2010年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

編 號：010037-17

作品名稱

架構「類球狀多面體」的理論與實務

得獎獎項

數學科大會獎三等獎

學校名稱：新竹市立虎林國中

作者姓名：溫家宜、許峻彰

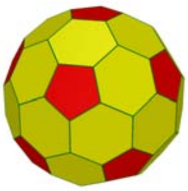
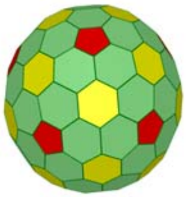
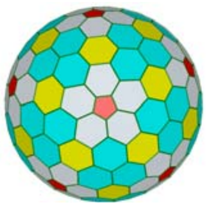
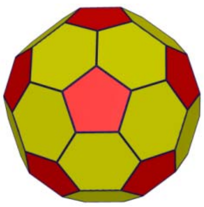
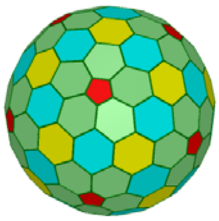
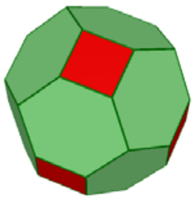
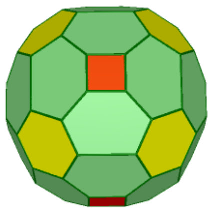
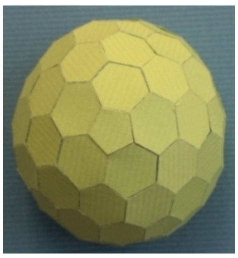
指導老師：孟慶台

關鍵詞：類球狀多面體、 削皮法、k 值法

摘要

本報告的目的在：電腦 Cabri 3D 軟體上模擬出「類球狀多面體」（圖 1-8），並實作其模型（圖 9）與它們的星體（圖 10）。「類球狀多面體」的定義如下：可由「正多面體」切出之多面體，且需滿足以下性質：（1） 除「正多邊形」外，其餘皆是「六邊形」。（2）鳥瞰每個「正多邊形」時，形狀皆保持不變。（3）等長的稜數最多。

以「正十二面體」切出之「類球狀多面體」為例，（圖 1）中兩個「正五邊形」相距一個「六邊形」簡稱 A1。（圖 2-4）依序為 A2、A3 與 A5。正二十面體可切得（圖 5-6），正六面體可切得（圖 7-8），......等。（圖 9）為 A2 的實體模型，（圖 10）為 A2 的星體模型。

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>（圖 1）</td><td>（圖 2）</td><td>（圖 3）</td><td>（圖 4）</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>（圖 5）</td><td>（圖 6）</td><td>（圖 7）</td><td>（圖 8）</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">（圖 9）</td><td colspan="2">（圖 10）</td></tr>
</table>

Abstract

The focus of this report is to use the Cabri 3D software to model 「Spherical-alike Polyhedron」 and to build these real Polyhedrons and their star models . The definition of 「Spherical-alike Polyhedron」 is as follows:

Cut by the regular polyhedron, also must satisfy following aspects:

(1) Must be composed of "regular polygons" and "hexagons".

(2) Vertical view of each "regular polygon", and the shape all maintains invariably.

(3) Will have the most equi-distant edges.

For example, by cutting out of a dodecahedron, (Figure 1) will show a hexagon surounded by two pentagons to be called A1. (Figure 2-4) is to be called in the order ofA2, A3 and A5.

By cutting out of a decahedrons,we will get the result of (Figure 5-6). By cutting out of a cube, then we get (Figure 7-8), ...And so on.

(Figure 9) is a real model of A2, (Figure 10) is a star model of A2.

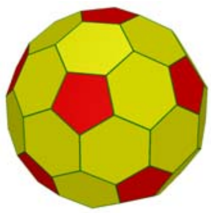
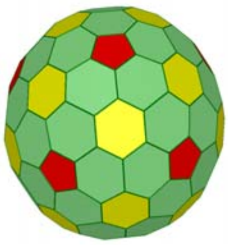
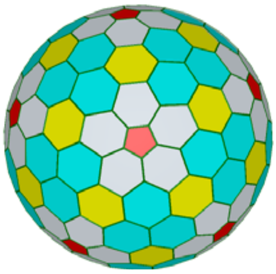
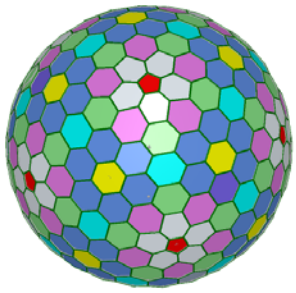
			

Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4

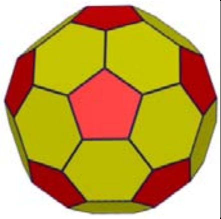
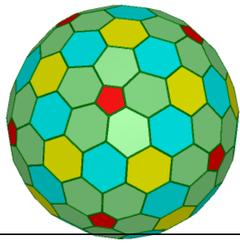
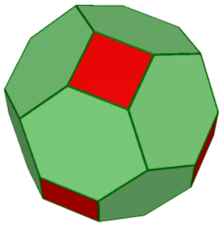
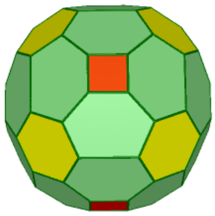

			

Figure 5	Figure 6	Figure 7	Figure 8

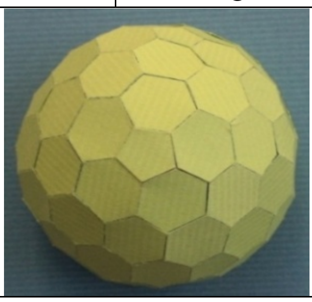
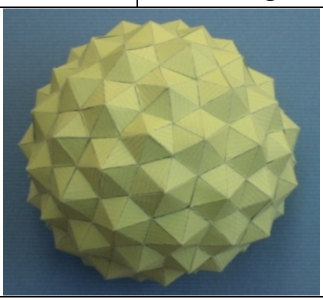
	

Figure 9	Figure 10

作者簡介

我是溫家宜，外號「乩童」。外號的由來是八年級上學期參加學校的數理探究社，社團老師上了整學期的「阿基米德多面體」，但因為用 GSP 製作「阿基米德多面體展開圖」的功力異於常人的好，結果就被同組的同學取名為「阿基米德小神童」，簡稱「基童」，但大家聽到卻以為是「乩童」，真是傷心。

其實，剛接觸多面體時，我覺得多面體很無聊，但久而久之卻發現，愈是深入了解愈是「迷戀」它。去年五月我第一次參加科展，獲得了新竹市第三名與「最佳創意獎」，延續去年無法止息的熱情，我不知天高地厚的參加了這次的國際科展。

關於家庭：

我的名字叫許峻彰，民國 82 年 10 月 22 日在新竹出生,家中成員有父母和妹妹與我、妹妹目前就讀國小，而我排行老大。

關於個性：

我的個性是比較內向的，但是還是喜歡和朋友相處在一起，對於比較熟的朋友，幾乎可以無所不談。

關於學歷：

香山國小畢業，虎林國中畢業，目前就讀新竹高中一年級。

關於興趣和專長：

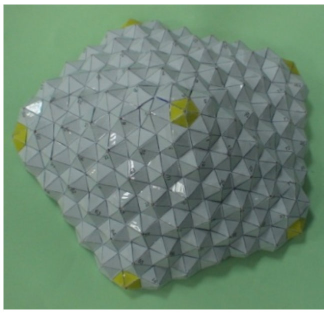
對於科學與繪畫頗有興趣，喜歡研究些神奇的東西，繪畫也有得過幾次名。

壹、研究動機

（圖 1.1）是一個極美的建築物！為了將它搬回家，我們分析出它的基本架構（圖 1.2），然後發明了一種製作展開圖的方法，取名為「削皮法」[1]，但做出的模型卻不是球狀（圖 1.3），這更加引發了我們的好奇，想要揭開它閃爍面紗背後的基石。


（圖 1.1）


（圖 1.2）


（圖 1.3）

貳、研究目的

（圖 1.1）看起來雖然十分複雜！不過我們相信 「簡單乃複雜之母！」，於是從相對於它最簡單的結構正十二面體開始研究起，最後期望架構出：製作（圖 1.2）實體模型的理論，然後再作出實體模型。

參、研究設備及器材：

Cabri 3D、 GSP 軟體、百力智慧片（圖 4.1.4）、剪裁工具、粉彩紙、膠帶。

肆、研究過程或方法

我們依據歐基里德(Euclid,約紀元前 300 年)列出的基本性質(公設)，透過它們來推理出我們所需的定理。

基本性質一：恰有唯一的直線通過空間中相異的兩點。

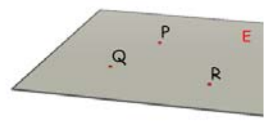
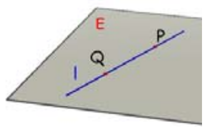
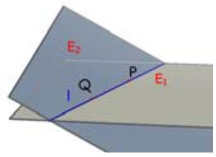
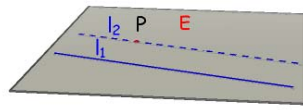
基本性質二：恰有唯一的平面通過不共線的三相異點。(圖 4.1)

基本性質三：若平面 E 包含直線 l 上相異兩點，則平面 E 包含直線 l。

（圖 4. 2）

基本性質四：任給兩平面 E_1 與 E_2，如果 E_1 與 E_2 相交，則 E_1 與 E_2 的交集至少包含相異兩點。(圖 4.3)

基本性質五（平行公設)：設直線 l_1 與點 P 都落在平面 E 上，且 P 不在直線 l_1 上。則平面 E 上恰有唯一的直線 l_2 通過 P 點且與 l_1 相互平行。(圖 4. 4)

			
（圖 4.1）	（圖 4.2）	（圖 4.3）	（圖 4.4）

基本性質三的目的是在保證平面是跟直線一樣的直（圖 4.5)。基本性質四主要是說兩個平面不會像球一樣只交於一點(相切) （圖 4.6）。基本性質五區分出空間中兩直線的平行與歪斜（圖 4.7），所以……

定義： 設 l_1 與 l_2 為空間中相異且不相交的兩直線。若 l_1 與 l_2 共面，則我們稱 l_1 與 l_2「平行」，記為 $l_1 // l_2$；若 l_1 與 l_2 不共面，則我們稱 l_1 與 l_2「歪斜」。

從上面我們可歸納出決定一平面的條件，有下列常見的四種：

1.不共線的相異三點。

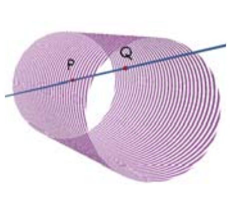
2.一直線與線外一點。

3.相交的相異兩直線。

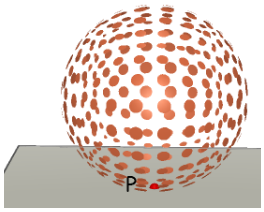
4.平行的二直線。

空間中，相異兩平面$\mathbf{E_1}$與$\mathbf{E_2}$的關係很簡單，不是相交於一線就是平行。平面$\mathbf{E_1}$與$\mathbf{E_2}$互相平行時，以$\mathbf{E_1}//\mathbf{E_2}$表示。

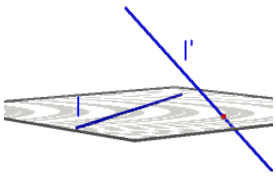
空間中，相異三平面E_1、E_2與E_3的關係則有：(1) $E_1//E_2//E_3$（圖 4.8）。(2) E_1、E_2與E_3交於一線（圖 4.9）。(3) E_1、E_2與E_3相交於兩互相平行的直線（圖 4.10）。(4) E_1、E_2與E_3兩兩相交於三互相平行的直線（圖 4.11）。(5) E_1、E_2與E_3交於一點（圖 4.12）。



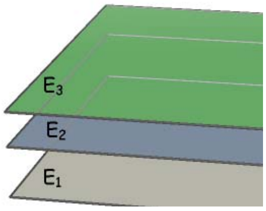
（圖 4.5）



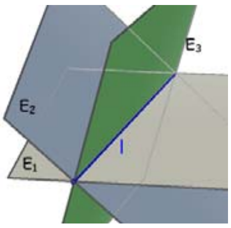
（圖 4.6）



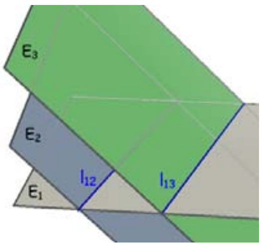
（圖 4.7）



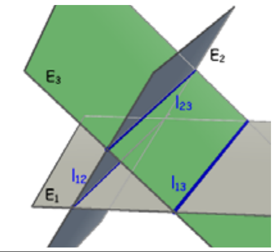
（圖 4.8）



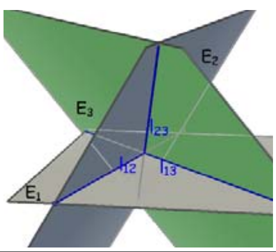
（圖 4.9）



（圖 4.10）



（圖 4.11）



（圖 4.12）

一、名詞介紹與定理說明

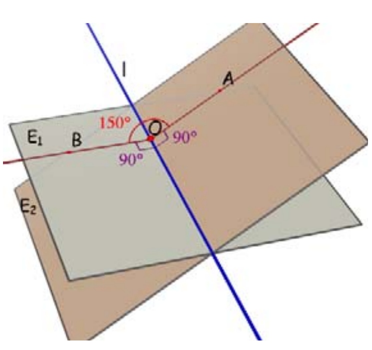
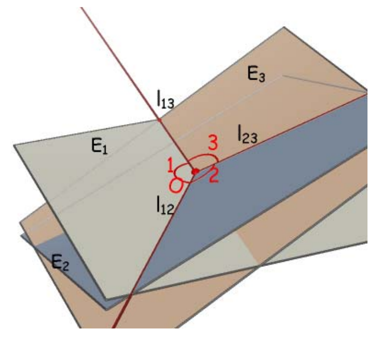
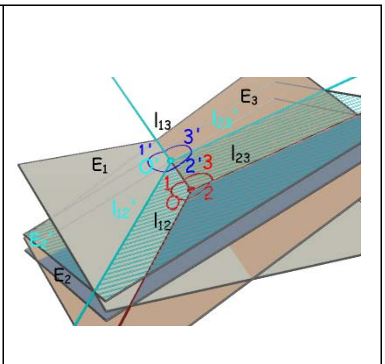
1. **兩面角**：兩平面E_1與E_2相交時，公共點構成一直線 l。兩面所夾的角稱為「二面角」，且 l 稱為這二面角的稜，而這兩個半平面則稱為這個二面角的兩邊或兩面。至於這二面角的度量到底是多少？ 我們先在 l 上任取一點 O，過 O 分別在平面 E_1 與 E_2 上作垂直於 l 的射線：$\overrightarrow{OA}$與 $\overrightarrow{OB}$，∠AOB 即為這二面角的度數（圖 4.1.1）。

2. **立體角**：三個(或以上)平面E_1、E_2與E_3交於一點 O 時，可構成一個未被分割空間的圖形全體。其中包含了頂點 O、E_1與E_2公共點構成的一射線l_{12}、E_1與E_3公共點構成一射線l_{13}、E_2與E_3公共點構成一射線l_{23}。由於三交線均不共面，但l_{12}與l_{23}在平面E_2上，又共一頂點 O，故它們可形成一個夾角，因為此角在E_2上，我們不妨稱它為∠2，依此類推，可衍生出∠1 與∠3，未來我們直接稱這些角為頂點

O 的接角或頂角（圖 4.1.2）。

【定理一】已知共一點 O 的三面$\mathbf{E_1}$、$\mathbf{E_2}$、$\mathbf{E_3}$，當兩面保持不動，一面平行移動時，新的相對接角度數不變。

證明：當$\mathbf{E_1}$與 $\mathbf{E_3}$不變時，作一平面$\mathbf{E_2}'//\mathbf{E_2}$，(圖 4.1.3)，則原來$\mathbf{E_1}$與 $\mathbf{E_3}$的交線 $\mathbf{l_{13}}$不變， $\mathbf{E_2}$'與$\mathbf{E_1}$形成新交線$\mathbf{l_{12}}$'，在$\mathbf{l_{12}}$與$\mathbf{l_{12}}$'所形成的平面上，因為 $\mathbf{l_{12}}$// $\mathbf{l_{12}}$'，故∠1'=∠1（同位角），同理可得∠3'=∠3。因為∠2'可視為∠2 從點 O 到點 O'的平移，亦即為一種「剛體運動」，故∠2'=∠2。

		
（圖 4.1.1）	（圖 4.1.2）	（圖 4.1.3）

3. 多面體：空間中由不共面的多邊形所圍成封閉區域的整體，稱為「多面體」。

不共面的公共邊為其多面體的「稜」；

稜的端點為其多面體的「頂點」；

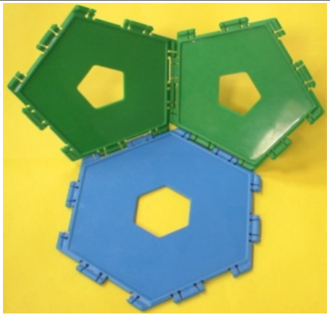
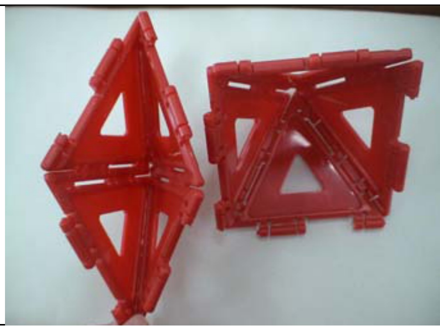
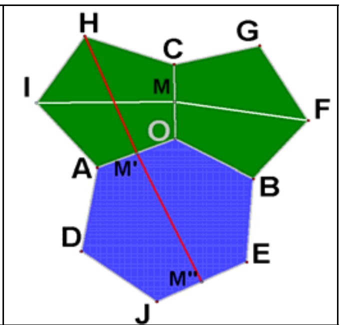
同平面的稜所圍成的部分為其多面體的「面」。

【公理一】立體角的唯一性：已知三個接角度數和小於 360°的多邊形可組成唯一的立體角。

例如（圖 4.1.4），是由兩個正五邊形與一個正六邊形所組成的立體角，它們像三角形一樣，自由度為 0，堅若磐石。（圖 4.1.5）則像四邊形，自由度為 1，所以不穩定。既然三面很穩定，所以形成後，若想繼續擴充成多面體(封閉)，又必須接上的是〝一個〞多邊形時，我

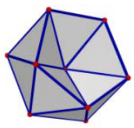
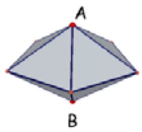
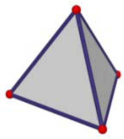
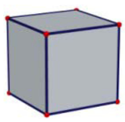
們很好奇它必須接上的接角度數。

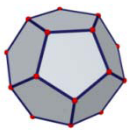
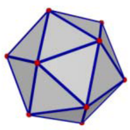
以（圖 4.1.4）為例，用（圖 4.1.6）說明，我們發現：∠HCG=120°，∠FBE=108°，∠IAD=108°，這是因為我們不妨想像有一個對稱平面，過一頂點 H、二稜中點 M’與 M”，則∠IAD 會對稱到∠COB 之故，其它亦可依此類推得知。

		
（圖 4.1.4）	（圖 4.1.5）	（圖 4.1.6）

4. **凸多面體**：把多面體的任何一個面伸展為平面時，如果整個多面體都是在這個平面的同側，這樣的多面體我們稱為「凸多面體」。 反之為「凹多面體」。例如：（圖 4.1.7）為一凹多面體。（圖 4.1.8）為一凸多面體，點 A 與點 B 接了五個面，其餘五個頂點都接了四個面。

5. **正多面體**：指各面都是全等的正多邊形且每一個頂點所接的面數都是一樣的凸多面體。已知只有五種。正四面體（圖 4.1.9）、正六面體（圖 4.1.10）、正八面體（圖 4.1.11）、正十二面體（圖 4.1.12）、正二十面體（圖 4.1.13）。

			
（圖 4.1.7）	（圖 4.1.8）	（圖 4.1.9）	（圖 4.1.10）

		
（圖 4.1.11）	（圖 4.1.12）	(圖 4.1.13）

6. 二面角的度數：

（圖 4.1.14)若一立體角是由接角$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$三個多邊形的角度所組成，作一兩邊平行稜 v 的四邊形，即可算出 $\boldsymbol{\alpha}$ 角所對之兩面角的度數 $\boldsymbol{\theta}$，如下：

x=$\overline{\mathbf{AB}}$/ cos($\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{90°}$)= $\overline{\mathbf{AB}}$/ sin$\boldsymbol{\gamma}$， y= $\overline{\mathbf{BC}}$ / sin$\boldsymbol{\beta}$，.........〔1〕(圖 4.1.15）

當$\boldsymbol{\gamma}$＞90° 時，x'=$\overline{\mathbf{AB}}$tan($\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{90°}$)=－ $\overline{\mathbf{AB}}$/tan$\boldsymbol{\gamma}$；

$\boldsymbol{\gamma}$=90° 時，x'=$\mathbf{0}$；$\boldsymbol{\gamma}$＜90° 時，x'= $\overline{\mathbf{AB}}$/tan$\boldsymbol{\gamma}$ 。

$$\mathbf{b^2=x^2+y^2-2xycos\alpha=\frac{\overline{AB}^2}{sin^2\gamma}+\frac{\overline{BC}^2}{sin^2\beta}-\frac{2\overline{AB}\cdot\overline{BC}cos\alpha}{sin\gamma sin\beta}}$$

$$=\mathbf{\frac{\overline{AB}^2sin^2\beta+\overline{BC}^2sin^2\gamma-2\overline{AB}\cdot\overline{BC}sin\gamma sin\beta cos\alpha}{sin^2\gamma sin^2\beta}}$$ ，.........〔2〕

若令$\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{BC}}=\mathbf{1}$，則 x=$\mathbf{1}$/ sin$\boldsymbol{\gamma}$， y= $\mathbf{1}$/ sin$\boldsymbol{\beta}$。，

$$\mathbf{b^2=x^2+y^2-2xycos\alpha=\frac{1}{sin^2\gamma}+\frac{1}{sin^2\beta}-\frac{2cos\alpha}{sin\gamma sin\beta}=}$$

$$\mathbf{\frac{sin^2\beta+sin^2\gamma-2sin\gamma sin\beta cos\alpha}{sin^2\gamma sin^2\beta}}$$

$$c=|\mathbf{y'-x'}|=|\mathbf{1/tan\beta-1/tan\gamma}|=\left|\mathbf{\frac{cos\beta sin\gamma-sin\beta cos\gamma}{sin\beta sin\gamma}}\right|=$$

$$\left|\mathbf{\frac{sin\,(\gamma-\beta)}{sin\beta sin\gamma}}\right|$$.........〔3〕，

$$\mathbf{a^2=b^2-c^2=\frac{sin^2\beta+sin^2\gamma-2sin\gamma sin\beta cos\alpha-sin^2\,(\gamma-\beta)}{sin^2\gamma sin^2\beta}}$$，（圖 4.1.16）

【公式一】$\boldsymbol{\theta}=$

$$\mathbf{cos^{-1}(1-\frac{a^2}{2})=cos^{-1}(1-\frac{sin^2\beta+sin^2\gamma-2sin\gamma sin\beta cos\alpha-sin^2\,(\gamma-\beta)}{2sin^2\gamma sin^2\beta})}$$

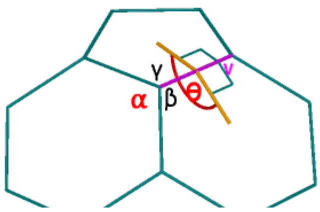
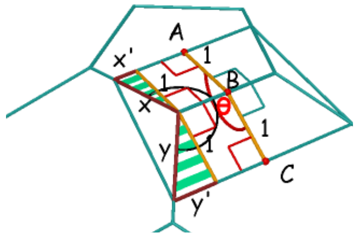
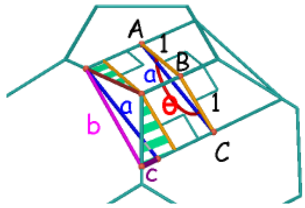
【公式二】當$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$時，化簡得 $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{cos^{-1}(\frac{sin^2\beta+cos\alpha-1}{sin^2\beta})}$（圖 4.1.14）

當$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$時，化簡得 $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{cos^{-1}(\frac{sin^2\alpha+cos\alpha-1}{sin^2\alpha})}$

另外由〔1〕可明顯推出：

【定理二】已知$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$， 若 $\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{BC}}$，則 x=y；（圖 4.1.15）

反之亦成立，若$\mathbf{x}=\mathbf{y}$，則$\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{BC}}$。

		
（圖 4.1.14）	（圖 4.1.15）	（圖 4.1.16）

例二：（1）正四面體中$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{60°}$，兩面角$\boldsymbol{\theta}=\mathbf{cos^{-1}}\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1-cos\alpha}}{\mathbf{sin^2\alpha}}\right)\fallingdotseq\mathbf{70.53°}$。

（2）正六面體中$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{90°}$，兩面角$\boldsymbol{\theta}\fallingdotseq\mathbf{90°}$。

（3） 正十二面體中$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{108°}$，兩面角$\boldsymbol{\theta}\fallingdotseq\mathbf{116.57°}$。

7. 平行稜切面

當我們要切割一個多面體的稜，並想保持盡可能的對稱時，很自然的會選擇用一個平面，且此平面與多面體相交的兩線與要切掉的稜平行，因為這樣才不會歪掉。切完後原來在多面體上的一條稜就變成了一個梯形的面，我們稱這個平面為「平行稜切面」。因為我們將討論的切面皆滿足此「平行」的性質，故我們將省略「平行」二字，直接以「稜切面」稱之。同時為方便講解與不混淆下，我們以切完後的梯形表示這個切面，也就是如（圖 4.1.17）中的梯形（矩形）AA’C’C 與 E_1 皆稱「稜切面」。實作「稜切面」時，「平面」會比「梯形」來得容易操作。

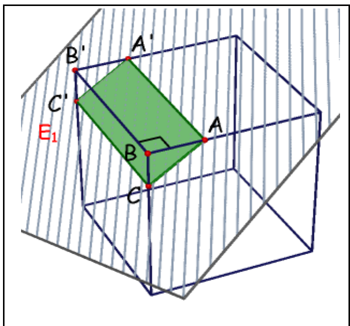
（圖 4.1.18）中點 A、B 與 C 分別同時為兩個「稜切面」的一個端點時，我們稱這種現象為「共端點」；反之，即非「共端點」（圖 4.1.25）。

【定理三】一頂點的三個「稜切面」若「共端點」（圖 4.1.18），且端點分別為點 A、B 與 C，則此三個「稜切面」，必交於一點 O（圖 4.1.19），且此交點 O 為$\overline{\mathbf{HC}}$、$\overline{\mathbf{BF}}$與$\overline{\mathbf{AG}}$的

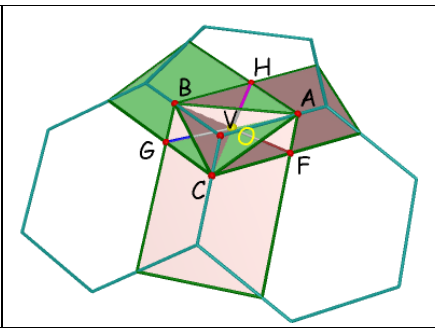
中點。

證明：首先（圖 4.1.18）中的三個「平行稜切面」很明顯的是屬於必交於一點的關係。然後，因為四邊形 AHGC 與四邊形 BCFH 不平行（圖 4.1.19），所以必交於一線段$\overline{\mathbf{HC}}$。同理四邊形 AHGC 與平行四邊形 ABGF 也會交於一線段$\overline{\mathbf{AG}}$。兩線段的交點也就是三面的交點 O。

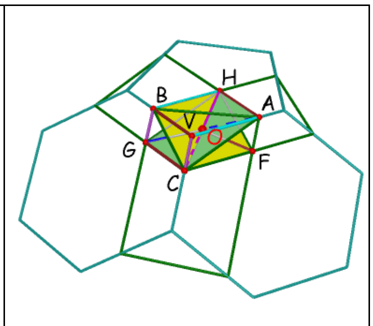
由於 AHBV 與 BGCV 皆為平行四邊形，所以 $\overline{\mathbf{AH}}=\overline{\mathbf{BV}}=\overline{\mathbf{GC}}$ 且$\overline{\mathbf{AH}}//\overline{\mathbf{BV}}//\overline{\mathbf{GC}}$，故四邊形 AHGC 為平行四邊形，兩對角線互相平分。



(圖 4.1.17)



(圖 4.1.18)



（圖 4.1.19）

「稜切面」不一定要「共端點」，但從【定理一】可得

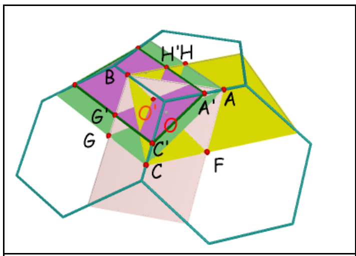
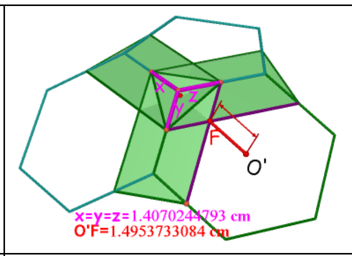
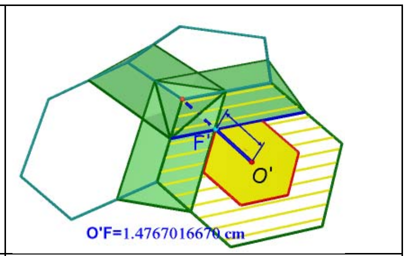
【定理四】「稜切面」平行移動時相對的夾角度數不變。（圖 4.1.20）

例如：（圖**4.1.22**）中∠HOG=∠H'O'G'， ∠GOF=∠G'O'F'， ∠HOF=∠H'O'F'。

8. 等長稜切面

當我們實作想要對稱時，很自然的會想到令$\mathbf{x}=\mathbf{y}=\mathbf{z}$（圖**4.1.21**），再做「稜切面」切掉，這種切面我們稱「等長稜切面」，點 F 為兩稜切面的交點。若將六邊形"等比例縮小" 至一邊與稜切面的一邊重疊時，我們發現小六邊形的頂點 F'與點 F 並不重疊。這樣的結果表示若原六邊形等邊長時，切完後的小六邊形就不一定等邊長了。（圖

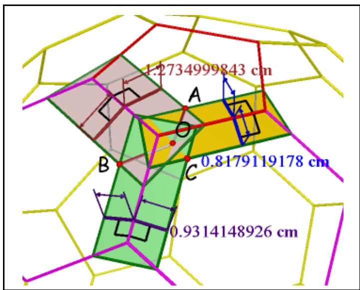
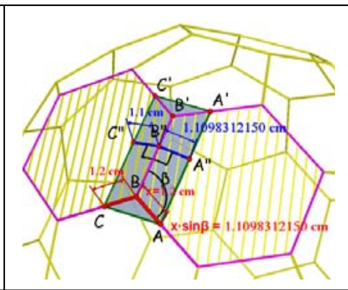
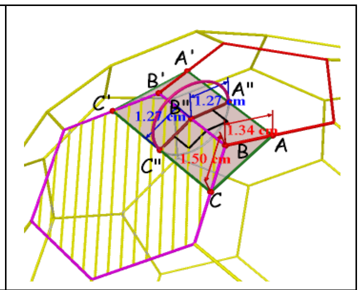
4.1.22）

		
（圖 4.1.20）	（圖 4.1.21）	（圖 4.1.22）

＊由於我們的目標「架構出製作實體模型的理論」過於龐大，所以過程中有很多與實作模型無關的實驗是直接〝站在巨人 Cabri 3D 的肩膀上〞，而不加以證明。

9. 等距稜切面

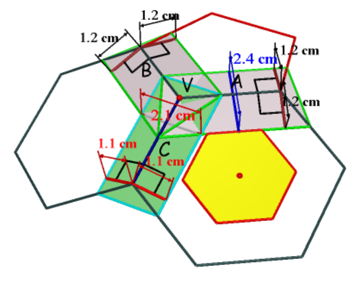
試過了「等長稜切面」，不盡完美後，我們進一步的想到了「等距」。換句話說，可先做出稜上任意一點的兩面角，然後等距的將稜平行切掉，我們稱這種切面為「等距稜切面」。（圖 4.1.23）

		
（圖 4.1.23）	(圖 4.1.24)	(圖 4.1.25)

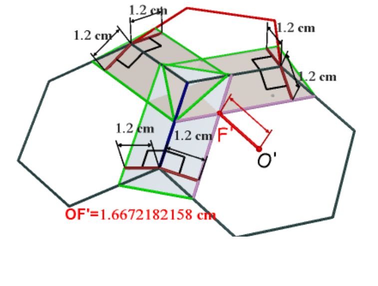
【定理二】告訴我們對接角相等的兩多邊形做「等距稜切面」時很方便，如（圖 4.1.24）直接在頂點 B 的兩稜取$\overline{\mathbf{BC}} = \overline{\mathbf{BA}}$，再過點 C、A 做平行$\overline{\mathbf{BB'}}$的面即可。但接角不相等時，如(圖 4.1.25)$\overline{\mathbf{A''B''}} = \overline{\mathbf{B''C''}}$，但$\overline{\mathbf{BC}} \neq \overline{\mathbf{BA}}$。不過作圖也不麻煩，直接以$\overline{\mathbf{BB'}}$為中心軸，$\overline{\mathbf{A''B''}}$為半徑作一圓即可。

當我們引申到三稜切面「共端點」∠AVC=∠BVC≠∠AVB 時，若兩接角度數一樣則兩等距的長度也相等，接角度數不一樣則等距的長度就不相等（圖 4.1.26）。同時與（圖 4.1.21-22）一樣，這種切面

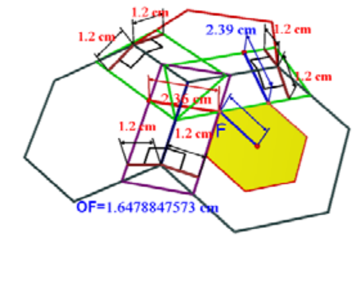
很明顯與原多邊形不相似。（圖 4.1.26）



（圖 4.1.26）



（圖 4.1.27）

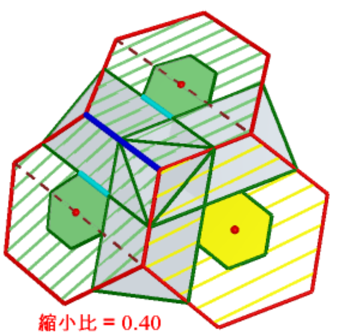


（圖 4.1.28）

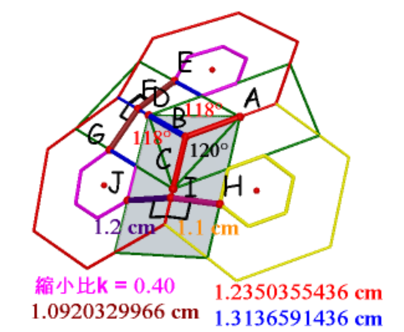
若繼續實驗，修改成三稜的等距長度皆相等時，則不「共端點」（圖 4.1.27），因為 $\overline{\mathbf{OF}}\neq\overline{\mathbf{OF'}}$（圖 4.1.27-28），所以這種切面也與原多邊形不相似。

10. 等比稜切面

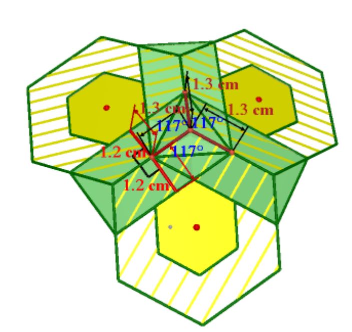
最後，既然希望能將原邊長相等的多邊形，切完後的面仍維持等長，何不乾脆就先將三個原多邊形等比例的縮小，再以縮小的兩邊形成的面為「稜切面」將稜切掉，切完後不就留下了等比縮小後的多邊形。如此”能繼承祖先優良傳統”的切面我們稱為「等比稜切面」。（圖 4.1.29）兩全等的多邊形如（圖 4.1.30），若用「等比稜切面」切相交的稜，則 $\overline{\mathbf{BC}}=\overline{\mathbf{BA}}$，$\overline{\mathbf{EF}}=\overline{\mathbf{FG}}$；但接角不相等時，則 $\overline{\mathbf{AB}}\neq\overline{\mathbf{BD}}$，同時 $\overline{\mathbf{HI}}\neq\overline{\mathbf{IJ}}$。



（圖 4.1.29）



（圖 4.1.30）

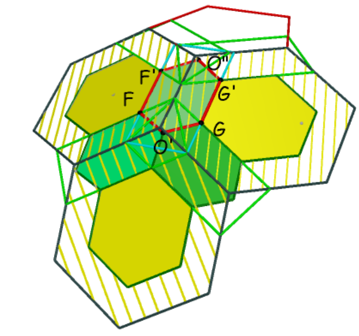


（圖 4.1.31）

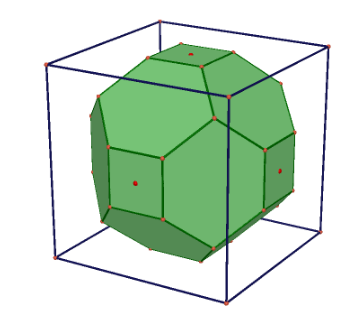
11. 切面的選擇：

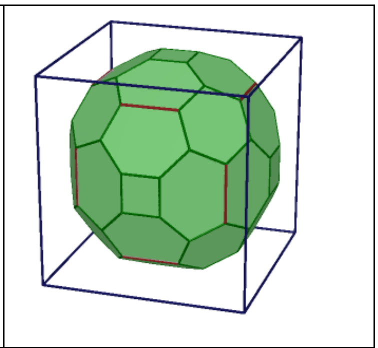
當一個立體角接的三個面全等時，「等比稜切面」、「等長稜切面」與「等距稜切面」重疊，所以用哪種方法都好（圖 4.1.31）。同時不

論哪種切法，只要使用的是「稜切面」，稜就會被切出一個六邊形（圖 4.1.32）。整體來看，可將稜切的十分對稱（圖 4.1.33）。除了切稜外，亦可增加切頂點，將一個個的頂點用「正六邊形」切出，則結構亦會很對稱（圖 4.1.34）。為區分兩者，以下我們簡稱只切稜的為「切稜」，加入切頂點的則簡稱為「切頂點」。



(圖 4.1.32)


(圖 4.1.33)


（圖 4.1.34）

12. 類球狀多面體：

可由正多面體切出之多面體，且需滿足以下性質：

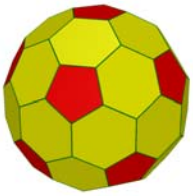
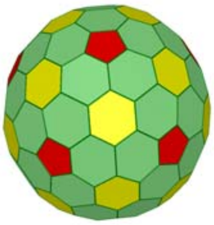
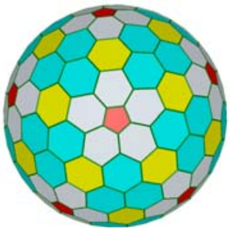
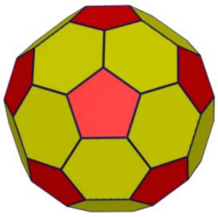
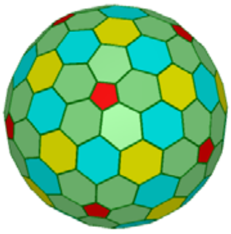
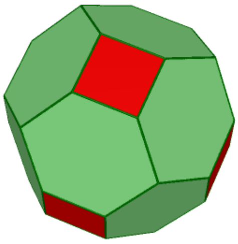
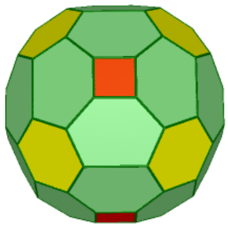
（1） 除「正多邊形」外，其餘皆是「六邊形」。

（2）鳥瞰每個「正多邊形」時，形狀皆保持不變。

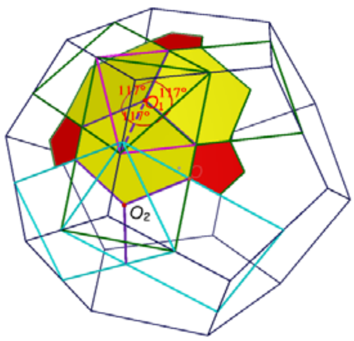
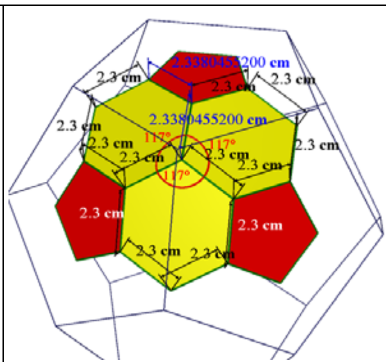
（3）等長的稜數最多。

以由正十二面體切出之「類球狀多面體」為例，其中包含了十二個「正五邊形」，相鄰的兩個正五邊形所夾之六邊形數皆固定。所以我們又可分：相距一個「六邊形」的簡稱 A1（圖 4.1.35）。相距兩個「六邊形」的稱 A2（圖 4.1.36），依此類推 A3（圖 4.1.37）、A5（圖 4.1.38）。

正二十面體可切得（圖 4.1.39-40）。正六面體可切得（圖 4.1.41-42）。同理亦可推到其它正多面體上，造出很多「類球狀多面體」。

			
（圖 4.1.35）	（圖 4.1.36）	（圖 4.1.37）	（圖 4.1.38）
			
（圖 4.1.39）	（圖 4.1.40）	（圖 4.1.41）	（圖 4.1.42）

討論至此，我們發現很容易用「等比稜切面」做到（圖 4.1.43），但要做到滿足「類球狀多面體」的性質三時（圖 4.1.44），就要繼續問：縮小的 k 倍為何？

	
（圖 4.1.43）	（圖 4.1.44）

13. k 值法

切稜我們以正十二面體為例（圖 4.1.45），切頂點則以正六面體為例（圖 4.1.46），加以說明，如下：

1. 首先在正十二面體的一頂點上造出三「等比稜切面」，即可知接角度數。

再在平面上造一個正五邊形，並利用前面求出的接角度數造一個與正五邊形等長的六邊形（圖 4.1.45 左下方），如此即可知道原來要正五邊形與所需六邊形邊長相等時的一個不變比例：$\frac{y'}{x'}$，將它放回原多面體上即可看出

$\frac{y'}{x'}=\frac{y}{x}$。…… (1)

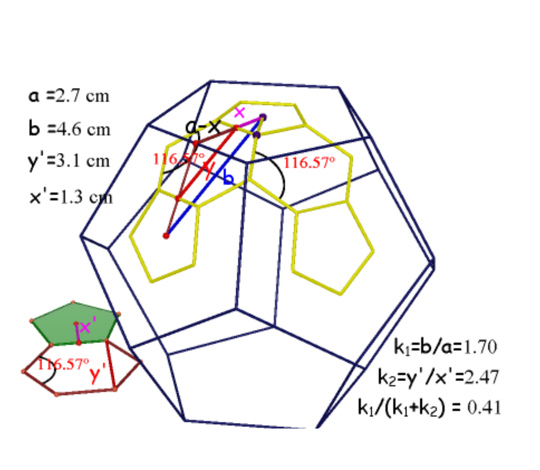
另外因為 b 與 y 平行，所以 $\frac{b}{a}=\frac{y}{a-x}$ 。 …… (2)

令$\frac{y'}{x'}=k_2$，$\frac{b}{a}=k_1$代入(1)、(2)可得 y= k_2x =$k_1(a-x)$，則

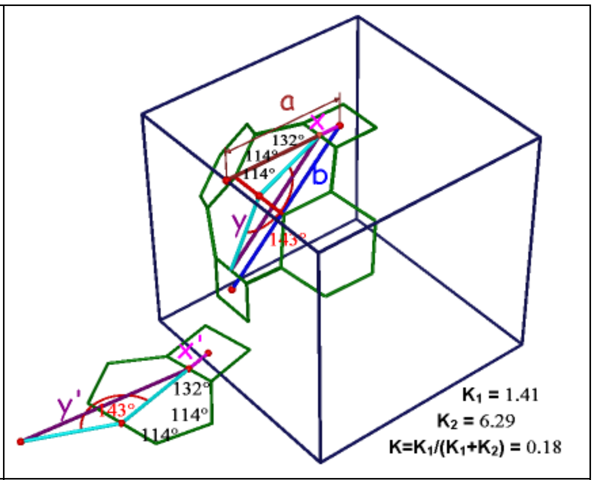
$x=\frac{k_1}{(k_1+k_2)}a$。

以上的推導，我們知道：若令 $k=\frac{k_1}{(k_1+k_2)}$ 則可將每個原正五邊形縮小 k 倍後，在稜上可造出與它「等邊長」的六邊形。

2. 同 1.先在正六面體上造出所需的六邊形（圖 4.1.48），至於如何製造，後面會再詳述。（圖 4.1.48）左下方亦是滿足等長的正四邊形與六邊形，其中六邊形的角度是根據在正六面體上已做出的角度而做出的，如此我們即可找出原正方形的縮小比，但要注意的是 y 和 y’ 與 1.稍有不同。
3. 其它由三面所組成的立體角皆可依此類推，切出盡可能多的等稜長多面體，我們稱此法為「 k 值法」。不斷用「 k 值法」即可在 Cabri 3D 軟體上做出很多虛擬的「類球狀多面體」，量出角度與邊長的近似值後，可在 GSP 2D 軟體上畫出展開圖，再做出實體模型。但我們打算找出計算夾角度數與邊長的公式，再利用它們到 GSP 軟體上畫出精確的展開圖。



（圖 4.1.45）



（圖 4.1.46）

二、An 的夾邊與夾角公式：

由【定理三】知$\overline{\mathbf{OH}}=\frac{\overline{\mathbf{HC}}}{2}$，$\overline{\mathbf{HC}}$計算如下：(圖**4.2.1**)

若已知（圖 4.2.1）中線段$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$、$\mathbf{z}$與角度$\boldsymbol{\alpha}=\angle\mathbf{BVE}$、$\boldsymbol{\beta}=\angle\mathbf{AVE}$、$\boldsymbol{\gamma}=\angle\mathbf{BVA}$，點 O 為$\overline{\mathbf{HC}}$的中點，則因為 $\mathbf{b^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha}$，$c=\mathbf{y'-x'}=\mathbf{-y\cos\beta+x\cos\gamma}$，令 $\lambda=\angle\mathbf{CBI}$，則 $\lambda=\mathbf{\sin^{-1}(\frac{c}{b})}$

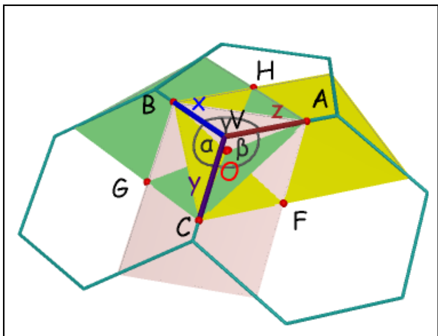
（圖 4.2.2）$\mathbf{z^2+2cz=x^2+y^2+z^2-2xy\cos\alpha-2yz\cos\beta+2xz\cos\gamma}$

所以 $\overline{\mathbf{HC}}^2=\mathbf{b^2+z^2-2bz\cos(\lambda+90°)=b^2+z^2+2bz\sin(\lambda)}$

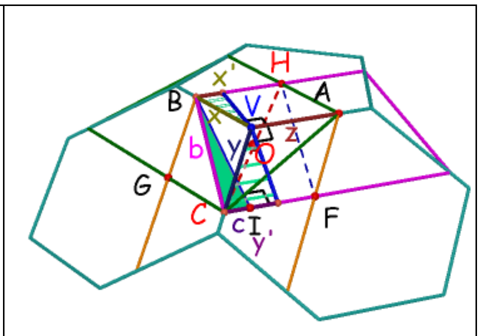
$=\mathbf{x^2+y^2+z^2-2xy\cos\alpha-2yz\cos\beta+2xz\cos\gamma}$。.........〔**4**〕

改變相對位置，即可計算出$\overline{\mathbf{OG}}$與$\overline{\mathbf{OF}}$，再計算

$\angle\mathbf{HOG}$、$\angle\mathbf{GOF}$與$\angle\mathbf{HOF}$。



（圖 4.2.1）



（圖 4.2.2）

由於我們報告要解決的問題皆為（圖 4.2.1）當$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$，且選取的稜切面都會造成 x=z，所以根據〔4〕可得

【公式三】「稜切面」共端點 且$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$與 x=z 時：(圖4.2.1)

$$\overline{OH}=\frac{\sqrt{2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma}}{2},$$

$$\overline{OG}=\overline{OF}=\frac{\sqrt{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}}{2},$$

$$\angle HOG=\cos^{-1}\left(\frac{2xy\cos\alpha-y^2}{\sqrt{(2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma)(2x^2(1-\cos\gamma)+y^2)}}\right)$$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{4xy\cos\alpha-2y^2}{2\sqrt{4x^4\sin^2\gamma+8x^3y\cos\alpha(\cos\gamma-1)+4x^2y^2-4xy^3\cos\alpha+y^4}}\right),$$

$$\angle GOF=\cos^{-1}\left(\frac{y^2-2x^2(1-\cos\gamma)}{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}\right)。$$

證明：由〔4〕得

$$\overline{HC}=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy\cos\alpha-2yz\cos\beta+2xz\cos\gamma}$$

$$=\sqrt{2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma}，\quad ....〔5〕$$

$$\overline{OH}=\frac{\sqrt{2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma}}{2}。$$

$$\overline{AG}=\sqrt{x^2+z^2+y^2-2xz\cos\gamma-2zy\cos\beta+2xy\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}。\quad ....〔6〕$$

$$\overline{OG}=\overline{OF}=\frac{\sqrt{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}}{2}。$$

$$\overline{HG}^2=\overline{AC}^2=z^2+y^2-2\,z\,y\cos\beta=x^2+y^2-2\,x\,y\cos\alpha。$$

$$\angle HOG=\cos^{-1}\left(\frac{\overline{OG}^2+\overline{OH}^2-\overline{HG}^2}{2\overline{OH}\,\overline{OG}}\right)。$$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{\frac{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}{4}+\frac{2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma}{4}-x^2-y^2+2\,x\,y\cos\alpha}{2\sqrt{\frac{2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma}{4}\,\frac{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}{4}}}\right)$$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{2xy\cos\alpha-y^2}{\sqrt{(2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma)(2x^2(1-\cos\gamma)+y^2)}}\right)$$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{2xy\cos\alpha-y^2}{\sqrt{4x^4\sin^2\gamma+8x^3y\cos\alpha(\cos\gamma-1)+4x^2y^2-4xy^3\cos\alpha+y^4}}\right),$$

$\overline{GF}^2=2x^2(1-\cos\gamma)$。

$$\angle GOF=\cos^{-1}\left(\frac{\overline{OG}^2+\overline{OF}^2-\overline{GF}^2}{2\overline{OG}\,\overline{OF}}\right)=\cos^{-1}\left(1-\frac{\overline{GF}^2}{2\overline{OG}^2}\right)$$

$$=\cos^{-1}\left(1-\frac{4x^2(1-\cos\gamma)}{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{y^2-2x^2(1-\cos\gamma)}{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}\right)。$$

（圖 4.2.1）中的 x、y 可用下面公式求得：

【公式四】等比切邊公式一(切 A5 時才會用到)

若六邊形 A'B'C'D'E'F'為六邊形 ABCDEF 縮小 k 倍，其中六邊形 ABCDEF 具以下性質：(圖 4.2.3)

1. $\alpha'=\alpha''$。
2. l 為對稱軸。
3. $\overline{EB}//\overline{DC}$。

(圖 4.2.4)當延長$\overline{A'B'}$交$\overline{AF}$於點 P，交$\overline{BC}$於點 Q；延長$\overline{A'F'}$交$\overline{AB}$於點 R；延長$\overline{B'C'}$交$\overline{AB}$於點 S，交$\overline{CD}$於點 T；延長$\overline{C'D'}$交$\overline{BC}$於點 N，令$\overline{OB}$=u，$\overline{CD}$=w，則可得：

$u=-\cos\alpha+\frac{1}{2}$， $w=u+2\cos\alpha'$，

$\overline{AP}$=(1-k)u，$\overline{AR}$=(1-k)，

$\overline{BS}$=(1-k)u，

$\overline{BQ}=v=\sqrt{2u^2(1-k)^2(1+\cos\alpha)}$，

$\overline{CN}$=(1-k)，$\overline{CT}$=(1-k)u。

證明：$u=\sin(\alpha-90°)+\frac{1}{2}=-\cos\alpha+\frac{1}{2}$，$w=u-2\sin(\alpha'-90°)=$ u+2，

因為 $\overline{AR}:1=\overline{AA'}:\overline{AO}=(1-k):1$，

所以 $\overline{AR}$=(1-k)；同理 $\overline{CN}$=(1-k)。

因為 $\overline{A'R}:\overline{OB}=(1-k):1$，其中 $\overline{OB}$=u，

所以 $\overline{A'R}$=(1-k)u= $\overline{AP}$，同理 $\overline{CT}$=(1-k)u。

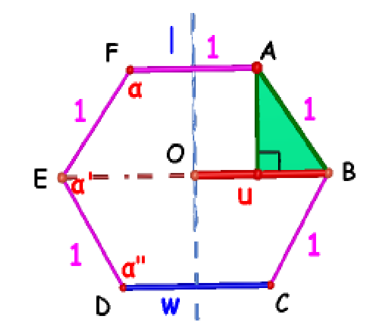
因為 ∠SBC=∠TCB 且 $\overline{ST}//\overline{BC}$，

所以 SBCT 為一等腰梯形，故 $\overline{BS}=\overline{CT}=$ (1-k)u。

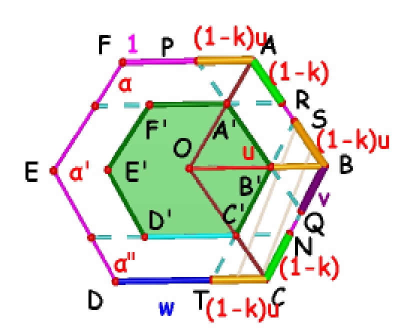
∠BB’Q=$180° - \alpha$，

$\overline{BQ}^2=\overline{B'B}^2+\overline{B'Q}^2-2\overline{B'B}\,\overline{B'Q}\cos(180°-\alpha)$，

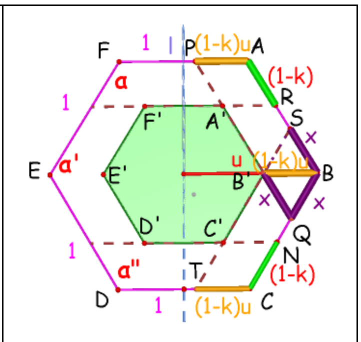
$\overline{BQ}=\sqrt{2u^2(1-k)^2(1+\cos\alpha)}$。



（圖 4.2.3）



（圖 4.2.4）



（圖 4.2.5）

【公式五】等比切邊公式二

若等邊六邊形 A’B’C’D’E’F’為六邊形 ABCDEF 縮小 k 倍，其中六邊形 ABCDEF 具以下性質：

1. $\alpha=\alpha''$。（圖 4.2.5）
2. l 為對稱軸。
3. $\overline{EB}//\overline{DC}$。

當延長$\overline{A'B'}$交$\overline{AF}$於點 P，交$\overline{BC}$於點 Q；延長$\overline{A'F'}$交$\overline{AB}$於點 R；延長$\overline{B'C'}$交$\overline{AB}$於點 S，交$\overline{CD}$於點 T；延長$\overline{C'D'}$交$\overline{BC}$於點 N，令$\overline{OB}$=u，$\overline{CD}$=w，，則可得：

$u=-\cos\alpha+\frac{1}{2}$，

$\overline{AP}$=(1-k)u，$\overline{AR}$=(1-k)，$\overline{BS}$=$x=\frac{(1-k)u}{-2\cos\alpha}$，$\overline{BQ}$=x，

$\overline{CN}$=(1-k)，$\overline{CT}$=(1-k)u。

證明：$u=\sin(\alpha-90°)+\frac{1}{2}=-\cos\alpha+\frac{1}{2}$，

$\angle BB'Q=180°-\alpha$，$x^2+(1-k)^2u^2-2x(1-k)u\cos(180°-\alpha)=x^2$

$x=\frac{(1-k)u}{-2\cos\alpha}$。其餘證明皆同上，故省略。

【公式六】正五邊形對角線長與過中心點平行一邊且交另一邊長比公式

若設正五邊形的邊長為 1，點 M 為一邊的中點，若$\overline{OA''}//\overline{MV}$，

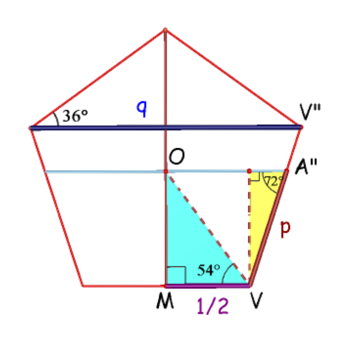
且令$p=\overline{VA''}$，

則 $p=\frac{1}{2\sin(108°)}\sqrt{\frac{1-\cos(108°)}{1+\cos(108°)}}$。（圖 4.2.6）

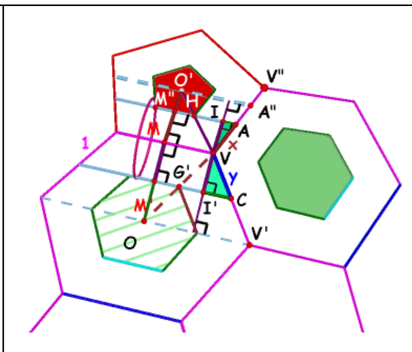
$q=2\cos(36°)$。

證明：$\overline{OM}=\frac{1}{2}\tan(\frac{108°}{2})$，

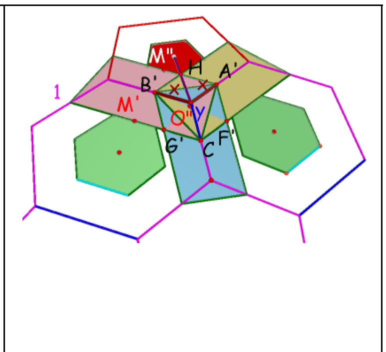
$p=\frac{\overline{OM}}{\sin(180°-108°)}=\frac{1}{2\sin(108°)}\sqrt{\frac{1-\cos(108°)}{1+\cos(108°)}}$。



（圖 4.2.6）



（圖 4.2.7）



（圖 4.2.8）

【公式七】等距稜切面縮小比公式

頂點為 V 的立體角，其中∠MVC=∠CVA=α，∠MVA=γ，若已知如下：

1. $\overline{MM'}=\overline{MM''}$，（圖 4.2.7）
2. $\overline{VV'}=\overline{VV''}=1$，
3. 中心點 O'的面縮小 k'倍，中心點 O 的面縮小 k 倍。
4. 過面中點 O'且平行稜的直線交$\overline{VV''}$於點 A"，

且 $\overline{VA''} = p$，

5. 過面中點 O 且平行稜的直線交$\overline{VV'}$於端點 V'，

則 $x=(1-k')p$，$y=(1-k)$，$k'=\frac{p\sin(\gamma)-\sin(\alpha)+k\sin(\alpha)}{p\sin(\gamma)}$。

證明：$x=(1-k')\overline{VA''}=(1-k')p$，

$y=\overline{VV'}(1-k)=(1-k)$，

$\overline{VI}=x\sin(180°-\gamma)=x\sin(\gamma)$，

同理 $\overline{VI'}=y\sin(\alpha)$。 ………………〔7〕

因為$\overline{MM'}=\overline{MM''}$，所以$\overline{VI}=\overline{VI'}$，

故 $z\sin(\gamma)=y\sin(\alpha)$， 即可得出 k'與 k 的關係。

延續【公式七】可得：（圖 4.2.8）

【公式八】$\angle M''HC=$

$$\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{y^2(\sin^2\alpha+\sin^2\gamma-2\sin\gamma\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2(\gamma-\alpha))}{\sin^2\gamma(2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma)}}\right)+90°。$$

證明：由〔5〕知 $\overline{HC}^2=2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma$，

由〔7〕知 $\overline{I'V}=y\sin(\alpha)$。

由【公式一】得

$$\angle IVI'=\cos^{-1}\left(1-\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\gamma-2\sin\gamma\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2(\gamma-\alpha)}{2\sin^2\gamma\sin^2\alpha}\right),$$

$$\overline{II'}^2=2\overline{IV}^2(1-\cos(\angle IVI'))=y^2\left(\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\gamma-2\sin\gamma\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2(\gamma-\alpha)}{\sin^2\gamma}\right),$$

$$\angle M''HC=\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{\overline{II'}^2}{\overline{HC}^2}}\right)+90°$$

$$=\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{y^2(\sin^2\alpha+\sin^2\gamma-2\sin\gamma\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2(\gamma-\alpha))}{\sin^2\gamma(2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma)}}\right)+90°。$$

由【公式八】可得（圖 4.2.8）中$\angle M''HO''=\angle M''HC$。將之推廣：

【公式九】$\angle M''HO''=$

$$\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{y^2(\sin^2\alpha+\sin^2\gamma-2\sin\gamma\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2(\gamma-\alpha))}{\sin^2\gamma(2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma)}}\right)+90°，$$

$$\angle HO''G' = \cos^{-1}\left(\frac{2xy\cos\alpha-y^2}{\sqrt{(2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma)(2x^2(1-\cos\gamma)+y^2)}}\right)，$$

$$\angle O''G'M' = 360° - \angle M''HO'' - \angle HO''G'。$$

延續【公式七】可得：

【公式十】稜切面不共端點夾邊長公式（圖4.2.9）

$$\overline{HO} = \frac{(2x-\overline{VB})\sqrt{2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma}}{2x}，$$

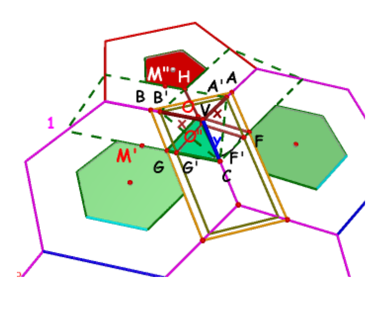
$$\overline{GO} = \frac{\overline{VB}\sqrt{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}}{2x}。$$

證明：因為$\frac{\overline{CO}}{\overline{CO''}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CG'}} = \frac{\overline{VB}}{\overline{VB'}} = \frac{\overline{VB}}{x}$，再由【公式三】得知

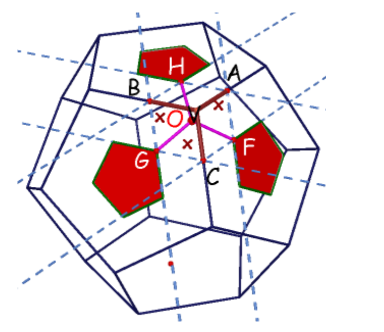
$$\overline{CO} = \frac{\overline{VB}\sqrt{2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma}}{2x}，$$

$$\overline{HO} = \overline{HC} - \overline{CO} = \frac{(2x-\overline{VB})\sqrt{2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma}}{2x}。$$

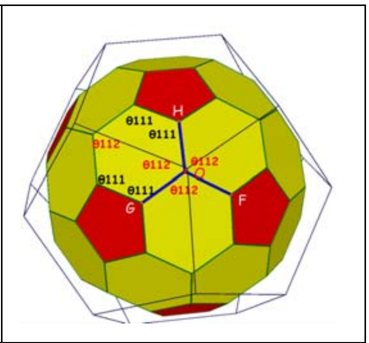
$$\frac{\overline{GO}}{\overline{G'O''}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CG'}} = \frac{\overline{VB}}{x}，\overline{GO} = \frac{\overline{VB}\sqrt{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}}{2x}。$$



（圖 4.2.9）



（圖 4.3.1）



（圖 4.3.2）

三、代入公式計算 An 的夾邊與夾角：

1. A1：

設邊長為 1 的正五邊形縮小 k 倍，則此邊長為 k，再由【公式七】(k=k’)

知 x=(1-k)p代入【公式三】可得：

$$\overline{OH} = \overline{OG} = \overline{OF} = \frac{(1-k)p\sqrt{(3-2\cos108°)}}{2}，p=\frac{1}{2\sin(108°)}\sqrt{\frac{1-\cos(108°)}{1+\cos(108°)}}。$$

我們期望的縮小比是讓 k= $\frac{(1-k)p\sqrt{(3-2\cos\gamma)}}{2}$，所以 k=$\frac{p\sqrt{(3-2\cos\gamma)}}{2+p\sqrt{(3-2\cos\gamma)}}$。………………〔8〕

若只需作展開圖時，可直接令 x=y=z=1，代入【公式三】得：

$\overline{\mathbf{OH}}=\overline{\mathbf{OG}}=\overline{\mathbf{OF}}=\frac{\sqrt{3-2\cos\gamma}}{2}$，（圖$\mathbf{4.3.1}$）

$\boldsymbol{\theta_{112}}=\angle\mathbf{HOG}=\angle\mathbf{HOF}=\angle\mathbf{GOF}$

$=\cos^{-1}(\frac{y^2-2x^2(1-\cos\gamma)}{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2})=\cos^{-1}(\frac{-1+2\cos\gamma}{3-2\cos\gamma})\fallingdotseq\mathbf{116.56505°}$。

$\boldsymbol{\theta_{111}}=\mathbf{180°}-\boldsymbol{\theta_{112}}/\mathbf{2}\fallingdotseq\mathbf{121.71747°}$。（圖 4.3.2）

2. A3：

將 A1 的稜切掉，即可得出 A3。

（1） 第一種六邊形：將原六邊形縮小 k 倍得出，此時邊長皆為 k，且$\boldsymbol{\theta_{311}}=\boldsymbol{\theta_{111}}$，$\boldsymbol{\theta_{312}}=\boldsymbol{\theta_{112}}$。（圖$\mathbf{4.3.3}$）

（2） 切頂點為 V'的立體角：

由 A1 可知$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta_{111}}$代入【公式五】可得:（圖 4.3.4）

u =－cos$\boldsymbol{\theta_{112}}+\frac{1}{2}$≒1.02573， $\mathbf{x}=\frac{(1-k)u}{-2\cos\theta_{112}}$。(k 值計算公式在下〔9〕再代入【公式三】可得：$\overline{\mathbf{O'H}}=\overline{\mathbf{O'G}}=\overline{\mathbf{O'F}}=\frac{x\sqrt{(3-2\cos\gamma)}}{2}$

因為我們期望相等稜長數最多，所以令縮小六邊形的邊長 k=$\overline{\mathbf{O'H}}$。

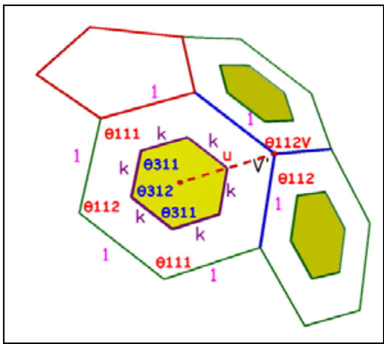
$\mathbf{k}=\frac{(1-k)u\sqrt{(3-2\cos\gamma)}}{-4\cos\theta_{112}}$，即可得

k=$\frac{u\sqrt{(3-2\cos\gamma)}}{u\sqrt{(3-2\cos\gamma)}-4\cos\theta_{112}}\fallingdotseq\mathbf{0.49046}$。………………〔9〕

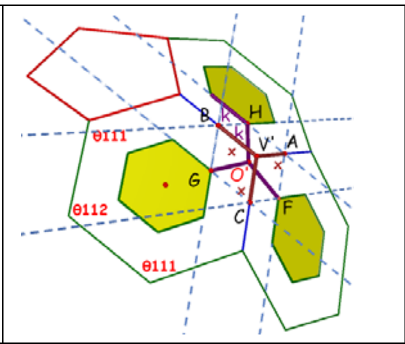
$\overline{O'H} = \overline{O'G} = \overline{O'F} = \frac{(1-k)u\sqrt{(3-2\cos\gamma)}}{-4\cos\theta_{112}} \fallingdotseq 0.49046$，

$\angle HO'G = \angle HO'F = \angle GO'F = \theta_{322} = \cos^{-1}\left(\frac{-1+2\cos\gamma}{3-\cos\gamma}\right) \fallingdotseq 119.10723°$。

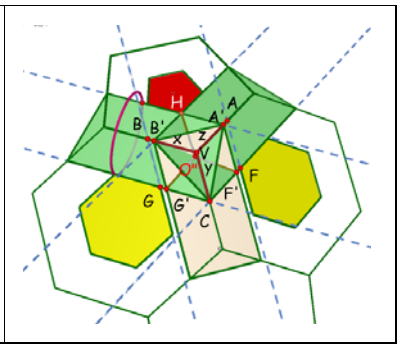
$\theta_{321} = 180° - \theta_{322}/2 \fallingdotseq 120.44638°$。



（圖 4.3.3）



（圖 4.3.4）



（圖 4.3.5）

（3） 切頂點為 V 的立體角：

雖然點 A 與點 A’， 點 B 與點 B’不重疊（圖 4.3.5），但【定理四】告訴我們它們的夾角不變。為方便我們使用公式，符號都以圖為準。(圖4.3.4)

【公式六】得：$p = \frac{1}{2\sin(108°)}\sqrt{\frac{1-\cos(108°)}{1+\cos(108°)}}$，

【公式七】得：k'

$$= \frac{p\sin(108°) - \sin(\theta_{112}) + k\sin(\theta_{112})}{p\sin(108°)},$$

【公式五】得：$u = -\cos\alpha + \frac{1}{2}$，$\overline{VB} = (1-k)u$。

$x = z = (1-k')p \fallingdotseq 0.45574$，

$y = (1-k) \fallingdotseq 0.50954$，$\alpha = \beta = \theta_{111}$，$\gamma = 108°$。

代入【公式三】得：（圖 4.3.5）

$\theta_{323} = \angle GOF = \angle G'O''F' = \cos^{-1}\left(\frac{y^2-2x^2(1-\cos\gamma)}{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}\right) \fallingdotseq 110.71237°$。

$\theta_{332} = \angle HOG = \angle HO''G'$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{2xy\cos\alpha-y^2}{\sqrt{(2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma)(2x^2(1-\cos\gamma)+y^2)}}\right)\fallingdotseq$$

$123.53750°$。

（圖4.3.5）由【公式九】得

$$\theta_{331}=$$

$$\angle M''HO=\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{y^2(\sin^2\alpha+\sin^2\gamma-2\sin\gamma\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2(\gamma-\alpha))}{\sin^2\gamma(2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma)}}\right)+90°$$

$$\fallingdotseq 124.94928°，$$

$$\theta_{333}=\angle OGM'=\angle O''G'M'=360°-\theta_{332}-\theta_{331}\fallingdotseq$$

$111.51322°$。

再由【公式十】得（圖 4.3.6）

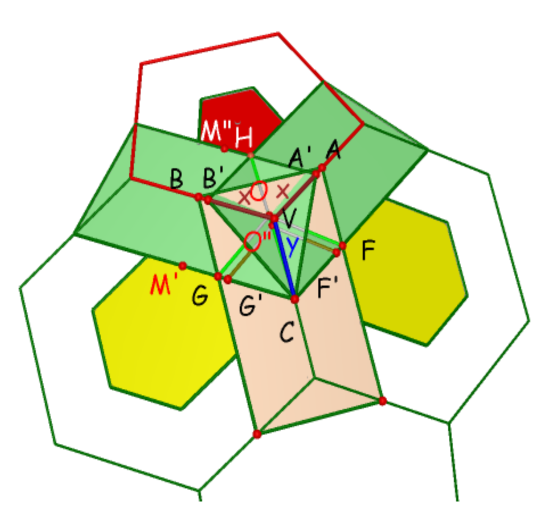
$$\overline{HO}=\frac{(2x-(1-k)u)\sqrt{2x^2+y^2-4xy\cos\alpha+2x^2\cos\gamma}}{2x}\fallingdotseq 0.43400。$$

$$\overline{OG}=\overline{OF}=\frac{(1-k)u\sqrt{2x^2(1-\cos\gamma)+y^2}}{2x}\fallingdotseq 0.51395。$$

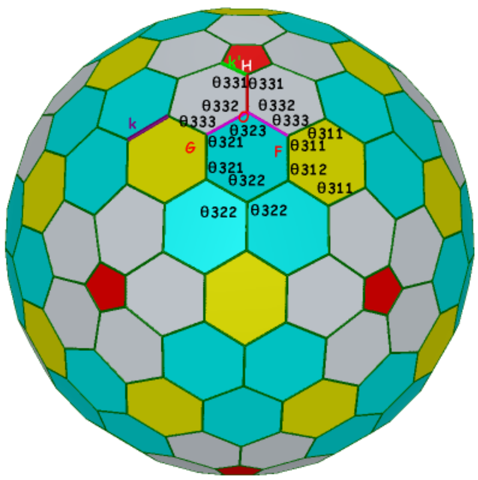
有了 k、k’、$\overline{HO}$、$\overline{OG}$、

θ_{331}、θ_{332}、θ_{333}、θ_{323}、θ_{321}、θ_{322}、θ_{311}與θ_{312}

後，即可作出展開圖。（圖 4.3.7）



（圖 4.3.6）



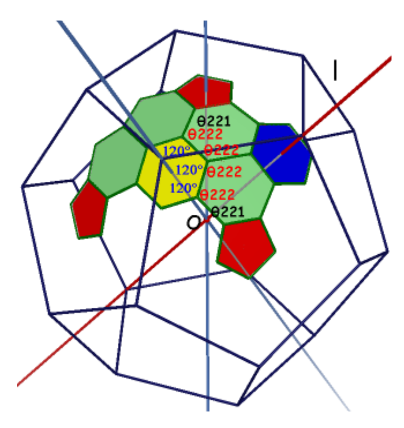
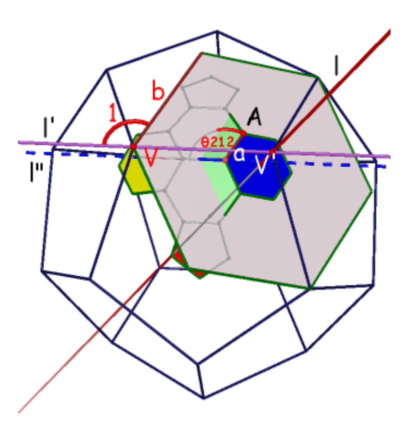
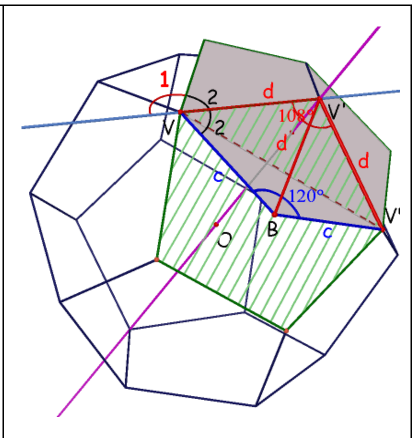
（圖 4.3.7）

14. A2

A2 的作圖頗難，需先分析如下：

將頂點切出一個對稱的結構，很自然會想到”以頂點到中心點的直線 l”為中心軸所做之「正六邊形」來切，這樣的結果造成了兩個正五邊形相距兩個六邊形（圖 4.3.8）。但$\boldsymbol{\theta_{212}}$要如何找出呢？

我們發現以 l 為中心軸的正六邊形互相平行，如（圖 4.3.9）中頂點為 A 的正六邊形與頂點為 V 的正六邊形平行。然後因為 **a**//**b**且 l’//**l"**，所以$\boldsymbol{\theta_{212}}$=∠1。

		
（圖 4.3.8）	（圖 4.3.9）	（圖 4.3.10）

（圖 4.3.10）中，令正六邊形的邊長為 c，正五邊形的邊長為 d，壓成平面可得（圖 4.3.11），

$\overline{\mathbf{VV''}}$=2c cos(36°)=2dcos(30°)

$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{cos(30°)}}{\mathbf{cos(36°)}}，$$

ΔV’BV 中 $\mathbf{d^2=c^2+d^2-2cd\cos(\angle 2)}$，

$$\angle 2=\mathbf{cos^{-1}}\left(\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{2d}}\right)=\mathbf{cos^{-1}}\left(\frac{\mathbf{cos(30°)}}{\mathbf{2cos(36°)}}\right)，$$

$$\boldsymbol{\theta_{222}=\angle 1=180°-\angle 2=180°-\cos^{-1}\left(\frac{\cos(30°)}{2\cos(36°)}\right)}，$$

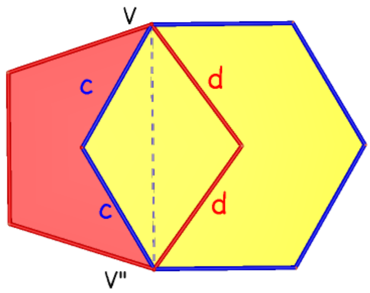
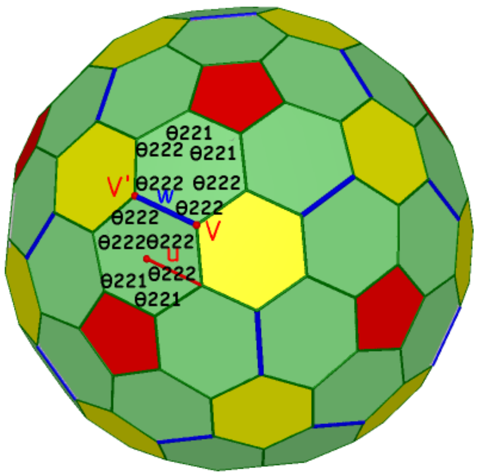
$$\boldsymbol{\theta_{221}=360°-2\theta_{222}}\ 。$$

i. 第一種六邊形：邊長為 1 的正六邊形。

ii. 第二種六邊形：邊長除$\overline{\mathbf{VV'}}$為 w 外，其它皆為 1。（圖**4.2.19**）

由【公式四】得：$u=-\cos\boldsymbol{\theta}_{221}+\frac{1}{2}$， $w=u+2\cos\boldsymbol{\theta}_{222}$，這個數據對 A5 有用。

有了$\boldsymbol{\theta}_{221}$、$\boldsymbol{\theta}_{222}$與 w 即可做出展開圖。

	
（圖 4.3.11）	（圖 4.3.12）

四、 An－Cabri3D 作圖：

1. A1 與 A3－Cabri3D 作圖：由於不難，故省略。

2. A2－Cabri3D 作圖：

（1） 作直線$\overleftrightarrow{\mathbf{VV'}}$，並以直線 l'為中心軸，點 V 為頂點，作一正六邊形，量出∠A'VC' =$\boldsymbol{\theta}_{222}\doteqdot\mathbf{117.85°}$的角度，並計算出$\boldsymbol{\theta}_{211}=\mathbf{360°}-\mathbf{2}\boldsymbol{\theta}_{212}\doteqdot\mathbf{124.31°}$。再在平面上作一中點為 O"的正五邊形與一六邊形，如（圖 4.4.1），並標出六邊形平行兩邊的中點 M 與 M'。

（2）隱藏不必要的物件，計算兩面角，將$\alpha=120°$，$\gamma=\beta=\angle A'VC'$，$\theta=\cos^{-1}(\frac{\sin^2\beta+\cos\alpha-1}{\sin^2\beta})\doteqdot 156.72°$，兩面角的用途可參考（圖

4.4.2）。過點 M’做垂直於平面的直線 l”，以 l”為旋轉軸將$\overline{\mathrm{MM'}}$旋轉θ得$\overline{\mathrm{M'N}}$，並算出 k 值。k 值計算如下：（圖 4.4.2 左下方）

令 $k_1 = \frac{b}{a}$，$k_2 = \frac{\overline{O''M}}{\overline{MN}}$，即可算出 k=$\frac{k_1}{k_1+k_2}$。

（3）如圖（圖 4.4.3）左下角，計算 R=$\frac{\overline{O''M'}}{\overline{O''M}}$，在正十二面體上將兩個正五邊形的面縮小 k 倍，並找出縮小正五邊形$\overline{\mathrm{AB}}$的中點 P。以點 O’為中心，利用縮放功能作$\frac{\overline{O'P'}}{\overline{O'P}} = R$。再做$\overline{\mathrm{PP'}}$=$\overline{\mathrm{PP''}}$，並與$\overrightarrow{\mathrm{OM''}}$交於點 P”。

（4）過點 P”與$\overline{\mathrm{AB}}$做一平面E_1，在這平面上將$\overline{\mathrm{AB}}$旋轉θ_{221}得$\overline{\mathrm{AB'}}$。（圖 4.4.4）

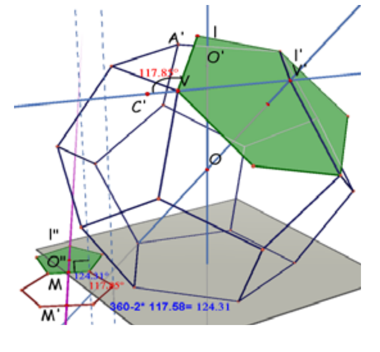
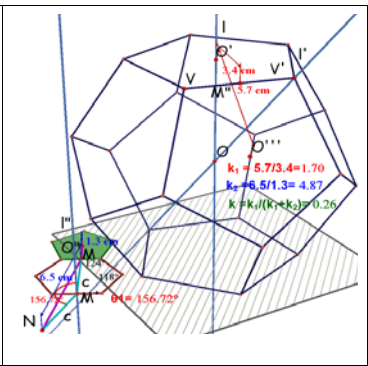
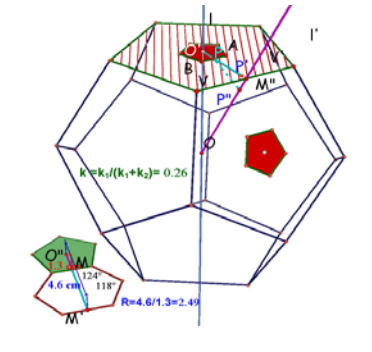
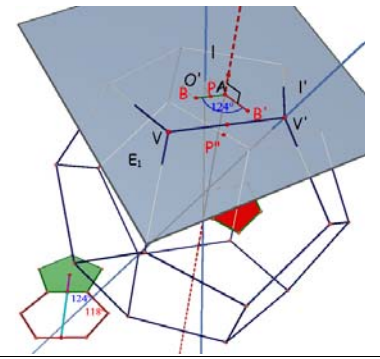
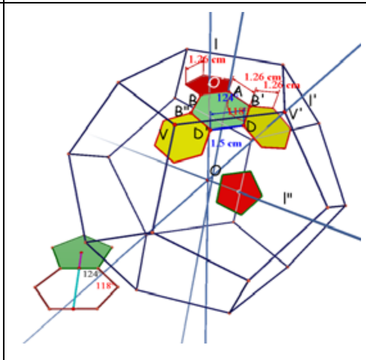
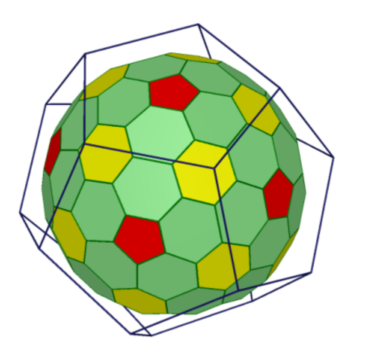
（5）隱藏不必要的物件，以 l’為中心軸，點 B’為頂點，作一正六邊形。再以 l 為旋轉軸將這正六邊形從點 A 轉到點 B，做六邊形 ABB”D’DB’（圖 4.4.5）。

這裡我們再確認以下三點：

a)點 A、B、B”、D’、D 與 B’共面。

b) $\angle AB'D = \theta_{222}$。

c)除$\overline{\mathrm{DD'}}$邊長不一樣外，其餘邊長都一樣。

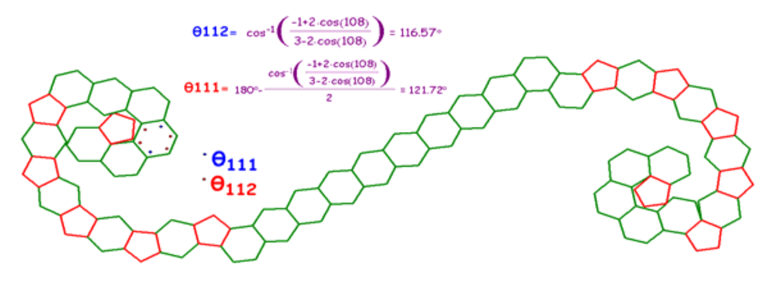
		
（圖 4.4.1）	（圖 4.4.2）	（圖 4.4.3）
		
（圖 4.4.4）	（圖 4.4.5）	（圖 4.4.6）

（6） 利用 l 與 l”即可將所有的正五邊形、正六邊形與六邊形旋轉出來（圖 4.4.6）。

五、 實作 An：

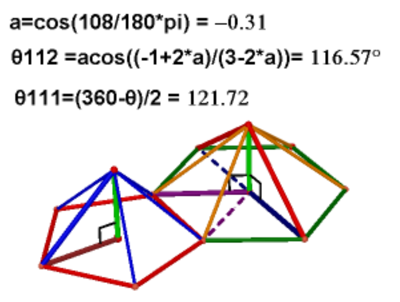
1. A1－GSP 製作展開圖

在 GSP 軟體上，先做一正五邊形，再用計算器算出θ_{112}、θ_{111}，做出我們要求的等邊六邊形，並利用旋轉與鏡射做出 A1 的平面展開圖（圖 4.5.1），即可做出 A1 的實體（圖 4.5.2）。

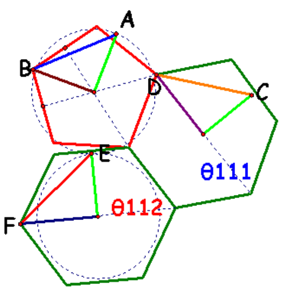
	
（圖 4.5.1）	（圖 4.5.2）

2. A1－GSP 製作等高光芒星體展開圖 [1]

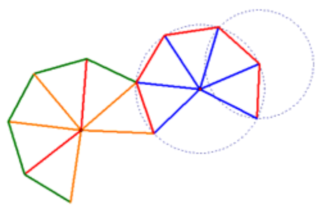
參考（圖 4.5.1），在 Cabri 3D 上模擬出等高光芒（圖 4.5.3），會發現總共有三種不同的斜邊與底邊，由於底邊已知且同高，所以我們用畢氏定理求出椎體上三角形的斜邊$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$（圖 4.5.4）。平移方才正五邊形的斜邊長與邊長畫圓做交點連線（圖 4.5.5），重複此動作即可做出 A1 的等高星狀展開圖（圖 4.5.6），做出十分精準的模型（圖 4.5.7）。



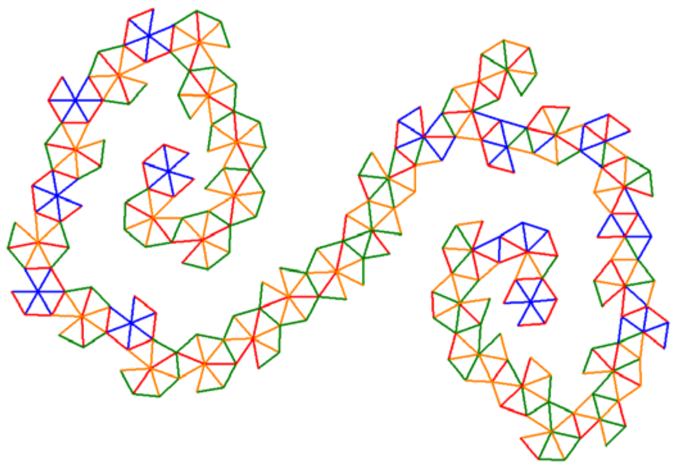
（圖 4.5.3）



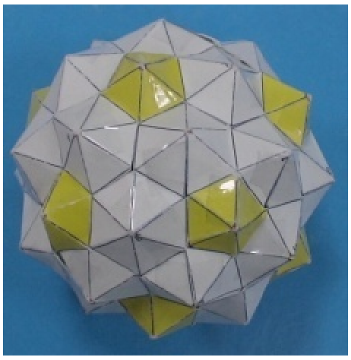
（圖 4.5.4）



（圖 4.5.5）



（圖 4.5.6）

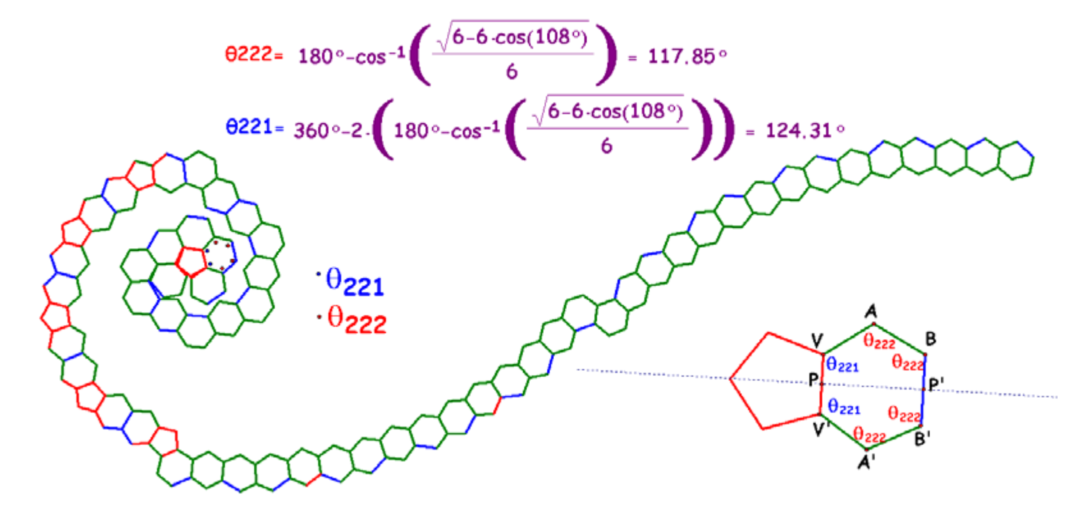


（圖 4.5.7）

3. A2－GSP 製作展開圖

（圖 4.5.8）在 GSP 上先做一正五邊形與$\overline{AB}$的中垂線$\overleftrightarrow{PP'}$，再用計算器計算 θ_{221}和θ_{222}，作∠V’VA=θ_{221} 且$\overline{VV'}$=$\overline{VA}$；作∠VAB=θ_{222} 且$\overline{AB}$=$\overline{VA}$；然後以$\overline{PP'}$為鏡射軸鏡射$\overline{VA}$、$\overline{AB}$，最後連$\overline{BB'}$即所求（圖 4.5.8）。

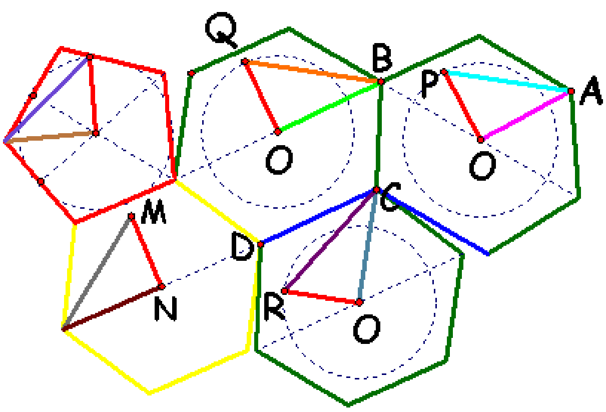
依上述步驟，對照著 Cabri 3D 切出的模型（圖 4.3.12），即可用旋轉與鏡射做出 A2 的平面展開圖（圖 4.5.8），並做出 A2 的實體來。



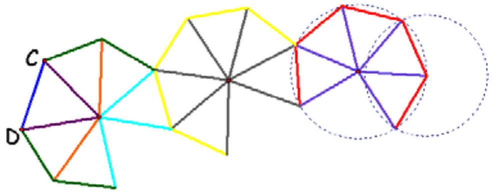
（圖 4.5.8）

4. A2－GSP 製作等高光芒星體展開圖

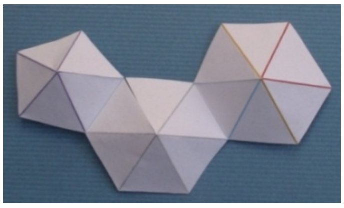
參考（圖 4.5.8），首先做出一個正五邊形與兩種六邊形，另一六邊形因是它的三個對角線不會交於一點，所以取$\overline{AA'}$的中點。然後會發現有三種不同的底$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$，我們再分別以正六邊形的高為高，平移做出三者的斜邊$\overline{AP}$、$\overline{BQ}$、$\overline{CR}$（圖 4.5.12）。特別注意的是$\overline{CD}$長度與正五邊形的邊長並不相同，所以做到$\overline{CR}$斜邊時要平移$\overline{CD}$長做為邊長（圖 4.5.13）。做完後不要忘了做確認（圖 4.5.14）。



（圖 4.5.12）

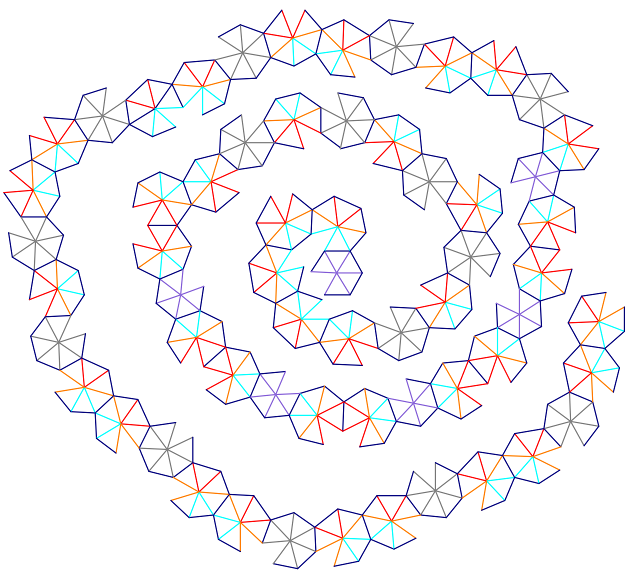


（圖 4.5.13）

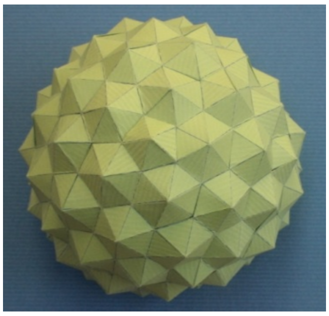


（圖 4.5.14）

A2 的等高星狀展開圖只要對照著平面展開圖，做平移斜邊、邊長畫圓，交點連線、鏡射就可以做出來了（圖 4.5.15）。模型實體出爐！（圖 4.5.16）



（圖 4.5.15）



（圖 4.5.16）

（圖 5.1）

伍、研究結果與討論

一、如果我們直接從兩個正五邊形相距兩個「正六邊形」的概念去做 A2 的星體，則會做出（圖 5.1），相較（圖 4.5.16），它較像「正二十面體」，而不像「球狀」。

二、若只用「平行稜切面」切一正多面體（5.2），會切出（圖 5.3），雖不規則，但已有球形的樣子。故我們找出了三種對稱切多面體稜的方法，分別為：「等長稜切面」、「等距稜切面」與「等比稜切面」，並證出它們平行移動時，切完後的接角固定不變。

三、我們定義：「類球狀多面體」為可由正多面體切出之多面體，且需滿足以下性質：

（一） 除「正多邊形」外，其餘皆是「六邊形」。

（二）鳥瞰每個「正多邊形」時，形狀皆保持不變。

（三）等長的稜數最多。

依正十二面體切出之「類球狀多面體」相鄰的兩個「正五邊形」所夾之「六邊形」的個數，我們簡稱相距一個「六邊形」的為 A1（圖 4.1.35），相距兩個的為 A2(圖 4.1.36)，依此類推 A3(圖 4.1.37)與 A5(圖 4.1.38)。

四、我們找出了計算「類球狀多面體」稜長與角度的公式，其中很困難的若「不共端點」時，我們想到了先用「共端點」的切面，因為接角度數不變，稜長成比例（圖 4.2.9）。從 A1 可推廣至 A3，A2 可推廣至 A5，A4 我們仍在研究中。

五、「類球狀多面體」的性質一與性質二，在 Cabri 3D 上用旋轉與放縮的功能很容易做到；但性質三則需借助以下三種方法：(以 A1 為例)

（一）「k 值法」：用$k=\frac{k_1}{(k_1+k_2)}$的則無誤差（理想狀態）（圖 4.1.44）。

（二） 代入數值：用 k=0.4076499498 直接放縮正五邊形，會有很小的誤

差（圖 5.4）。

（三）「公式法」：用我們計算出來的 k 值公式計算後，再放縮，也是無誤差。（圖 5.5）

六、「類球狀多面體」的定義適用於任何正多面體上，但需先將其頂點切成是接三個面。例如：「正二十面體」需先切成「截頂二十面體」(圖 5.6)，接著繼續「切稜」時，則都是選擇：

（一)「正多邊形」與六邊形相交的稜，用「等距稜切面」切。

（二）其餘皆用「等比稜切面」切，以便承襲原多邊形的優點。

「切頂點」的通則，則仍在尋找中。

七、選擇用「等距稜切面」切「正多邊形」與「六邊形」相交稜的理由如下：

（一）「等比稜切面」：切完後新增的六邊形有一個邊明顯很短。（圖 5.7）

（二)「共端點」：切完後的正五邊形相對六邊形又會變得很小(圖 5.8)，其中「正五邊形邊長/六邊形邊長」簡寫為「小/大」。

（三）「等長稜切面」：正五邊形仍很小。（圖 5.9）

（四）「等距稜切面」：相對以上，切完後稜長彼此差距最小！同時夾角公式最易算。（圖 5.10）

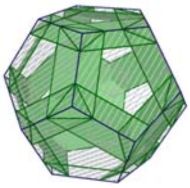
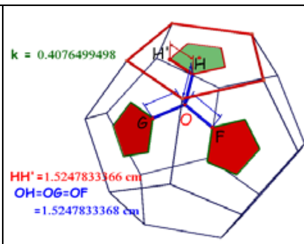
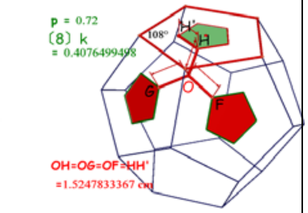
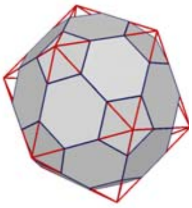
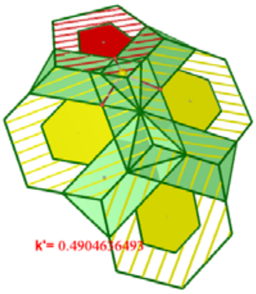
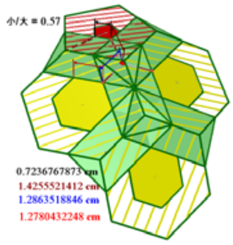
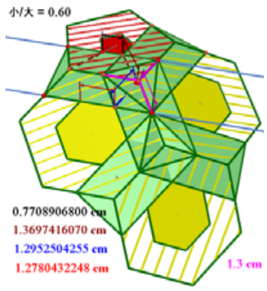
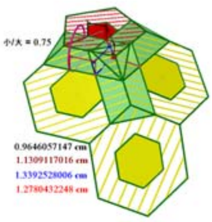
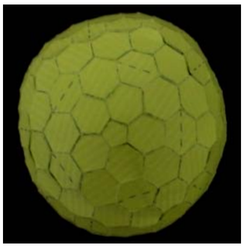
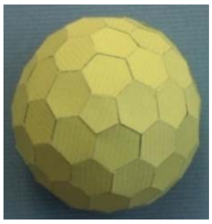
以上不論哪種切法，切完後看起來都很像球，例如：「共端點」的（圖 5.11）與「等距稜切面」的(圖 5.12)。它們也都是我們「類球狀多面體」家族的一員。

八、在 GSP 上做出的模型展開圖有兩種方法：(以 A2 為例)

（一）代入數值：直接由 Cabri 3D 上虛擬模型的角度與稜長來操作，若忽略誤差仍可做出模型來。（圖 5.13）

（二）「公式法」：用我們計算出來的角度與稜長公式計算後操作（圖 5.14）。

九、最後，我們分別以 A1 與 A2 為例，用「削皮法」示範了它們的模型與星狀模型展開圖。至於 A5 它無法用「削皮法」作展開圖，會重疊到。但我們仍做出了它的星狀模型！

			
（圖 5.2）	（圖 5.3）	（圖 5.4）	（圖 5.5）
			
（圖 5.6）	（圖 5.7）	（圖 5.8）	（圖 5.9）
			
			（圖 5.13）
			
（圖 5.10）	（圖 5.11）	（圖 5.12）	（圖 5.14）

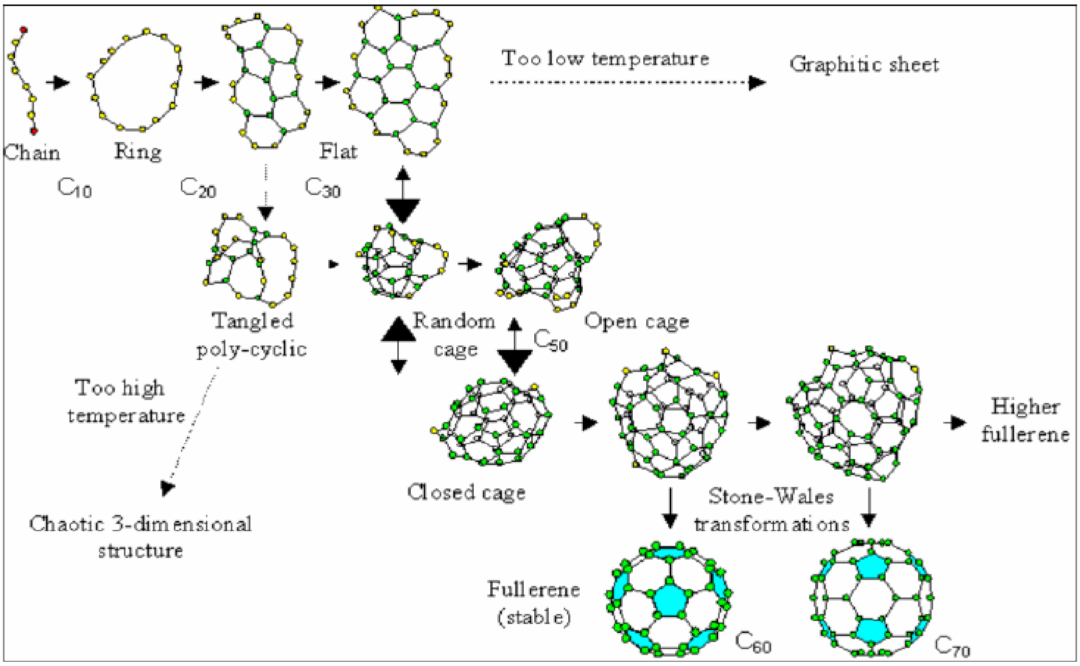
陸、應用

透過對特殊奈米材料模型製作的過程（圖6.1）[2]，我們不妨假設：

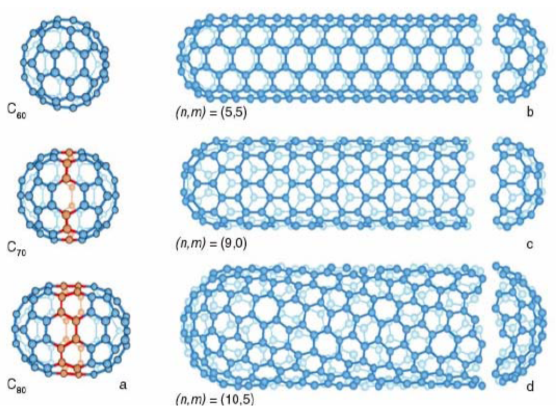
一、兩點(原子)之間直線最短，並點與點間盡可能保持等距。

二、立體結構越趨於球形越穩定。

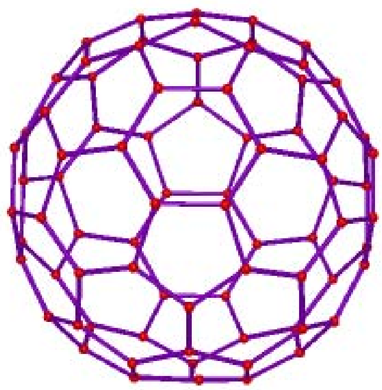
如此大膽的假設，「奈米管」的帽蓋[3]（圖 6.2 中右方被分離的部分）就極有可能是一種「類球狀多面體」。換句話說，C_{80}（圖 6.2 中的左下方）也就有可能是另一種結構：80 個頂點的「A1」！（圖 6.3）



（圖 6.1）



（圖 6.2）

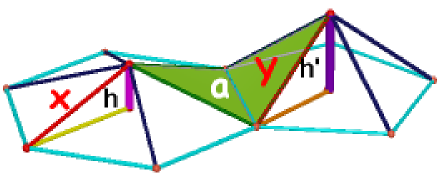


（圖 6.3）

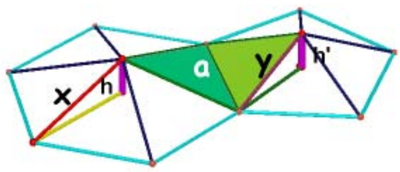
柒、參考文獻

〔1〕 溫家宜（民 98）新竹市第二十七屆中小學科學展覽會作品說明書國中組數學「削皮做星體」。節錄「名詞介紹」如下：

1. 主體：我們將星體拆成兩個部份來看，一個是基本架構，稱之為「主體」。我們將做主體為「正多面體」與「阿基米德多面體」的星體。
2. 光芒：鑲在這個主體上的錐體稱為「光芒」。實作主體為阿基米德多面體時，我們做出了兩類光芒，第一類的每個面都為全等的等腰三角形（左下圖），第二類則為每個光芒皆等高（右下圖）。



x＝y，h≠h'。



x≠y，h＝h'。

〔2〕Durdagi. Serdar(2005). A bird's eye view to carbon nanotubesand fullerenes.10/22/08.from.http://www.fhi-berlin.mpg.de/~michaeli/member/MaterialsScienceLectures/Nanotubes-SD.pdf

〔3〕Burstein.Elias(2003).A major milestone in nanoscale material science:the 2002 BenjaminFranklinMedalinPhysicspresentedto Sumio Iijima. *Journal of the Franklin Institute*.340.221-242