處理高次的一元方程式，因此我們決定將所得的實驗數據代入推出的方程式，如果所算出的值十分接近0，則代表我們的推論很可能是正確的。

實驗次數	比例	代入所得的數值
第一次	0.188173	0.391326
第二次	0.224394	0.471385
第三次	0.226516	0.476115
第四次	0.231363	0.486935
第五次	0.22393	0.470351
平均	0.218875	0.459104

根據實驗數據代入方程式的結果，我們發現所得的數據都非常接近0，且大致上都分佈在某一個範圍內。因此我們推論可能是重力的影響將中央的方形膜向下拉扯導致其邊長增加，才會導致代入所得的值及接近0，且都分佈在約0.4 到0.5 附近。

(3) 正五角柱

a. 理論值 ( I )



一正五 $n$ 角柱的邊長、高均為1，其正中央形成平行底面的膜邊長為 $x$

設 $A$ =形成的所有膜之面積  
求 $A$ 存在最小值時 $x$ 的值。

1. 邊長為 $x$ 的正五 $n$ 邊形，其面積為

$$= 5 \times \frac{1}{2} \times x \times \frac{x}{2 \tan 36^\circ} = \frac{5x^2}{4 \tan 36^\circ}$$

2. 所剩之梯形

$$= 2 \times 5 \times \frac{1}{2} \times (x+1) \times \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2 \tan 36^\circ}\right)^2} = \frac{5(x+1)}{\tan 36^\circ} \sqrt{x^2 - 2x + \sec^2 36^\circ}$$

3. 所剩之三角形部分面積

$$= 5 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1-x}{2 \sin 36^\circ} = \frac{5(1-x) \sec 36^\circ}{4 \tan 36^\circ}$$

$$4. \text{面積總和 } A = \frac{5x^2}{4 \tan 36^\circ} + \frac{5(x+1)}{\tan 36^\circ} \sqrt{x^2 - 2x + \sec^2 36^\circ} + \frac{5(1-x) \sec 36^\circ}{4 \tan 36^\circ}$$

5. 將A微分以求極值

$$\frac{dA}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 2(\sqrt{x^2 - 2x + \sec^2 36^\circ} + \frac{(x+1)(2x-2)}{2\sqrt{x^2 - 2x + \sec^2 36^\circ}}) + (-\sec 36^\circ) = 0 \quad \text{整理後得 } x$$

$$\Rightarrow 12x^4 - (24 - 4 \sec 36^\circ)x^3 + (11 \sec^2 36^\circ - 8 \sec 36^\circ)x^2$$

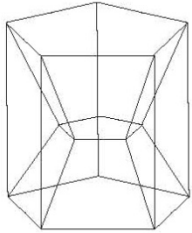
$$+ (4 \sec^3 36^\circ - 14 \sec^2 36^\circ + 16)x + (4 \tan^4 36^\circ - \sec^4 36^\circ) = 0$$

滿足此項關係式

$$x^4 + \left(\frac{1}{3} \sec 36^\circ - 2\right)x^3 + \left(\frac{11}{12} \sec^2 36^\circ - \frac{2}{3} \sec 36^\circ\right)x^2$$

$$+ \left(\frac{1}{3} \sec^3 36^\circ - \frac{7}{6} \sec^2 36^\circ + \frac{4}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3} \tan^4 36^\circ - \frac{1}{12} \sec^4 36^\circ\right) = 0$$

a. 理論值 ( II )

	<p>已知正五角柱的邊長為 1、高為 <math>\frac{3}{2}</math>，其中央形成的 小正五邊形長為 <math>x</math>。</p> <p>設 <math>A</math> = 形成的所有膜之面積 求 <math>A</math> 存在最小值時 <math>x</math> 的值。</p>
---	---

$$1. \text{ 中央形成的膜的面積： } \frac{1}{2}x \cdot \frac{x}{2 \tan 36^\circ} \cdot 5 = \frac{5x^2}{4 \tan 36^\circ}$$

$$2. \text{ 其餘的梯形的膜的面積： } \sqrt{\left(\frac{1-x}{2 \tan 36^\circ}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} \cdot (1+x) \times \frac{1}{2} \times 10$$

$$3. \text{ 其餘的三角形膜的面積： } \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{x}{2 \sin 36^\circ} \times 5 = \frac{15-15x}{8 \sin 36^\circ}$$

$$4. \text{ 面積總和 } A = \frac{5x^2}{4 \tan 36^\circ} + 5(x+1) \sqrt{\left(\frac{1-x}{2 \tan 36^\circ}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{15-15x}{8 \sin 36^\circ}$$

$$= \frac{5}{\tan 36^\circ} \left[ \frac{x^2}{4} + (x+1) \sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} \tan 36^\circ\right)^2} + \frac{3-3x}{8 \sin 36^\circ} \times \tan 36^\circ \right]$$

5. 微分求極值

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\tan 36^\circ\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(x+1)}{2\sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\tan 36^\circ\right)^2}} + \frac{3}{8}\sec 36^\circ = 0$$

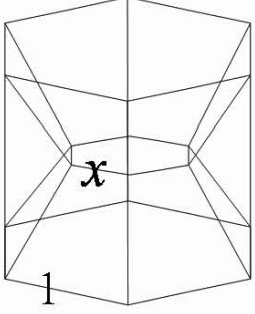
$$\Rightarrow 16\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{8}\sec 36^\circ\right)^2 \left[\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\tan 36^\circ\right)^2\right] = -\left\{x^2 - 1 + 4\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\tan 36^\circ\right)^2\right]\right\}$$

b. 實驗值

實驗次數	比值	代入所得的值
第一次	0.324142	3.323384
第二次	0.188144	3.178477
第三次	0.193053	3.182695
第四次	0.208943	3.196839
第五次	0.207636	3.195647
平均	0.224384	3.211313

(4) 正六角柱

a. 理論值 ( I )



已知正六角柱的邊長、高均為 1，其中央形成的小正六邊形長為  $x$ 。

設  $A$  = 形成的所有膜之面積  
求  $A$  存在最小值時  $x$  的值。

1. 中央正六邊形的面積 =  $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$

2. 剩餘之梯形面積

$$2 \times 6 \times \frac{1}{2} \times (x+1) \times \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2} = 3(x+1)\sqrt{3x^2 - 6x + 4}$$

3. 剩餘之三角型面積

$$6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - x = 3(1-x)$$

4. 全部的面積

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 + 3(x+1)\sqrt{3x^2 - 6x + 4} + 3(1-x)$$

5. 將A對x微分

$$\frac{dA}{dx} = 0 \text{ 時的 } x \text{ 值即為所求}$$

$$\frac{dA}{dx} = 3\sqrt{3}x + 3 \left[ \sqrt{3x^2 - 6x + 4} + \frac{(x+1)(6x+6)}{2\sqrt{3x^2 - 6x + 4}} \right] - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}x + \frac{2(6x^2 - 6x + 1)}{\sqrt{3x^2 - 6x + 4}} - 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)\sqrt{3x^2 - 6x + 4} = -(6x^2 - 6x + 1)$$

等號兩邊同時平方

$$\Rightarrow (3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1)(3x^2 - 6x + 4) = (6x^2 - 6x + 1)^2$$

$$\Rightarrow 27x^4 - (54 - 6\sqrt{3})x^3 + (33 - 12\sqrt{3})x^2 - (6 - 8\sqrt{3})x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 - \left(2 - \frac{2}{9}\sqrt{3}\right)x^3 + \left(\frac{11}{9} - \frac{4}{9}\sqrt{3}\right)x^2 - \left(\frac{2}{9} - \frac{8}{27}\sqrt{3}\right)x - \frac{1}{9} = 0$$

a. 理論值 ( II )

考量到方便的因素，在製作模型時，我們採取了底：高=為1： $\frac{3}{2}$ 的框架。

因此此處討論當底：高=為1： $\frac{3}{2}$ 時，形成的模與邊長的關係。

仿造理論值 ( I ) 的討論方式，我們可以得到全部的膜的面積A。

$$A = 3 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2(x+1)\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} + \frac{8}{5}(1-x) \right]$$

$$\frac{dA}{dx} = \sqrt{3} + 2 \left[ \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} + \frac{\left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)(x+1)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}} \right] - \frac{8}{5} = 0$$

$$\left( \sqrt{3}x - \frac{8}{5} \right) + 2 \left[ \frac{\frac{3}{4}(x-1)^2 + \frac{16}{25} + \frac{8}{4}x^2 - \frac{3}{4}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}} \right] = 0$$

b. 理論值

實驗次數	比值	代入所得到的值
第一次	0.535097	-0.07728
第二次	0.532189	-0.08372
第三次	0.544447	-0.05617
第四次	0.556793	-0.02739
第五次	0.554923	-0.03182
平均	0.54469	-0.05561

## (二) 討論

### 討論一 環境變因對形成肥皂膜的影響

#### 溶液種類

肥皂水溶液：

在肥皂水中，三角錐模型在其中形成六個三角形的肥皂膜，六個三角形膜中，和最長邊相對的頂角並在三角錐模型中交於一點。三角柱在肥皂水溶液中形成九個肥皂膜，鉛直的梯形膜共三個，傾斜並和底面其中一邊接合的三角形膜共六個。肥皂膜形式似二個鉛直方向相反的三角錐肥皂膜，以鉛直三面交線相互接合之結合。

洗碗精水溶液：

在洗碗精溶液中，三角錐模型的膜亦以六個傾斜之三角形相交於一點構成，形式和在肥皂水溶液中的相同。在洗碗精水溶液中，三角柱模型亦結構出九個膜面，其中，三個鉛直梯形，六個傾斜三角形，和肥皂水溶液中形式相同。

#### 溶液濃度

C=5：在C=5 肥皂水溶液中，三角錐模型形成六個傾斜的三角形肥皂膜，各三角形的最長邊長結構在二底面之六個邊中的其中一邊。六角柱模型形成九個肥皂膜，三個鉛直梯形，上下共六個傾斜三角形膜。形似二個三角錐鉛直反向，以

其中一角為交點的結合。

C=10：在C=10 肥皂水溶液中，三角錐模型和在C=5 肥皂溶液中形成相同形式的肥皂膜，由六個三角形構成。三角柱模型也和C=5 溶液中肥皂膜相同，三個鉛直梯形，六個等腰三角形。

C=15：在C=15 肥皂水溶液中，三角錐模型和在C=5、C=10 肥皂溶液中形成相同形式的肥皂膜，六個三角形肥皂膜。三角柱模型和C=5、C=10 溶液中肥皂膜亦相同，三個鉛直梯形，六個等腰三角形。

由溶液種類、容易濃度實驗知，不同種類的清潔劑溶液或是同種類但不同濃度的水溶液並不會改變模型中所形成膜的形式，唯因各膜的質量不同，所受到的重力影響不同，鉛直方向邊長稍有不同。然各種溶液、濃度所造成各面間互相拉扯作用的表面張力在種種溶液、濃度皆不同，但在同種溶液、濃度時便皆相等，所以當膜達成力平衡，即面積最小時，所形成的膜的模式都會相同。

## 討論二 角錐形成的肥皂膜面數

實驗數據：

角錐	三角錐	四角錐	五角錐	六角錐
形成之「鉛直」的面	3	5	7	9
形成之「非鉛直」的面	3	4	5	6
形成之總面數	6	9	12	15

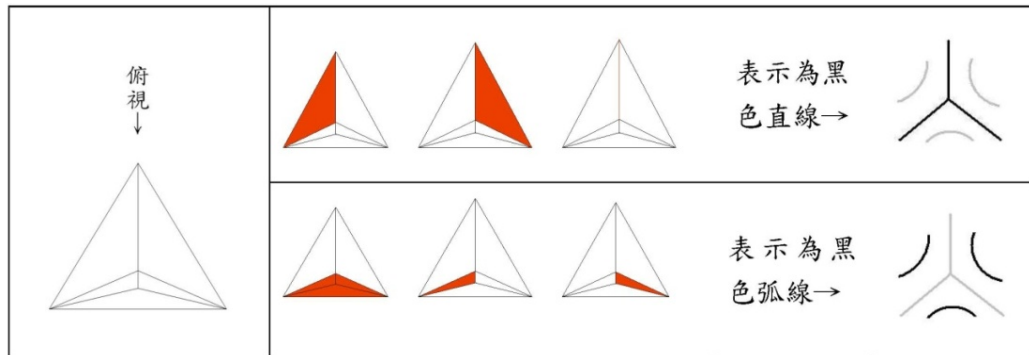
分析：


(1) 表示法說明：

自角錐之頂點向下俯視，其形成之鉛直面以直線表示；非鉛直面則以弧線標出。

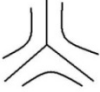
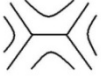




以三角錐為例：



故以  表示所有三角錐形成的膜。


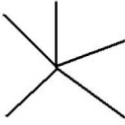
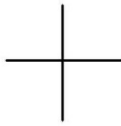
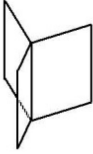
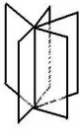
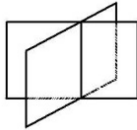
(2) 實驗結果歸納

角錐	三角錐	四角錐	五角錐	六角錐
形成的膜				

(3) 討論「鉛直」的膜（上頁表格中的直線部份）

仔細觀察錐體形成來的鉛直方向的膜則可以發現，最多只能有三個平面共線，更多平面共線或是兩平面交叉於一條直線都是不可能的。

即：

三個平面共線	多於三個平面共線	兩平面交叉
		
		
一般狀況	沒有出現	沒有出現

※然而「多於三個平面」與「兩平面交叉」的情況並沒有明顯違反表面張力的特性之處，因此我們推測應是該兩種狀況會使得肥皂膜處在較不穩定的狀態下，容易經由搖晃、空氣流動或是其他外力而破裂，也有可能轉便為「三個平面共線」之較安定的狀態。

此處討論的前提設定在肥皂膜皆以「三個平面共線」之方式相連接，由實驗數據知三角錐、四角錐、五角錐、六角錐之「鉛直」的膜各有三片、五片、七片、九片，可以推得當情況是 $n$ 角錐時，「鉛直」的肥皂膜一共會有 $2n - 3$ 片。

(4) 討論「非鉛直」的膜（上頁表格中的弧線部分）

由實驗數據，以及綜合「(3) 討論「鉛直」的膜」鉛直面面數之結果可知，當情況是 $n$ 角錐時，「非鉛直」的面一共有 $n$ 個。

角錐	三角錐	四角錐	五角錐	六角錐
形成之「非鉛直」的面	3	4	5	6

另外，當 $n$ 大於3時，「非鉛直」的面有可能出現曲面。

(5) 結論

1.  $n$ 角錐浸入肥皂水提起後所形成膜的數量 $= (2n - 3) + n = 3n - 3 = 3(n - 1)$
2. 肥皂膜實際在空間中較傾向於以三平面共線之方式相接，而不傾向於交叉或是更多的平面共線，可能原因是後兩種情況較不安定。
3. 錐體實驗中肥皂膜可能出現曲面。

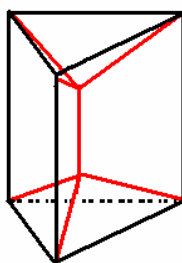
### 討論三 角柱形成的肥皂膜面數

實驗數據：

角柱	三角柱	四角柱	五角柱	六角柱
形成之「水準」的面（中央）	0	1	1	1
形成之「鉛直」的面（三角形）	3	4	5	6
所餘之梯形的面	6	8	10	12
形成之總面數	9	13	16	19

討論四角柱、五角柱、六角柱，很明顯地這三種類型的框架都會使得肥皂膜在大約一半高之處，形成一片與底面形狀相同的、且平行底面的肥皂膜。再以此面出發，向上向下各延伸出 $n$ 片梯形肥皂膜與底邊連接、側向延伸出 $n$ 片三角形肥皂膜與側邊連接（ $n$ 為邊數），故一共形成 $3n+1$ 片肥皂膜。

然而三角柱的情況似乎較特殊，並不在我們的預期範圍之內。照上段所述，三角柱應該要在其中央約一半處形成一三角形的膜，上下各延伸出三片肥皂膜與兩底底邊連接、一共形成10片膜才符合推論。但如左圖所示，三角柱一共形成9片肥皂膜。



另外，實驗時發現當柱體框架較大，讓兩底面平行水平面放置時，中央的肥皂膜將會略偏向下方而不會在正中央。推測是肥皂膜的重量大於其表面張力、將其向下拉的緣故。但在不考慮重力場的情況下，根據，我們推測中央形成的肥皂膜應該還是會位於高的一半之處。

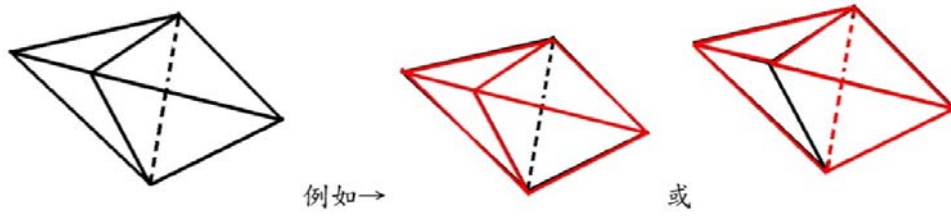
#### 討論四 其他框架形成之肥皂膜形狀之比較

##### 第一部分 雙三角錐

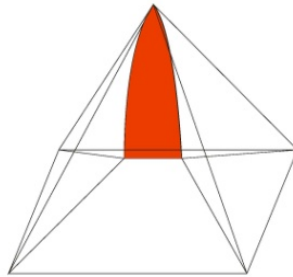
雙三角錐框架一共形成十二個面，如我們先前已經敘述過的。十二個面中有曲面、平面、直線與弧線，看似較模式單純的柱體、錐體要更為複雜且不具規律。

然而經過比較，我們發現仍有規則存在其中，能夠解釋其形成這樣形式肥皂膜的理由。

當我們將雙三角錐視為三個四角錐的組合體（如圖）。



且由四角錐的規則可知，單一四角錐形成的肥皂膜應存在一面邊為弧邊的平面，自其頂點延伸向下如附圖。



以這樣的規則組合三個四角錐於雙三角錐的中心，可知有三面如上圖紅色部份的肥皂膜必相交如下圖以「□」表示部份的膜。



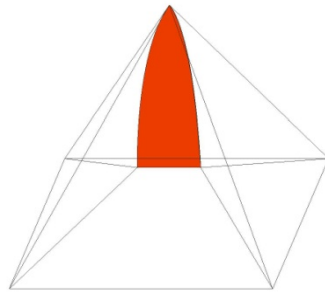
即當我們將雙三角錐形成的部份肥皂膜，視為由一個近似於四角錐的框架所形成，一切都自然許多。



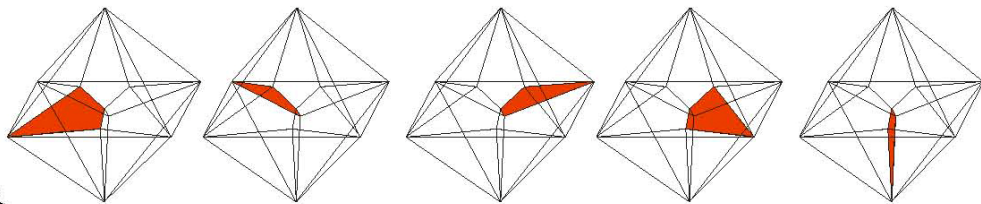
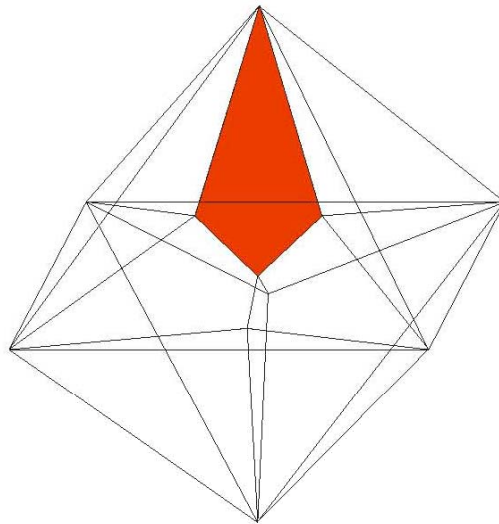
## 第二部份 正八面體

有了討論雙三角錐的經驗，我們將同樣的方法應用至正八面體上。正八面體可以視為由兩個正四角錐組合而成，因其有六個頂點，所以在形成肥皂膜時，必相當有六個四角錐同時形成肥皂膜，互相影響。

因有六個四角錐形成互相影響、拉扯的肥皂膜，所以同理應存在六個相當於四角錐應有的弧邊的面（如圖）。



只是我們觀察到，當正八面體形成肥皂膜時，這些面似乎會因相互拉扯而變形，而形成如附圖所示的，三角形的面。



以及

## 討論五 三角錐的分析

a. 理論值

如圖，設形成的膜總面積為 $A$

$$1. \triangle PAO + \triangle PBO + \triangle PCO$$

$$3 \times \frac{1}{2} \times x \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

2. 設 $H$ 為三角錐的高

$$\Rightarrow H = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}$$

$$H - x = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - x$$

設 $h$ 為 $\triangle PAB$ 的高

$$\Rightarrow h = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + x^2 - 2x\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - \frac{1}{4}}$$

$$\triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCA$$

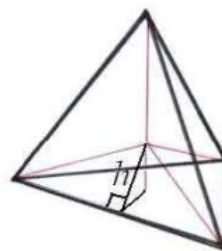
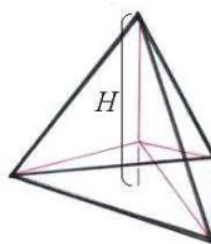
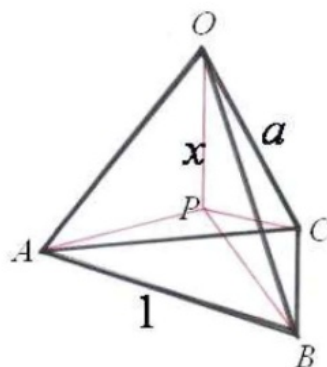
$$= 3 \times \frac{1}{2} \times 1 \times h = \frac{3}{2} \sqrt{a^2 + x^2 - 2x\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - \frac{1}{4}}$$

$$3. \text{可得總面積 } A = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2} \sqrt{a^2 + x^2 - 2x\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left( x + \sqrt{3a^2 + 3x^2 - 6x\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - \frac{3}{4}} \right)$$

將 $A$ 微分以求極值

$$\frac{dA}{dx} = 1 + \frac{6x - 6\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}}{2\sqrt{3a^2 + 3x^2 - 6x\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - \frac{3}{4}}} = 0$$



$$\Rightarrow \sqrt{3a^2 + 3x^2 - 6x\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - \frac{3}{4}} = -3x + 3\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}$$

$$3a^2 + 3x^2 - 6x\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - \frac{3}{4} = 9x^2 - 18x\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} + 9a^2 - 3$$

$$8x^2 - 16\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} + 8a^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} \pm \frac{\sqrt{6}}{12}$$

4.

$$\therefore H = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}$$

$$\therefore x = H \pm \frac{\sqrt{6}}{12}$$

已知  $x < H$

$$\therefore H + \frac{\sqrt{6}}{12} \text{ 不合}$$

$$\Rightarrow x = H + \frac{\sqrt{6}}{12} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{6}}{12}$$

由上述推論可知：

$$1. \text{ 點 } P \text{ 至底面三角型 } ABC \text{ 的距離} = H - \left( H - \frac{\sqrt{6}}{12} \right) = \frac{\sqrt{6}}{12} = 1 \times \frac{\sqrt{6}}{12}$$

∴ 底面為邊長為  $a$  的正三角形的三角錐，其形成的六面肥皂膜的交會點  $P$  至底

$$\text{面三角型 } ABC \text{ 的距離} = a \times \frac{\sqrt{6}}{12}$$

2. 由1.之結論可知三角錐的比例無關乎底下三片三角形的肥皂膜的大小，只與

稜長有關。

b. 實驗值

我們將實驗五的第二組實驗( $\frac{a}{b}=1.6$ 、 $\frac{a}{b}=1.8$ )的框架邊長轉換為比例代入，並比較理論值與實際值的差異。雖然其中有些誤差離理論值較遠，但大多數都在可以接受的範圍內，因此我們認為，這樣的討論方式產生的理論值依舊是合理的。

(1)  $\frac{a}{b}=1.6$

實驗次數	比值	誤差
第一次	1.577383	8.6818380%
第二次	1.464855	0.9286453%
第三次	1.455484	0.2829366%
第四次	1.446999	-0.3016229%
第五次	1.582196	9.0134072%
平均	1.505383	3.7210408%

(2)  $\frac{a}{b}=1.8$

實驗次數	比值	誤差
第一次	1.743394	4.76685809%
第二次	1.51336	-9.0567164%
第三次	1.323649	-20.457162%
第四次	1.35228	-18.736572%
第五次	1.796696	7.96998048%
平均	1.545876	-7.1027224%



## 討論六 柱體形成肥皂膜的大小之分析

由「討論三 角柱形成的肥皂膜面數」知，三角柱形成肥皂膜的形式與其他邊數之柱體較為不同，且似乎無法以下列我們推導的方式加以分析，故此處暫不討論。

由實驗六的各項數值可知，我們的理論與實際上實驗所得到的數值有相當高的符合度，即理論推導的方法是符合事實的。因此在這裡額外討論當角柱邊數 $n$ ，邊長、高均為1時，其正中央形成平行底面的膜邊長的情況。

理論推導：

一正 $n$ 角柱的邊長、高均為1，其正中央形成平行底面的膜邊長為 $x$

1. 邊長為 $x$ 的正 $n$ 邊形，其面積為

$$= n \times \frac{1}{2} \times x \times \frac{x}{2 \tan \theta} = \frac{nx^2}{4 \tan \theta}$$

2. 所剩之梯形部分面積

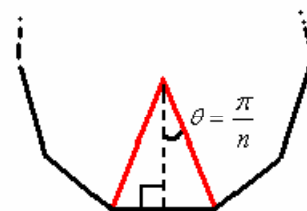
$$= 2n \times \frac{1}{2} \times (x+1) \times \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2 \tan \theta}\right)^2} = \frac{n(x+1)}{\tan \theta} \sqrt{x^2 - 2x + \sec^2 \theta}$$

3. 所剩之三角形部分面積

$$= n \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1-x}{2 \sin \theta} = \frac{n(1-x) \sec \theta}{4 \tan \theta}$$

4. 面積總和

$$A = \frac{nx^2}{4 \tan \theta} + \frac{n(x+1)}{\tan \theta} \sqrt{x^2 - 2x + \sec^2 \theta} + \frac{n(1-x) \sec \theta}{4 \tan \theta}$$



5. 將 $A$ 微分以求極值

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + 2(\sqrt{x^2 - 2x + \sec^2 \theta} + \frac{(x+1)(2x-2)}{2\sqrt{x^2 - 2x + \sec^2 \theta}}) + (-\sec \theta) = 0$$

$$\Rightarrow 12x^4 - (24 - 4 \sec \theta)x^3 + (11 \sec^2 \theta - 8 \sec \theta)x^2 + (4 \sec^3 \theta - 14 \sec^2 \theta + 16)x + (4 \tan^4 \theta - \sec^4 \theta) = 0$$

整理後得 $x$ 滿足此項關係式

$$x^4 + \left(\frac{1}{3} \sec \theta - 2\right)x^3 + \left(\frac{11}{12} \sec^2 \theta - \frac{2}{3} \sec \theta\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} \sec^3 \theta - \frac{7}{6} \sec^2 \theta + \frac{4}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3} \tan^4 \theta - \frac{1}{12} \sec^4 \theta\right) = 0$$

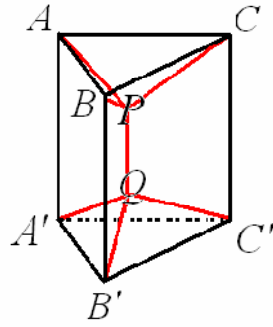
即：若一正 $n$ 角柱的邊長、高均為1，其正中央形成平行底面的膜邊長為 $x$ ，則 $x$ 滿足

$$x^4 + \left(\frac{1}{3}\sec\theta - 2\right)x^3 + \left(\frac{11}{12}\sec^2\theta + \frac{2}{3}\sec\theta\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}\sec^3\theta - \frac{7}{6}\sec^2\theta + \frac{4}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\tan^4\theta - \frac{1}{12}\sec^4\theta\right) = 0$$

#### 四、結論與應用

本研究的最終目的在於找出不同框架與行程的肥皂膜之間，究竟存在著什麼樣的關連、肥皂膜有什麼樣的特性。經由前述的六個實驗及相關的討論、分析，我們得到以下六項結論：

- (1)在「實驗一 各種環境變因對形成的膜的影響」中，我們發現使用不同種類、不同濃度的溶液，對於所形成的肥皂膜的模式並沒有顯著的影響。
- (2)在「實驗二  $n$ 角錐形成肥皂膜的形式」中，我們得到肥皂膜面數與邊數 $n$ 之間存在著「肥皂膜面數 $= 3n - 3$ 」的關係，且共用於同一條線的肥皂膜面數不超過三面。
- (3)在「實驗三  $n$ 角柱形成肥皂膜的形式」中，我們得到肥皂膜面數與邊數 $n$ 之間存在著「肥皂膜面數 $= 3n + 1$ 」的關係，但其中三角柱除外，一共與形成了9個面。
- (4)在「實驗四 其他框架形成之肥皂膜」中，我們得到雙三角錐形成的面數為12，正八面體形成的面數為18。其中這項結果亦可以由將框架分成較簡單的錐體討論得到。
- (5)在「實驗五 探討肥皂膜長度與框架比例——錐體」中，我們得到這樣的結論：假設一個底面（正三角形）邊長為1的三角錐，其形成六面肥皂膜的交會點至底面的距離「固定」為 $\frac{\sqrt{6}}{12}$ ，即與角錐的高無關。
- (6)在「實驗六 探討肥皂膜長度與框架比例——柱體」中，我們分析了各種邊數的柱體，其形成之肥皂膜的長度與框架大小的關係。



1.三角柱形成的肥皂膜滿足這樣的關係式： $d(P, \text{平面}ABC) = \frac{\sqrt{6}}{12}$

2.正立方體滿足這樣的關係式：

$$x^4 + \left(-2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)x^3 + \left(\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)x^2 + \left(-1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)x = 0$$

3.底、高均為 1 的正五角柱滿足這樣的關係式：

$$x^4 + \left(\frac{1}{3}\sec 36^\circ - 2\right)x^3 + \left(\frac{11}{12}\sec^2 36^\circ - \frac{2}{3}\sec 36^\circ\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}\sec^3 36^\circ - \frac{7}{6}\sec^2 36^\circ + \frac{4}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\tan^4 36^\circ - \frac{1}{12}\sec^4 36^\circ\right) = 0$$

4.底、高均為 1 的正六角柱滿足這樣的關係式：

$$x^4 + \left(\frac{2}{9}\sqrt{3} - 2\right)x^3 + \left(\frac{11}{9} - \frac{4}{9}\sqrt{3}\right)x^2 - \left(\frac{2}{9} - \frac{8}{27}\sqrt{3}\right)x - \frac{1}{9} = 0$$

5.底、高均為 1 的正  $n$  角柱滿足這樣的關係式：

$$x^4 + \left(\frac{1}{3}\sec\theta - 2\right)x^3 + \left(\frac{11}{12}\sec^2\theta + \frac{2}{3}\sec\theta\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}\sec^3\theta - \frac{7}{6}\sec^2\theta + \frac{4}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\tan^4\theta - \frac{1}{12}\sec^4\theta\right) = 0$$

在本次的研究暫告一段落後，我們認為這個主題仍有許多發展的空間。例如重力場存在的條件下，形成的膜的邊長會如何被其影響；四角柱中央出現的方形肥皂膜會平行與哪一組平面？是隨機？抑或與平面的面積有關？這些問題都還有待討論、實驗。

另外在應用的方面，目前我們認為這樣的研究主題最有機會朝材料相關領域發展。如果存在一種能夠乾掉、硬化的溶劑，在製作複雜幾何形狀時便不必花費太長的時間於測量角度、將平面互相嵌合。這項應用在大尺度時聽似沒有太大的

實用性，然而在較小的尺度時，我們相信它將會有其用處。雖然在更微小的尺度時（例如：奈米尺度），肥皂膜存在的形式可能會與我們所認知的有很大的差異，然而我們認為，在被限制的範圍內，我們的假定仍然會正確。

這次的研究只是一個開始。由一支影片出發，我們將已經有人觀察到的現象以實驗加以證實並稍加歸納，期待往後仍有機會自己、或是看見有人繼續朝這一方面做更深入、更完整的鑽研。

## 五、參考文獻

Munson, B. R., Young, D. F., and Okiishi, T. H., Fundamentals of Fluid Mechanics, 3rd Ed., John Wiley & Sons, Inc., 1998.