2009 年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

編號： 010030

作品名稱

不要給我好人卡—編號對應的研究

得獎獎項

數學科大會獎第二名

候補作品

學校名稱： 國立臺中第一高級中學

作者姓名： 施佑儒

指導老師： 蔡政樺　李吉彬

關 鍵 字： 編號對應、巴斯卡三角形、遞迴關係

作者簡介

我是施佑儒，目前就讀於台中一中二年級。平常喜愛算數學、看小說和上網，解數學問題的成就感令我著迷，喜歡小說是因為它可以給我一個想像的空間，網路上更是無奇不有。這是我第一次參加科展，在最初接觸到這個研究時，一步一步將問題解決時的成就感，推導出每一個規律時的興奮，讓我對它的興趣越發濃厚。

中文摘要

本研究是想尋找並建立一個數學模式，來探討分卡方法數的問題，例如：將編號 2~31 號的卡片分給編號 1~30 號的人，使每個人所得到的卡片編號為其自身編號之倍數的方法數有多少種，再延伸討論將卡片編號推廣至 2~n 號，人之編號為 1~$n-1$號的一般情形，並推理得其分配方法數與n之間的關係式。研究過程是從質因數的冪次方考慮，並以排列組合、分析歸納等數學原理與方法來探討其所有的分配方法數。

在本研究已經得出以下之結果：

一、當$n=p^k\cdot q^l$（p、q為n之質因數，k、$l\in N$）時，其方法總數為

$$S_k=\left[\sum_{i=0}^{l-1}C_{l-1-i}^{l-1}C_{l-i}^{k+l-i}\times\frac{k+2(l-i)}{k+l-i}\right]\cdot 2^{k-1}$$ 種。

二、當$n=p^k\cdot q^l$（p、q為n之質因數，k、$l\in N$）時，其遞迴關係式為

$$S_{k+l+1}=C_1^{l+1}2S_{k+l}-C_2^{l+1}2^2S_{k+l-1}+\cdots+(-1)^{m-1}C_m^{l+1}2^mS_{k+l+1-m}+\cdots+(-1)^lC_{l+1}^{l+1}2^{l+1}S_k$$

三、以上的結果均以$l=0\sim4$獨立代入檢驗並符合此結果。

Abstract

The main idea of this research is to find and establish a mathematical formula in order to discuss the problem of the means in dividing the cards. For instance, give the cards with numbers 2 to 31 to individuals numbered 1 to 30, such that the card numbers which everyone gain is a multiple of their own number, how many ways can we divide the cards which satisfy the condition above? We then broaden our discussed scope to the general condition that the cards are numbered 2 to n and the individuals are numbered 1 to $(n-1)$ thus to find the functional relation between the number of dividing means and the last card's number n. The way we do this research is in consideration of the exponentially-formed prime factor decomposition and use the mathematical principles and methods to get all of its dividing ways such as utilizing functions of permutation and combination, inducing and analyzing…… *etc.* We have concluded with the following results showing below:

First, when $n = p^k \cdot q^l$（p、q are prime factors of n，k、$l \in N$）, the sum of the method is $S_k = \left[\sum_{i=0}^{l-1} C_{l-1-i}^{l-1} C_{l-i}^{k+l-i} \times \frac{k+2(l-i)}{k+l-i}\right] \cdot 2^{k-1}$.

Second, when $n = p^k \cdot q^l$（p、q are prime factors of n，k、$l \in N$）, the recurrence relation is

$$S_{k+l+1} = C_1^{l+1} 2 S_{k+l} - C_2^{l+1} 2^2 S_{k+l-1} + \cdots + (-1)^{m-1} C_m^{l+1} 2^m S_{k+l+1-m} + \cdots + (-1)^l C_{l+1}^{l+1} 2^{l+1} S_k$$

Third, the above formulas are tested with values $l = 0 \sim 4$ individually confirming our findings.

不要給我好人卡—編號對應的研究

壹. 研究動機

之前班上準備 TRML 競賽時，看到了一道非常有趣的題目：

在某個偶然機會中，全班 30 位同學一起玩一個殘忍的模擬遊戲，將 30 位同學編成 1 至 30 號。並準備了 30 張編成 2 至 31 號的卡片。現在要把卡片發給同學，每人一張，若所拿到的卡片編號是自己編號的倍數，則該卡片即為令人聞之色變的好人卡。如果很不幸地，全班同學都淪為好人，共有多少種不同的發卡片方法？這道模擬題敘述逗趣，但難度並不高，不過仔細思量一下，此題是一個特殊情況，如果這次的最後一張卡片編號是合數而非質數會有什麼樣的結果？更甚者，該合數的質因數分解式型態會如何影響發卡的方法數？在和老師討論過後便決定以此為研究主題來探討。

貳. 研究目的

一、找出 $n = p^k \cdot q^l$ 時的發卡方法數。

二、利用定義出的模式找出此時的發卡方法數 S_k 之一般式，再推得其遞迴關係式。

三、反向利用定義出的模式解釋其遞迴關係式，再利用特徵方程式求出其一般式。

參. 研究器材

電腦、MAPLE9.0 符號處理及應用軟體、紙、筆、黑板

肆. 研究方法與過程

一、原始問題的解法：

因為 31 是質數，所以只有將 31 號卡給 1 號同學，其餘號碼的卡與人一一對應，才能使所有人都拿到好人卡，因此我們發現當最後一號卡號碼為質數時，只

有一種分法。

二、若將人數卡數推廣至$n-1$，即人號為 1 到$n-1$號，卡號為 2 到n號。

我們尋找出一個模式來探究這個延伸問題：

研究模式

(一)原則：由於要求卡片編號必須是同學編號的倍數，而第n號卡是唯一一個沒有對應到同學編號的卡片，所以在分卡過程中先考慮第n號卡之分配情形。

(二)步驟：

第一步：由n(以x_1表示)的所有正因數（除本身之外）中，任意挑出一個數x_2，將x_1號卡給x_2號同學。

第二步：再由x_2的所有正因數（除本身之外）中，任意挑出一個數x_3，將x_2號卡給x_3號同學。

以此類推，直到 1(以x_{i+1}表示)號同學拿到x_i號卡片為止。

我們將發卡過程定義如下：

定義一：

"$a \to b \to c$"為「將 a 號卡給 b 號人，將 b 號卡給 c 號人」。

例如：現在有 5 人編號 1～5 號，5 卡編號 2～6 號，其分配方式共有$6 \to 3 \to 1$，$6 \to 2 \to 1$，$6 \to 1$三種分法。

定義二：

設卡號最大數為n(以x_1表示)且$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots\ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$，其中$p_1$，$p_2$，……，$p_m$為質因數，$\alpha_1$，$\alpha_2$，……，$\alpha_m \in \mathrm{N}$，且在發卡過程中，$x_1 \to x_2 \to \ldots\ldots \to x_{i+1}(=1)$若將$\frac{x_1}{x_2}$，$\frac{x_2}{x_3}$，……，$\frac{x_i}{x_{i+1}}$這$i$個數寫成標準分解式時，其各質因數的次方和分別為$G_1$，$G_2$，……，$G_i$，且滿足$G_1 + G_2 + \ldots\ldots + G_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_m$，則我們以【$G_1$，$G_2$，……，$G_i$】代表卡片分配之模式。每個$G_j(1 \le j \le i)$稱之為【$G_1$，

G_2，……，G_i】的一個「好人元」，而每種【G_1，G_2，……，G_i】稱之為一個「好人集合」，並以M_i表示含i個好人元的好人集合。

※討論※

以$n=p\cdot q\cdot r$為例（註：{ } 表示實際分卡步驟），

{ $p\cdot q$，r }、{ $q\cdot r$，p }、{ $p\cdot r$，q } 互為「同序異質體」

{ p，$q\cdot r$ }、{ $q\cdot r$，p } 互為「同質異序體」

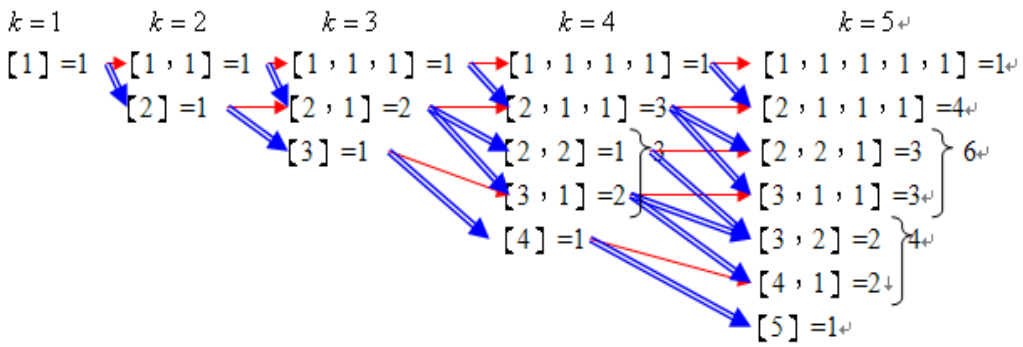
這兩種結構均以【2，1】表示，所以【2，1】共有$3\times 2=6$種情況。

三、針對卡號為$2\sim n$且$n=p^k\cdot q^l$型進行探討：

(一)當 n 為質數時，只有一種發法為$n\to 1$，意即將 n 號卡給 1 號人是唯一的分配法接下來我們討論 n 為合數時的分配法數。

(二)當$n=p^k$時

1.處理方式：直接觀察，並橫向考慮來源



處理模式一：放

→ 表示將$k=x+1$中比$k=x$多出來的p（以下定義為一個獨立的好人元G_j）「放」在原本的好人集合$M_i=$【$G_1,G_2,\ldots,G_i$】中，使產生一個新的好人集合$M'_{i+1}=$【$G'_1,G'_2,\ldots,G'_{i+1}$】。其中【$G'_1,G'_2,\ldots,G'_{i+1}$】一一映射到【$G_1,G_2,\ldots,G_i,G_j$】（不論順序）。

處理模式二：加

⟹ 表示將 $k=x+1$ 中比 $k=x$ 多出來的 p「加」在 $k=x$ 之任意一好人元 G_j（$1\le j\le i$）中，使得原本的 M_i =【$G_1,G_2,...,G_i$】成為 $M_i^{'}$ =【$G_1,G_2,...,G_j^{'},...,G_i$】。其中 $G_j^{'}=G_j+1$。

如：【2】=1 → 【2，1】=2

⇘ 【3】=1

其實際分配狀況即為

【p^2】 → 【p^2，p】或【p，p^2】共兩種

⇘ 【p^3】一種

2.說明：

$k=x+1$ 的每一個情形均可由某些 $k=x$ 的情形經由「加」、「放」的過程產生。這種考慮來源的結構等同於巴斯卡三角形的型態。

故由二項式定理知，$n=p^k$ 時可能組合方式個數為

$$C_{k-1}^{k-1}+C_{k-2}^{k-1}+.....+C_0^{k-1}\text{種，即}(1+x)^{k-1}\text{之係數和}=2^{k-1}$$

3.討論：

由於這個情況下只有 p 一種質數，不須考慮同序異質體，所以可以直接和巴斯卡三角形對應（巴斯卡三角形亦為同物分配），然而之後的討論，即從這個情況作修正而得。

4.結論：

當 $n=p^k$ 時，所有的分配方法數 $S_k=2^{k-1}$ 種，並可以找出一遞迴關係式：

$$S_{k+1}=2S_k$$

(三)當 $n = p^k \cdot q$ 時

1.處理方式：

把 $n = p^k \cdot q$ 視為將 $n = p^{k+1}$ 中的一個 p 換成 q 得如下數據：

$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
【1，1】=2	【1，1，1】=3	【1，1，1，1】=4	【1，1，1，1，1】=5
【2】=1	【2，1】=4	【2，1，1】=9	【2，1，1，1】=16
	【3】=1	【2，2】=2	【2，2，1】=9
		【3，1】=4	【3，1，1】=9
		【4】=1	【3，2】=4
			【4，1】=4
			【5】=1

$k = 5$

【1，1，1，1，1，1】=6

【2，1，1，1，1】=25

【2，2，1，1】=24

【3，1，1，1】=16

【2，2，2】=3

【3，2，1】=18

【4，1，1】=9

【3，3】=2

【4，2】=4

【5，1】=4

【6】=1

處理模式三：換

在這種情況下，我們多了一個稱之為「換」的處理模式，即將所有的質數均先視為同樣的 p ，再代換成其他質數。

這個情況下只要從每個好人集合中挑出一個好人元，將其中一個 p 代換為 q 即合乎所求條件，所以每個好人集合的結果必須乘上

$C_1^{好人元個數}$（=好人元個數）的修正項，所得新的結果如下：

$$(k+1)C_0^k + kC_1^k + \ldots\ldots + C_k^k = \sum_{i=0}^{k}(k+1-i)C_i^k$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(k+1)\frac{k!}{i!(k-i)!} - \sum_{i=0}^{k} i\cdot\frac{k!}{i!(k-i)!} = (k+1)\cdot 2^k - k\cdot 2^{k-1} = (k+2)2^{k-1}$$

2.結論：

當 $n = p^k \cdot q$ 時，所有的分配方法數 $S_k = (k+2)2^{k-1}$ 種，並找出一遞迴關係式：$S_{k+2} = 4S_{k+1} - 4S_k$ 。

(四)當 $n = p^k \cdot q^2$ 時

1.處理方法：分成兩類來討論

(1)兩個 q 在不同的好人元中，由 $n = p^{k+2}$ 換兩個 q 推知，其情況數符合：

$$C_0^{k+1}C_2^{k+2} + C_1^{k+1}C_2^{k+1} + \ldots\ldots + C_k^{k+1}C_2^2$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_i^{k+1}C_2^{k+2-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!}\cdot\frac{(k+2-i)!}{2!(k-i)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\frac{(k+1)\cdot(k+2-i)}{2!}C_i^k$$

$$= \frac{k+1}{2!}\left[\sum_{i=0}^{k}(k+2)C_i^k - \sum_{i=0}^{k} iC_i^k\right]$$

$$= \frac{k+1}{2!}\left[(k+2)\cdot 2^k - k\cdot 2^{k-1}\right]$$

$$= \frac{k+1}{2}\cdot(k+4)\cdot 2^{k-1}$$

$$=(k+1)(k+4)\cdot 2^{k-2}$$

(2)兩個q在同一個好人元中，可以由$n=p^k\cdot q$的情況在加上一個q推知，所以其情況數為$(k+2)\cdot 2^{k-1}$

2.結論：

綜合 1、2，所有的分配方法數為

$S_k=\dfrac{(k+1)(k+4)}{2}2^{k-1}+(k+2)\cdot 2^{k-1}=\dfrac{k^2+7n+8}{2}\cdot 2^{k-1}$種找出一遞迴關係式

$$S_{k+3}=6S_{k+2}-12S_{k+1}+8S_k$$

以下為我們所算出的數據做為參考：

$k=1$

【1，1，1】=3

【2，1】=4

【3】=1

$k=2$

【1，1，1，1】=6

【2，1，1】=12

【2，2】=3

【3，1】=4

【4】=1

$k=3$

【1，1，1，1，1】=10

【2，1，1，1】=28

【2，2，1】=15

【3，1，1】=12

【3，2】=6

【4，1】=4

【5】=1

$k=4$

【1，1，1，1，1，1】=15

【2，1，1，1，1】=55

【2，2，1，1】=48

【3，1，1，1】=28

【2，2，2】=6

$k=5$

【1，1，1，1，1，1，1】=21

【2，1，1，1，1，1】=96

【2，2，1，1，1】=120

【3，1，1，1，1】=55

【2，2，2，1】=36

續下頁

【3，2，1】=30

【4，1，1】=12

【3，3】=3

【4，2】=6

【5，1】=4

【6】=1

【3，2，1，1】=96

【4，1，1，1】=28

【3，2，2】=18

【3，3，1】=15

【4，2，1】=30

【5，1，1】=12

【4，3】=6

【5，2】=6

【6，1】=4

【7】=1

(五)當 $n = p^k \cdot q^3$ 時

1.處理方法：分成三類討論

(1)三個 q 分別在不同的好人元中，由 $n = p^{k+3}$ 換三個 q 推知，其情況數符合：

$$C_0^{k+2}C_3^{k+3} + C_1^{k+2}C_3^{k+2} + \ldots\ldots + C_k^{k+2}C_3^3$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_i^{k+2}C_3^{k+3-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{(k+1)(k+2)(k+3-i)}{3!} C_i^k$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{6}\left[\sum_{i=0}^{k}(k+3)C_i^k - \sum_{i=0}^{k} iC_i^k\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{(k+2)!}{i!(k+2-i)!} \cdot \frac{(k+3-i)!}{3!(k-i)!}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{6}\left[(k+3)\cdot 2^k - k\cdot 2^{k-1}\right]$$

$$= \frac{k^3+9k^2+20k+12}{6} \cdot 2^{k-1}$$

(2)其中兩個q在同一好人元內，也就是【q^2 , q】，可視為在$n=p^k\cdot q^2$時，兩個q分別在不同好人元的情況下，將一個q加在其中一個含有q的好人元上。

所以其方法數為$2\times\left[\frac{k+1}{2}\cdot(k+4)\cdot 2^{k-1}\right]$

(3)三個q都在同一個好人元中，可以看成是在$n=p^k\cdot q$時，將兩個q加在含有q的好人元中。

所以其方法數為$(k+2)2^{k-1}$

2.結論：

綜合(1)、(2)、(3)，所有的分配方法數為

$$S_k=\frac{k^3+9k^2+20k+12}{6}\cdot 2^{k-1}+2\times\frac{k^2+5k+4}{2}\cdot 2^{k-1}+(k+2)2^{k-1}$$
$$=\frac{k^3+15k^2+56k+48}{6}\cdot 2^{k-1}$$

以下為我們所算出的數據做為參考：

$k=1$	$k=2$	$k=3$
【1，1，1，1】=4	【1，1，1，1，1】=10	【1，1，1，1，1，1】=20
【2，1，1】=9	【2，1，1，1】=28	【2，1，1，1，1】=70
【2，2】=2	【2，2，1】=15	【2，2，1，1】=60
【3，1】=4	【3，1，1】=12	【3，1，1，1】=32
【4】=1	【3，2】=6	【2，2，2】=7
	【4，1】=4	【3，2，1】=36
	【5】=1	【4，1，1】=12
		【3，3】=4
		【4，2】=6
		【5，1】=4
		【6】=1

續下頁

$k=4$

【1，1，1，1，1，1，1】=35

【2，1，1，1，1，1】=150

【2，2，1，1，1】=180

【3，1，1，1，1】=75

【2，2，2，1】=52

【3，2，1，1】=132

【4，1，1，1】=32

【3，2，2】=24

【3，3，1】=21

【4，2，1】=36

【5，1，1】=12

【4，3】=8

【5，2】=6

【6，1】=4

【7】=1

(六)當 $n=p^k\cdot q^l$ 時

1.處理方法：$n=p^k\cdot q^l$ 的方法數可以視為 $n=p^k\cdot q$ 、 $n=p^k\cdot q^2\ldots$ 到 $n=p^k\cdot q^l$ ，所有的 q 皆在不同的好人元的方法數在分別乘上某個係數。

當 $n=p^k\cdot q^l$ ，其所有的 q 皆在不同的好人元的方法數為

$$C_0^{k+l-1}C_l^{k+l}+C_1^{k+l-1}C_l^{k+l-1}+\ldots\ldots+C_k^{k+l-1}C_l^{l}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_i^{k+l-1}C_l^{k+l-i}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{(k+l-1)!(k+l-i)}{l!k!} C_i^k \\
&= \frac{(k+l-1)!}{l!k!}\left[(k+l)2^k - k \cdot 2^{k-1}\right] \\
&= C_l^{k+l} \times \frac{k+2l}{k+l} \times 2^{k-1}
\end{aligned}
$$

係數代表的意義為：$n = p^k \cdot q^m (1 \le m \le l)$時，所有的$q$皆在不同的好人元，共有$m$個好人元含有一個$q$，並在這$m$個好人元中，任意加入$(l-m)$個$q$，其情形有如$n = p^k$的組合方法：

※係數代表的意義為：$n = p^k \cdot q^m (1 \le m \le l)$時，所有的$q$皆在不同的好人元，共有$m$個好人元含有一個$q$，並在這$m$個好人元中，任意加入 $(l-m)$個q，其情形有如$n = p^k$的組合方法：

l值	卡片分配之模式與係數對照
$l=1$	【q】=1（$m=1$的係數）
$l=2$	【q，q】=1（$m=2$的係數） 【q^2】=1　（$m=1$的係數）
$l=3$	【q，q，q】=1（$m=3$的係數） 【q^2，q】=2（$m=2$的係數） 【q^3】=1（$m=1$的係數）
$l=4$	【q，q，q，q】=1（$m=4$的係數） 【q^2，q，q】=3（$m=3$的係數） 【q^2，q^2】=1 與【q^3，q】=2 之和為 3（$m=2$的係數） 【q^4】=1（$m=1$的係數）

2.結論：

$n=p^k\cdot q^l$ 所有的分配方法數為

$$S_k=\left[C_{l-1}^{l-1}C_l^{k+l}\times\frac{k+2l}{k+l}+C_{l-2}^{l-1}C_{l-1}^{k+l-1}\times\frac{k+2(l-1)}{k+l-1}+.....+C_0^{l-1}C_1^{k+1}\times\frac{k+2}{k+1}\right]\cdot 2^{k-1}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{l-1}C_{l-1-i}^{l-1}C_{l-i}^{k+l-i}\times\frac{k+2(l-i)}{k+l-i}\right]\cdot 2^{k-1}$$

四、遞迴關係

(一)預備定理

重根型的特徵方程式

如果 $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+...+c_ka_{n-k}$ ，$c_k\neq 0$ 所對應的特徵方程式 $x^k=c_1x^{k-1}+c_2x^{k-2}+...+c_k$ 有 $r(r<k)$ 個不同的根 x_1，x_2，…，x_r，他們的重數分別為 m_1，…，m_r，這裡 $m_1+m_2+...+m_r=k$，那麼 $a_n=P_1(n)x_1^n+P_2(n)x_2^n+...+P_r(n)x_r^n$。這裡 $P_1(n)$，…，$P_r(n)$ 分別是 n 的次數不超過 m_1-1，…，m_r-1 的多項式，可由初始值 a_0，a_1，…，a_{k-1} 確定。

(二)遞迴意義

針對前面所得 $n=p^k\cdot q^l$ 型之遞迴關係如下：

$l=0$：$S_{k+1}=2S_k$

$l=1$：$S_{k+2}=4S_{k+1}-4S_k$

$l=2$：$S_{k+3}=6S_{k+2}-12S_{k+1}+8S_k$

S_k 表 $n=p^k\cdot q^l$ 的分卡方法數，其中 l 為變數）

接下來，我們嘗試解釋這些遞迴關係式的意義：

為了在解釋其關係時，免去需扣除重複情形的麻煩，我們定義另一種處理模式如下：

處理模式四：限制加放

我們將模式一、模式二中所定義的「加」、「放」限制為針對某一個特定的好人元做處理。

對 $G_j\left(1\le j\le i\right)$ 進行「限制加」後的結果：

原好人集合 $M_i=$【$G_1,G_2,...,G_j,...,G_i$】會變成

$M_i^{'}=$【$G_1,G_2,...,G_j^{'},...G_i$】，其中 $G_j^{'}=G_j+1$。

對 $G_j\left(1\le j\le i\right)$ 進行「限制放」後的結果：

原好人集合 $M_i=$【$G_1,G_2,...,G_j,...,G_i$】會變成

$M_{i+1}^{'}=$【$G_1,G_2,...,G_j,G_{j+1}^{'},G_{j+2}^{'}...,G_{i+1}^{'}$】其中 $G_{j+1}^{'}=p,G_{m+1}^{'}=G_m\left(j+1\le m\le i\right)$

1.當 $l=0$：$S_{k+1}=2S_k$

(1) S_k 中的每一種情況都經過限制加放一個 p 在最後一個好人元，所以 S_k 中的每一種情況都可以對應到兩種 S_{k+1} 中的情況，且不會重複，所以 $S_{k+1}=2S_k$。

2.當 $l=1$：$S_{k+2}=4S_{k+1}-4S_k$

(1)考慮 S_{k+2} 中所有的「最後一個好人元至少有一個 p」的來源：

將其視為 S_{k+1} 中的每一種情況都經過限制加放一個 p 在最後一個好人元，可得總數為 $2S_{k+1}$。

(2)考慮 S_{k+2} 中「最後一個好人元不含 p」的來源：

將其視為 S_{k+1} 中所有「最後一個好人元不含 p」的情況再經過限制加放一個 p 在倒數第二個好人元，可得總數為 $2\left(S_{k+1}-2S_k\right)$。

(3)綜合以上，$S_{k+2}=2S_{k+1}+2\left(S_{k+1}-2S_k\right)=4S_{k+1}-4S_k$

3. 當 $l=2$：$S_{k+3}=6S_{k+2}-12S_{k+1}+8S_k$

(1)考慮 S_{k+3} 中所有的「最後一個好人元至少有一個 p」的來源：

將其視為 S_{k+2} 中的每一種情況都經過限制加放一個 p 在最後一個好人元，可得

總數為 $2S_{k+2}$ 。

(2)考慮 S_{k+3} 中「最後一個好人元不含 p 」的來源：

將其視為 S_{k+2} 中所有「最後一個好人元不含 p 」的情況再經過限制加放一個 p 在倒數第二個好人元，可得總數為 $2(S_{k+2}-2S_{k+1})$ 。

(3)考慮 S_{k+3} 中「最後一個好人元不含 p ，倒數第二個好人元亦不含 p 」的來源：

將其視為 S_{k+2} 中「最後一個好人元不含 p ，倒數第二個好人元亦不含 p 」經過限制加放在最後一個含 p 好人元的情況：$2S_{k+1}$ 表 S_{k+2} 中最後一個好人元至少有一個 p 的情況；$2(S_{k+1}-2S_k)$ 表 S_{k+2} 中最後一個好人元不含 p ，且倒數第二個好人元含 p 的情況。$S_{k+2}-2S_{k+1}-2(S_{k+1}-2S_k)$ 即表示 S_{k+2} 中「最後一個好人元不含 p ，倒數第二個好人元亦不含 p 」的情況。經限制加放後總數為 $2[S_{k+2}-2S_{k+1}-2(S_{k+1}-2S_k)]$ 。

(4)綜合以上，可知 $S_{k+3}=2S_{k+2}+2(S_{k+2}-2S_{k+1})+2[S_{k+2}-2S_{k+1}-2(S_{k+1}-2S_k)]$

$=6S_{k+2}-12S_{k+1}+8S_k$

4. 當 $l=3$ ： $S_{k+4}=8S_{k+3}-24S_{k+2}+32S_{k+1}-16S_n$

(1)考慮 S_{k+4} 中「最後一個好人元至少有一個 p 」的來源：

將其視為 S_{k+3} 中的每一種情況都經過限制加放一個 p 在最後一個好人元,可得總數為 $2S_{k+3}$ 。

(2)考慮 S_{k+4} 中「最後一個好人元不含 p 」的來源：

將其視為 S_{k+3} 中所有「最後一個好人元不含 p 」的情況再經過限制加放一個 p 在倒數第二個好人元，可得總數為 $2(S_{k+3}-2S_{k+2})$ 。

(3)考慮 S_{k+4} 中「最後一個好人元不含 p ，倒數第二個好人元也不含 p 」的來源：

將其視為 S_{k+3} 中「最後一個好人元不含 p ，倒數第二個好人元也不含 p 」經過限制加放在倒數第三個好人元的情況：$2S_{k+2}$ 表 S_{k+3} 中最後一個好人元至少有一個 p 的情況；$2(S_{k+2}-2S_{k+1})$ 表 S_{k+3} 中最後一個好人元不含 p ，且倒數第二個好人元

含 p 的情況。 $S_{k+3}-2S_{k+2}-2(S_{k+2}-2S_{k+1})$ 即表示 S_{k+3} 中「最後一個好人元不含 p，倒數第二個好人元也不含 p」的情況。再經過限制加放一個 p 在倒數第三個好人元，可得總數為 $2[S_{k+2}-2S_{k+1}-2(S_{k+1}-2S_k)]$。

(4)考慮 S_{k+4} 中「最後一個好人元不含 p，倒數第二個好人元也不含 p，且倒數第三個好人元亦不含 p」的來源：

將其視為 S_{k+3} 中「最後一個好人元不含 p，倒數第二個好人元也不含 p，且倒數第三個好人元亦不含 p」經過限制加放在最後一個含 p 好人元的情況：$2S_{k+2}$ 表 S_{k+3} 中最後一個好人元至少有一個 p 的情況；$2(S_{k+2}-2S_{k+1})$ 表 S_{k+3} 中最後一個好人元不含 p，且倒數第二個好人元含 p 的情況；$2\left[S_{k+2}-2S_{k+1}-2(S_{k+1}-2S_k)\right]$ 表 S_{k+3} 中「最後一個好人元不含 p，倒數第二個好人元也不含 p，且倒數第三個好人元含 p」的情況。$S_{k+3}-2S_{k+2}-2(S_{k+2}-2S_{k+1})-2\left[S_{k+2}-2S_{k+1}-2(S_{k+1}-2S_k)\right]$ 即表示 S_{k+3} 中「最後一個好人元不含 p，倒數第二個好人元也不含 p，且倒數第三個好人元亦不含 p」的情況。經過限制加放在最後一個含 p 好人元的情況，可得總數為 $2\left\{S_{k+3}-2S_{k+2}-2(S_{k+2}-2S_{k+1})-2\left[S_{k+2}-2S_{k+1}-2(S_{k+1}-2S_k)\right]\right\}$

(5)綜合以上，可知

$$S_{k+4}=2S_{k+3}+2\left(S_{k+3}-2S_{k+2}\right)+2[S_{k+2}-2S_{k+1}-2(S_{k+1}-2S_k)]$$
$$+2\left\{S_{k+3}-2S_{k+2}-2(S_{k+2}-2S_{k+1})-2\left[S_{k+2}-2S_{k+1}-2(S_{k+1}-2S_k)\right]\right\}$$

即 $S_{k+4}=8S_{k+3}-24S_{k+2}+32S_{k+1}-16S_n$

(三)由遞迴關係推 S_n 之一般式

1.當 $l=0$：$S_{k+1}=2S_k$

其對應之特徵方程式為 $x-2=0$

令一般式 $S_k=c_1\cdot 2^k$

$k=1$ 代入解 c_1 得

$S_1=1=c_1\cdot 2^1$

$\therefore c_1 = \frac{1}{2}$，原一般式為 $S_k = \frac{1}{2} \cdot 2^k = 2^{k-1}$

2.當 $l = 1$：$S_{k+2} = 4S_{k+1} - 4S_k$

其對應之特徵方程式為 $x^2 - 4x + 4 = 0$

令一般式 $S_k = (c_1 k + c_2) \cdot 2^k$

代值解 c_1，c_2

$k = 0$，$S_0 = c_2 \cdot 2^0 = 1$

$k = 1$，$S_1 = (c_1 + c_2) \cdot 2 = 3$

解得 $(c_1, c_2) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

原一般式為 $S_k = \left(\frac{1}{2}k + 1\right) \cdot 2^k = (k+2) \cdot 2^{k-1}$

3.當 $l = 2$：$S_{k+3} = 6S_{k+2} - 12S_{k+1} + 8S_k$

其對應之特徵方程式為 $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

令一般式 $S_k = (c_1 k^2 + c_2 k + c_3) \cdot 2^k$

代值解 c_1，c_2，c_3

$k = 0$，$S_0 = c_3 \cdot 2^0 = 2$

$k = 1$，$S_1 = (c_1 + c_2 + c_3) \cdot 2 = 8$

$k = 2$，$S_2 = (4c_1 + 2c_2 + c_3) \cdot 2^2 = 26$

解得 $(c_1, c_2, c_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 2\right)$

原一般式為 $S_k = \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{7}{4}k + 2\right) \cdot 2^k = \frac{k^2 + 7k + 8}{2} \cdot 2^{k-1}$

4.當 $l = 3$：$S_{k+4} = 8S_{k+3} - 24S_{k+2} + 32S_{k+1} - 16S_n$

其對應之特徵方程式為 $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 0$

令一般式 $S_k=\left(c_1k^3+c_2k^2+c_3k+c_4\right)\cdot 2^k$

代值解 c_1 ，c_2 ，c_3 ，c_4

$k=0$ ，$S_0=c_4\cdot 2^0=4$

$k=1$ ，$S_1=\left(c_1+c_2+c_3+c_4\right)\cdot 2=20$

$k=2$ ，$S_2=\left(8c_1+4c_2+2c_3+c_4\right)\cdot 2^2=76$

$k=3$ ，$S_3=\left(27c_1+9c_2+3c_3+c_4\right)\cdot 2^3=252$

解得 $\left(c_1,c_2,c_3,c_4\right)=\left(\frac{1}{12},\frac{5}{4},\frac{14}{3},4\right)$

原一般式為 $S_k=\left(\frac{1}{12}k^3+\frac{5}{4}k^2+\frac{14}{3}k+4\right)\cdot 2^k=\frac{k^3+15k^2+56k+48}{6}\cdot 2^{k-1}$

5.當 $l=4$ ： $S_{k+5}=10S_{k+4}-40S_{k+3}+80S_{k+2}-80S_{n+1}+64S_n$

其對應之特徵方程式為 $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-64=0$

令一般式 $S_k=\left(c_1k^4+c_2k^3+c_3k^2+c_4k+c_5\right)\cdot 2^k$

代值解 c_1 ，c_2 ，c_3 ，c_4 ，c_5

$k=0$ ，$S_0=c_5\cdot 2^0=8$

$k=1$ ，$S_1=\left(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5\right)\cdot 2=48$

$k=2$ ，$S_2=\left(16c_1+8c_2+4c_3+2c_4+c_5\right)\cdot 2^2=208$

$k=3$ ，$S_3=\left(81c_1+27c_2+9c_3+3c_4+c_5\right)\cdot 2^3=768$

$k=4$ ，$S_4=\left(256c_1+64c_2+16c_3+4c_4+c_5\right)\cdot 2^4=2568$

解得 $\left(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5\right)=\left(\frac{1}{48},\frac{13}{24},\frac{203}{48},\frac{269}{24},8\right)$

原一般式 $S_k=\left(\frac{1}{48}k^4+\frac{13}{24}k^3+\frac{203}{48}k^2+\frac{269}{24}k+8\right)\cdot 2^k$

$$=\left(\frac{k^4+26k^3+203k^2+538k+384}{24}\right)\cdot 2^{k-1}$$

伍. 研究結果與討論

一、若人與卡的數量均為$n-1$，即人對應的編號為 1 到$n-1$號，卡號為 2 到n號，且$n=p^k\cdot q^l$。

(一)當n為質數時，只有一種分配方法。

(二)當$n=p^k$時，所有的分配方法數為$S_k=2^{k-1}$種。

(三)當$n=p^k\cdot q$時，所有的分配方法數$S_k=(k+2)2^{k-1}$種。

(四)當$n=p^k\cdot q^2$時，所有的分配方法數為

$$S_k=\frac{(k+1)(k+4)}{2}2^{k-1}+(k+2)\cdot 2^{k-1}=\frac{k^2+7n+8}{2}\cdot 2^{k-1}\text{種。}$$

(五)當$n=p^k\cdot q^3$時，所有的分配方法數為

$$S_k=\frac{k^3+9k^2+20k+12}{6}\cdot 2^{k-1}+2\times\frac{k^2+5k+4}{2}\cdot 2^{k-1}+(k+2)2^{k-1}$$

$$=\frac{k^3+15k^2+56k+48}{6}\cdot 2^{k-1}\text{種。}$$

(六)當$n=p^k\cdot q^4$時，所有的分配方法數為

$$S_k=\left(\frac{k^4+26k^3+203k^2+538k+384}{24}\right)\cdot 2^{k-1}\text{種}$$

(七)當$n=p^k\cdot q^l$時，所有的分配方法數為

$$S_k=\left[C_{l-1}^{l-1}C_l^{k+l}\times\frac{k+2l}{k+l}+C_{l-2}^{l-1}C_{l-1}^{k+l-1}\times\frac{k+2(l-1)}{k+l-1}+\ldots\ldots+C_0^{l-1}C_1^{k+1}\times\frac{k+2}{k+1}\right]\cdot 2^{k-1}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{l-1}C_{l-1-i}^{l-1}C_{l-i}^{k+l-i}\times\frac{k+2(l-i)}{k+l-i}\right]\cdot 2^{k-1}\text{種。}$$

二、若人與卡的數量均為$n-1$，針對$n=p^k\cdot q^l$中的l值，可得下列的遞迴關係式：

令 S_k 表 $n = p^k \cdot q^l$ 的分卡方法數

(一) 當 $l = 0$：S_k 的遞迴關係式為 $S_{k+1} = 2S_k$

(二) 當 $l = 1$：S_k 的遞迴關係式為 $S_{k+2} = 4S_{k+1} - 4S_k$。

(三) 當 $l = 2$：S_k 的遞迴關係式為 $S_{k+3} = 6S_{k+2} - 12S_{k+1} + 8S_k$。

(四) 當 $l = 3$：S_k 的遞迴關係式為 $S_{k+4} = 8S_{k+3} - 24S_{k+2} + 32S_{k+1} - 16S_k$。

(五) 當 $l = 4$：S_k 的遞迴關係式為 $S_{k+5} = 10S_{k+4} - 40S_{k+3} + 80S_{k+2} - 80S_{k+1} + 64S_k$。

(六) 綜合一般性，S_k 的遞迴關係式為

$$S_{k+l+1} = C_1^{l+1} 2S_{k+l} - C_2^{l+1} 2^2 S_{k+l-1} + \cdots + (-1)^{m-1} C_m^{l+1} 2^m S_{k+l+1-m} + \cdots + (-1)^l C_{l+1}^{l+1} 2^{l+1} S_k$$

陸. 結論與應用

一、結論：

(一)若人與卡的數量均為 $n-1$，即人對應的編號為 1 到 $n-1$ 號，卡號為 2 到 n 號，且 $n = p^k \cdot q^l$。

其分卡方法數為 $\left[\sum_{i=0}^{l-1} C_{l-1-i}^{l-1} C_{l-i}^{k+l-i} \times \frac{k+2(l-i)}{k+l-i}\right] \cdot 2^{k-1}$ 種

其遞迴關係為

$$S_{k+l+1} = C_1^{l+1} 2S_{k+l} - C_2^{l+1} 2^2 S_{k+l-1} + \cdots + (-1)^{m-1} C_m^{l+1} 2^m S_{k+l+1-m} + \cdots + (-1)^l C_{l+1}^{l+1} 2^{l+1} S_k$$

其對應之特徵方程式為 $(x-2)^{l+1} = 0$

(二)目前已知道 n 為質數、$n = p^k$ 及 $n = p^k \cdot q^l$ 之解法，而此題目尚有許多的延伸空間，未能於交稿前完成，不過這是我未來努力的方向。

二、應用：

本研究之過程與結果，是將特定號碼分配至其因數 s，再將 s 分配至其因數，如此直到有一數分配給 1 為止。因此，本研究可以運用至密碼、統計抽樣等各方面。

柒. 參考文獻

一、高中數學競賽教程，嚴鎮軍主編，九章出版社。

二、世界數學奧林匹克解題大辭典組合卷，中國數學奧林匹克委員會南開大學數學系，河北少年兒童出版社。

評語

此報告研究在某種限制下的編號對應，雖然僅考慮 $n+1= p^k$ 和 $n+1= p^k q^l$ 兩種情況，卻相當完整，尤其若有遞迴關係更有發展空間，然而下列幾點應注意：

1.證明應更完整，尤其是在證明中出現的的二項式乘積之和，應逐項說明清楚，而不應只是舉例說明。

2.在報告中應明白表示何處用到所列的參考文獻。

3.在最後結語中表示此研究可應到密碼和統計抽樣等方面，應確實給予實際應用例子，不宜空泛而言。