

2009 年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

編號： 010033

作品名稱

「游泳池救生員最佳設置位置問題」之探討及其延伸

得獎獎項

數學科大會獎第三名

候補作品

學校名稱： 高雄市立五福國民中學

作者姓名： 陳沛蓉 李宜霖

指導老師： 余尚芸 梁益彰

關鍵字： 中垂線、等積分割

作者簡介



大家好，我是陳沛蓉，今年十五歲，就讀五福國民中學三年級。我住在高雄，來自於一個相當平凡的家庭：父母親皆屬教職人員，唯一的哥哥目前就讀大學一年級。

我的興趣是繪畫和看小說，偶爾也會看些漫畫，閒暇時我總喜歡窩在家裡，聽聽音樂或是看書甚麼的。除此之外，我也喜歡嘗試一些不同的東西，像是到不同的地方旅遊，或是參加各種校內活動、比賽。

這次有機會能參加這個科展比賽，我感到相當高興，期待能透過這次活動認識許多朋友。



我是李宜霖，很高興能有這個機會在這裡介紹我自己。我來自南方的海港都市—高雄市，目前就讀五福國中三年級。

我的興趣除了閱讀、下棋、運動外，就是去思考一些數學問題，而這也引發了我作科展的動機。我的「科展生涯」已經邁入第四年了，然而這是我第一次參加國際科展，國內外的好手齊聚一堂相互交流、相互競爭。我也期望能在這個難得的機會中盡力而為，展現出最好的一面，學到更多東西。

Abstract

Mentioned in the administrative regulations of the swimming pool, the lifeguard's disposition will fluctuate with the size of the area. If we change the position of the lifeguard, the area each lifeguard is responsible for will be different. It even affects the efficiency of the rescue. After an actual interview, we discover that the swimming pool generally dispose two, three, or four lifeguards around the pool. What we are curious about is: Is it possible to find the best position for each lifeguard and make the area they are responsible for equivalent?

Therefore, we regard the swimming pool as the rectangle, and the positions of the lifeguards are regarded as the dots on the sides of the rectangle. We try to look for two dots on the sides, the perpendicular line of which could divide the rectangle into two equivalent parts. Moreover, we discuss the existence of the two dots, uniqueness of solution, and infinite number of solution.

Then, we continue discussing the situations of three dots and four dots. After the simulation of the software Cabri Geometry and the auxiliary operation of Mathematica. We finally find the solution of our research is not unique but uncountable. Afterwards, we go on to prove it thoroughly. Besides, we also make a further discussion of the characteristic of the graph under different situations.

At last, we make practical application of the results of our research.

摘要

在游泳池管理規範（附件一）中提到，救生員的配置會隨面積大小而增減，救生員因所在位置不同時，會造成責任區大小不同，甚至會影響救援的效率，經實際訪談後發現游泳池一般都是配置 2 個、3 個、4 個救生員，我們好奇的是：能不能找到救生員最佳設置位置使得每位救生員責任區域面積相等。

因此，我們將游泳池視為矩形，救生員位置視為矩形邊上的點，想探討是否能「在矩形邊上找到兩點，兩點連線的中垂線恰能將該矩形面積二等分」之兩點存在性、及其解是否唯一、及無限多解。

接下來，再探討三點、四點的情形。本研究經 Cabri Geometry 軟體模擬，Mathematica 輔助運算，發現真的能找到解，其解不唯一且無限多解，並深入證明之。進一步探討歸納在條件下圖形的特性。

最後，將本研究結果實際應用。

游泳池救生員最佳設置位置問題之探討及其延伸

壹、研究動機

在游泳時發現救生員的配置多寡會隨游泳池面積大小而增減，而救生員因所在位置不同時，會造成責任區大小不同，甚至會影響救援的效率，經實際訪談後發現游泳池一般都是配置 2 個、3 個、4 個救生員，我們好奇的是：能不能找到救生員最佳設置位置使得每位救生員責任區域面積相等。

因此，我們將游泳池視為矩形，救生員位置視為矩形邊上的點，想探討是否能「在矩形邊上找到兩點，兩點連線的中垂線恰能將該矩形面積二等分」之兩點存在性、及其解是否唯一、及無限多解。接下來，再探討三點、四點的情形。並歸納圖形之特性。

貳、研究目的

一、探討「在矩形邊上找到兩點，兩點連線的中垂線恰能將該矩形面積二等分」之兩點存在性、及其解是否唯一，並證明之。

二、探討「在矩形邊上找到三點，所形成之三角形三邊上的中垂線恰能將該矩形面積三等分」之三點存在性、及其解是否唯一，並證明之。

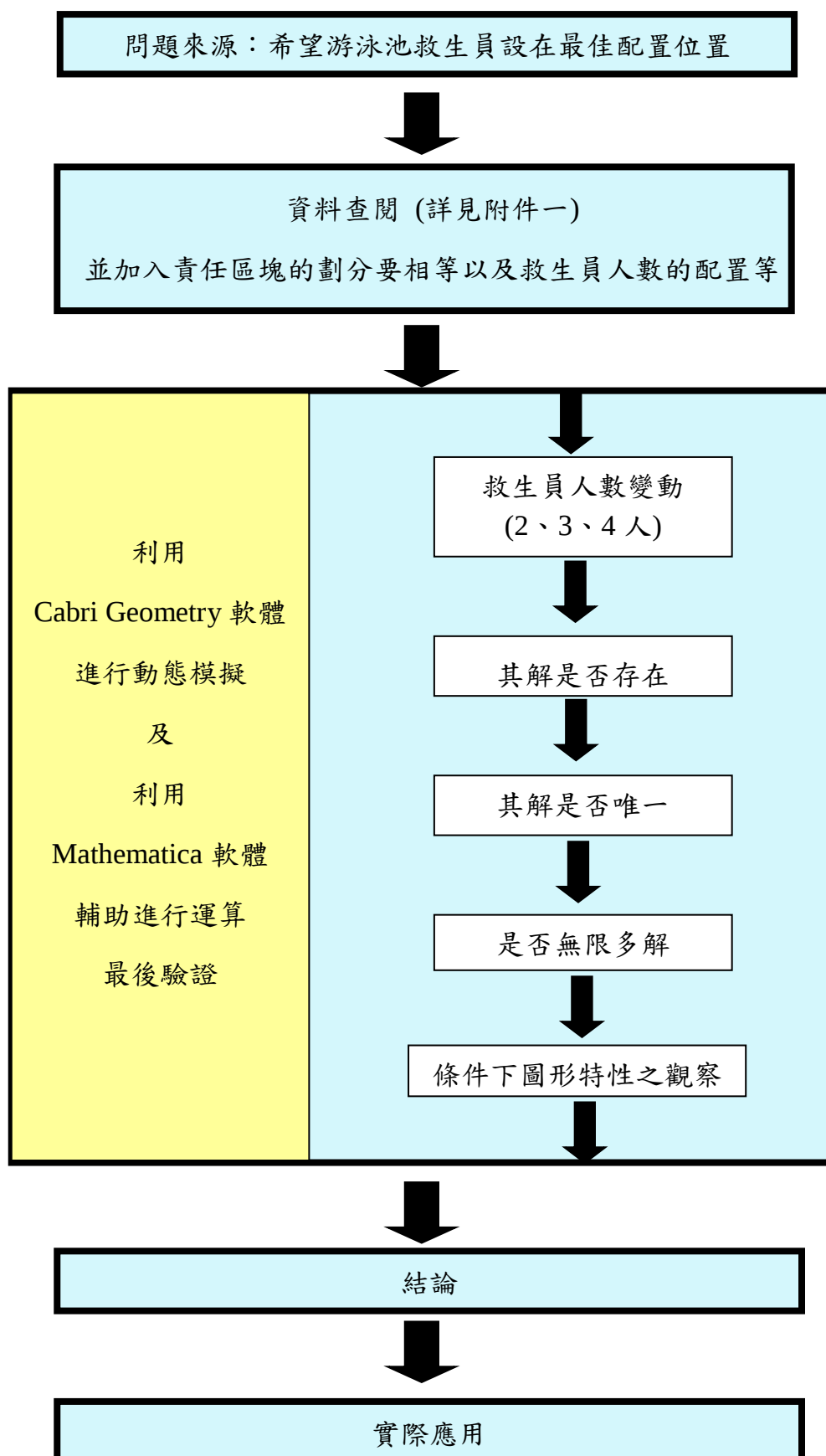
三、探討「在矩形邊上找到四點，所形成之四邊形四邊上的中垂線恰能將該矩形面積四等分」之三點存在性、及其解是否唯一，並證明之。

四、歸納條件下圖形特殊的性質。

參、研究設備及器材

Cabri Geometry 軟體、Mathematica 軟體

肆、研究流程圖



伍、研究過程

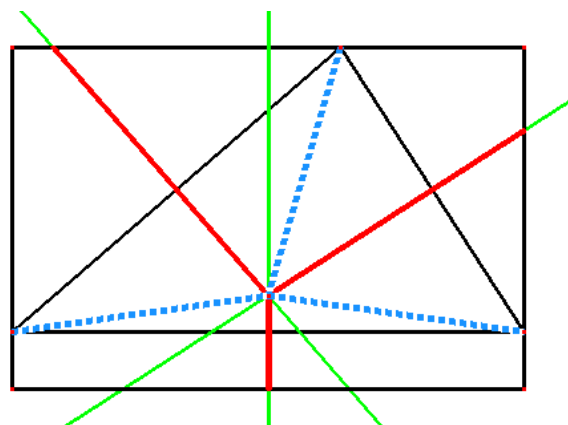
我們一開始將研究條件設定是兩點、三點、四點連線之中垂線的理由，為當溺水的人在責任區邊界—也就是中垂線上時，利用中垂線上任一點至兩端點等距的特性，即使溺水的人在責任區邊界，救生員亦能發揮最佳救援效率並公平的狀態。

為了方便討論，先明確地定義切割矩形面積的中垂線是如下所述：

以三角形的外心往兩端方向延伸的射線有兩種。

因為由三角形的外心連接頂點的線段(圖中藍色虛線)，一般不一定是由中垂線直接延伸出去的(中垂線直接延伸的是綠色實線)。

故這邊的中垂線我們指的是由三角形的外心往邊方向延伸的那一種射線(紅色實線)。



接下來，想知道在研究動機所述的情況下可能找得到解嗎？如果有解的話，會是有限個解或是無限個解？這些點位置的關係又會是怎樣？

一、探討「在矩形邊上找到兩點，兩點連線的中垂線恰能將該矩形面積二等分」之兩點存在性、及其解是否唯一，並證明之。

先使用 Cabri Geometry 軟體先進行模擬，

發現：這兩點的連線只要通過矩形對角線的交點，該兩點連線必可將矩形二等分。

證明：粉色區域面積＝黃色區域面積

$$\because \angle APO = \angle BRO, \angle AOP = \angle BOR, \overline{PO} = \overline{OR}$$

$$\therefore \triangle APO \cong \triangle BRO$$

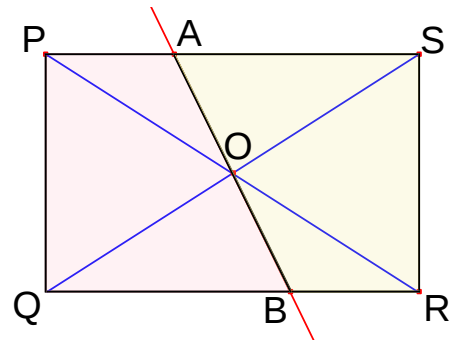
$$\text{又} \because \angle BQO = \angle ASO, \angle AOS = \angle BOQ, \overline{QO} = \overline{SO}$$

$$\therefore \triangle BQO \cong \triangle ASO$$

而 $\triangle PQO = \triangle SRO$, (O為對角線交點)

$$\text{故} \triangle APO + \triangle PQO + \triangle BQO = \triangle BRO + \triangle SRO + \triangle ASO$$

得到粉色區域面積＝黃色區域面積



二、探討「在矩形邊上找到三點，所形成之三角形三邊上的中垂線恰能將該矩形面積三等分」之三點存在性、及其解是否唯一，並證明之。

接下來三個點的問題就很難下手，一個看似簡單的問題，雖然猜測這個問題有解，卻無法得到切確的答案，所以我們先將範圍縮小，由對稱情形去探討解的存在性，再進一步研究非對稱情形的解。

因為正方形有四條對稱軸，而邊長非 1：1 的矩形只有兩條對稱軸，故將此兩種圖形分開討論：

(一)探討「在正方形邊上找到三點，所形成之三角形三邊上的中垂線恰能將該正方形面積三等分」之三點存在性、及其解是否唯一。

1.探討「在正方形邊上找到三點，所形成之三角形三邊上的中垂線恰能將該正方形面積三等分」之三點『存在性』。

我們先從「特殊的矩形」—正方形開始，去探討是否有解。

使用 Cabri Geometry 軟體先進行模擬後，發現：當三點其中一點位於對稱軸，且另兩點也對稱於此對稱軸上時，可以找到滿足條件的解。

我們進一步確定。不失一般性地假設正方形邊長為 1，邊上三點坐標分別為 $(0,a)$ 、 $(\frac{1}{2},1)$ 、

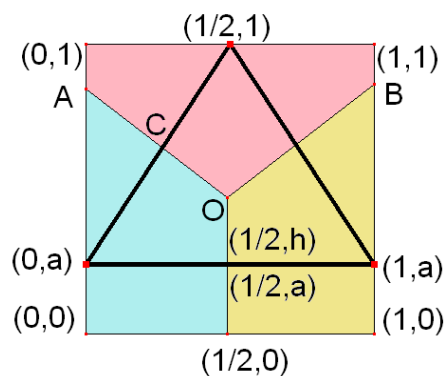


圖 1

$(1,a)$ ，此時外心 $O(\frac{1}{2},h)$ 位在對稱軸上

(如圖 1 所示)；

探討 ❶ h 之值、❷ 求 A、B 相對坐標、❸ a 之值

Step1：藉由外心到圓周上任一點等距，

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (h-a)^2} &= \sqrt{0^2 + (h-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + (h-a)^2} \\ \Rightarrow h^2 - 2ah + a^2 + \frac{1}{4} &= h^2 - 2h + 1 \\ \Rightarrow -2ah + 2h &= \frac{3}{4} - a^2 \\ \text{得到 } h &= \frac{-3 + 4a^2}{8(a-1)}\end{aligned}$$

Step2：令 $A(0,x)$ 、 $B(1,x)$ ，並利用 A—C—O 三點共線及 B—D—O 三點共線，斜率相同

$$\begin{aligned}\frac{\frac{a+1}{2} - \frac{3-4a^2}{8(a-1)}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} &= \frac{x - \frac{a+1}{2}}{0 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2a-2} \\ \therefore x &= \frac{-5 + 4a^2}{8(a-1)} \\ \text{得到 } A &\left(0, \frac{-5 + 4a^2}{8(a-1)}\right) \text{ 及 } B \left(1, \frac{-5 + 4a^2}{8(a-1)}\right)\end{aligned}$$

Step3：黃色區域面積＝粉色區域面積＝藍色區域面積＝ $\frac{\text{正方形面積}}{3}$

$$\text{黃色區域面積} = \text{粉色區域面積} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3+4a^2}{8(a-1)} & \frac{-5+4a^2}{8(a-1)} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-5+4a^2}{8(a-1)} & \frac{-3+4a^2}{8(a-1)} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow |a+1| = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-7}{3} \text{ or } \frac{1}{3} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{粉色區域面積} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{-5+4a^2}{8(a-1)} & \frac{-3+4a^2}{8(a-1)} & \frac{-5+4a^2}{8(a-1)} & 1 \end{vmatrix}$$

$$|a-1| = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{3} \text{ or } \frac{1}{3} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \textcircled{2} \text{ 知 } a = \frac{1}{3}$$

【結論】在邊長為 1 正方形中，三角形三頂點坐標為 $(0, \frac{1}{3})$ 、 $(\frac{1}{2}, 1)$ 、 $(2, \frac{1}{3})$ ，外

心為 $(\frac{1}{2}, \frac{23}{48})$ 時，其三中垂線將正方形面積三等分。

【定理】在條件下當三角形其中一頂點在中點，其他兩點對稱時必會在對稱邊三分之二的位置

【證明】(先設面積相等去證明 $\overline{PB}:\overline{BS}=2:1$)

證 $\triangle AOD \cong \triangle CFD(ASA)$

$\angle OAC = \angle ACQ(\overline{AG} \parallel \overline{QR})$

$\angle ADO = \angle FDC(\overline{FO}$ 為 $\overline{AC}$ 中垂線)

$\overline{AD} = \overline{DC}(\overline{FO}$ 為 $\overline{AC}$ 中垂線)

$\Rightarrow \overline{AO} = \overline{FC}, \overline{DO} = \overline{FD}$

$\triangle AQF \cong \triangle CHO(RHS)$

$\Rightarrow \overline{AF} = \overline{CO}$

$\triangle AFD \cong \triangle COD(SAS)$

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{AF} = \overline{CO} \\ \angle Q = \angle H \\ \overline{AQ} = \overline{CH}(\text{平行}\&\text{垂直}) \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{FQ} = \overline{OH}, \triangle AQF \text{ 面積} = \triangle CHO \text{ 面積}$

證明 (面積 $PEDA = \text{面積} HCGR$)

面積 $PEDA = \text{面積} HCGR$

$\Rightarrow (\overline{PE} + \overline{AO}) \times \frac{\overline{AP}}{2} = \overline{HG} \times \overline{CH}$

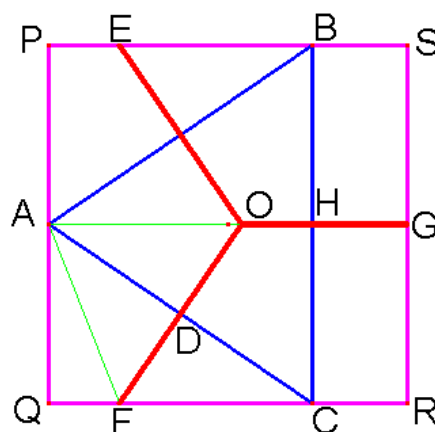
$\Rightarrow (\overline{OH} + \overline{AO}) \times \frac{\overline{AP}}{2} = \overline{HG} \times \overline{OH}$

$\Rightarrow \overline{AH} \times \frac{\overline{AP}}{2} = \overline{HG} \times \overline{AP}$

$\Rightarrow \frac{\overline{AH}}{2} = \overline{HG}$

故 $\overline{AH}:\overline{HG}=2:1$

得到 $\overline{PB}:\overline{BS}=2:1$

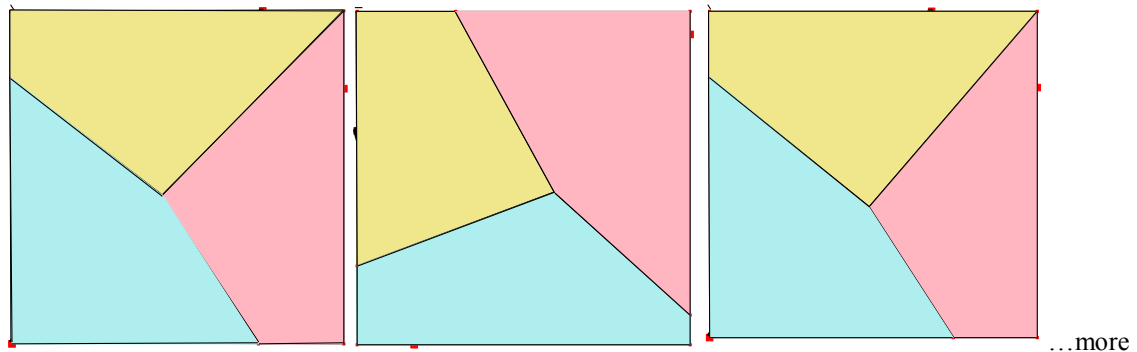


在探討完正方形解的存在性後，我們又想知道：正方形所有解的情形為何？

是有限個解還是無限多個解？

2.探討「在正方形邊上找到三點，所形成之三角形三邊上的中垂線恰能將該正方形面積三等分」之三點『其解是否唯一』。

使用 Cabri Geometry 軟體先進行模擬，



發現：並非唯一解。

針對第一個圖形進一步確定。

因為此圖形三點中的一點恰巧在正方形的頂點上，且另兩點對稱於對角線。

不失一般性地假設正方形邊長為 1，邊上三點坐標分別為 $(a,1)$ 、 $(0,0)$ 、 $(1,a)$ ，此時外心 $O(h,h)$ 位在對稱軸上（如圖 2 所示）；

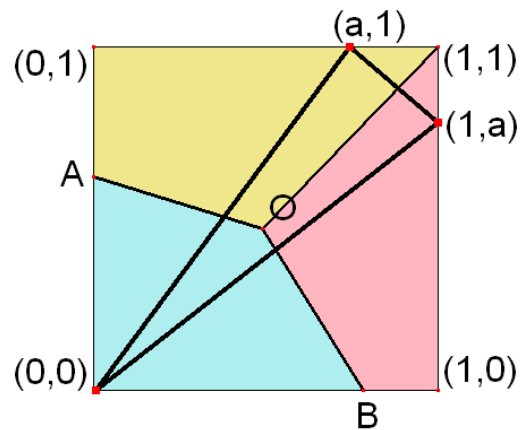


圖 2

探討 ❶ h 之值、❷ 求 A、B 相對坐標、❸ a 之值

Step1：藉由外心到圓周上任一點等距的性質，

$$\sqrt{(0-h)^2 + (0-h)^2} = \sqrt{(h-a)^2 + (h-1)^2} = \sqrt{(h-1)^2 + (h-a)^2}$$

$$\Rightarrow 2h^2 = 2h^2 - 2ah + a^2 - 2h + 1$$

$$\Rightarrow 2ah + 2h = a^2 + 1$$

$$\text{得到 } h = \frac{a^2 + 1}{2(a+1)}$$

Step2：令 $A(0,x)$ 、 $B(x,0)$ ，且利用 $A-C-O$ 三點共線及 $B-D-O$ 三點共線，斜率相同

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{a^2+1}{2(a+1)}}{\frac{a}{2} - \frac{a^2+1}{2(a+1)}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{0 - \frac{a}{2}} = \frac{x - \frac{a^2+1}{2(a+1)}}{0 - \frac{a^2+1}{2(a+1)}}$$

$$\therefore x = \frac{a+1}{2}$$

$$\text{得到 } A\left(0, \frac{a^2+1}{2}\right) \text{ 及 } B\left(\frac{a^2+1}{2}, 0\right)$$

Step3：黃色區域面積＝粉色區域面積＝藍色區域面積＝ $\frac{\text{正方形面積}}{3}$

$$\text{黃色區域面積} = \text{藍色區域面積} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 0 & \frac{a^2+1}{2} & \frac{a^2+1}{2(a+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+1}{2(a+1)} & \frac{a^2+1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} \frac{a^2+1}{2} & \frac{a^2+1}{2(a+1)} & 1 & 1 & \frac{a^2+1}{2} \\ 0 & \frac{a^2+1}{2(a+1)} & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2(a^2+1)^2}{8a+8} = \pm \frac{1}{3}$$

$$\text{解方程式 } \frac{2(a^2+1)^2}{8a+8} = \frac{1}{3}$$

$$\text{得到 } a = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{-\frac{3}{4} + \frac{214^{1/3}}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3} \left(-4 - 14^{1/3} + \frac{4}{\sqrt{-\frac{4}{3} + \frac{214^{1/3}}{3}}} \right)} \right),$$

$$\frac{1}{2} \left(-\sqrt{-\frac{3}{4} + \frac{214^{1/3}}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3} \left(-4 - 14^{1/3} + \frac{4}{\sqrt{-\frac{4}{3} + \frac{214^{1/3}}{3}}} \right)} \right),$$

續下頁

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{4}+\frac{214^{\frac{1}{3}}}{3}}-\sqrt{\frac{1}{6}\left(-4-14^{\frac{1}{3}}+\frac{4}{\sqrt{-\frac{4}{3}+\frac{214^{\frac{1}{3}}}{3}}}\right)},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{4}+\frac{214^{\frac{1}{3}}}{3}}+\sqrt{\frac{1}{6}\left(-4-14^{\frac{1}{3}}+\frac{4}{\sqrt{-\frac{4}{3}+\frac{214^{\frac{1}{3}}}{3}}}\right)}$$

➡ a 的近似解為 -0.261-1.530TM、-0.261+1.530TM、**0.715**、-0.193

$$\text{解方程式 } \frac{(a^2+4)^2}{8(a+2)} = -\frac{8}{3}$$

得到解為

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{4}+\frac{16}{3(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3}(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}$$

$$-\sqrt{\frac{1}{6}\left(-4-\frac{8}{(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}-(17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{\sqrt{-\frac{4}{3}+\frac{16}{3(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3}(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}}}\right)},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{4}+\frac{16}{3(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3}(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}$$

$$+\sqrt{\frac{1}{6}\left(-4-\frac{8}{(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}-(17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{\sqrt{-\frac{4}{3}+\frac{16}{3(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3}(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}}}\right)},$$

續下頁

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{4}+\frac{16}{3(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3}(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}$$

$$-\sqrt{\frac{1}{6}\left(-4-\frac{8}{(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}-(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{\sqrt{-\frac{4}{3}+\frac{16}{3(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3}(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}}\right)},$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{3}{4}+\frac{16}{3(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3}(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}$$

$$+\sqrt{\frac{1}{6}\left(-4-\frac{8}{(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}-(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{\sqrt{-\frac{4}{3}+\frac{16}{3(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3}(-17+i\sqrt{223})^{\frac{1}{3}}}}\right)}$$

a 的近似解為 $0.564 + 1.381^{\text{TM}}, 0.564 - 1.381^{\text{TM}}, -0.564 + 0.853^{\text{TM}}, -0.564 - 0.853^{\text{TM}}$

發現：只有 $a \approx 0.715$ 滿足解的條件

結論：在邊長為 2 正方形中，三角形三頂點坐標為 $(1, 0.715)$ 、 $(0.715, 1)$ 、 $(0, 0)$ ，外心為 $(0.4405, 0.4405)$ 時，其三中垂線將正方形面積三等分。

【定理】 在條件下當三角形其中一頂點在正方形頂點，其他兩點對稱時必會在對稱邊近似於 0.715 的位置

【證明】 未來嘗試使用研究一 1 的幾何原理進行證明

3.探討「在正方形邊上找到三點，所形成之三角形三邊上的中垂線恰能將該正方形面積三等分」之三點『是否無限多解』。

不失一般性地假設

正方形邊長為 1，

四個頂點 PQRS 的坐標分別為 (0,1)、(0,0)、(1,0)、(1,1)

邊上三點 ABC 的坐標分別為(a,1)、(0,b)、(c,0)，

外心坐標 O(x,y)

另外，中垂線與邊上交點 EFG 的坐標分別為(e,1)、(0,f)、(1,g) (如圖 3 所示)；

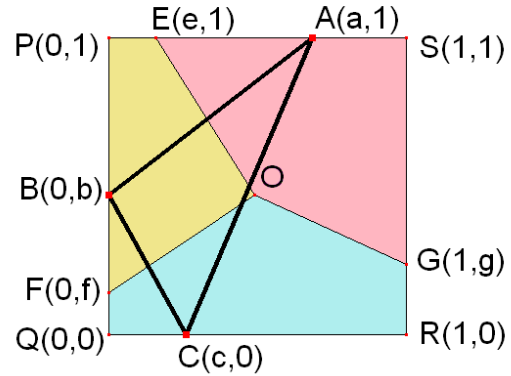


圖 3

Step1：求出 x、y、e、f、g

$$\overline{AB} \text{ 方程式: } y = \frac{1-b}{a}x + b \rightarrow \text{對應中垂線 } \overline{EO} \text{ 方程式: } y = \frac{a}{b-1}x + \frac{b^2 - a^2 - 1}{2(b-1)}$$

$$\overline{BC} \text{ 方程式: } y = \frac{-b}{c}x + b \rightarrow \text{對應中垂線 } \overline{FO} \text{ 方程式: } y = \frac{c}{b}x + \frac{b^2 - c^2}{2b}$$

$$\overline{AC} \text{ 方程式: } y = \frac{1}{a-c}x + \frac{c}{a-c} \rightarrow \text{對應中垂線 } \overline{GO} \text{ 方程式: } y = (c-a)x + \frac{a^2 - c^2 + 1}{2}$$

解 $\overline{EO}$ ， $\overline{GO}$ 聯立方程式

$$\text{得外心 O 坐標} = \left(\frac{-b - a^2b + b^2 - c^2 + bc^2}{2(ab + c - bc)}, \frac{-a^2b - c - a^2c + b^2c + ac^2}{2(ab + c - bc)} \right)$$

$$\text{由 } \overline{EO} \text{ 方程式求 E 點坐標}(e,1) = \left(\frac{-1 + a^2 + 2b - b^2}{2a}, 1 \right)$$

$$\text{由 } \overline{FO} \text{ 方程式求 F 點坐標}(0,f) = \left(0, \frac{b^2 - c^2}{2b} \right)$$

$$\text{由 } \overline{GO} \text{ 方程式求 G 點坐標}(1,g) = \left(1, -a + c + \frac{1}{2}(1 + a^2 - c^2) \right),$$

其中 $0 \leq e, f, g \leq 1$

$$\text{得到： } x = \frac{b + a^2b - b^2 + c^2 - bc^2}{2ab + 2c - 2bc},$$

$$y = \frac{ab^2 + c + a^2c - b^2c - ac^2}{2ab + 2c - 2bc},$$

$$e = \frac{-1 + a^2 + 2b - b^2}{2a},$$

$$f = \frac{b^2 - c^2}{2b},$$

$$g = -a + c + \frac{1}{2}(1 + a^2 - c^2)$$

Step2：利用多邊形面積相等且皆 = $\frac{\text{正方形面積}}{3}$ ，進行整理

$$\text{令多邊形 PEOF 的面積} - \frac{\text{正方形面積}}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[e(1-y) + (1-f)x] - \frac{1}{3} = 0 \dots\dots ①$$

經整理後得

$$\begin{aligned} & -3a^4bc - 3(-1+b)^4bc - 6a^3b(-2b+b^3-c^3) + a(-1+b)(-6b^3+3b^4+2b(4-3c)c-3c^4) \\ & + 2a^2b[3c+3b^2c-2b(2+3c)] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{多邊形 FOGRQ 的面積} - \frac{\text{正方形面積}}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[fx + y + g(1-x)] - \frac{1}{3} = 0 \dots\dots ②$$

經整理後得

$$\begin{aligned} & 3b^4 + 3c^4 - 6b^3(1+a^2-c^2) - 2bc[2-6a-3a^2(-2+c)+3c-6c^2+3c^3] \\ & + b^2[3-12a^3+3a^4+4c-12c^3+3c^4-6a^2(-3-2c+c^2)+4a(-1-6c+3c^2)] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{多邊形 OGSE 的面積} - \frac{\text{正方形面積}}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[(1-e)(1-y) + (1-g)(1-x)] - \frac{1}{3} = 0 \dots\dots ③$$

經整理後得

$$\begin{aligned} & [3a^5b + 3(-1+b)^4c + 3b^4(-4b+c) - 6a^2(2c+b(-1-2c+c^2))] + \\ & a^2[6c-6b^2c+4b(1-3c+3c^2)] \\ & + a[12b^3-3b^4+6b^2(-2+c^2)+c(4-12c^2-3c^3)+b(3-4c+6c^2-12c^3+3c^4)] = 0 \end{aligned}$$

Step3：固定一點 B 坐標，探討 AC 坐標相對位置

情形一：固定 B 在中點（取 0 和 1 的中點）， $b = \frac{1}{2}$ ，代入方程式①②③聯立使用

Mathematica 求解得 a,c 之近似解

解聯立方程式：

$$\begin{cases} -3c - 48a^4c + 8a^2(-8 + 3c) + 24a^3(3 + 4c^2) + a(9 - 64c + 48c^2 + 48c^4) = 0 \\ -3 + 48a^3 - 12a^4 + 16c + 36c^2 - 48c^3 - 12c^4 + a(16 - 48c^2) - 12a^2(5 - 4c + 2c^2) = 0 \\ 24a^3 + 48a^4(-2 + c) + 3c - 48a^3(-1 + 2c + c^2) + 8a^2(4 - 3c + 12c^2) + \\ a(-3 + 32c - 120c^2 + 96c^3 - 24c^4) = 0 \end{cases}$$

得到

$\{a \rightarrow 12.1969 - 3.19411^{TM}, c \rightarrow -7.4465 - 17.1842^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow 12.1969 + 3.19411^{TM}, c \rightarrow -7.4465 + 17.1842^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow -0.000609363, c \rightarrow -4.58842\},$
 $\{a \rightarrow 2.92552 + 0.0354796^{TM}, c \rightarrow 0.638802 - 0.184148^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow 2.92552 - 0.0354796^{TM}, c \rightarrow 0.638802 + 0.184148^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow 0.548177 + 0.934148^{TM}, c \rightarrow 0.351741 - 0.716579^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow 0.548177 - 0.934148^{TM}, c \rightarrow 0.351741 + 0.716579^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow +0.5^{TM}, c \rightarrow -0.5^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow +0.5^{TM}, c \rightarrow -0.5^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow -0.5^{TM}, c \rightarrow +0.5^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow -0.5^{TM}, c \rightarrow +0.5^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow 0.929347, c \rightarrow 0.211854\},$
 $\{a \rightarrow 0.0961223 + 0.170024^{TM}, c \rightarrow 0.836835 - 0.0688673^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow 0.0961223 - 0.170024^{TM}, c \rightarrow 0.836835 + 0.0688673^{TM}\},$
 $\{a \rightarrow -0.0262922, c \rightarrow -0.431657\},$
 $\{a \rightarrow -0.598517 + 1.24012^{TM}, c \rightarrow -0.392031 + 1.35406^{TM}\},$

$$\{a \rightarrow -0.598517 - 1.24012 \text{ } ^{\text{TM}}, c \rightarrow -0.392031 - 1.35406 \text{ } ^{\text{TM}}\},$$

$$\{a \rightarrow 0.67789, c \rightarrow -0.624311\},$$

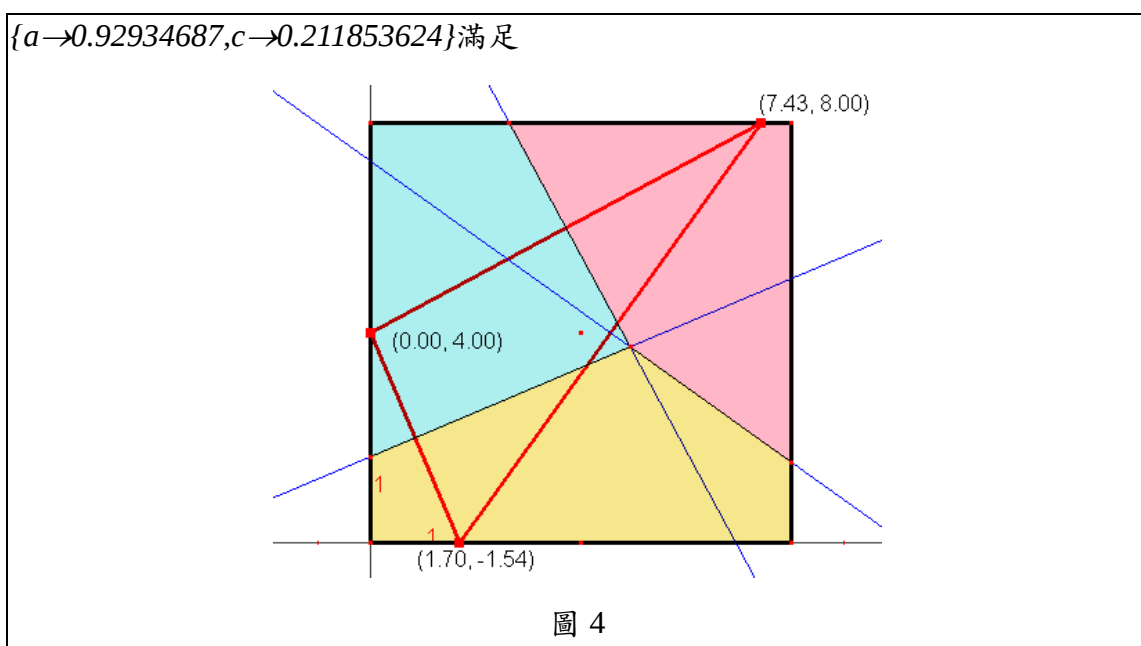
$$\{a \rightarrow 0.0416382 + 0.106578 \text{ } ^{\text{TM}}, c \rightarrow 0.103115 - 0.0541427 \text{ } ^{\text{TM}}\},$$

$$\{a \rightarrow 0.0416382 - 0.106578 \text{ } ^{\text{TM}}, c \rightarrow 0.103115 + 0.0541427 \text{ } ^{\text{TM}}\}$$

實數解有 4 組，但滿足假設在範圍內(即大於 0、小於邊長)的只有 1 組

經由 Cabri Geometry 進行驗證（如圖 4 所示），發現只有

$\{a \rightarrow 0.92934687, c \rightarrow 0.211853624\}$ 滿足



備註：為繪 Cabri Geometry 圖形方便，所有圖形之坐標等比例放大正方形邊長為 8，之後圖形亦以此類推。

情形二：固定 B 在 $\frac{3}{4}$ 位置（取 $\frac{1}{2}$ 和 1 的中點），即 $b = \frac{3}{4}$ ，代入方程式①②③聯立使

用 Mathematica 求解得 a, c 之近似解

解聯立方程式：

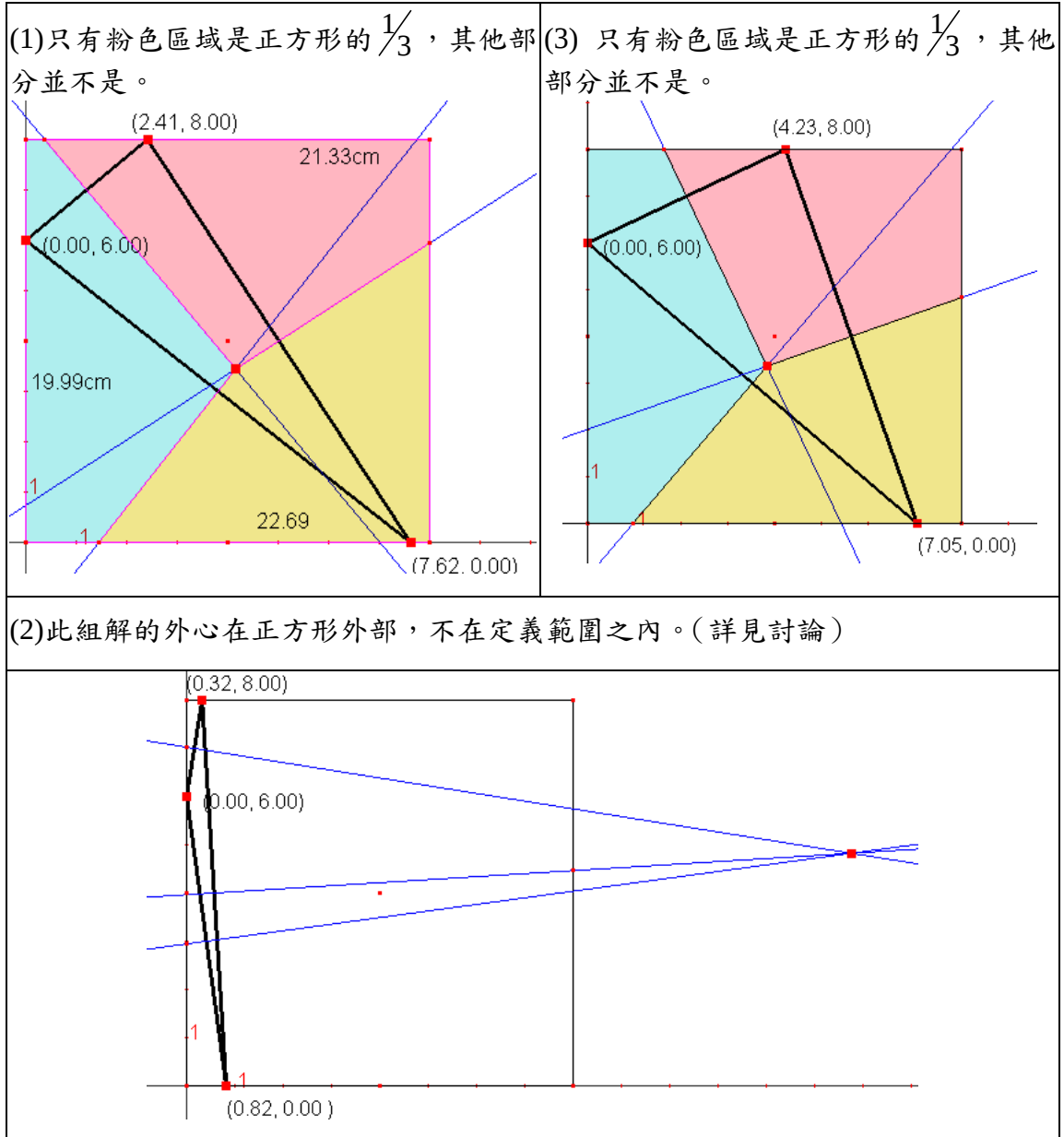
$$\begin{cases} 96a^2(-16+c)-3c-768a^4c+96(15+16c^2)+a(135-512c+384c^2+256c^4)=0 \\ -9+576a^3-144a^4+64c+168c^2-192c^3-16c^4-192a(-1-2c+3c^2)-24a^2(27-8c+4c^2)=0 \\ 576a^5+768a^4(-3+c)+3c-384a^3(-3+2c+3c^2)+96a^2(8-17c+24c)+ \\ a(-99+256c-1056c^2+768c^3-192c^4)=0 \end{cases}$$

得到

$$\begin{aligned} & \{a \rightarrow 28.363531682-5.1524364665 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 19.628225072-69.239221011 \text{ } ^{TM}\}, \\ & \{a \rightarrow 28.363531682+5.1524364665 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 19.628225072+69.239221011 \text{ } ^{TM}\} \\ & \{a \rightarrow 0, c \rightarrow 12.7958938785\}, \{a \rightarrow 0.301337242451, c \rightarrow 0.95328679354\}, \\ & \{a \rightarrow 2.8791757638+0.06606450993 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 0.67237724474-0.27334338698 \text{ } ^{TM}\}, \\ & \{a \rightarrow 2.8791757638-0.06606450993 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 0.67237724474+0.27334338698 \text{ } ^{TM}\}, \\ & \{a \rightarrow 0.41598781981+1.02249366973 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 0.50301965198-0.74224211317 \text{ } ^{TM}\}, \\ & \{a \rightarrow 0.41598781981-1.02249366973 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 0.50301965198+0.74224211317 \text{ } ^{TM}\}, \\ & \{a \rightarrow 1.01379869211, c \rightarrow 0.051802250847\}, \{a \rightarrow 0.25000000000 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 0.75000000001 \text{ } ^{TM}\}, \\ & \{a \rightarrow 0.25 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 0.75000000001 \text{ } ^{TM}\}, \{a \rightarrow 0.25 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 0.75000000001 \text{ } ^{TM}\}, \\ & \{a \rightarrow 0.25000000000 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 0.75000000001 \text{ } ^{TM}\}, \{a \rightarrow 0.0097466350671, c \rightarrow 1.05418818427\}, \\ & \{a \rightarrow 0.64645604844+1.40703110035 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 0.45856912230+1.52637534812 \text{ } ^{TM}\}, \\ & \{a \rightarrow 0.64645604844-1.40703110035 \text{ } ^{TM}, c \rightarrow 0.45856912230-1.52637534812 \text{ } ^{TM}\}, \\ & \{a \rightarrow -0.00287498098985, c \rightarrow -0.371284244672\}, \\ & \{a \rightarrow 0.52923749607, c \rightarrow 0.88099357429\}, \{a \rightarrow 0.120455168518, c \rightarrow -0.053119305316\}, \\ & \{a \rightarrow 0.00382622623136, c \rightarrow 0.102827492713\} \end{aligned}$$

實數解有 6 組，但滿足假設在範圍內(即大於 0、小於邊長)的只有 3 組

經由 Cabri Geometry 進行驗證發現沒有滿足的解。



情形三：固定 B 在 $\frac{5}{8}$ 位置（取 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{4}$ 的中點），即 $b = \frac{5}{8}$ ，代入方程式①②③聯立使

用 Mathematica 求解得 a, c 之近似解

解聯立方程式：

$$\begin{cases} -1215c - 61440a^4c + 640a^29 - 160 + 27c + 1920a^3955 + 64c^2 \\ + 3a(4125 - 20480c + 15360c^2 + 12288c^4) = 0 \\ 19200a^3 - 4800a^4 - 1280a(-5 - 6c + 15c^2) \\ - 240a^2(95 - 48c + 24c^2) - 3(225 - 1280c - 3120c^2 + 3840c^3 + 576c^4) = 0 \\ 7680a^5 + 243c + 6144a^4(-5 + 2c) - 3072a^3(-5 + 6c + 5c^2) \\ + 128a^2(80 - 123 + 240c^2) - 3a(465 - 2048c + 8064c^2 - 6144c^3 + 1536c^4) = 0 \end{cases}$$

得到

$$\{a \rightarrow 17.6185 - 3.96633 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 11.5472 - 32.0292 \text{ }^{TM}\},$$

$$\{a \rightarrow 17.6185 + 3.96633 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 11.5472 + 32.0292 \text{ }^{TM}\},$$

$$\{a \rightarrow -0.000080444, c \rightarrow -7.36069\},$$

$$\{a \rightarrow 2.89526 + 0.0566653 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 0.657243 - 0.256704 \text{ }^{TM}\},$$

$$\{a \rightarrow 2.89526 - 0.0566653 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 0.657243 + 0.256704 \text{ }^{TM}\},$$

$$\{a \rightarrow 0.477445 + 0.982066 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 0.433226 - 0.731665 \text{ }^{TM}\},$$

$$\{a \rightarrow 0.477445 - 0.982066 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 0.433226 + 0.731665 \text{ }^{TM}\},$$

$$\{a \rightarrow 0. + 0.375 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 0. - 0.625 \text{ }^{TM}\}, \{a \rightarrow 0. + 0.375 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 0. - 0.625 \text{ }^{TM}\},$$

$$\{a \rightarrow 0. - 0.375 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 0. + 0.625 \text{ }^{TM}\}, \{a \rightarrow 0. - 0.375 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 0. + 0.625 \text{ }^{TM}\},$$

$$\{a \rightarrow 0.950957, c \rightarrow 0.134803\}, \{a \rightarrow 0.0561902, c \rightarrow 0.94297\}, \{a \rightarrow 0.269509, c \rightarrow 0.86355\},$$

$$\{a \rightarrow 0.621936 + 1.33289 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 0.426763 + 1.45061 \text{ }^{TM}\},$$

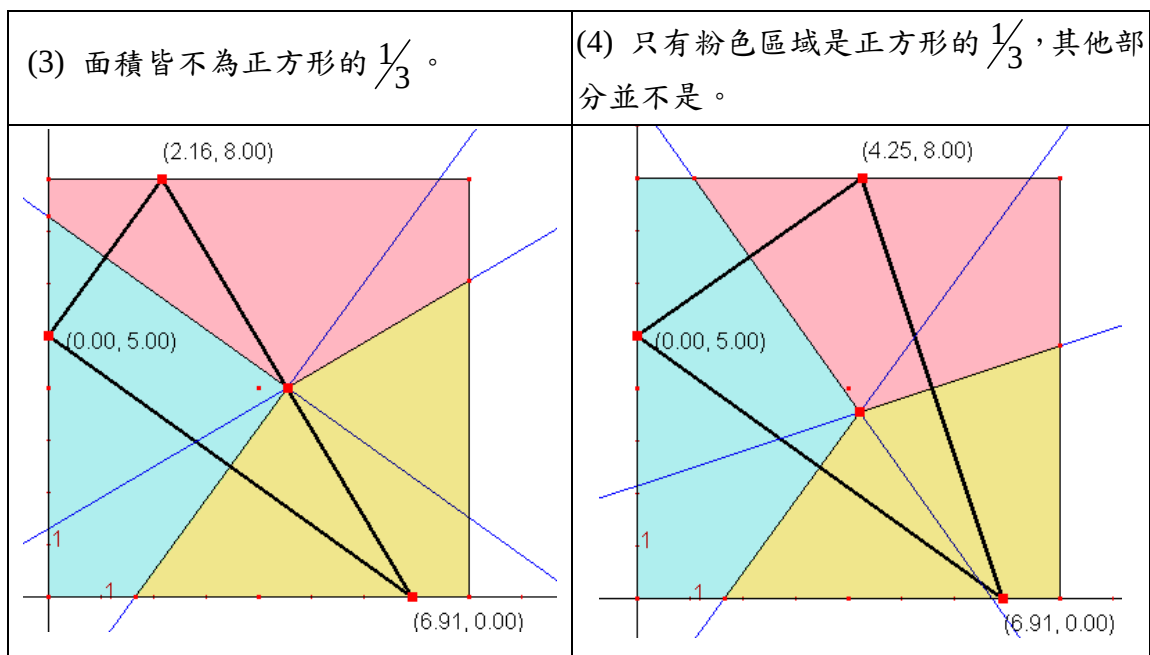
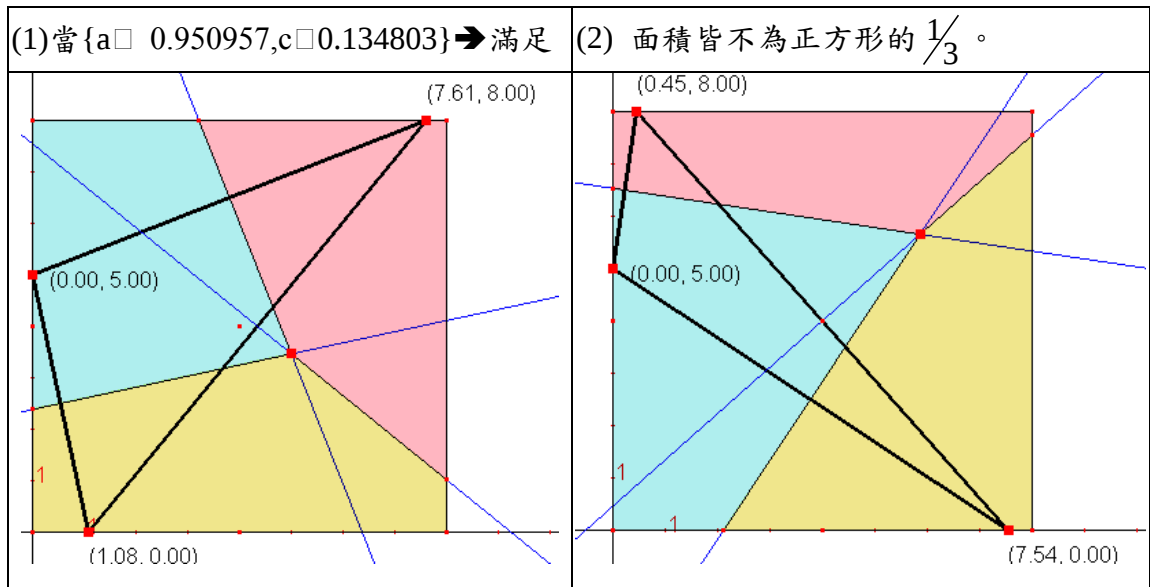
$$\{a \rightarrow 0.621936 - 1.33289 \text{ }^{TM}, c \rightarrow 0.426763 - 1.45061 \text{ }^{TM}\},$$

$$\{a \rightarrow -0.0104734, c \rightarrow -0.402895\}, \{a \rightarrow 0.5314, c \rightarrow 0.773615\},$$

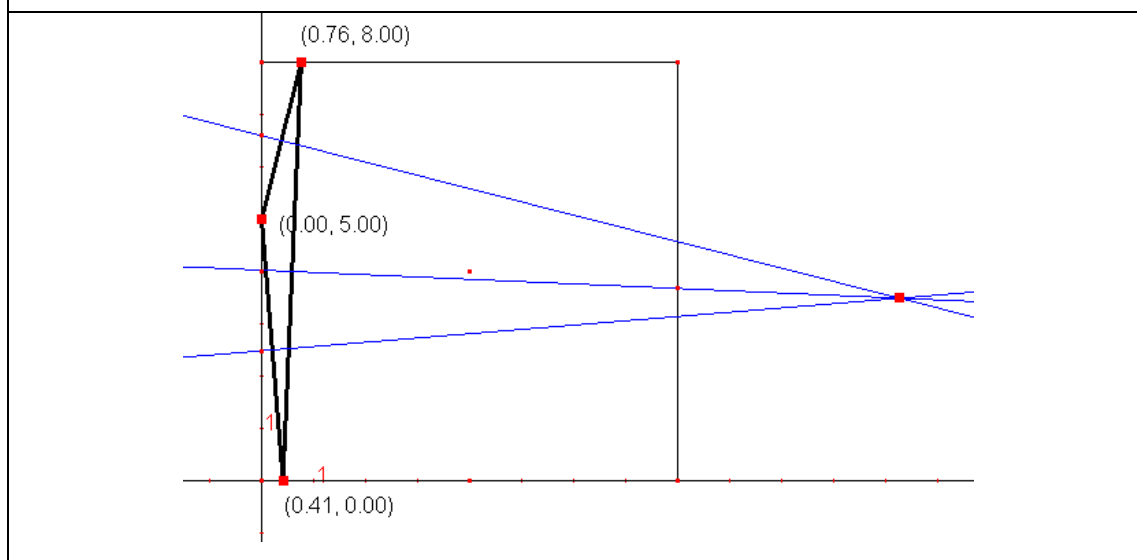
$$\{a \rightarrow 0.0953578, c \rightarrow 0.050877\}, \{a \rightarrow 0.0352563, c \rightarrow 0.0980521\}$$

實數解有 8 組，但滿足假設在範圍內(即大於 0、小於邊長)的只有 6 組

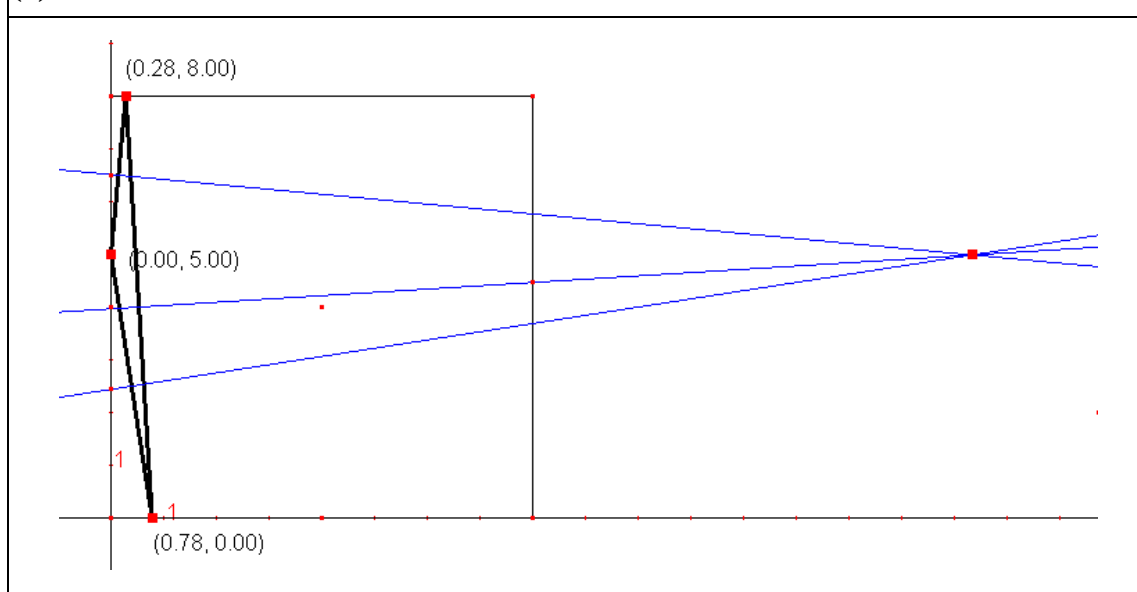
經由 Cabri Geometry 進行驗證，發現只有 $\{a \rightarrow 0.950957, c \rightarrow 0.134803\}$ 符合



(5)此組解的外心在正方形外部，不在定義範圍之內。(詳見討論)



(6) 【同 (5)】



情形四：固定 B 在 $\frac{9}{16}$ 位置 (取 $\frac{5}{8}$ 和 $\frac{1}{2}$ 的中點) $b = \frac{9}{16}$ ，代入方程式①②③聯立使用

Mathematica 求解得 a, c 之近似解

仿照一樣的方法，

發現實數解的有4組，但滿足假設在範圍內(即大於0、小於邊長)的只有2組

經由Cabri Geometry進行驗證，發現只有 $\{a \rightarrow 0.934631, c \rightarrow 0.174255\}$ 符合

情形五：固定 B 在 $\frac{19}{32}$ 位置（取 $\frac{9}{16}$ 和 $\frac{5}{8}$ 的中點），即 $b = \frac{19}{32}$ ，代入方程式①②③聯立

使用 Mathematica 求解得 a,c 之近似解

仿照一樣的方法，

發現實數解的有 6 組，但滿足假設在範圍內(即大於 0、小於邊長)的只有 4 組

經由 Cabri Geometry 進行驗證，發現只有 $\{a \rightarrow 0.941425, c \rightarrow 0.154722\}$ 符合

結論：根據情形一、二、三、四、五利用稠密性，可推得當 $\left\{b \mid \frac{1}{2} \leq b \leq \frac{5}{8}, b \in R\right\}$ 時，

a、c 有無限多組解

證明：未來嘗試進行幾何證明

在探討完正方形解的情形後，如果是邊長比不為 1：1 的矩形是否也會有解？

(二)探討「在矩形邊上找到三點，所形成之三角形三邊上的中垂線恰能將該矩形面積三等分」之三點存在性、及其解是否唯一。

1.探討「在矩形邊上找到三點，所形成之三角形三邊上的中垂線恰能將該矩形面積三等分」之三點存在性、及其解是否唯一。

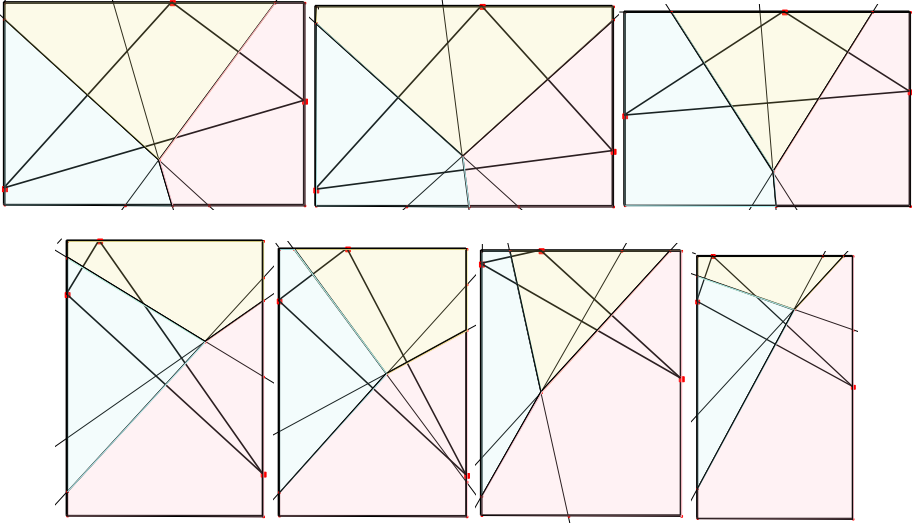
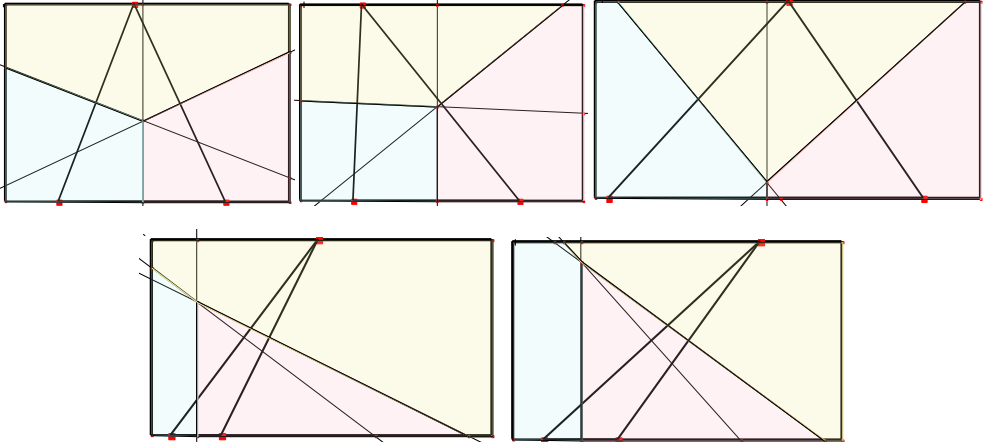
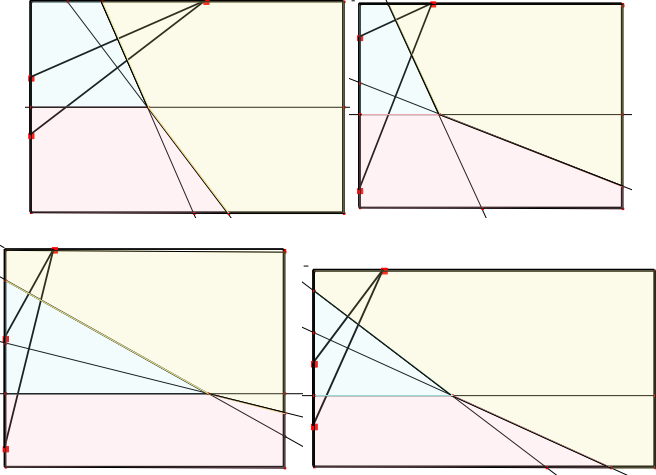
因為正方形的部分，已經能找到無限多解，因此其存在性及唯一性無庸置疑；直接針對特殊位置的三點進行討論，探討是否能找到滿足條件任意比例的矩形。

2.探討「能找到任意比例的矩形（寬比長=1：d），其邊上特殊位置的三點所形成之三角形三邊中垂線恰能將該矩形面積三等分」。

我們好奇的是如果是任意長寬比的矩形，是否能找到滿足條件的三點位置？

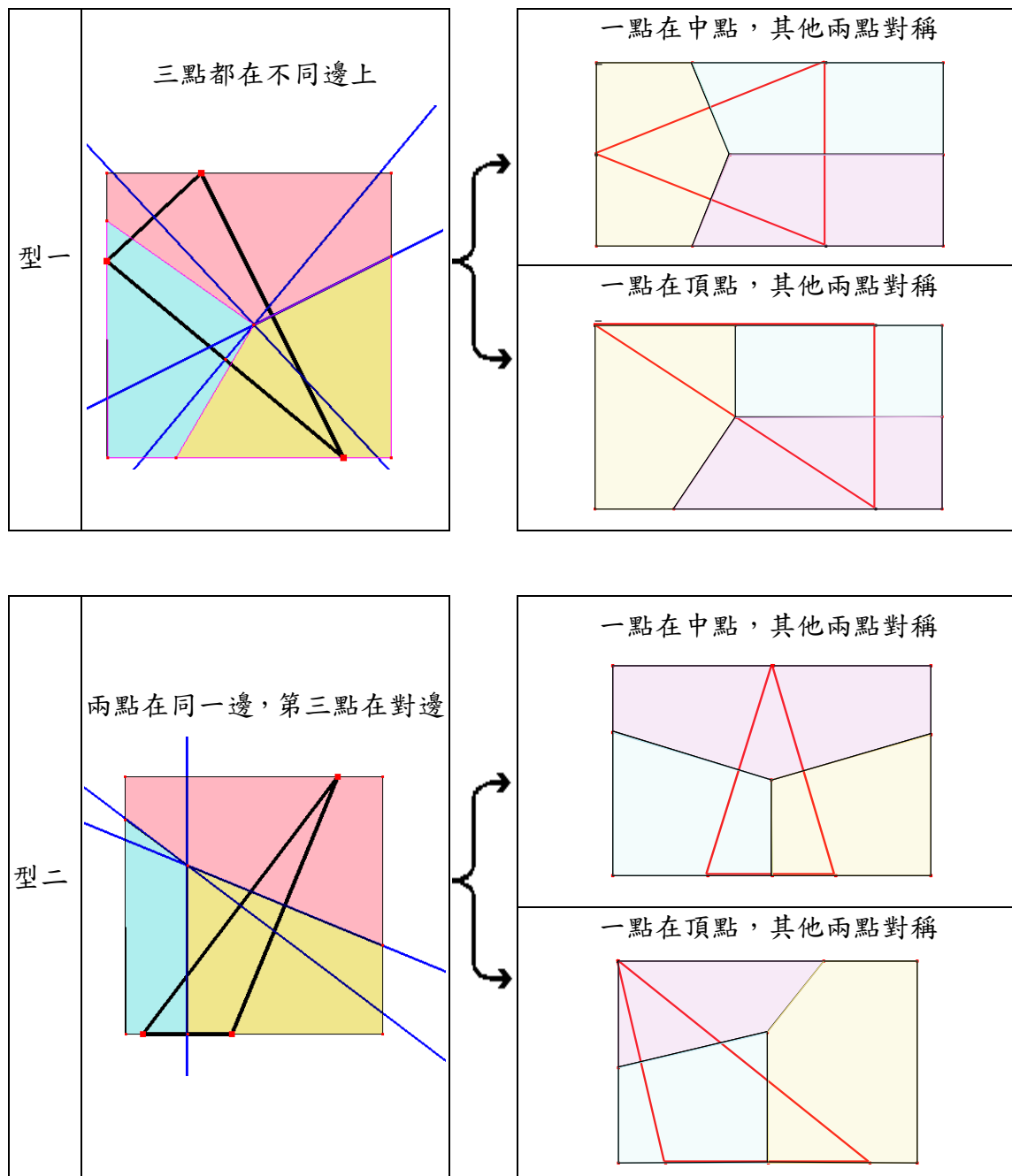
在嘗試的過程中，我們發現三點的位置及中垂線與矩形邊交點的位置會

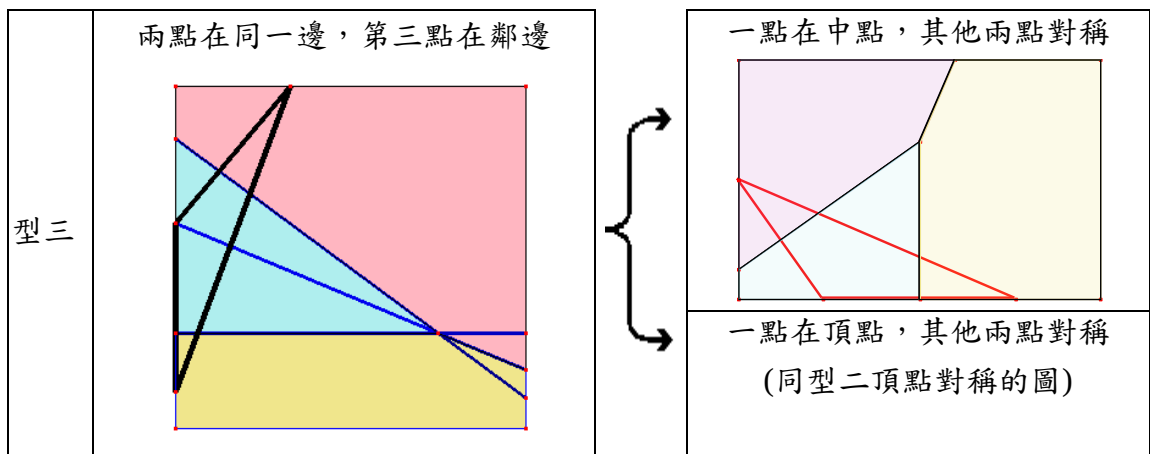
影響被分割之矩形面積的大小。因此根據「三點的位置及中垂線與矩形邊交點的位置」將矩形分成 16 個類型：

三點在不同邊上	
一點在一邊，另兩點在對邊	
一點在一邊，另兩點在鄰邊	

3.探討「能找到任意比例的矩形（寬比長=1:d），其邊上特殊位置的三點所形成之三角形三邊中垂線恰能將該矩形面積三等分」。

爲了方便討論，我們針對矩形邊上三點所在的相對位置，將矩形分成三型：





仿照研究 3 的做法

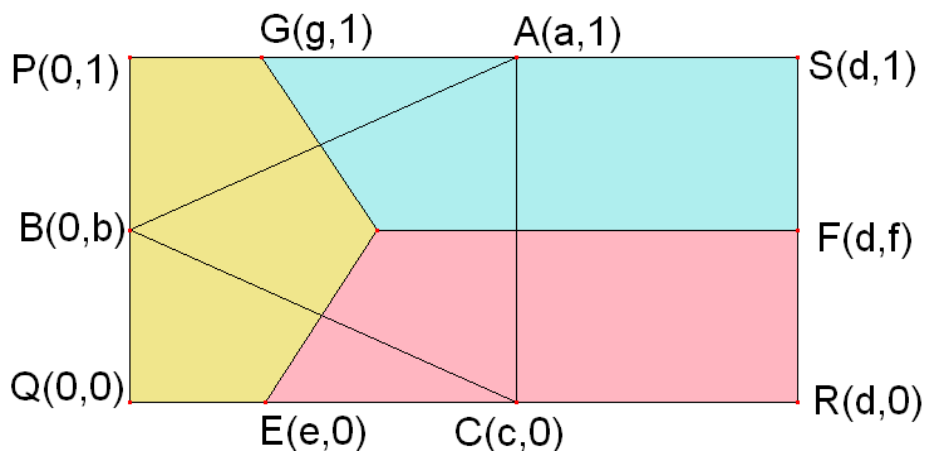


圖 5

不失一般性地假設矩形寬長的比為 $1:d$ ，

四個頂點 PQRS 的坐標分別為 $(0,1)$ 、 $(0,0)$ 、 $(d,0)$ 、 $(d,1)$

邊上三點 ABC 的坐標分別為 $(a,1)$ 、 $(0,b)$ 、 $(c,0)$ ，外心坐標 (x,y)

另外，中垂線與邊上交點 GEF 的坐標分別為 $(g,1)$ 、 $(e,0)$ 、 (d,f) (如圖 5 所示)；

Step1：求出 x 、 y 、 e 、 f 、 g

$\overline{BC}$ 方程式對應中垂線 $\overline{EO}$ 方程式：
$$y - \frac{b}{2} = \frac{c}{b} \left(x - \frac{c}{2} \right)$$

$$\overline{AC} \text{ 方程式對應中垂線 } \overline{FO} \text{ 方程式：} y - \frac{v}{2} = \frac{c-a}{v} \left(x - \frac{a+c}{2} \right)$$

$$\overline{AB} \text{ 方程式對應中垂線 } \overline{GO} \text{ 方程式：} y - \frac{b+v}{2} = \frac{a}{b-v} \left(x - \frac{a}{2} \right)$$

解 $\overline{EO}$, $\overline{FO}$ 聯立方程式

$$\text{得外心 O 坐標} = \left(-\frac{a^2b - bc^2 - b^2v + c^2v + bv^2}{2(-ab + bc - cv)}, -\frac{-ab^2 - a^2 + b^2c + ac^2 - cv^2}{2(ab - bc + cv)} \right)$$

$$\text{由 } \overline{EO} \text{ 方程式求 E 點坐標}(e,0) = \left(-\frac{b^2 - c^2}{2c}, 0 \right)$$

$$\text{由 } \overline{FO} \text{ 方程式求 F 點坐標}(d,f) = \left(d, -\frac{-a^2 + c^2 + 2ad - 2cd - v^2}{v} \right)$$

$$\text{由 } \overline{GO} \text{ 方程式求 G 點坐標}(g,1) = \left(-\frac{-a^2 + b^2 - 2bv + v^2}{2a}, 1 \right),$$

其中 $0 \leq f \leq 1$, $0 \leq e$, $g \leq d$

得到

$$x = -\frac{a^2b - bc^2 - b^2v + c^2v + bv^2}{2(-ab + bc - cv)},$$

$$y = -\frac{-ab^2 - a^2 + b^2c + ac^2 - cv^2}{2(ab - bc + cv)},$$

$$e = -\frac{b^2 - c^2}{2c},$$

$$f = -\frac{-a^2 + c^2 + 2ad - 2cd - v^2}{2v},$$

$$g = -\frac{-a^2 + c^2 + 2ad - 2cd - v^2}{2v}$$

Step2：利用多邊形面積相等且皆 = $\frac{\text{矩形面積}}{3}$, 進行整理

多邊形 PQEOG 的面積 - $\frac{\text{矩形面積}}{3} = 0 \Rightarrow \frac{x(v-g+v-y)}{2} + \frac{(v-y+v-f)(d-x)}{2} - \frac{vd}{3} = 0 $

$$-3a^4c^2 - 3c^2(b-v)^4 + 6a^3c(-b^2 + c^2 + 2bv) + 2ac(b-v)(3b^3 - 3bc^2 - 3b^2v + c(-3c + 4d)v) - a^2(3b^4 - 12b^2c^2 + 4bc(3c + 2d)v + 3c^2(c^2 - 2v^2)) = 0 \dots\dots ④$$

$$\text{多邊形 OERF 的面積} - \frac{\text{矩形面積}}{3} = 0 \Rightarrow \frac{x(g+y)}{2} - \frac{vd}{3} = 0$$

$$3a^5b + 3c(b-v)^4v + a^4(-12bd + 3cv) - 6a^3(2cdv + b(c^2 - 2cd - 2d^2 + v^2)) - a(b-v)(-3c^4 + 12c^3d + 4cdv^2 - 6c^2(2d^2 + bv) + 3bv(b^2 - 3bv + v^2)) - 2a^2(3b^2cv + 3cv(-2d^2 + v^2) - 2b(3c^2d - 6cd^2 + 3cv^2 + dv^2)) = 0 \dots\dots ⑤$$

$$\text{多邊形 GOFS 的面積} - \frac{\text{矩形面積}}{3} = 0 \Rightarrow \frac{(d-x)(y+f)}{2} - \frac{vd}{3} = 0$$

$$-3a^4bc + 12a^3bcd + 6a^2c(b^2v - c(c - 2d)v + b(c^2 - 2cd - 2d^2 - v^2)) - c(b-v)(3c^4 - 12c^3d + 4cdv^2 + 6c^2(2d^2 - v^2) + 3bv(b^2 + bv - v^2)) + a(3b^4v - 6b^2c^2v + 3c^2(c^2 - 4d^2)v + 4bcd(-3c^2 + 6cd + v^2)) = 0 \dots\dots ⑥$$

Step3：固定一點 B 坐標，使用 Mathematica 探討 AC 坐標對稱時矩形長寬的比

【型一】三點都在不同邊上

【型一 I】其中一點在中點，其他兩點對稱，即 $a=c$ 、 $b=1/2$ ，探討 d 之解

不失一般性假設長方形長：寬為 $1:d$ ，

$A(a,1)$ 、 $C(c,0)$ 兩點對稱（如圖 6 所示）

→ 經 Cabri Geometry 模擬

發現：其中垂線可以將矩形面積三等分

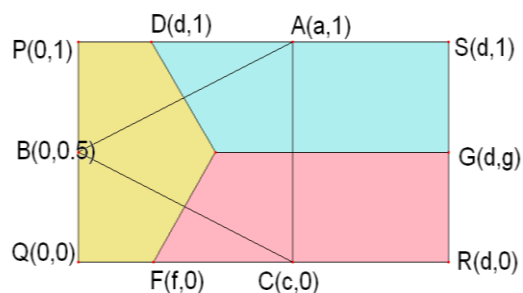


圖6

證明：可找到解滿足：藍色區域面積＝黃色區域面積＝粉色區域面積

將條件代入方程式④

$$-\frac{3c^2}{16} - 3c^6 + 6c^4\left(\frac{3}{4} + c^2\right) - c^2\left[\frac{3}{16} - 3c^2 + 3c^2(-2 + c^2) + 2c(3c + 2d)\right] - c^2\left[-\frac{3}{8} - \frac{3c^2}{2} + c(-3c + 4d)\right] = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{3}{2}c$$

結論：寬長比為 $1:d$ 長方形兩點對稱($a=c$)，第三點在中點($b=1/2$)，則 $d = \frac{3}{2}c = \frac{3}{2}a$ 時無限多組解。也就是任意比例的矩形當 B 在中點， AC 位置對稱且在 $\frac{2}{3} \times \frac{\text{長}}{\text{寬}}$ 時，可以滿足條件。

【型一Ⅱ】一點在頂點，其他兩點對稱，即 $a=c$ ， $b=1$ ，探討 d 之解

不失一般性假設長方形長：寬為 $1:d$ ，

$A(a,1)$ 、 $C(c,0)$ 兩點對稱（如圖 7 所示）

→經 Cabri Geometry 模擬

發現：其中垂線可以將矩形面積三等分

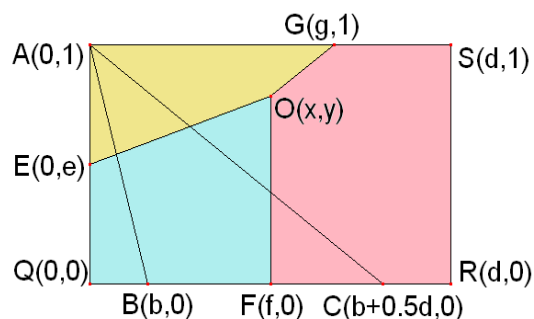


圖7

證明：可找到解滿足：藍色區域面積＝黃色區域面積＝粉色區域面積

將條件代入方程式④

$$-3c^6 + 6c^4(1+c^2) - c^2(3-12c^2+3c^2(-2+c^2)) + 4c(3c+2d) = 0$$

經由Mathematica軟體計算後，得到：

$$c=0, 0, \frac{1}{6}(2d-\sqrt{9+4d^2}), \frac{1}{6}(2d+\sqrt{9+4d^2})$$

因為 $0 < c \leq d$

故將上面求得的解帶入條件中：

$$0 < \frac{1}{6}(2d-\sqrt{4d^2+9}) \leq d \Rightarrow \text{不合}$$

$$0 < \frac{1}{6}(2d+\sqrt{4d^2+9}) \leq d \Rightarrow -2d < \sqrt{9+4d^2} < 4d$$

$$\Rightarrow 4d^2 < 9+4d^2 < 16d^2$$

$$\Rightarrow 0 < 9 < 12d^2$$

$$\Rightarrow d > \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ or } d < -\frac{\sqrt{3}}{2} (\text{不合})$$

結論：寬長比為 $1:d$ ，長方形兩點對稱($a=c$)，第三點在中點($b=1/2$)，則 $d > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 時有無限多組解。也就是 $d > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的矩形，當 B 在頂點， AC 位置對稱且 $a=c=\frac{1}{6}\left(2d+\sqrt{4d^2+9}\right)$ 時，可以滿足條件。

【型二】兩點在同一邊，第三點在對邊

【型二 I】一點在中點，其他兩點對稱，即 $a=\frac{d}{2}, c=d-b$ 探討 d 之解

不失一般性假設長方形長：寬為 $1:d$ ，

$B(b,0)$ 、 $C(b+\frac{d}{2},0)$ 兩點對稱

(如圖 8 所示)

→經 Cabri Geometry 模擬

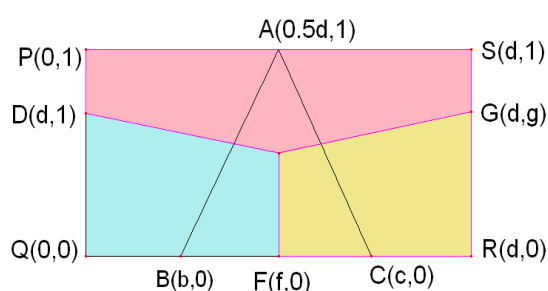


圖8

發現：其中垂線可以將矩形面積三等分

證明：可找到解滿足：藍色區域面積＝黃色區域面積＝粉色區域面積

經由 Mathematica 軟體計算後得到：

$$\text{黃色區域面積} : \frac{1}{12}(2d+6b^2d-3bd^2) \text{---}\textcircled{1}$$

$$\text{藍色區域面積} : \frac{1}{24}(-2d-6b^2d+3bd^2) \text{---}\textcircled{2}$$

令 $\textcircled{1}=\textcircled{2}$: (黃色區域面積＝藍色區域面積)

$$\frac{1}{24}(-2d-6b^2d+3bd^2) = \frac{1}{12}(2d+6b^2d-3bd^2)$$

$$b = \frac{1}{12}\left(3d \pm \sqrt{3(3d^2-16)}\right) \Rightarrow \text{負不合}$$

$$\text{而 } d \text{ 的範圍} : \sqrt{3(3d^2-16)} > 0 \Rightarrow d > \sqrt{\frac{16}{3}}。$$

結論： $d > \sqrt{\frac{16}{3}}$ 的矩形，當 A 在中點， BC 位置對稱且 $b=c=\frac{1}{12}\left(3d+\sqrt{3(3d^2-16)}\right)$ 時，可以滿足條件。

【型二Ⅱ】一點在頂點，其他兩點對稱，即 $a=1, c=d-b$ 探討 d 之解

不失一般性假設長方形長：寬為 $1:d$ ，

$B(b,0)$ 、 $C(b+\frac{d}{2},0)$ 兩點對稱

(如圖 9 所示)

→ 經 Cabri Geometry 模擬

發現：其中垂線不可能將矩形面積三等分

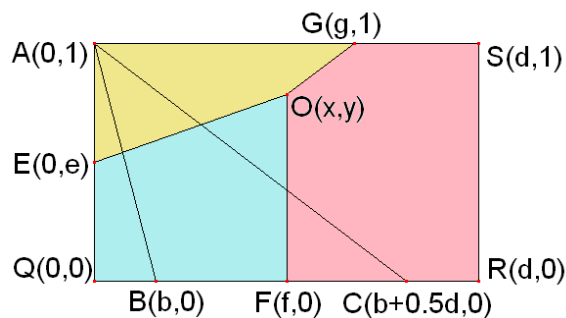


圖9

證明：藍色區域面積 $\neq$ 黃色區域面積 $\neq$ 粉色區域面積

黃色區域面積：(AEOG)

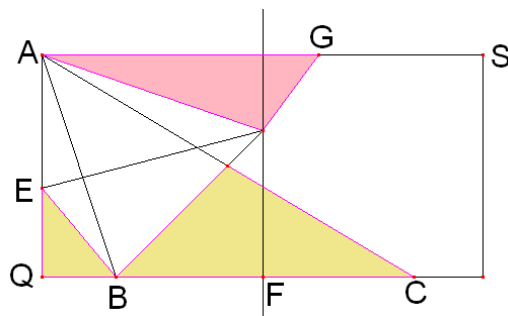
藍色區域面積：(EQFO)

$\therefore \overline{AE} = \overline{EB}, \overline{AO} = \overline{BO}$, $\overline{EO} = \overline{EO}$ (共同邊)
(中垂線到兩端點等距)

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle BEO$ (SSS全等)

→ 只要證明 $\triangle AOG \neq \triangle EQB + \triangle BFO$

(即粉色區域面積 $\neq$ 橘色區域面積)



經由 Mathematica 軟體計算後，得到：

$$\text{粉色區域面積：} -\frac{(a^2 - ad + 3)(4a^2 - 4ad + d^2 - 4)}{16(2a + d)} \text{---}\textcircled{1}$$

$$\text{橘色區域面積：} \frac{1}{8}d(-3b^2 + bd + 1) \text{---}\textcircled{2}$$

令 $\textcircled{1} = \textcircled{2}$ ：(粉色區域面積 = 橘色區域面積)

$$-\frac{(a^2 - ad + 3)(4a^2 - 4ad + d^2 - 4)}{16(2a + d)} = \frac{1}{8}d(-3b^2 + bd + 1)$$

得實數解： $\{\{b \rightarrow -1.11, d \rightarrow -2.62\}, \{b \rightarrow -0.257, d \rightarrow -1.56\}, \{b \rightarrow 1.00, d \rightarrow 0\}, \{b \rightarrow 1.06, d \rightarrow 0.0737\}\}$

結果： b, d 不符合條件，故假設不成立。

結論：寬長比為 $1:d$ 長方形兩點對稱($c=d-b$)，第三點在頂點($a=0$)，無解。

證明：未來嘗試進行幾何證明

【型三 I】一點在中點，其他兩點對稱，即 $a=1, c=d-b$ 探討 d 之解

不失一般性假設長方形長：寬為 1：

d ， $B(b,0)$ 、 $C(b+\frac{d}{2},0)$ 兩點對稱

(如圖 10 所示)

→經 Cabri Geometry 模擬

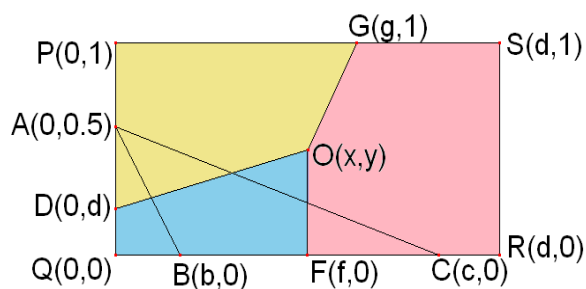


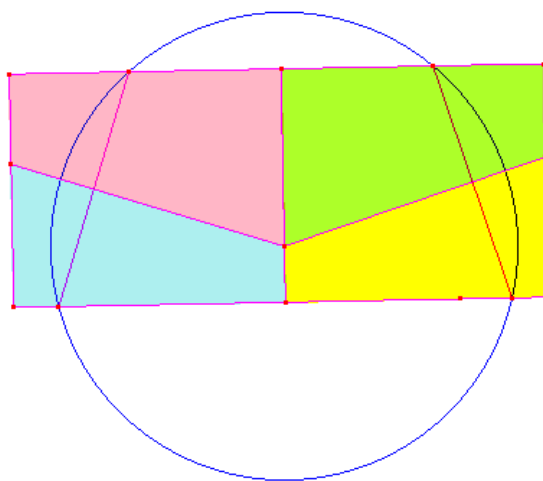
圖10

發現：其中垂線不可能將矩形面積三等分

證明：未來嘗試利用藍色區域面積 $\neq$ 黃色區域面積 $\neq$ 粉色區域面積進行幾何證明

結論：寬長比為 $1:d$ 長方形兩點對稱($c=d-b$)，第三點在頂點($a=\frac{1}{2}$)，無解。

三、探討「在矩形邊上找到四點，所形成之四邊形四邊上的中垂線恰能將該矩形面積四等分」之三點存在性、及其解是否唯一，並證明之。



未來嘗試仿照研究一、二之方法進行研究。

證明：未來嘗試進行幾何證明

四、歸納條件下圖形特殊的性質。

【性質 1】在正方形中符合條件的三角形，其外心都在一定範圍內

經由 Carbi Geometry 軟體嘗試、觀察後，發現在正方形中符合條件的三角形，其外心都在一定範圍內，如圖 11 所示。

圖 12 所示是邊長為 4 的正方形，我們隨機找出 15 組符合條件的三角形(經旋轉對稱後有 120 組)並把他們的外心標示在圖上。發現這些外心都在一定範圍(藍色圓)內。

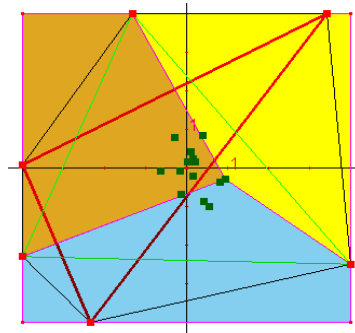


圖 12

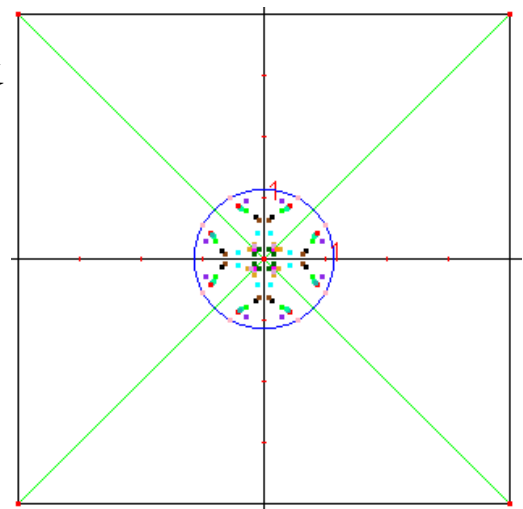


圖 11

我們進一步深入探討，經由 Microsoft Excel 軟體整理當 B 點在

$\frac{n}{16}, (1 \leq n \leq 15, n \in N)$ 時的情形（如表 1 所示）：

表 1

B點位置	A點位置	C點位置	邊長乘積	三角形ABC面積	外心座標X	外心座標Y	半徑距離
0.062500	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000			
0.125000	0.964600	0.666500	0.921500	0.351881	0.436494	0.612997	0.129620
0.187500	0.930900	0.602000	0.820100	0.331834	0.459024	0.601112	0.109100
0.250000	0.900900	0.544500	0.745600	0.316800	0.483559	0.585230	0.086801
0.312500	0.865800	0.514200	0.705200	0.312038	0.505446	0.564889	0.065117
0.375000	0.810400	0.537500	0.695200	0.319919	0.516711	0.542911	0.046050
0.437500	0.740300	0.595900	0.694500	0.329538	0.520127	0.521367	0.029354
0.500000	0.666600	0.666600	0.699400	0.333300	0.520819	0.500000	0.020819
0.562500	0.595900	0.740300	0.694500	0.329538	0.520127	0.478633	0.029354
0.625000	0.537500	0.810400	0.695200	0.319919	0.516711	0.457089	0.046050
0.687500	0.514200	0.865800	0.705200	0.312038	0.505446	0.435111	0.065117
0.750000	0.544500	0.900900	0.745600	0.316800	0.483559	0.414770	0.086801
0.812500	0.602000	0.930900	0.820100	0.331834	0.459024	0.398888	0.109100
0.875000	0.666500	0.964600	0.921500	0.351881	0.436494	0.387003	0.129620
0.937500	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000			

（備註：黃色區塊為B點在 $\frac{1}{16}, \frac{15}{16}$ 的位置時無解）

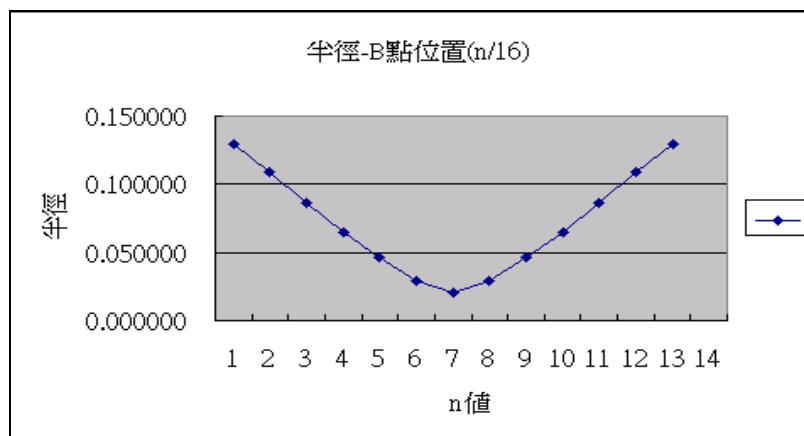


圖 13

發現：

- ❶ n 越接近中間時，也就是 B 點位置趨近於 $\frac{1}{2}$ 時，其外心與中心點距離有極小值。
- ❷ n 越大或越小時，也就是 B 點位置趨近於頂點時，其外心與中心點距離有極大值。

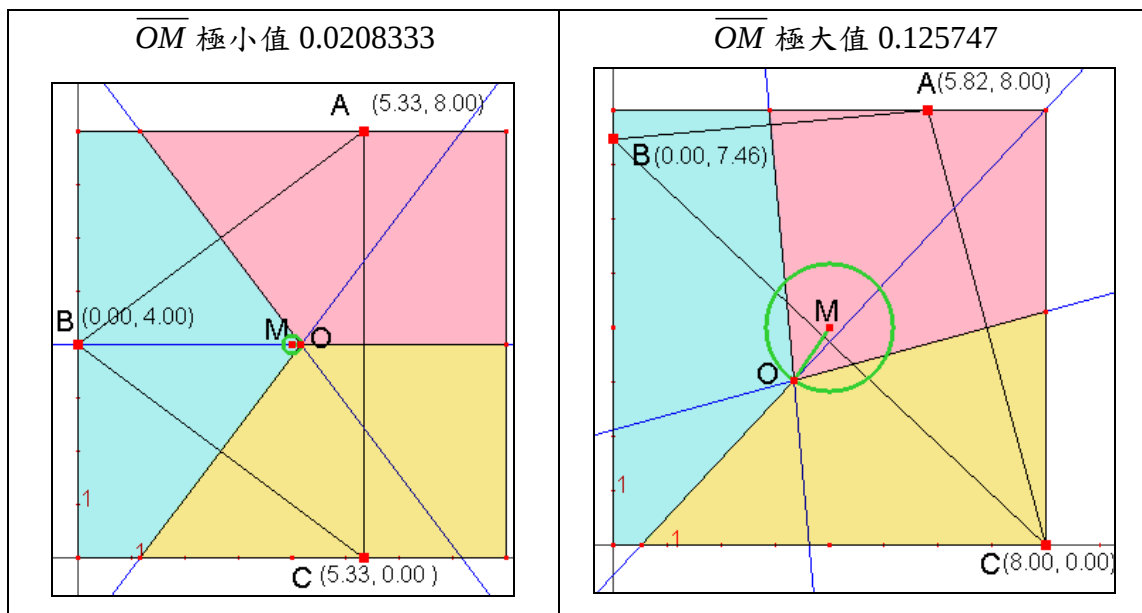
進一步使用 mathematica 軟體，在條件內求外心到中心點範圍，如下（詳細程式檔見附件）：

$$\begin{aligned} & \text{NMaximize}\left[\left\{\sqrt{\left(-\frac{b+a^2b-b^2+c^2-bc^2}{2(-ab-c+bc)}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{-ab^2-c-a^2c+b^2c+ac^2}{2(ab+c-bc)}-\frac{1}{2}\right)^2},\right. \right. \\ & 3a^5b+3(-1+b)^4c+a^4(-12b+3c)-a(-1+b)(3b(1-3b+b^2)+4c-6(2+b)c^2+12c^3-3c^4) \\ & -6a^3(2c+b(-1-2c+c^2))-2a^2(-3c+3b^2c-2b(1-3c+3c^2))=0, \\ & -3a^4bc-3(-1+b)^4bc-6a^3b(-2b+b^2-c^2)+a(-1+b)(-6b^3+3b^4+2b(4-3c)c-3c^4) \\ & +2a^2b(3c+3b^2c-2b(2+3c))=0, \\ & 12a^3b^2-3a^4b^2+4ab(-3c+b(1+6c-3c^2))+6a^2b(b^2-(-2+c)c+b(-3-2c+c^2))- \\ & (-1+b)(3b^3-3c^4+b^2(-3+6c^2)+bc(4+6c-12c^2+3c^3))=0, \\ & \left.\left.\frac{1}{2}\leq a\leq 1, \frac{1}{2}\leq b\leq 1, \frac{1}{2}\leq c\leq 1\right\},\{a,b,c\}\right] \\ & \{0.147766, \{a\rightarrow 0.732066, b\rightarrow 0.939326, c\rightarrow 1.\}\} \end{aligned}$$

說明：經由 Mathematica 軟體計算後，當 B 點在 0.939326、A 點在 0.732066、C 點在 1.0 時，其外心到正方形中心點範圍有極大值 0.147766。

$$\begin{aligned} & \text{NMinimize}\left[\left\{\sqrt{\left(-\frac{b+a^2b-b^2+c^2-bc^2}{2(-ab-c+bc)}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{-ab^2-c-a^2c+b^2c+ac^2}{2(ab+c-bc)}-\frac{1}{2}\right)^2},\right. \right. \\ & -3a^4c^2-3(-1+b)^4c^2+6a^3c(2b-b^2+c^2)+2a(-1+b)c(-3b^2+3b^3+(4-3c)c-3bc^2)- \\ & a^2(3b^4-12b^2c^2+4bc(2+3c)+3c^2(-2+c^2))=0, \\ & 3a^5b+3(-1+b)^4c+a^4(-12b+3c)-a(-1+b)(3b(1-3b+b^2)+4c-6(2+b)c^2+12c^3-3c^4) \\ & -6a^3(2c+b(-1-2c+c^2))-2a^2(-3c+3b^2c-2b(1-3c+3c^2))=0, \\ & 12a^3bc-3a^4bc-(-1+b)c(3b(-1+b+b^2)+4c+6c^2-12c^3+3c^4) \\ & +a(3b^4-6b^2c^2+4bc(1+6c-3c^2)+3c^2(-4+c^2))+ \\ & 6a^2c(b^2-(-2+c)c+b(-3-2c+c^2))=0, \left.\frac{1}{2}\leq a\leq 1, \frac{1}{2}\leq b\leq 1, \frac{1}{2}\leq c\leq 1\right\},\{a,b,c\}\right] \\ & \{0.0208333, \{a\rightarrow 0.666667, b\rightarrow 0.5, c\rightarrow 0.666667\}\} \end{aligned}$$

說明：經由 Mathematica 軟體計算後，當 B 點在 0.5、A 點在 0.666667、C 點在 0.666667 時，其外心到正方形中心點範圍有極小值 0.0208333。



備註：為繪 Cabri Geometry 圖形方便，所有圖形之坐標等比例放大正方形邊長為 8。

【結論 1】在正方形符合條件的三角形中

❶ B 點位置趨近於 $\frac{1}{2}$ 位置時，其外心到正方形中心點範圍有極小值 0.0208333。

❷ B 點位置在 0.939326 位置時，其外心到正方形中心點範圍有極大值 0.147766。

(備註：因為正方形有四條對稱軸，我們僅針對四條對稱軸切割後的其中一象限作探討)

證明：未來嘗試進行幾何證明

【性質 2】在正方形中符合條件的三角形，其三邊邊長的乘積介在某一範圍內

經由 Carbi Geometry 軟體嘗試、觀察後，我們發現「三邊長乘積可能是一個定值」，之後利用 Microsoft Excel 軟體進行數據整理並繪製圖表(如表 2，圖 14 所示)：

經由 Microsoft Excel 軟體整理當 B 點在 $\frac{n}{16}, (1 \leq n \leq 15, n \in N)$ 時的情形(如表 2 所示)：

表 2

B點位置	A點位置	C點位置	邊長乘積	三角形ABC面積	外心座標X	外心座標Y	半徑距離
0.062500	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000			
0.125000	0.964600	0.666500	0.921500	0.351881	0.436494	0.612997	0.129620
0.187500	0.930900	0.602000	0.820100	0.331834	0.459024	0.601112	0.109100
0.250000	0.900900	0.544500	0.745600	0.316800	0.483559	0.585230	0.086801
0.312500	0.865800	0.514200	0.705200	0.312038	0.505446	0.564889	0.065117
0.375000	0.810400	0.537500	0.695200	0.319919	0.516711	0.542911	0.046050
0.437500	0.740300	0.595900	0.694500	0.329538	0.520127	0.521367	0.029354
0.500000	0.666600	0.666600	0.699400	0.333300	0.520819	0.500000	0.020819
0.562500	0.595900	0.740300	0.694500	0.329538	0.520127	0.478633	0.029354
0.625000	0.537500	0.810400	0.695200	0.319919	0.516711	0.457089	0.046050
0.687500	0.514200	0.865800	0.705200	0.312038	0.505446	0.435111	0.065117
0.750000	0.544500	0.900900	0.745600	0.316800	0.483559	0.414770	0.086801
0.812500	0.602000	0.930900	0.820100	0.331834	0.459024	0.398888	0.109100
0.875000	0.666500	0.964600	0.921500	0.351881	0.436494	0.387003	0.129620
0.937500	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000			

(備註：黃色區塊為B點在 $\frac{1}{16}, \frac{15}{16}$ 的位置時無解)

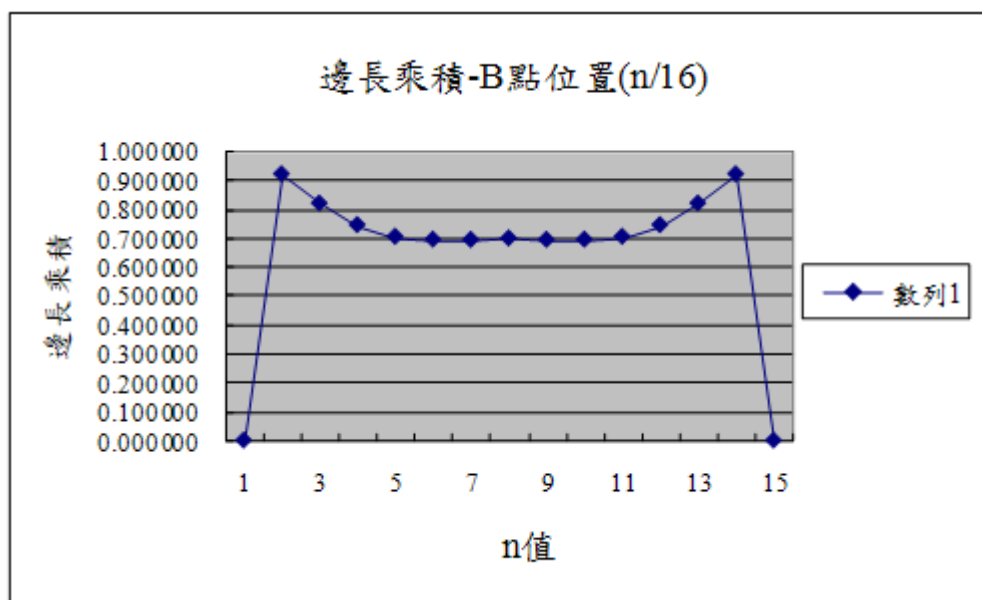


圖 14

- 發現：**
- ❶ n 值越接近中間時，也就是 B 點位置趨近於 $\frac{1}{2}$ 時，其邊長乘積有極小值。
 - ❷ n 值越大或越小時，也就是 B 點位置趨近於正方形頂點時，其邊長乘積有極大值。

發現並非如猜測是一個定值而是在一個範圍內，為求精確，嘗試運用 Mathematica 軟體寫出程式，實際計算出「三邊長乘積」的極大與極小值，如下。(詳細程式檔見附件)：

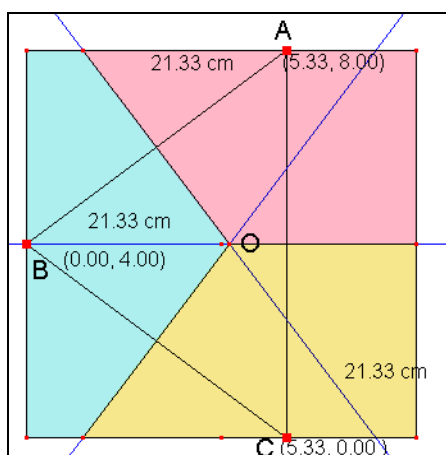
```
Minimize[{{Sqrt[a^2 + (1 - b)^2] * Sqrt[(a - c)^2 + 1^2] * Sqrt[c^2 + b^2],
-3 a^4 c^2 - 3 (-1 + b)^4 c^2 + 6 a^3 c (2 b - b^2 + c^2) + 2 a (-1 + b) c (-3 b^2 + 3 b^3 + (4 - 3 c) c - 3 b c^2) -
a^2 (3 b^4 - 12 b^2 c^2 + 4 b c (2 + 3 c) + 3 c^2 (-2 + c^2)) == 0,
3 a^5 b + 3 (-1 + b)^4 c + a^4 (-12 b + 3 c) - a (-1 + b) (3 b (1 - 3 b + b^2) + 4 c - 6 (2 + b) c^2 + 12 c^3 - 3 c^4)
- 6 a^3 (2 c + b (-1 - 2 c + c^2)) - 2 a^2 (-3 c + 3 b^2 c - 2 b (1 - 3 c + 3 c^2)) == 0,
12 a^3 b c - 3 a^4 b c - (-1 + b) c (3 b (-1 + b + b^2) + 4 c + 6 c^2 - 12 c^3 + 3 c^4)
+ a (3 b^4 - 6 b^2 c^2 + 4 b c (1 + 6 c - 3 c^2) + 3 c^2 (-4 + c^2)) +
6 a^2 c (b^2 - (-2 + c) c + b (-3 - 2 c + c^2)) == 0, 1/2 <= a <= 1, 1/2 <= b <= 1, 1/2 <= c <= 1}, {a, b, c}]
{0.694444, {a -> 0.666667, b -> 0.5, c -> 0.666667}}
```

說明：經由 Mathematica 軟體計算後，當 B 點在 0.5、A 點在 0.666667、C 點在 0.666667 時，其邊長乘積有極小值 0.694444。

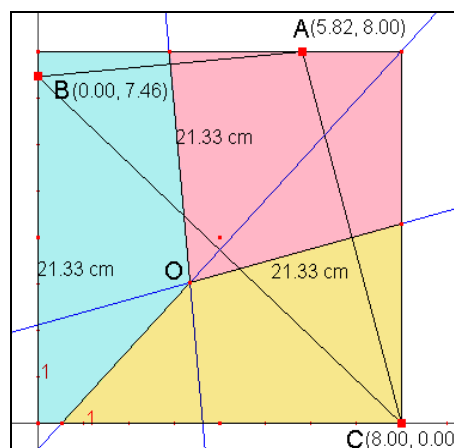
$$\begin{aligned} & \text{NMaximize}\left[\left\{\sqrt{a^2 + (1-b)^2} \times \sqrt{(a-c)^2 + 1^2} \times \sqrt{c^2 + b^2}, \right. \right. \\ & -3a^4c^2 - 3(-1+b)^4c^2 + 6a^3c(2b-b^2+c^2) + 2a(-1+b)c(-3b^2+3b^3+(4-3c)c-3bc^2) - \\ & a^2(3b^4-12b^2c^2+4bc(2+3c)+3c^2(-2+c^2))\} == 0, \\ & 3a^5b+3(-1+b)^4c+a^4(-12b+3c)-a(-1+b)(3b(1-3b+b^2)+4c-6(2+b)c^2+12c^3-3c^4) \\ & -6a^3(2c+b(-1-2c+c^2))-2a^2(-3c+3b^2c-2b(1-3c+3c^2))\} == 0, \\ & 12a^3bc-3a^4bc-(-1+b)c(3b(-1+b+b^2)+4c+6c^2-12c^3+3c^4)+ \\ & a(3b^4-6b^2c^2+4bc(1+6c-3c^2)+3c^2(-4+c^2))+ \\ & 6a^2c(b^2-(-2+c)c+b(-3-2c+c^2))\} == 0, \frac{1}{2} \leq a \leq 1, \frac{1}{2} \leq b \leq 1, \frac{1}{2} \leq c \leq 1\}, \{a, b, c\}] \\ & \{1.03525, \{a \rightarrow 0.727403, b \rightarrow 0.932735, c \rightarrow 0.99982\}\} \end{aligned}$$

說明：經由 Mathematica 軟體計算後，當 B 點在 0.932735、A 點在 0.727403、C 點在 0.99982 時，其邊長乘積有極大值 1.03525。

極小值 0.694444



極大值 1.03525



備註：為繪 Cabri Geometry 圖形方便，所有圖形之坐標等比例放大正方形邊長為 8。

【結論 2】在正方形符合條件的三角形中

① B 點位置趨近於 $\frac{1}{2}$ 位置時，其邊長乘積有極小值 0.694444。

② B 點位置在 0.932735 位置時，其邊長乘積有極大值 1.03525。

③ B 點位置超過 0.932735 時，無解。

證明：未來嘗試進行幾何證明

【性質 3】在正方形中符合條件的三角形，其外心位置與三邊邊長乘積有關。

另外，根據上述，我們還發現外心位置似乎和邊長乘積有關：當三角形外心和正方形中心點的距離越小時，三角形的三條邊長乘積會越小；當三角形外心和正方形中心點的距離越大時，三角形的三條邊長乘積會越大（如圖 15 所示）。

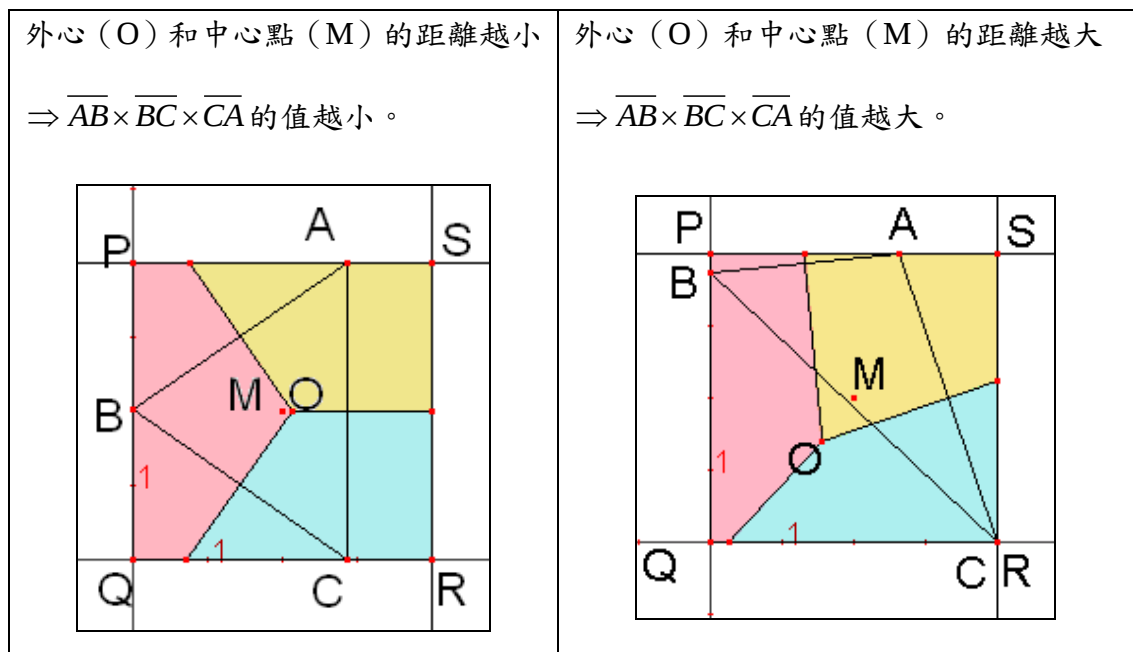


圖 15

【結論 3】在正方形符合條件的三角形中

❶ B 點位置趨近於 $\frac{1}{2}$ 位置時，其外心到正方形中心點範圍有極小值

0.020833，邊長乘積有極小值 0.694444。

❷ B 點位置在 0.932735 位置時，其外心到正方形中心點範圍有極大值

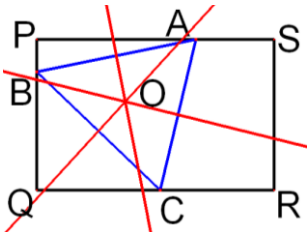
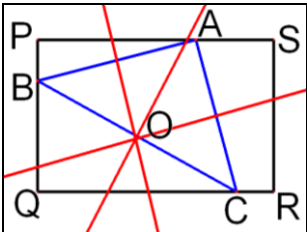
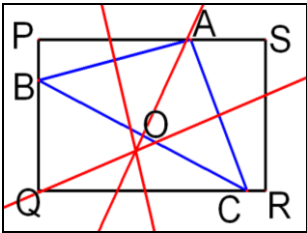
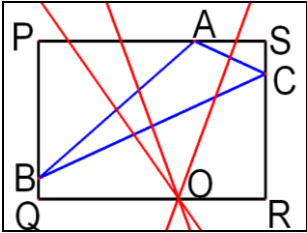
0.147766，其邊長乘積有極大值 1.03525。

證明：未來嘗試進行幾何證明

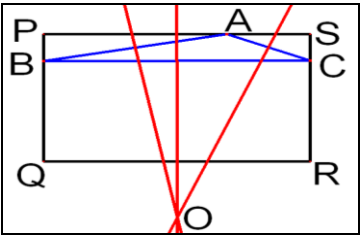
陸、討論

一、探討三角形的外心位置、對應中垂線與切割矩形面積的關係為何？

我們想知道外心在什麼位置時，若讓外心在三角形邊上、在三角形外部，甚至在矩形邊上、外部，那能否都找到滿足條件，將矩形面積三等份的三角形呢？也就是說外心的位置是不是會影響呢？

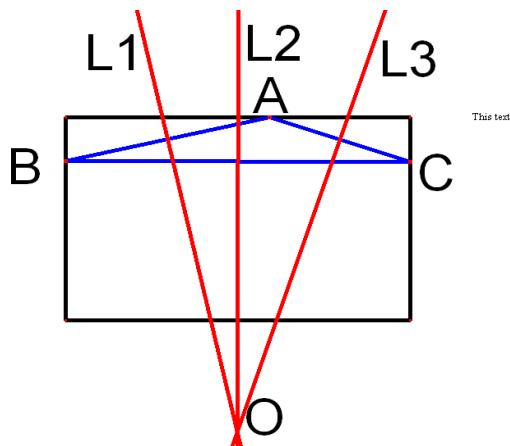
三角形的情形	外心位置	圖示	是否有解
銳角三角形	三角形內部		有解
直角三角形	三角形邊上		有解
鈍角三角形(1)	三角形外部		有解
鈍角三角形(2)	矩形邊上		不在定義範圍之內

續下頁

三角形的情形	外心位置	圖示	是否有解
鈍角三角形(3)	矩形外部		不在定義範圍之內

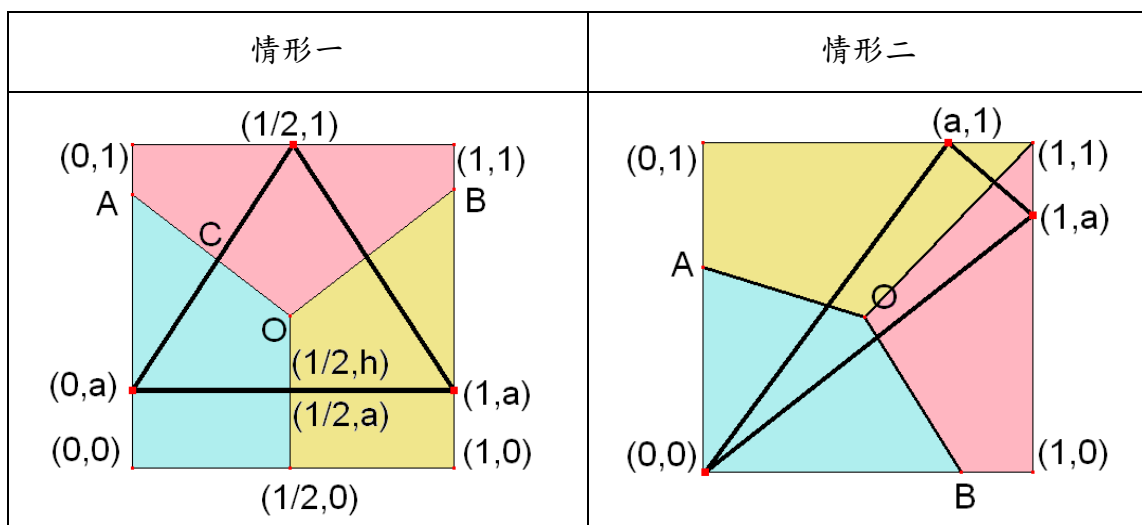
【結論】經由 Cabri Geometry 軟體模擬後，發現當不論是外心在三角形內部、邊上或是外部都有解，但在矩形邊上或外部時，不符合條件。

【原因】它無法符合條件「三中垂線等分矩形面積」，如右圖，只用了 L_1 與 L_3 就將矩形面積分成三塊，故不在我們討論的範圍內。



二、探討「在正方形邊上找到三點，所形成之三角形為對稱圖形，其對稱軸恰為正方形之對稱軸，且三邊上的中垂線恰能將該正方形面積三等分」之解的性質。

經由 Carbi Geometry 軟體觀察後，只有兩種情形對稱：



【情形一】三角形對稱於中垂線，

①此時 a 的對應位置為 $a = \frac{1}{3}$ ，也就是此三角形為等腰三角形，其中有

兩頂點的位置必位在正方形邊的 $\frac{1}{3}$ 單位長之處。

②外心坐標中 $h = \frac{-3 + 4a^2}{8(a-1)}$

③這樣的三角形只有四組

【情形二】三角形對稱於對角線

①此時 a 的對應位置為 $a \approx 0.715$ ，也就是此三角形為等腰三角形。此時三角形三頂點坐標為(1, 0.715)、(0.715,1)、(0,0)，外心為(0.4405, 0.4405)時，其三中垂線將正方形面積三等分。

②外心坐標中 $h = \frac{a^2 + 1}{2(a+1)}$

③這樣的三角形只有四組

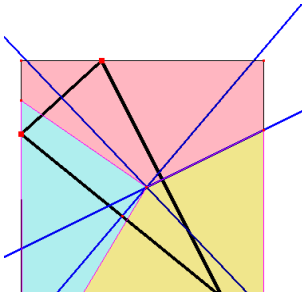
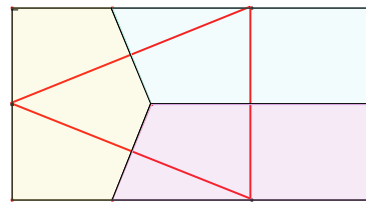
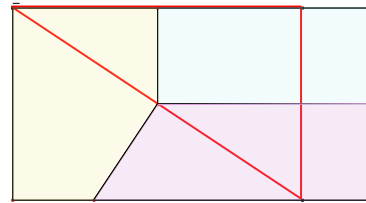
【結論】正方形找到三點的對稱情形只有兩種，若經過旋轉對稱後則有 8 組解。

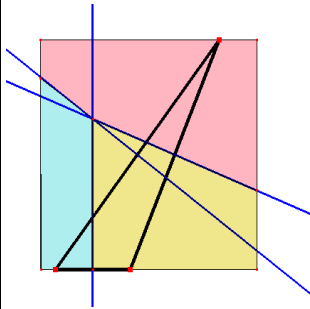
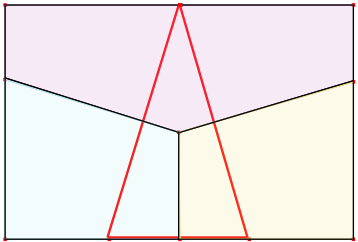
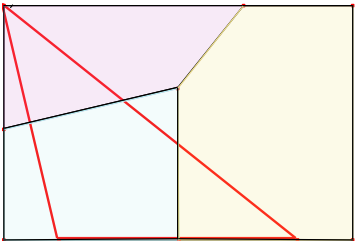
柒、結論

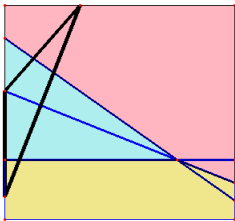
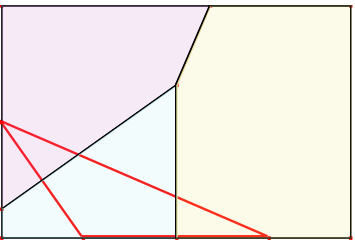
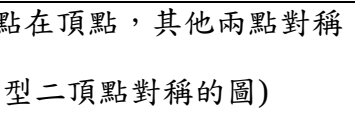
一、發現在正方形邊上能找到三點，所形成之三角形三邊上的中垂線恰可將該矩形面積三等分」，並且這三點並不唯一。

二、發現在矩形邊上能找到三點，所形成之三角形三邊上的中垂線恰可將該矩形面積三等分」，並且這三點無限多解。

三、能找到任意比例的矩形（寬比長=1:d），其邊上特殊位置的三點所形成之三角形三邊中垂線恰能將該矩形面積三等分。將其分成三種類型探討之，其結果如下：

型 一	三點都在不同邊上 	一點在中點，其他兩點對稱 	當 B 在中點，AC 位置對稱且在 $\frac{2}{3}d$ 位置時，可以任意矩形滿足條件。
		一點在頂點，其他兩點對稱 	$d > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的矩形，當 B 在頂點，AC 位置對稱且 $a = c = \frac{1}{6}(2d + \sqrt{9 + 4d^2})$ 時，可以滿足條件。

型二	兩點在同一邊，第三點在對邊		一點在中點，其他兩點對稱		$d > \sqrt{\frac{16}{3}}$ 的矩形，當 A 在中點，BC 位置對稱且 $\frac{1}{12}(3d + \sqrt{3}\sqrt{-16 + 3d^2})$ 時，可以滿足條件。
			一點在頂點，其他兩點對稱		無解

型三	兩點在同一邊，第三點在鄰邊		一點在中點，其他兩點對稱		無解
			一點在頂點，其他兩點對稱 (同型二頂點對稱的圖)		無解

四、發現正方形找到三點的對稱情形只有兩種，若經過旋轉對稱後則有 8 組解。

五、發現在正方形中符合條件的三角形，其外心都在一定範圍內。

也就是①B 點位置趨近於 $\frac{1}{2}$ 位置時，其外心到正方形中心點範圍有極小值 0.0208333。

②B 點位置趨近於 0.939326 位置時，其外心到正方形中心點範圍有極大值 0.147766。

六、發現「在正方形邊上找到三點，所形成任意三角形能將該正方形面積三等分」其三邊的乘積介在某一範圍內。

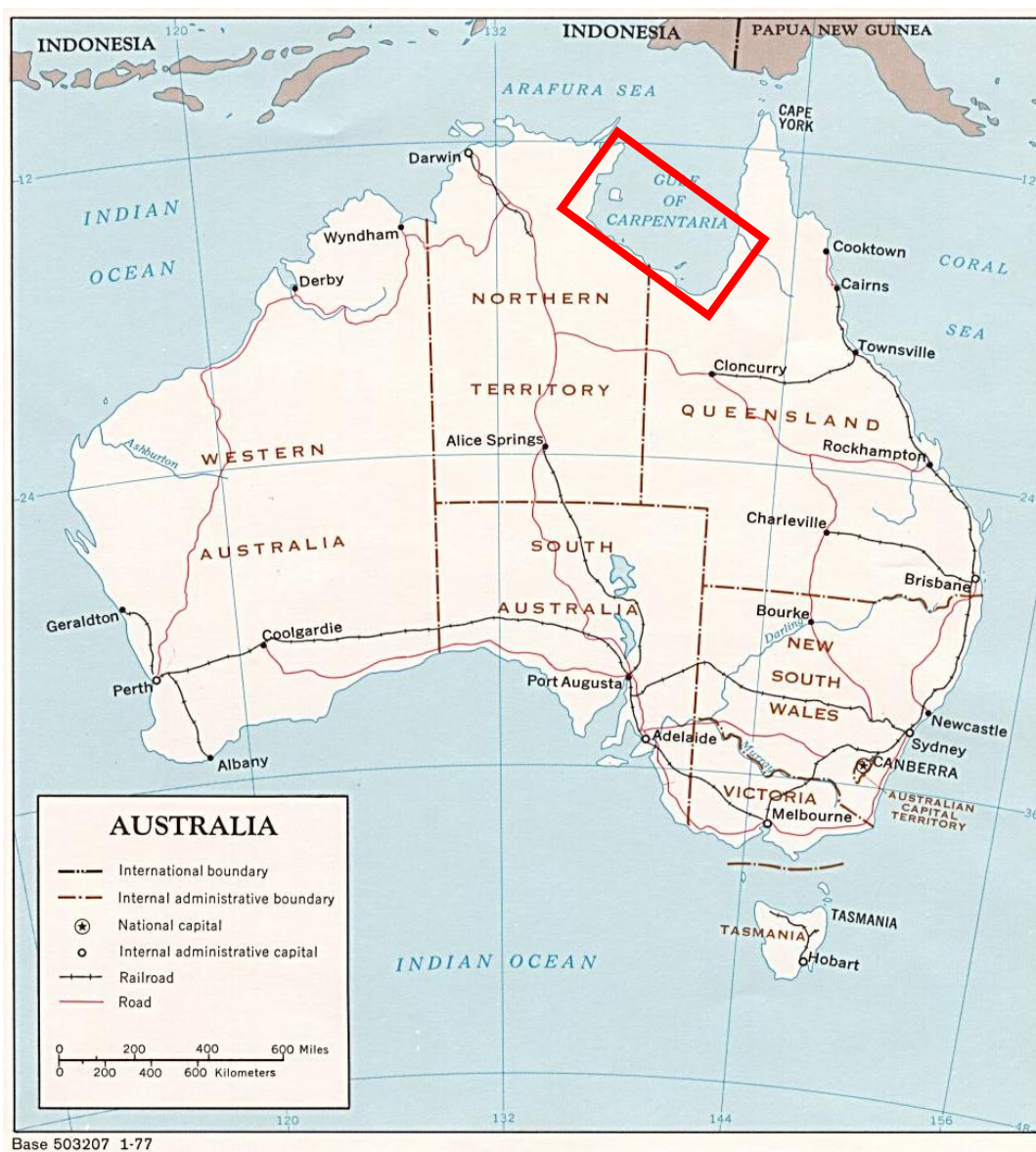
①n 值越接近中間時，也就是 B 點位置趨近於 $\frac{1}{2}$ 時，其邊長乘積有極小值。

②n 值越大或越小時，也就是 B 點位置趨近於正方形頂點時，其邊長乘積有極大值。

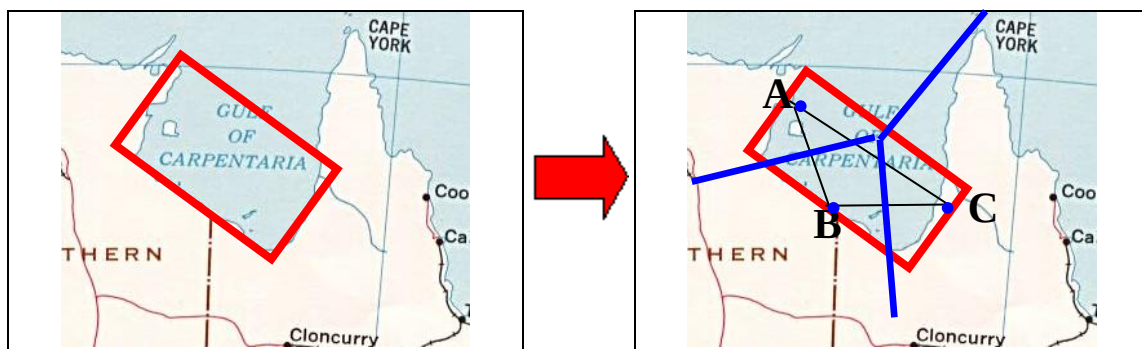
捌、應用

◎應用一

如圖是澳洲海灣地圖，紅色矩形區域是待監控的海域範圍，我們想設立三個檢查站，讓這三個檢查站，負責的區域面積相等，且當有走私船進入時，可輕易知道哪一檢查站到走私船的距離最近，根據我們研究結果可知：若 B 是矩形其中一邊的中點，AC 則分別在該邊兩鄰邊長三分之二的位置處，則在 ABC 三個位置設立檢查哨，可順利達成目標。



依現實狀況，若無法在 ABC 三個位置設立檢查站，則根據我們的研究，還可以在其他位置設立相對應的三個位置。



也就是任何比例的矩形海域，我們都能輕易設立滿足條件的三個檢查站位置。

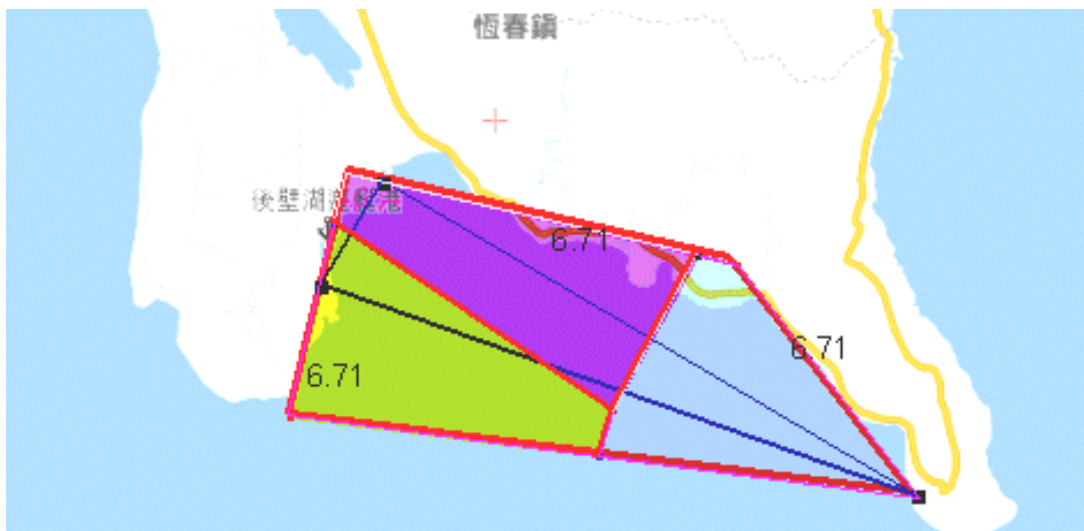
另外，不規則的四邊形一樣可以根據我們研究所得建模的方式，進行三個檢查站設置的規劃。以下面恆春海域地圖為例，紅色區域是想要檢查的不規則四邊形海域。



◎不規則四邊形的建模步驟

1. 將地圖上所需防護的區域畫在 Cabri 中
2. 在可以設立檢查哨（三角形三頂點）的三個邊取三點
3. 畫出三角形三邊的中垂線，並分割出三塊區域

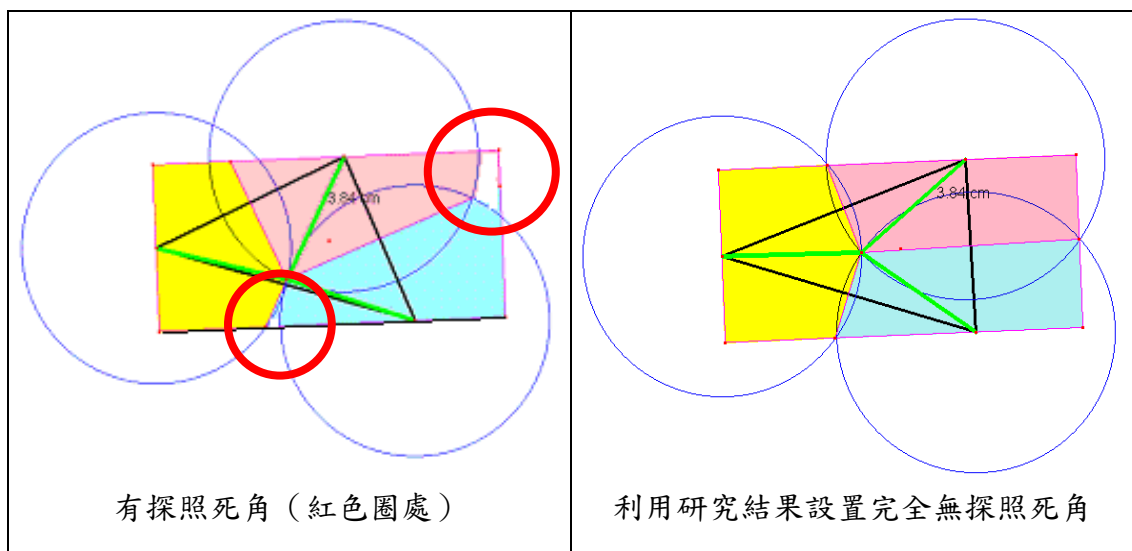
- 4.利用 Cabri 算出三塊區域面積並適度調整三點位置使三塊面積接近相等
- 5.定出四邊形四個頂點的座標(這可以藉助 Cabri 軟體)依照 Cabri 中的近似圖形
- 6.列出方程式，再使用 Mathematica 精確算出三個點的座標



當然，兩個檢哨站或四個檢哨站的設置問題都可以依本研究結果解決。

◎ 應用二

若在相同探照半徑下（如圖中綠色線），在三角形三頂點設置探照燈，則利用我們的研究結果放置則沒有探照死角。



玖、參考資料

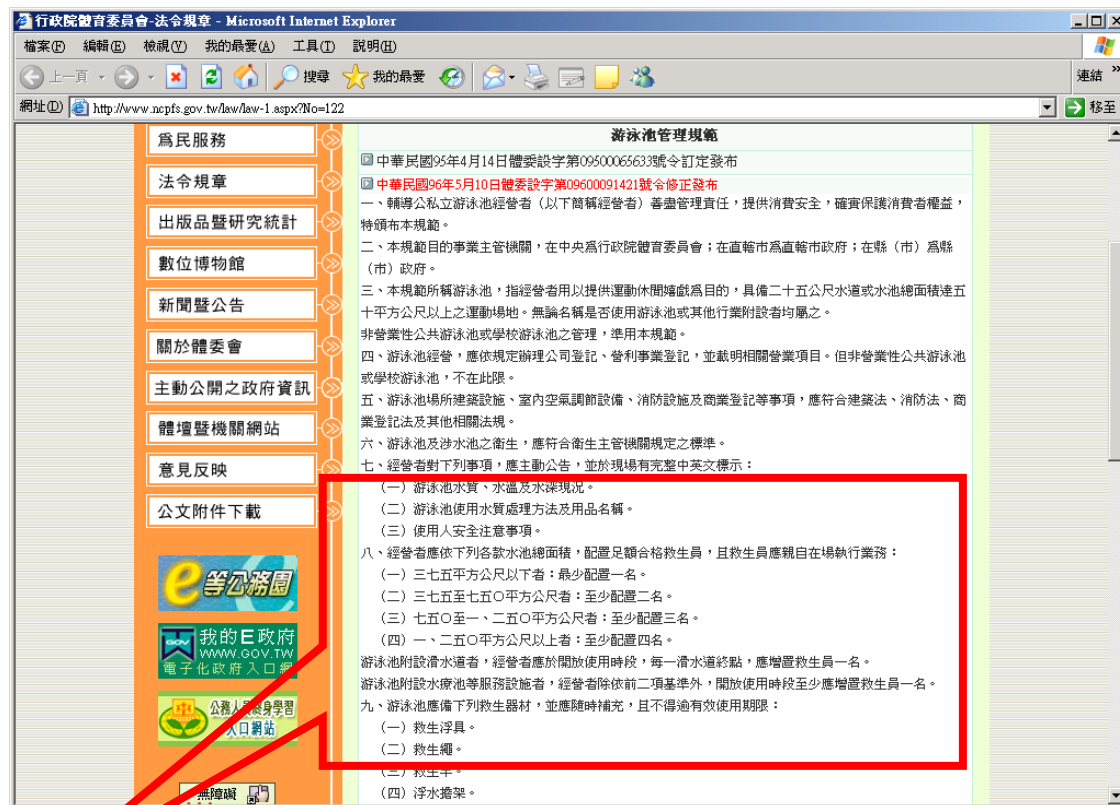
1. <http://www.cabri.com/>
2. <http://crypt.math.fju.edu.tw/08/Mathematica/01.html>

附件一：游泳池管理規範

游泳池管理規範

中華民國 95 年 4 月 14 日體委設字第 09500065633 號令訂定發布

中華民國 96 年 5 月 10 日體委設字第 09600091421 號令修正發布



八、經營者應依下列各款水池總面積，配置足額合格救生員，且救生員應親自在場執行業務：

- (一) 三七五平方公尺以下者：最少配置一名。
- (二) 三七五至七五〇平方公尺者：至少配置二名。
- (三) 七五〇至一、二五〇平方公尺者：至少配置三名。
- (四) 一、二五〇平方公尺以上者：至少配置四名。

◎ 國際標準游泳池規格：〔長水道〕長50公尺〔短水道〕25公尺，寬至少25公尺，深1.8公尺以上。一般設8條水道，泳道寬2.5公尺，兩側水道離池邊0.5公尺。

評語

本作品以救生員責任區均等之條件下討論直角四邊形內區域分割方法，作者群以三角形外心之性質來討論面積三等分之可能性。例如，在正方形區域中，作者以其頂點在某邊中點之內接等腰三角形兩底角座標為參數來研究面積三等分之可能性。基於面積相等之條件，所衍生之聯立方程組複雜頗高，作者群引用 Mathematica 求近似角來判斷面積等分的可能性，然而若干論點猶賴數學分析來驗證。

事實上，作者群所提出的方法確實具有創意且其應用性相當高，值得推廣，例如，是否能在面積等分的條件下，該區域是否能被三個或數個面積相等且最小的圓所完全覆蓋。