2009 年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

編號： 010022

作品名稱

一個不定方程 $q=a2+b2+c2/1+ab+bc+ac$ 整數解的探討

得獎獎項

數學科大會獎第三名

儲備作品

學校名稱： 臺北市立建國高級中學

作者姓名： 江健安

指導老師： 林信安

關 鍵 字： 不定方程式、遞迴式、 整數解

作者簡介

我叫江健安，目前就讀於台北市立建國高級中學二年級，興趣是打排球和看書，自國中時就對數學很有興趣，常常從數學中感受藝術之美，也不禁為數學的偉大而讚嘆！這次有機會能將自己在高一時研究作品呈現給大家看，是肯定也是挑戰，很高興的自己的作品受到評審老師的親睞得以入選・從研究中，不僅學到了許許多多研究問題的方法，重要的是要永遠保持研究的那份熱誠，希望大家可以從這個問題中感受到數學偉大的美，並且對本次研究提出指教。

摘要

本文探討不定方程 $q=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}$ (q 為整數) 的正整數解(a,b,c)之間的遞迴關係，透過兩個遞迴關係式可以產生一系列不定方程式的解。

主要的定理如下：

(1)若$(a_n\ ,a_{n+1}\ ,a_{n+2})$為 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q\ (q\in N)$的解，

則$(a_{n+1}\ ,a_{n+2}\ ,a_{n+3})$亦為解，其中 $a_{n+3}=q\,(a_{n+1}+a_{n+2})-a_n$

(2)若$(\alpha\ ,b_n\ ,b_{n+1})$為 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q\ (q\in N)$的解，則$(\alpha\ ,b_{n+1}\ ,b_{n+2})$亦為解，其中 $b_{n+2}=q\,(\alpha+b_{n+1})-b_n$ 選定一組解後可藉由遞迴式產生一連串的解，而且產生的解中必包含當初所選定的解。

Abstract

We discussed the relation among nonnegative integers a , b ,and c so that $q = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}$ is an integer . Through the two recursions , we can generate an infinite list of solutions.

There are following theorems :

(1) Given a nonnegative integer q , if $(a_n \ , a_{n+1} \ , a_{n+2})$ is a solution of $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac} = q$. Then $(a_{n+1} \ , a_{n+2} \ , a_{n+3})$ is also a solution ,

where $a_{n+3} = q\,(a_{n+1} + a_{n+2}) - a_n$.

(2) Given a nonnegative integer q , if $(\alpha \ , b_n \ , b_{n+1})$ is a solution of $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac} = q$. Then $(\alpha \ , b_{n+1} \ , b_{n+2})$ is also a solution ,

where $b_{n+2} = q\,(\alpha + b_{n+1}) - b_n$.

Choose a general solution , through the two recursions ,we can produce a series of solutions.

一個不定方程 $q=a^2+b^2+c^2/1+ab+bc+ac$ 整數解的探討

一、研究動機

最近在 2006 年 2 月的 Mathematics Magazine 上看到了一篇文章[1]是關於 1988 年的 IMO 競賽題：「若 $a,b,q=\frac{a^2+b^2}{1+ab}$都是非負的整數，則 q 是完全平方數。」，文[1]中作者找出了符合條件的解(附錄[2])，但也留下一個問題延伸：”*Find a ,b , and c so that* $\frac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q$ *is an integer* “，我對這個延伸的問題感到興趣，故想研究看看是否能夠有所進展。

二、研究目的及研究問題

(一)找出滿足不定方程式 $q=\frac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}$的整數解$(a , b , c)$。

(二)歸納出解與解之間的關係。

(三)解與解之間是否會形成遞迴數列，若能，則此數列的一般項是否能表示出來。

三、研究方法及過程

(一)簡單的整數解:

1.當 $q=0$ 時，必有 $a^2+b^2+c^2=0$，故有 $a=b=c=0$

2.當$|a|=|b|=|c|>0$ 時，對 a ,b ,c 之正負做討論

(1) $0< a=b=c$，則原式變為 $\frac{3a^2}{1+3a^2}=q$，移項得 $(3-3q)a^2=q>0$，此時 q 無解

(2)$a<0<b=c$，則 $q=\frac{3b^2}{1-b^2}\rightarrow b^2=\frac{q}{3+q}$ 可知 $q<-3$ 或 $q>0$，又 $1-b^2=\frac{3}{3+q}\in Z\rightarrow$

$3+q=\pm1$ 或 ±3，$q=-4$，-6，-2(不合)，0(不合)，又 $q=-6$ 代入不合，故得 $(a,b,c)=(-2,2,2)$

(3) $a=b<0<c$，$q=\dfrac{3b^2}{1-b^2}$，同上述作法也可得$(a,b,c)=(-2,-2,2)$

(4) $a=b=c<0$，$\dfrac{3a^2}{1+3a^2}=q$，與[1]的結果相同

3.若 $q=1$，即 $a^2+b^2+c^2=1+ab+bc+ac$，則$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=2$

可得 $(a-b)^2=1$, $(a-c)^2=1$, $(b-c)^2=0$ 或 $(a-b)^2=0$, $(a-c)^2=1$, $(b-c)^2=1$

解得 $(a,b,c)=(k,k+1,k+1)$ 或 $(k,k,k+1)$, $k\in Z$

4.接下來將針對 $0\leqq a\leqq b\leqq c$，$q>1$ 的情形來研究

（二）整數解的遞迴關係:

1.遞迴式的由來

(1)仿造附錄[2]中寫出解的形式加以觀察，由附錄[1]可得 $q=m^2$

$m=0$, $(0,0,0)$

$m=1$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$

$m=2$, $(0,0,2)$, $(0,2,8)$, $(2,8,40)$ …

… … … …

$m=k$, $(0,0,k)$, $(0,k,k^3)$, (k,k^3,k^5+k^3) -①

在①中觀察 c 之形式與附錄[2]中整數解 (k,k^3),(k^3,k^5-k)有些不同

故利用程式加以觀察在 $q=m^2$ 時 $q=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}$ 之整數解(附錄[4])

觀察數列 (2,8,40,4) , (8,40,190,4) , (40,190,912,4)

由於在[1]文中得知若(a_n,a_{n+1})為 $q=\dfrac{a^2+b^2}{1+ab}$ 之整數解，其中 $q=m^2, m\in N$

則$(a_{n+1}$，$a_{n+2})$亦為其解，且滿足 $a_{n+2}= qa_{n+1} - a_n$

所以在遞迴關係中應有 $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$

故猜測 $a_{n+3}=q(a_{n+1}+a_{n+2})-a_n$，$q=m^2, m\in N$

由已知關係推測下一對滿足的解為 (190,912,4368,4)，經驗證知其為解

(2)又在附錄[4]的數列中有些數列：(2,8,40,4),(2,40,160,4),(2,160,608,4)

似乎存在某種關係：160=(2+40)×4-8，608=(2+160) ×4-40

且都固定 a=2，q=4，可能有另一種遞迴關係

所以猜測：$b_{n+2}=q\,(\alpha+b_{n+1})-b_n$，其中 α，q 為給定之常數

以(2,160,608,4)代入後可得數列 (2,608,2280,4)，經驗證後知其亦為解。

2. 證明遞迴關係式的正確性

2-1-1：驗證遞迴式一：$a_{n+3}=q(a_{n+1}+a_{n+2})-a_n$ 之合理性：

設$(a_n\ ,a_{n+1}\ ,a_{n+2})$，$(a_{n+1}\ ,a_{n+2}\ ,a_{n+3})$為滿足的解，令 $a= a_{n+1}$，$b=a_{n+2}$，$c=x$

則 $q=\dfrac{a_{n+1}^2+a_{n+2}^2+x^2}{1+a_{n+1}a_{n+2}+(a_{n+1}+a_{n+2})x}$

$\Rightarrow x^2-q(a_{n+1}+a_{n+2})\,x+a_{n+1}^2+a_{n+2}^2-q(1+a_{n+1}a_{n+2})=0$

兩解 x_1、x_2，$x_1<x_2$，由定義可知 $x_1=a_n$，$x_2=a_{n+3}$

由根與係數的關係知 $x_1+x_2=q(a_{n+1}+a_{n+2})$

故有 $a_{n+3}=q(a_{n+1}+a_{n+2})-a_n$

2-1-2：定理一的說明

> 定理一：若$(a_n，a_{n+1}，a_{n+2})$為 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q\ (q\in N)$的解，
>
> 則$(a_{n+1}，a_{n+2}，a_{n+3})$亦為解，其中 $a_{n+3}=q\,(a_{n+1}+a_{n+2})-a_n$

證明：

$\because(a_n\ ,a_{n+1}\ ,a_{n+2})$為 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q$ 的解且 $a_{n+3}=q(a_{n+1}+a_{n+2})-a_n$

$$\therefore q=\frac{a_n^2+a_{n+1}^2+a_{n+2}^2}{1+a_na_{n+1}+a_na_{n+2}+a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{(a_{n+3}+a_n)}{a_{n+2}+a_{n+1}}=\frac{a_{n+3}^2-a_n^2}{(a_{n+2}+a_{n+1})(a_{n+3}-a_n)}$$

$$=\frac{a_{n+3}^2-a_n^2}{a_{n+2}a_{n+3}+a_{n+1}a_{n+3}-a_{n+2}a_n-a_{n+1}a_n}$$

$$=\frac{(a_{n+1}^2+a_{n+2}^2+a_{n+3}^2)-(a_n^2+a_{n+1}^2+a_{n+2}^2)}{(1+a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}a_{n+3}+a_{n+2}a_{n+3})-(1+a_na_{n+1}+a_na_{n+2}+a_{n+1}a_{n+2})}$$

又當 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A-C}{B-D}$ 時，$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$，所以有 $\dfrac{a_{n+1}^2+a_{n+2}^2+a_{n+3}^2}{1+a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}a_{n+3}+a_{n+2}a_{n+3}}=q$ 成立

故$(a_{n+1}\ ,a_{n+2}\ ,a_{n+3})$ 亦為 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q\ (q\in N)$的解。

2-2-1：驗證遞迴式二：$b_{n+2}=q\,(\alpha+b_{n+1})-b_n$之合理性：

設$(\alpha\ ,b_n\ ,b_{n+1})$，$(\alpha\ ,b_{n+1}\ ,b_{n+2})$為滿足的解，令 $a=\alpha$，$b=b_{n+1}$，$c=x$

則 $q=\dfrac{\alpha^2+b_{n+1}^2+x^2}{1+\alpha b_{n+1}+(\alpha+b_{n+1})x}$

$\Rightarrow x^2-q(\alpha+b_{n+1})\,x+\alpha^2+b_{n+1}^2-q(1+\alpha b_{n+1})=0$

兩解 x_1、x_2，$x_1<x_2$，由定義可知 $x_1=b_n$，$x_2=b_{n+2}$

由根與係數的關係知 $x_1+x_2=q(\alpha+b_{n+1})$

故有 $b_{n+2}=q\,(\alpha+b_{n+1})-b_n$

2-2-2：定理二的說明

定理二：若$(\alpha，b_n，b_{n+1})$為 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q\ (q\in N)$的解， 則$(\alpha，b_{n+1}，b_{n+2})$亦為解，其中 $b_{n+2}=q\ (\alpha+b_{n+1})-b_n$

證明：

$\because\ b_{n+2}=q\ (\alpha+b_{n+1})-b_n$

$\therefore\ q=\dfrac{q(\alpha+b_{n+1})}{\alpha+b_{n+1}}=\dfrac{b_{n+2}+b_n}{\alpha+b_{n+1}}$

$=\dfrac{b_{n+2}^2-b_n^2}{(\alpha+b_{n+1})(b_{n+2}-b_n)}=\dfrac{b_{n+2}^2-b_n^2}{b_{n+1}b_{n+2}+\alpha b_{n+2}-\alpha b_n-b_nb_{n+1}}$

$=\dfrac{(\alpha^2+b_{n+1}^2+b_{n+2}^2)-(\alpha^2+b_n^2+b_{n+1}^2)}{(1+\alpha b_{n+1}+\alpha b_{n+2}+b_{n+1}b_{n+2})-(1+\alpha b_n+\alpha b_{n+1}+b_nb_{n+1})}$

$\because\ q=\dfrac{\alpha^2+b_n^2+b_{n+1}^2}{1+\alpha b_n+\alpha b_{n+1}+b_nb_{n+1}}$

$=\dfrac{(\alpha^2+b_{n+1}^2+b_{n+2}^2)-(\alpha^2+b_n^2+b_{n+1}^2)}{(1+\alpha b_{n+1}+\alpha b_{n+2}+b_{n+1}b_{n+2})-(1+\alpha b_n+\alpha b_{n+1}+b_nb_{n+1})}$

且 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A-C}{B-D}$ 時，$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$

$\therefore\ \dfrac{\alpha^2+b_{n+1}^2+b_{n+2}^2}{1+\alpha b_{n+1}+\alpha b_{n+2}+b_{n+1}b_{n+2}}=q$

故$(\alpha\ ,b_{n+1}\ ,b_{n+2})$亦為 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q\ (q\in N)$的解。

2-3：定理一與定理二之間的關係

選取 $q\in Z$，設(x_0,y_0,z_0)為 $q=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}$之解，其中 $x_0\leqq y_0\leqq z_0$，令 $a_0=x_0$, $a_1=y_0$, $a_2=z_0$，由定理一中的遞迴關係式 $a_{n+3}=q\ (a_{n+1}+a_{n+2})-a_n$ 產生的整數解所成之集合為 A，同理令 $\alpha=x_0$, $b_1=y_0$, $b_2=z_0$，由定理二的遞迴關係式 $b_{n+2}=q\ (\alpha+b_{n+1})-b_n$ 產生的整數解所形成之集合為 B，可以斷定 $A\cap B=\{(x_0,y_0,z_0)\}$

[說明]：在 $b_{n+2}= q(\alpha+ b_{n+1}) - b_n$ 中，解數對(a ,b ,c)中的 a 為固定之常數 α，但在 $a_{n+3}=q(a_{n+1}+a_{n+2})-a_n$ 中，解的數對是三元一同做遞換，可知在解數對(a ,b ,c)中的 a 並非為固定之常數，所以可確定在這兩個遞迴關係式所得出的解中，除了選定的解 (x_0 , y_0 , z_0) 之外不會重複。

2-4：由遞迴式求解的一般式

2-4-1：在 $a_{n+3}=q(a_{n+1}+a_{n+2})-a_n$ 中，取 $a_0=0$, $a_1=m$, $a_2=m^3$，

則 $q=m^2(m>1)$，且此遞迴關係式之特徵方程為 $x^3-qx^2-qx+1=0$，分解得 $(x+1)[x^2-(q+1)x+1]=0$，因為$(q+1)^2 - 4=q^2+2q-3=(q+3)(q-1)>0$，所以可解得

$x=-1$，$x=\dfrac{q+1\pm\sqrt{(q+1)^2-4}}{2}$，令 $x_1=\dfrac{q+1+\sqrt{(q+1)^2-4}}{2}$ ，$x_2=\dfrac{q+1-\sqrt{(q+1)^2-4}}{2}$

由韋達定理可知 $x_1+x_2 = m^2 +1$，$x_1x_2 = 1$

所以 $a_n=C_1x_1^n + C_2x_2^n + C_3(-1)^n$，為了確定待定係數 C_1 , C_2 及 C_3

帶入初始值 $a_0=0$, $a_1=m$, $a_2=m^3$，所以有

$C_1+C_2+C_3=0$

$C_1x_1+C_2x_2-C_3=m$

$C_1x_1^2+C_2x_2^2+C_3=m^3$

解此三元一次方程組可得

$$C_1=\frac{m(m^2-x_2+1)}{(x_1-x_2)(x_1+1)},\ C_2=\frac{m(m^2-x_1+1)}{(x_2+1)(x_2-x_1)},\ C_3=\frac{m^3-(x_1+x_2)m}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$\therefore a_n=\frac{m(m^2-x_2+1)}{(x_1-x_2)(x_1+1)}x_1^n+\frac{m(m^2-x_1+1)}{(x_2+1)(x_2-x_1)}x_2^n+\frac{m^3-(x_1+x_2)m}{(x_1+1)(x_2+1)}(-1)^n$$

$$=\frac{m}{(x_1-x_2)(x_1+1)(x_2+1)}[(m^2-x_2)x_1^n+(m^2-x_1)x_2^n+(x_2-x_1)(-1)^n]$$

帶入根與係數的關係可再化簡得

$$a_n=\frac{m}{(m^2+3)\sqrt{(m^2+3)(m^2-1)}}[(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})-(x_1^n+x_2^n)-(-1)^n\sqrt{(m^2+3)(m^2-1)}]$$

其中 $x_1=\dfrac{m^2+1+\sqrt{(m^2+3)(m^2-1)}}{2}$, $x_2=\dfrac{m^2+1-\sqrt{(m^2+3)(m^2-1)}}{2}$

所以在確定了 m 的值後，可以得到 a_n , a_{n+1} , a_{n+2}

而且(a_n , a_{n+1} , a_{n+2})為不定方程式 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q$ 的整數解

Ex: $m=2$ 時，可得 $x_1=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$, $x_2=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$

$a_n=\dfrac{2}{7\sqrt{21}}[\,(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2})(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2})^n+(\dfrac{3-\sqrt{21}}{2})(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2})^n-\sqrt{21}\ (-1)^n]$

而且(a_n , a_{n+1} , a_{n+2})為不定方程式 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=4$ 的整數解

2-4-2：在 $b_{n+2}=q\,(\alpha+b_{n+1})-b_n$ 中，取 $\alpha=m$, $b_1=m^3$, $b_2=m^3+m^5$，

可求得 $q=m^2(m>1)$，且 $b_3=m^5+m^7$

$\because b_{n+2}=q\,(\alpha+b_{n+1})-b_n$, $b_{n+1}=q\,(\alpha+b_n)-b_{n-1}$

相減得 $b_{n+2}-b_{n+1}=q\,(b_{n+1}-b_n)-(b_n-b_{n-1})$

令 $f_n=b_n-b_{n-1}$，代入後可得 $f_{n+2}=q\,f_{n+1}-f_n$，特徵方程為 $x^2-qx+1=0$

所以解得 $x=\dfrac{q\pm\sqrt{q^2-4}}{2}$ ，令 $x_1=\dfrac{q+\sqrt{q^2-4}}{2}$, $x_2=\dfrac{q-\sqrt{q^2-4}}{2}$

由韋達定理可知 $x_1+x_2=m^2$, $x_1x_2=1$

所以 $f_n=C_1x_1^n+C_2x_2^n$，為了確定待定係數 C_1 , C_2

帶入初始值 $f_2=b_2-b_1=m^5$，$f_3=b_3-b_2=m^7-m^3$，所以有

$C_1x_1^2+C_2x_2^2=m^5$

$C_1x_1^3+C_2x_2^3=m^7-m^3$

可解得 $C_1=\dfrac{m^7-m^3-x_2m^5}{x_1^2(x_1-x_2)}$，同理可得 $C_2=\dfrac{-m^7+m^3+x_1m^5}{x_2^2(x_1-x_2)}$

又 $f_n=b_n-b_{n-1}=C_1x_1^n+C_2x_2^n$

$f_{n-1}=b_{n-1}-b_{n-2}=C_1x_1^{n-1}+C_2x_2^{n-1}$

$f_{n-2}=b_{n-2}-b_{n-3}=C_1x_1^{n-2}+C_2x_2^{n-2}$

$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$

$f_2 = b_2 - b_1 = C_1x_1^{\,2} + C_2x_2^{\,2}$

加總得 $b_n=b_1+C_1(x_1^{\,2}+x_1^{\,3}+\cdots+x_1^{\,n})+C_2(x_2^{\,2}+x_2^{\,3}+\cdots+x_2^{\,n})$ ---(*)

又 $x_1^{\,2}+x_1^{\,3}+\cdots+x_1^{\,n}=\dfrac{x_1^{\,2}(x_1^{\,n-1}-1)}{x_1-1}$, $x_2^{\,2}+x_2^{\,3}+\cdots+x_2^{\,n}=\dfrac{x_2^{\,2}(x_2^{\,n-1}-1)}{x_2-1}$

帶入(*)得 $b_n=b_1+C_1\dfrac{x_1^{\,2}(x_1^{\,n-1}-1)}{x_1-1}+C_2\dfrac{x_2^{\,2}(x_2^{\,n-1}-1)}{x_2-1}$

$$=b_1+\left(\frac{m^7-m^3-x_2m^5}{x_1^{\,2}(x_1-x_2)}\right)\left(\frac{x_1^{\,2}(x_1^{\,n-1}-1)}{x_1-1}\right)+\left(\frac{-m^7+m^3+x_1m^5}{x_2^{\,2}(x_1-x_2)}\right)\left(\frac{x_2^{\,2}(x_2^{\,n-1}-1)}{x_2-1}\right)$$

$$=m^3\left[1+\left(\frac{m^4-1-x_2m^2}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x_1^{\,n-1}-1}{x_1-1}\right)+\left(\frac{-m^4+1+x_1m^2}{x_1-x_2}\right)\left(\frac{x_2^{\,n-1}-1}{x_2-1}\right)\right]$$

所以在確定了 m 的值後，可以得到 α , b_n , b_{n+1}

而且(α , b_n , b_{n+1})為不定方程式 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q$ 的整數解

Ex: $m=2$ 時，此時 $\alpha=2$, $b_1=8$, $b_2=40$, $b_3=160$, $q=4$

可得 $x_1=2+\sqrt{3}$, $x_2=2-\sqrt{3}$

此時 $b_n=8\left[1+\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{(2+\sqrt{3})^{n-1}-1}{1+\sqrt{3}}\right)+\left(\dfrac{4\sqrt{3}-7}{2\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{(2-\sqrt{3})^{n-1}-1}{1-\sqrt{3}}\right)\right]$

而且(2 , b_n , b_{n+1})為不定方程式 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=4$ 的整數解

四、問題討論

初始值的討論：

1.選定一組正整數解(x_0 , y_0 , z_0)，其中 $x_0\leqq y_0\leqq z_0$，令 $a_n=x_0$, $a_{n+1}=y_0$, $a_{n+2}=z_0$，可令 $a=a_n$, $b=a_{n+1}$, $c=a_{n+2}$，代入遞迴關係式 $a_{n+2}=q(a_n+a_{n+1})-a_{n-1}$ 可求得 a_{n-1}。如此經過有限次遞減及遞換，必有一組解(a_m , a_{m+1} , a_{m+2})($m\leqq n$)滿足 $a_m>0$ 且 $a_{m-1}<0$，則稱此時的解(a_m , a_{m+1} , a_{m+2})為遞迴數列 $a_{n+3}=q(a_{n+2}+a_{n+1})-a_n$ 之初始值(a_1 , a_2 , a_3)，且初始值透過此關係式產生的一連串正整數解中必包含(x_0 , y_0 , z_0)

同理，對於選定的正整數解(x_0, y_0, z_0)代入遞迴關係式 $b_{n+2}= q(\alpha+ b_{n+1}) - b_n$ 可求得 b_{n-1}。經過有限次遞減及遞換，必有一組解(x_0, b_m, b_{m+1})($m \leqq n$)滿足 $b_m>0$ 且 $b_{m-1}<0$，則稱此時的求得之解(α, b_m, b_{m+1})為遞迴數列之初始值(x_0, b_1, b_2)，且初始值透過此關係式產生的一連串正整數解中必包含(x_0, y_0, z_0)

2.觀察附錄中的解，由前述的方法反推回去得到之初始值不一定相同，尋找初始值的規律或性質，而藉此求得所有的整數解，是現今仍需克服的問題。

3.利用圖像探討定理一及定理二產生的解之間的關係：

藉由定理一及定理二，可產生一連串的整數解，可將其中一組解的三個數字看成平面上的三個點 A , B , C，如果這三個點所代表的數為一組解，於是這三個點形成△ABC，又這組解中的三個數字藉由遞迴式可產生另一個數，以 D 點代表。

為方便起見，底下以點 A, B, C, D 表示該點所代表的數。

給定一組解(A, B, C)，利用定理一、二的遞迴式可分別產生另一組解(B, C, D)及(A, C, D)，產生過程如下表 1 所示：

表 1

$$(A, B, C) \xrightarrow[\substack{A = a_n \\ B = a_{n+1} \\ C = a_{n+2}}]{\substack{a_{n+3}=q(a_{n+2}+a_{n+1}) - a_n \\ D = q(B+C) - A}} (B, C, D)$$

$$(A, B, C) \xrightarrow[\substack{A = \alpha \\ B = b_n \\ C = b_{n+1}}]{\substack{b_{n+2}= q(\alpha+ b_{n+1}) - b_n \\ D = q(A+C) - B}} (A, C, D)$$

所以可以定義兩三角形為共邊三角形的條件為：共用邊上兩頂點和的 q 倍等於不在那條邊上的兩頂點的和，如圖 1 所示：

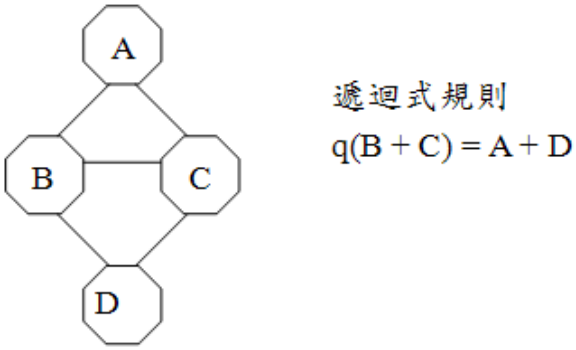

圖 1

4.由 $(0, 0, m)$ 出發($q=m^2$)，由遞迴式生成一連串的解，並觀察所形成的圖樣：

(1)$m=1$，則 $q=1$，有通解(k，$k+1$，$k+1$)或(k，k，$k+1$)，其中 $k \in Z$，

藉由(0， 0 , 1)生成的解可以『鋪滿』整個平面，且每個三角形皆為一組 解，如圖 2 所示：

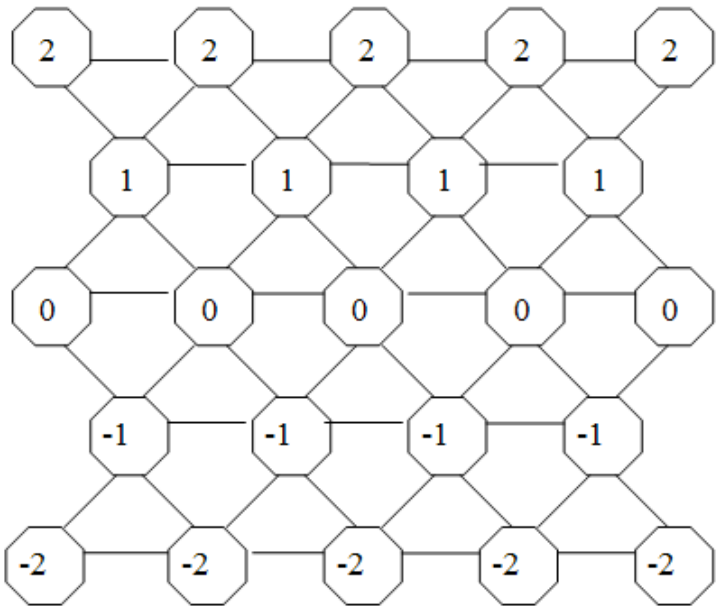

圖 2

(2)m=2，則 q=4，從(0 , 0 , 2)出發，先藉由遞迴式二產生一連串遞迴式一的『初始值』，這些初始值可藉由遞迴式一再向外產生一連串的解，如圖 3 所示：

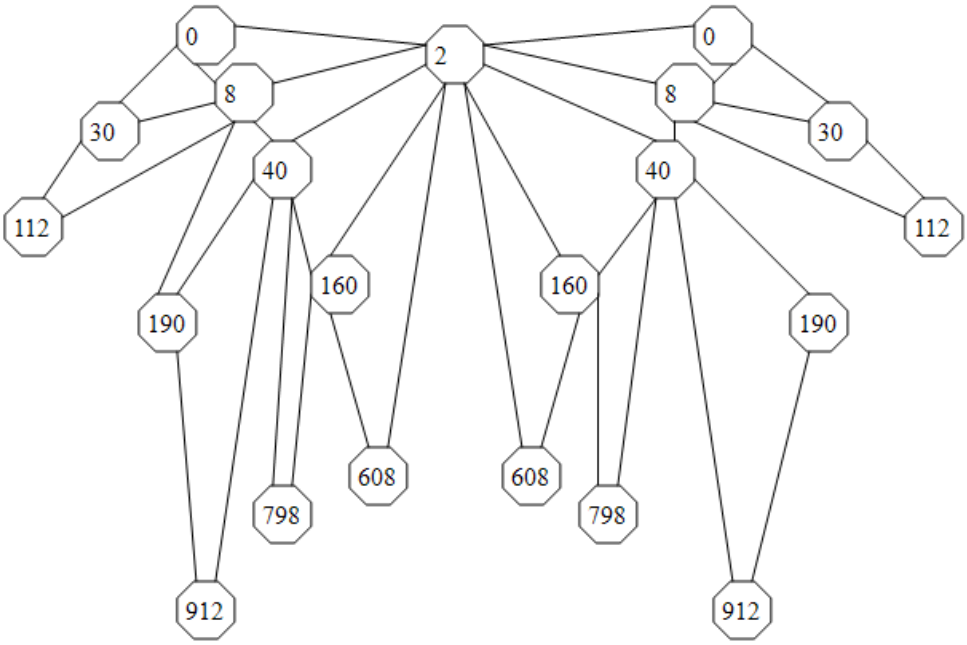

圖 3

五、結論

1. 當$|a|=|b|=|c|>0$ 時，可解得$(a,b,c)=(-2,2,2)$或$(-2,-2,2)$

2. $q=1$ 時，a ,b ,c 有通解(k，$k+1$，$k+1$)或(k，k，$k+1$)，其中 $k\in Z$

3. 若$(a_n\ ,a_{n+1}\ ,a_{n+2})$為 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q\ (q\in N)$的解，

   則$(a_{n+1}\ ,a_{n+2}\ ,a_{n+3})$亦為解，其中 $a_{n+3}=q\ (a_{n+1}+a_{n+2})-a_n$

4. 若$(\alpha\ ,b_n\ ,b_{n+1})$為 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{1+ab+bc+ac}=q\ (q\in N)$的解，

   則$(\alpha\ ,b_{n+1}\ ,b_{n+2})$亦為解，其中 $b_{n+2}=q\ (\alpha+b_{n+1})-b_n$

5. 給定任意正整數 k，可選定初始值(k, k^3, k^5+k^3)，藉由結論 3.、4.的兩個遞迴式產生一連串的整數解，其中 $q=k^2$。

6. 除了結論 5.的通解外，若選定一組解，也可利用結論 3.、4.的兩個遞迴式求出初始值［問題討論 1.］，而藉此產生一連串的整數解，且從初始值出發藉由遞迴式所產生的整數解中必包含當初所選定的解。

六、未來研究方向

1. 研究 $a,b,c \in N$ 的解，再延伸至 $a,b,c \in Z$ 的情形

2. 研究解的特性

3. 求出 q 的範圍限制

4. 研究『解平面』的性質

七、參考資料及其他

1.參考資料

ISTVAN G. LAUKO;GABRIELLA A , Another Step Further…On a Problem of the 1988 IMO, Mathematics Magazine *VOL*.79 , *NO*1 , *February* 2006.

2.附錄

(1) If a , b, and $q = \dfrac{a^2+b^2}{1+ab}$ are nonnegative integers , then q is a perfect square.

(2)We list a few of these solutions chains:

(0,0),(0,0),(0,0),…

(0,1),(1,1),(1,1),…

(0,2),(2,8),(8,30),(30,112),…

(0,3),(3,27),(27,240),(240,2133),…,and in general

$(0,k),(k,k^3),(k^3,k^5-k)$,…(p.48)

The known solutions are contained in chains (a_0, a_1),(a_1, a_2).....
(a_{n-1}, a_n),…,given by the recursive formals $a_0=0$, $a_1=k$, and $a_{n+1}=k^2 a_n - a_{n-1}$ for $k=0,1,2...$；in each such chain the corresponding q *is* $q=k^2$.

(3)程式碼：

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
int main( int argc, char *argv[])
{   int a,b,c,q,start,num;
    long long int d,e;
    printf("起始點：\n");
    scanf("%d",&start);
    printf("終點：\n");
    scanf("%d",&num);
    printf("(a,b,c,q)=\n");
    for (a=start;a<=num;a++)
    {
        for (b=start;b<=num;b++)
        {
            for (c=start;c<=num;c++)
            {
                d=a*a+b*b+c*c;
                e=1+a*b+a*c+b*c;
                q=d/e;
                if(e*q==d&&a<=b&&b<=c&&q!=1)
                printf("(%d,%d,%d,%d)\n",a,b,c,q);
            }
        }
    }
    system("PAUSE");
    return 0;
}
```

(4)利用程式跑出的整數解(a, b, c, q) : ($0<a,b,c \leqq 1000$，$q=m^2$, $q\neq 1$)

如表 2 所示。

表 2

(2,2,37,9)	(5,5,92,9)	(8,30,152,4)	(17,49,602,9)	(34,72,432,4)
(2,7,82,9)	(5,8,640,49)	(8,40,190,4)	(17,70,790,9)	(40,98,560,4)
(2,8,40,4)	(5,22,245,9)	(8,66,288,4)	(22,35,523,9)	(40,160,798,4)
(2,37,349,9)	(5,92,868,9)	(8,98,408,4)	(22,73,865,9)	(40,190,912,4)
(2,40,160,4)	(6,6,975,81)	(8,152,610,4)	(30,40,288,4)	(48,130,720,4)
(2,82,749,9)	(7,52,532,9)	(8,190,752,4)	(30,48,320,4)	(48,168,866,4)
(2,160,608,4)	(7,82,799,9)	(16,48,258,4)	(30,112,568,4)	(52,53,965,9)
(3,6,443,49)	(8,8,66,4)	(16,98,448,4)	(30,152,720,4)	(62,72,552,4)
(3,27,270,9)	(8,16,98,4)	(17,20,340,9)	(32,34,272,4)	(62,112,712,4)
(4,4,290,36)	(8,19,680,25)	(17,32,449,9)	(32,62,384,4)	(62,184,992,4)

(5)用程式跑出的數列：(a,b,c,q)：($0<a,b,c\leqq 10000$，$q\neq 1$))，如表 3 所示。

表 3

(2,2,37,9)	(4,68,2594,36)	(7,82,2763,31)	(10,10,4505,225)
(2,3,36,7)	(4,84,8539,97)	(7,152,4931,31)	(10,11,866,41)
(2,4,43,7)	(4,137,2110,15)	(7,155,8914,55)	(10,15,9031,361)
(2,7,82,9)	(4,162,1143,7)	(7,312,9886,31)	(10,25,4522,129)
(2,8,40,4)	(4,327,2274,7)	(7,532,4799,9)	(10,29,2152,55)
(2,36,263,7)	(4,437,6590,15)	(7,799,7172,9)	(10,49,7973,135)
(2,37,349,9)	(4,1143,7867,7)	(8,8,66,4)	(10,56,6608,100)
(2,40,160,4)	(5,5,92,9)	(8,8,2308,144)	(10,68,6560,84)
(2,43,311,7)	(5,8,640,49)	(8,9,122,7)	(10,100,9248,84)
(2,82,749,9)	(5,21,6270,241)	(8,10,364,20)	(10,112,2444,20)
(2,160,608,4)	(5,22,245,9)	(8,14,2095,95)	(10,136,8037,55)
(2,263,1819,7)	(5,22,4729,175)	(8,16,98,4)	(10,194,8369,41)
(2,311,2148,7)	(5,25,3334,111)	(8,19,680,25)	(10,364,7472,20)
(2,349,3122,9)	(5,41,692,15)	(8,26,241,7)	(11,31,8030,191)
(2,608,2280,4)	(5,90,4658,49)	(8,30,152,4)	(11,56,2755,41)

續下頁

表 3 (接前頁)

(2,749,6677,9)	(5,92,868,9)	(8,40,190,4)	(11,67,3206,41)
(2,2280,8520,4)	(5,125,3250,25)	(8,56,1605,25)	(11,210,6855,31)
(3,6,443,49)	(5,137,2126,15)	(8,66,288,4)	(12,12,7782,324)
(3,7,312,31)	(5,245,2228,9)	(8,70,1564,20)	(12,17,6996,241)
(3,12,106,7)	(5,868,7765,9)	(8,98,408,4)	(12,74,603,7)
(3,24,839,31)	(6,6,975,81)	(8,122,901,7)	(12,106,823,7)
(3,27,270,9)	(6,12,3532,196)	(8,152,610,4)	(12,603,4231,7)
(3,36,271,7)	(6,17,717,31)	(8,190,752,4)	(12,823,5739,7)
(3,43,2256,49)	(6,40,6951,151)	(8,241,1717,7)	(13,16,2298,79)
(3,106,751,7)	(6,45,1585,31)	(8,288,1118,4)	(13,25,1490,39)
(3,270,2430,9)	(6,51,6902,121)	(8,364,7430,20)	(13,170,7145,39)
(3,271,1882,7)	(6,70,9201,121)	(8,408,1566,4)	(14,19,6839,207)
(3,312,9758,31)	(6,193,9753,49)	(8,610,2320,4)	(14,20,517,15)
(3,751,5172,7)	(6,216,7992,36)	(8,752,2850,4)	(14,35,743,15)
(4,4,290,36)	(7,10,939,55)	(8,901,6241,7)	(14,37,9445,185)
(4,5,137,15)	(7,11,562,31)	(8,1118,4216,4)	(14,43,3715,65)
(4,12,2707,169)	(7,18,4980,199)	(8,1566,5888,4)	(14,55,1043,15)
(4,13,1652,97)	(7,20,2138,79)	(8,2320,8702,4)	(14,55,2839,41)
(4,19,162,7)	(7,28,1370,39)	(9,34,304,7)	(14,85,1492,15)
(4,25,437,15)	(7,50,2228,39)	(9,122,909,7)	(14,109,5053,41)
(4,43,327,7)	(7,52,532,9)	(9,304,2157,7)	(14,517,7945,15)
(4,64,1088,16)	(7,82,799,9)	(9,909,6304,7)	(16,16,551,17)
(16,35,1591,31)	(19,414,2992,7)	(28,40,5456,80)	(32,1182,4584,4)
(16,48,258,4)	(19,988,6927,7)	(28,64,1488,16)	(32,1602,6152,4)
(16,52,1370,20)	(19,1263,8812,7)	(28,128,2512,16)	(33,81,5608,49)
(16,68,1690,20)	(20,25,8606,191)	(29,37,9058,137)	(34,72,432,4)
(16,82,5108,52)	(20,41,1537,25)	(30,40,288,4)	(34,208,1697,7)
(16,98,448,4)	(20,52,7214,100)	(30,48,320,4)	(34,272,1192,4)
(16,126,7396,52)	(20,55,5339,71)	(30,112,568,4)	(34,304,2357,7)
(16,137,2608,17)	(20,76,3470,36)	(30,152,720,4)	(34,432,1792,4)
(16,151,5187,31)	(20,100,1087,9)	(30,288,1232,4)	(34,1192,4632,4)
(16,258,1048,4)	(20,140,5774,36)	(30,320,1352,4)	(34,1792,6872,4)
(16,448,1758,4)	(20,159,4487,25)	(30,568,2280,4)	(35,72,2696,25)

續下頁

表 3 (接前頁)

(16,551,9623,17)	(20,181,3022,15)	(30,720,2848,4)	(35,135,5294,31)
(16,1048,3998,4)	(20,340,3223,9)	(30,1232,4760,4)	(35,203,2152,9)
(16,1758,6648,4)	(20,517,8041,15)	(30,1352,5208,4)	(35,206,7495,31)
(17,20,340,9)	(20,1087,9863,9)	(30,2280,8672,4)	(35,278,7846,25)
(17,25,7108,169)	(21,45,8000,121)	(31,56,1496,17)	(35,391,6398,15)
(17,32,449,9)	(22,35,523,9)	(31,58,636,7)	(35,523,5000,9)
(17,34,4448,87)	(22,73,865,9)	(31,68,706,7)	(36,100,3423,25)
(17,49,602,9)	(22,175,1775,9)	(31,92,3095,25)	(36,225,6548,25)
(17,70,790,9)	(22,245,2398,9)	(31,103,6588,49)	(36,263,2091,7)
(17,340,3193,9)	(22,523,4870,9)	(31,182,3638,17)	(36,271,2146,7)
(17,449,4162,9)	(22,865,7910,9)	(31,183,5370,25)	(37,150,9190,49)
(17,602,5522,9)	(23,43,2588,39)	(31,636,4611,7)	(37,349,3472,9)
(17,790,7193,9)	(23,50,1839,25)	(31,706,5091,7)	(38,56,1900,20)
(18,81,9617,97)	(23,106,6338,49)	(32,34,272,4)	(38,75,6239,55)
(19,22,4315,105)	(23,175,4964,25)	(32,43,2342,31)	(38,191,1611,7)
(19,23,2320,55)	(24,42,8925,135)	(32,58,7580,84)	(38,304,6860,20)
(19,32,775,15)	(24,75,5462,55)	(32,62,384,4)	(38,407,3096,7)
(19,34,8015,151)	(24,124,7714,52)	(32,88,2059,17)	(39,62,723,7)
(19,38,407,7)	(25,152,9754,55)	(32,106,2780,20)	(39,99,982,7)
(19,39,414,7)	(25,341,5492,15)	(32,133,2824,17)	(39,198,1667,7)
(19,44,8644,137)	(25,437,6926,15)	(32,134,3340,20)	(39,414,3152,7)
(19,52,3492,49)	(26,85,9010,81)	(32,136,6911,41)	(39,723,5272,7)
(19,103,1840,15)	(26,153,1256,7)	(32,199,2087,9)	(39,982,7048,7)
(19,122,988,7)	(26,241,1861,7)	(32,272,1182,4)	(40,52,7750,84)
(19,162,1263,7)	(26,1256,8821,7)	(32,311,5155,15)	(40,56,1556,16)
(19,342,9030,25)	(27,240,2403,9)	(32,384,1602,4)	(40,87,7011,55)
(19,407,2944,7)	(27,270,2670,9)	(32,449,4312,9)	(40,98,560,4)
(40,109,2258,15)	(48,66,817,7)	(58,436,7435,15)	(70,343,3742,9)
(40,146,2813,15)	(48,128,2844,16)	(58,636,4827,7)	(70,550,5587,9)
(40,160,798,4)	(48,130,720,4)	(58,1109,8072,7)	(70,790,7723,9)
(40,190,912,4)	(48,137,1314,7)	(59,452,7690,15)	(71,163,3550,15)
(40,264,4884,16)	(48,168,866,4)	(61,68,2221,17)	(71,302,5635,15)
(40,288,1282,4)	(48,192,3868,16)	(61,122,7541,41)	(72,162,952,4)

續下頁

表 3(接前頁)

(40,560,2302,4)	(48,258,1208,4)	(61,493,9446,17)	(72,198,9768,36)
(40,798,3192,4)	(48,320,1442,4)	(62,70,1213,9)	(72,222,1184,4)
(40,912,3618,4)	(48,720,2942,4)	(62,72,552,4)	(72,432,1982,4)
(40,1282,5000,4)	(48,817,5989,7)	(62,77,1277,9)	(72,552,2434,4)
(40,2302,8808,4)	(48,866,3488,4)	(62,112,712,4)	(72,952,3934,4)
(41,56,7880,81)	(48,1208,4766,4)	(62,184,992,4)	(72,1184,4802,4)
(41,580,9317,15)	(48,1314,9397,7)	(62,247,2807,9)	(72,1982,7784,4)
(42,61,3216,31)	(48,1442,5640,4)	(62,263,2950,9)	(72,2434,9472,4)
(43,79,872,7)	(49,92,1292,9)	(62,283,2431,7)	(73,545,5572,9)
(43,96,991,7)	(49,125,2638,15)	(62,384,1752,4)	(73,865,8420,9)
(43,130,8507,49)	(49,142,1742,9)	(62,552,2384,4)	(74,74,6103,41)
(43,311,2476,7)	(49,190,3613,15)	(62,712,2984,4)	(74,499,4012,7)
(43,327,2586,7)	(49,352,3617,9)	(62,723,5456,7)	(74,603,4727,7)
(43,872,6326,7)	(49,602,5842,9)	(62,992,4032,4)	(75,211,7198,25)
(43,991,7142,7)	(50,194,6133,25)	(62,1752,6872,4)	(76,128,6572,32)
(44,68,1927,17)	(50,231,7058,25)	(62,2384,9232,4)	(76,196,9842,36)
(44,69,809,7)	(52,53,965,9)	(63,63,1158,9)	(76,353,3022,7)
(44,107,2290,15)	(52,79,7235,55)	(63,135,1812,9)	(76,873,6597,7)
(44,113,1117,7)	(52,129,9990,55)	(63,162,2055,9)	(77,229,5248,17)
(44,159,6323,31)	(52,235,2603,9)	(63,288,3183,9)	(77,298,6421,17)
(44,178,3355,15)	(52,452,4537,9)	(64,134,7168,36)	(77,397,4292,9)
(44,275,9919,31)	(52,532,5249,9)	(66,281,2448,7)	(79,98,3047,17)
(44,289,5684,17)	(52,965,9100,9)	(66,288,1408,4)	(79,384,3259,7)
(44,809,5902,7)	(53,245,2702,9)	(66,817,6133,7)	(79,872,6614,7)
(44,1117,8014,7)	(53,965,9110,9)	(66,1408,5608,4)	(80,101,2753,15)
(45,136,5641,31)	(55,88,1312,9)	(67,155,2030,9)	(80,112,1763,9)
(46,76,873,7)	(55,182,2158,9)	(67,160,2075,9)	(80,293,3392,9)
(46,88,2035,15)	(56,536,9492,16)	(68,354,2967,7)	(80,529,9173,15)
(46,113,1132,7)	(58,59,1780,15)	(68,706,5387,7)	(81,156,1693,7)
(46,227,4120,15)	(58,97,1109,7)	(69,313,2692,7)	(81,173,1812,7)
(46,873,6357,7)	(58,141,1417,7)	(69,809,6102,7)	(82,749,7477,9)
(46,1132,8133,7)	(58,284,2407,7)	(70,77,7238,49)	(82,799,7922,9)

評語

本文推廣 IMO 的一個含 2 變數的題目為 3 變數之情形，作者模仿參考文獻之解答，並利用電腦程式協助找出一部分解，藉由觀察其規律，作者證明 2 變數之解的”遞迴關係”可推廣至 3 變數情形，並自行得出一個新的關係式，由此可知作者已充分掌握數學研究之方法，亦付出相當多心力在作品研究，唯本文之原創性略嫌不足，鼓勵作者再接再厲，繼續研究。