2009 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

編號：010007

作品名稱

看見格子點　**Visibility of Lattice Points**

得獎獎項

數學科大會獎第三名

美國正選代表: 美國第 60 屆國際科技展覽會

學校名稱：　國立屏東高級中學

作者姓名：　盧崇文

指導老師：　張宮明

關 鍵 字：　π 函數　、格子點、質數

作者簡介

盧崇文，國小就讀屏東信義國小，國中則是畢業於明正國中，高中則是進入屏東中學。

從小，自己就對數學、科學方面萌發了興趣，藉由閱讀百科全書以及益智邏輯數學作為另一種娛樂。而到了國中，隨著年齡的增長，越來越清楚自己較感興趣的方面為何，而也在這個方面有較多的接觸。直到高中，確立的努力的方向以及目標可以給自己投入、鑽研。

其實國中時期，就曾經和幾位同學參與過科展，在黑暗中摸索的過程相當的無力，但是卻感到樂此不疲，能在自己喜歡的方面努力，也是另一種幸福。雖然國中的科展最後並沒有很好的結果，但是我到了高中之後可以繼續努力。進入屏東高中之後，學校也比較支持科展的研究，加上指導老師的幫助，這次終於能表現成果。

有參賽，就是一種肯定!我會努力做到最好。

中文摘要

探討在平面上，拍攝點拍攝陣列 $m \times n$ 的情形。由某個位在陣列周圍一圈的定點拍攝位於平面上的陣列，有些點會被其他的點所遮擋住，而無法拍攝到，討論沒有辦法拍攝的點的型態。

想處理被擋到的點，需要其他的點去輔助觀察。而隨著這個 $m \times n$ 陣列的擴大，所需要的輔助點也逐漸增多。想要增加最少的拍攝點，又可以拍攝到這一整個陣列，則需要固定且有理論的方法。

經過研究，我找到了 $25 \times n$ 以內的拍攝情形，且根據這些原則，可以再繼續研究比 $25 \times n$ 更大的陣列，這部份尚待繼續探討。

而在空間中，討論了幾種座標型態經由原點、(1,0,0) (0,1,0) 拍攝，卻仍然被其他點擋住的點，目前討論到坐標 x、y、z 最多各含 3 個質因數的狀況，至於更複雜的型態，仍待探討。

更進一步想在 xy 平面上找拍攝點，拍攝任意在空間中的陣列，也是在未來討論的方向之一。

Summary

This paper discusses the possibilities of taking the whole picture of an $m \times n$ plane array. If photographing spot is limit to the edge of an array, some points are blocked. The form of these blocked points is discussed here.

To observe these blocked points, we need more photographing spots, and the bigger the array is, the more photographing spots are needed. A valid fixed method is demanded if we desire the least photographing spots.

After researching, I find some theorems of observing plane arrays within $25 \times n$. Based on these theorems, we continue to observe arrays bigger than $25 \times n$. This part needs to be further studied.

For spatial arrays, we study several coordinate states which can not be photographed at (0,0,0)(0,1,0)(1,0,0). We analyze the coordinate x,y,z that respectively contain 3 prime factors at most.

Finding the photographing spots on x,y plane to observe random spatial array is a topic for further study.

看見格子點

壹.前言

　　2008 年寒假，數學老師給了同學許多開放性問題供我們思考，而其中有個我特別有興趣的題目：

將一個樂隊放在第一象限，若要從周圍外一層攝影整個隊伍，則需要幾個攝影點才能將所有人拍攝到？

從此開始，我進入了有趣的數學世界。

　　雖然作者已經有一些初步的成果：(1)如果不限制拍攝點的位置，則只需一個拍攝點。但這點離隊伍很遠。(2)將拍攝點放在離隊伍較近的位置，而去尋找最少的拍攝點。可是作者卻沒將「離隊伍較近的位置」給一個明確的定義。

因此，我們想要更深入探討下列三件事：

(1)將拍攝點的位置限制在原點及 x、y 軸正向的格子點上，去尋找最少的拍攝點。如圖 1 所示即為陣列 2×2 及陣列 3×5 的解決方法之一。

(2)將拍攝點的位置限制在 x 軸的格子點上，其 x 坐標為 0 到 m+1 的整數，去尋找最少的拍攝點。

(3)將拍攝點的位置限制在 y 軸上，其 y 坐標為非負整數，去尋找最少的拍攝點。

(4)將陣列放在空間中，將拍攝點的位置限制在原點及 x、y、z 軸正向的格子點上，去尋找最少的拍攝點。

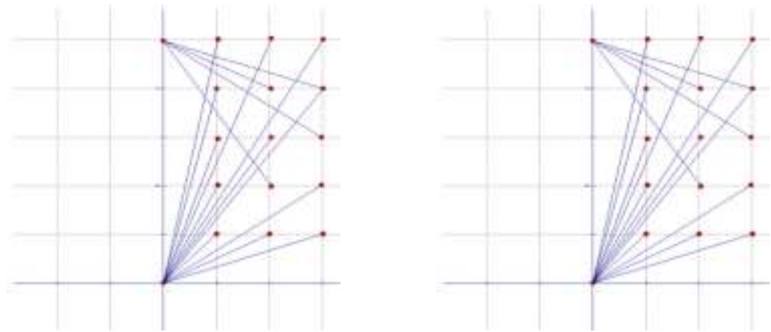

圖 1

貳.研究方法、過程及結果

一、平面上

我們將這個隊伍視為陣列，搬至坐標系上觀察。以第一象限的 (1,1) 為起點，隊伍依序在格子點上排列，拍攝的位置先限制在陣列的外一層，因為對稱關係，只需討論 x 軸和 y 軸上的拍攝者的位置即可。令第 1 個拍攝者的位置為 P_1，第 2 個拍攝者的位置為 P_2，…，第 n 個拍攝者的位置為 P_n。

現在，假設這是 1 個 $m\times n$ 的隊伍，m, n 為正整數，我們從原點去拍攝這個陣列， 則有些點會被其他點擋住，例如:(2,4) (3,6) 等等。觀察這些被擋到的點，都有共同的現象："不互質"。經過思考，得到一個結論。

定理 1　x, y 坐標不互質的點，從原點看，會被擋住。

證明：

設 $C(mx,my)$ (m 為自然數 且>1)為 x,y 坐標不互質的點

令 $A(0,0)$, $B(x,y)$

則　AB 直線的斜率為 $\dfrac{y-0}{x-0} = \dfrac{y}{x}$

BC 直線的斜率為 $\dfrac{my - y}{my - y} = \dfrac{y(m-1)}{x(m-1)} = \dfrac{y}{x}$

所以 AB 的斜率等於 BC 的斜率，故兩直線重疊或平行 。

點 B 在 AB 之上，也在 BC 之上，所以 ABC 3 點共線。

故 A 點就無法觀察到 C 點

觀察這些被擋住的點，經由因數與倍數的關係，不難發現：在 $x = 2$ 這條直線上，被擋住的點為 (2,2)，(2,4)，(2,6)，…，$(2,2n)$；在 $x = 3$ 這條直線上，被擋住的點則是 (3,3)，(3,6)，(3,9)，…，$(3,3n)$；而在 $x = 6$ 這條線上，則是 (6,2)，(6,4)，(6,6)，…，$(6,2n)$及(6,3)，(6,6)，(6,9)，…，$(6,3n)$。因此，引用定理 1 即可得證兩個結論如引理 1 與引理 2。

引理 1、在 $x = a$ 這條直線上，原點拍攝者拍不到的點，其 y 坐標會是 a 的質因數的倍數， 即 y 坐標與 a 不互質的點。

若從(1,0) 這個點去拍攝這個陣列 $m\times n$，利用坐標系的原點平移到(1,0) 可以得到在直線 x =3 上觀察不到的點為$(3,2n)$。又，在直線 $x = 3$ 上，從原點觀察不到的點為$(3,3n)$。 所以 (1,0)，(0,0) 這兩個拍攝者同時拍攝不到的點為$(3,6n)$。

引理 2 對拍攝點$(k,0)$而言，直線 $x = m$ 上看不到的點，其 y 坐標是 $m-k$ 的因數的整數倍。

証明:

對於所有的點 (m,ad_1)、(m, ad_2)、…、(m, ad_i)其中 d_1、d_2、…、d_i 為 $m-k$ 的因數，a 為任意正整數。以$(k,0)$為新原點$(m,ad_i)\rightarrow(m-k,ad_i)$。$m-k$ 與 ad_i 兩數不互質，故由定理 1 得知拍攝點$(k,0)$拍不到點(m,ad_i)。

在討論過程中需要用到簡單的數論性質如定理 2。

定理 2 若 N 和 R 互質 則 N 與 $PN-R$ 互質。

證明：

因為 $PN-R=NP-R$ 由輾轉相除法原理得知 $PN-R$ 和 N 的最大公因數等於 N 和 $-R$ 的最大公因數，故得證。

(一)假設 m 為固定正整數，n 為任意正整數，若限制拍攝者的位置 P_1，P_2，P_3，…，P_n，為 x 軸正向與 y 軸正向上的點，且其 x 坐標不超過 $m+1$。將陣列 $m\times n$ 放置第一象限討論，可得到以下一系列的結論。証明中所使用的符號 m,n,r,s,t,u…等都是正整數。

推論 1 陣列 $1\times n$ 需 1 個拍攝點 P_1 (0,0)能全部入鏡。

證明：

1 與 n 互質，所有由 P_1 (0,0) 拍攝能全部入鏡。

推論 2 陣列 $2\times n$ 需 2 個拍攝點 P_1 (0,0)與 P_2 (3,0)能全部入鏡。

證明：

P_1 可將 $x=1$ 上的點全入鏡，P_2 則可以可將 $x=2$ 上的點全部入鏡，整個隊伍皆為所見。

推論 3 陣列 $3\times n$ 需 2 個拍攝點 P_1(0,0) 與 P_2(0,5) 能全部入鏡。

證明：

P_1 所不能視見的點為$(2,2r)$、$(3,3s)$，r ,s 為正整數，但對 P_2 視線而言，將原點移至 (0,5) 後，以(0,5)為新原點，原$(2,2r)$變成$(2,2r-5)$，因為 2 與 $2r-5$ 互質，故在 $x=2$ 線上的點可全入鏡，$x=3$ 線上的點，$(3,3s)\rightarrow(3,3s-5)$，由引理 2 得 3 和 $3s-5$

互質，點$(3,3s)$可由 P_2 拍攝到。

推論 4 陣列 $4\times n$ 需 2 個拍攝點 $P_1(0,0)$ 與 $P_2(0,5)$ 能全部入鏡。

證明：

P_1 所不能看見的點有$(2,2r)$ $(3,3s)$ $(4,2t)$，經 P_2 觀察將原點平移至 P_2 後 $(2,2r) \rightarrow (2,2r-5)$，$(3,3s) \rightarrow (3,3s-5)$，$(4,2t) \rightarrow (4,2t-5)$，這 3 組數都互質，故皆可以入鏡。

推論 5 陣列 $5\times n$ 需 2 個拍攝點 $P_1(0,0)$ 與 $P_2(0,7)$ 能全部入鏡。

證明：

P_1 所不能看見的點有$(2,2r)$、$(3\ 3s)$、$(4,2t)$、$(5,5u)$。 經 P_2 觀察，將原點平移至 P_2 後 $(2,2r) \rightarrow (2,2r-7)$，$(3,3s) \rightarrow (3,3s-7)$，$(4,2t) \rightarrow (4,2t-7)$，$(5,5u) \rightarrow (5,5u-7)$。

這 3 組數互質，故整列皆可以入鏡。

推論 6 陣列 $6\times n$ 需 3 個拍攝點 $P_1(0,0)$、$P_2(7,0)$與 $P_3(0,7)$ 能全部入鏡。

證明：

P_1 P_2 所不能看見的點有$(2,10r)$ $(3,6s)$ $(4,6t)$ $(5,10u)$ 。將原點平移至 P_3 後$(2,10r) \rightarrow (2,\ 10r-7)$，$(3,6s) \rightarrow (3,\ 6s-7)$，$(4,6t) \rightarrow (4,6t-7)$，$(5,10u) \rightarrow (5,10u-7)$ 故可以全入鏡。

推論 7 陣列 $7\times n$ 需 3 個拍攝點 $P_1(0,0)$、$P_2(7,0)$與 $P_3(0,11)$ 能全部入鏡。

證明：

藉由 P_1，P_2，P_3 可以將陣列 $6\times n$ 的範圍看完，故只多出 $X=7$ 這排。 P_1 和 P_3 可將 $x=7$ 這排上的點看穿 故可全入鏡。

推論 8　陣列 $8\times n$ 需 3 個拍攝點 $P_1(0,0)$、$P_2(7,0)$、$P_3(0,11)$ 能全部入鏡。

證明：

跟 $7\times n$ 類似， P_1、P_2 、P_3 可以將陣列 $7\times n$ 的範圍看盡，其餘在直線 $x=8$ 上的點，又可以由 P_1、P_3 看穿，故可以全入鏡。

推論 9　陣列 $9\times n$ 需 3 個拍攝點 $P_1(0,0)$、$P_2(7,0)$、$P_3(0,11)$ 能全部入鏡。

證明：

跟 $8\times n$ 類似 P_1、P_2 、P_3 可以將陣列 $8\times n$ 的範圍看盡，其餘在直線 $x=9$ 上的點又可以由 P_1、P_3 看穿，故可以全入鏡。

當 $m\geqq 10$ 以後，找拍攝點需要較複雜的方法。

推論 10　陣列 $10\times n$ 需 4 個拍攝點 $P_1(0,0)$、$P_2(5,0)$、$P_3(0,11)$與 $P_4(8,0)$ 能全部入鏡。

證明：

在直線 $x=10$ 上， P_1 拍攝不到的點 為$(10,2r)$、$(10,5s)$，P_2 的死角拍攝不到的點$(10,5t)$，P_4 拍攝不到的點為$(10,2u)$。P_1、P_2 、P_4 共同拍攝不到的點為$(10,10v)$，再以 P_3 為新原點觀察後 $(10,10v)\rightarrow(10,10v-11)$ 這兩個數互質，故可以全入鏡。

所以若要使 $x=10$ 這線上的點皆被看盡，可以利用這個原則。$P_1(0,0)$ 是固定的，所以要調整 P_2 以及 P_4 讓最後被擋到的點為$(10,10v)$，再使用 $P_3(0, r)$其中 r 為某一個質數，去觀察$(10,10v)$，以 $P_3(0, r)$為新原點，則點$(10,10v)\rightarrow(10,10v-r)$由定理 2 得知 10 和 $10v-r$ 互質，故 $P_3(0, r)$ 可以拍到點$(10,10v)$

因此由 $P_1P_2P_3P_4$ 四點就可以將 $x=10$ 這排看盡。

所以 $P_2(5,0)$與 $P_4(8,0)$ 可達成目的,再將此 4 點從新審視直線 $x=1$ 至 $x=9$ 恰好可以全部入鏡。

在 $m \geqq 11$ 以後，找拍攝點需要更複雜的方法。現在以陣列 $20\times n$ 為例，來說明我使用的方法。

先將小於或等於 20 的所有擁有 2 個以上質因數的數列出來:6.10.12.14.15.18.20 接著拍攝點最佳的位置如下所示，其中 k 為非負整數。

$A(6\pm 2^k,0)$

$B(6\pm 3^k,0)$

$C(10\pm 2^k,0)$

$D(10\pm 5^k,0)$

$E(12\pm 2^k,0)$

$F(12\pm 3^k,0)$

$G(14\pm 2^k,0)$

$H(14\pm 7^k,0)$

$I(15\pm 3^k,0)$

$J(15\pm 5^k,0)$

$K(18\pm 2^k,0)$

$L(18\pm 3^k,0)$

$M(20\pm 2^k,0)$

$N(20\pm 5^k,0)$

只要拍攝點符合上述的所有條件，再加上 y 軸上取一拍攝點 $(0,r)$，r 為適當的質數，這個陣列就能全部被拍攝到。

原因：

以直線 $x=6$ 上的點為例，若拍攝點為原點(0,0)與 A、B 兩點，一起拍攝直線 $x=6$ 上的點，由引理 1 得知原點(0,0)拍攝不到的點為(a,b)，其中 a 與 b 不互質,由引理 2 得知 $A(6\pm2^k,0)$拍攝不到的點為$(6,2n)$，$B(6\pm3^k,0)$拍攝不到的點為$(6,3n)$，因此這三個拍攝點會讓 $x=6$ 直線上拍不到的點剩下點$(6,6t)$，再把這個點交給拍攝點$(0,r)$，以 $(0,r)$ 為新原點使得$(6,6t)\rightarrow(6,6t-r)$，若 r 為大於 6 的質數，則 6 和 r 互質，再引用定理 2 可得 6 和 $6t-r$ 互質，所以點$(6,6t)$可以由點$(0,r)$拍攝到。

同理，在直線 $x=10$ 上的點可由原點(0,0), $C(10\pm2^k,0)$,$D(10\pm5^k,0)$與 y 軸上的點$(0,r)$,等四個點，即可全部拍攝到。其中 r 為大於 10 的質數，例如取 $r=11$ 即可。

在直線 $x=12$ 上的點可由原點(0,0), $E(12\pm2^k,0)$, $F(12\pm3^k,0)$與 y 軸上的點$(0,r)$,等四個點，即可全部拍攝到。其中 r 為大於 12 的質數，例如取 $r=13$ 即可。

在直線 $x=14$ 上的點可由原點(0,0), $G(14\pm2^k,0)$, $H(14\pm7^k,0)$與 y 軸上的點$(0,r)$,等四個點，即可全部拍攝到。其中 r 為大於 14 的質數，例如取 $r=17$ 即可。

在直線 $x=15$ 上的點可由原點(0,0), $I(15\pm3^k,0)$,$J(15\pm5^k,0)$與 y 軸上的點$(0,r)$,等四個點，即可全部拍攝到。其中 r 為大於 15 的質數，例如取 $r=17$ 即可。

在直線 $x=18$ 上的點可由原點(0,0), $K(18\pm2^k,0)$,$L(18\pm3^k,0)$與 y 軸上的點$(0,r)$,等四個點，即可全部拍攝到。其中 r 為大於 18 的質數，例如取 $r=19$ 即可。

在直線 $x=20$ 上的點可由原點(0,0), $M(20\pm2^k,0)$, $N(20\pm5^k,0)$與 y 軸上的點$(0,r)$,等四個點，即可全部拍攝到。其中 r 為大於 20 的質數，例如取 $r=23$ 即可。

所以若要滿足上述各種情況，y 軸上的拍攝點取點(0,23)即可。

而 x 軸上的拍攝點取能涵蓋 *ABCDEFGHIJKLMN* 的點即可，且要找出拍攝點數目的最小值，其方法如下步驟。

1. 先以其 x 坐標變化量最大者(即其 $a \pm d^k$ 中 d 值最大者)為基準做為拍攝點 P_2，上列中 以 $H(14 \pm 7^k,0)$ 變化量最大。可能的拍攝點有(15,0)(13,0)(21,0)(7,0)。先考慮(15,0)，*BDFGHLN* 取適當的 k 值也都可成為(15,0)。

2. 剩餘的變化量最大的為 $J(15 \pm 5^k,0)$，可能的拍攝點有(16,0)(14,0)(20,0)(10,0)先以(16,0)測試，成功的有 *EIJKM*。剩下的 *AC* 則用(8,0)就可符合。

3. 再回到步驟 2 使用(14,0) 測試，直到(16,0)(14,0)(20,0)(10,0) 這 4 個點都測試完後，再回到步驟 1 測試(13,0)(21,0)(7,0)。

4. 最後再找出最少點的路線。

上述方法可由圖 2 樹狀圖所示。

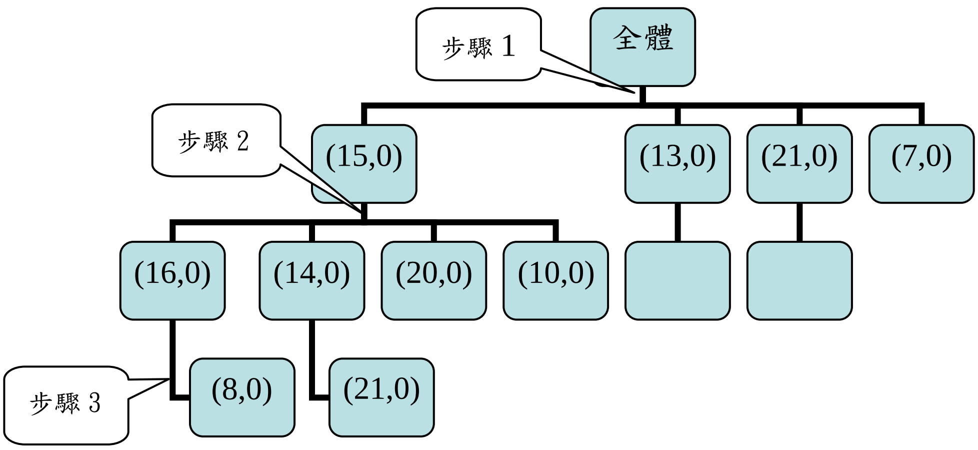

圖 2 樹狀圖

推論 11 陣列 $11\times n$ 需 4 個拍攝點 $P_1(0,0)$、$P_2(5,0)$、$P_3(8,0)$與 $P_4(0,7)$。

證明：

利用推論 10 可知，利用 P_1~P_4 可以把陣列 $10\times n$ 的點看完，多出的點$(11, 11s)$,s 為正整數。由 P_1 所視為$(11,11s)$的點，由 P_3 拍攝時，經由座標轉移，成為$(11,11s-13)$ 這兩個數互質。所以 $(11,11s)$的點可以由 P_1、P_3 視線看盡，故由 P_1~P_4 可將陣列 $11\times n$ 全部拍攝到。

推論 12 陣列 $12\times n$ 需 4 個拍攝點 $P_1(0,0)$、$P_2(9,0)$、$P_3(8,0)$、$P_4(0,13)$。

證明：

根據引理 2，想讓直線 x=6、10、12 上的點都可被拍攝到，所以拍攝點 P_2P_3 的 x 座標必須涵蓋 (6 ± 2^k) (6 ± 3^k) (10 ± 2^k) (10 ± 5^k) (12 ± 2^k) (12 ± 3^k) 等型態。實際去探討 P_2 涵蓋(6 ± 3^k) (10 ± 2^k) (10 ± 5^k) (12 ± 3^k)，P_3 則涵蓋(6 ± 2^k) (12 ± 2^k)。所以使用 $P_2(9,0)$、$P_3(8,0)$可以讓直線 x=6 上拍攝不到的點剩下$(6,6r)$，直線 x=10 上拍攝不到的點剩下$(10,10s)$，直線 x=12 上拍攝不到的點剩下$(12,6t)$，再由拍攝點 $P_4(0,13)$拍攝，以 $P_4(0,13)$為新原點，$(6, 6r)\rightarrow(6, 6r-13)$，$(10, 10s)\rightarrow(10, 10s-13)$，$(12, 6t)\rightarrow(12, 6t-13)$，這三組數都互質。所以 $P_1(0,0)$、$P_2(9,0)$、$P_3(8,0)$、$P_4(0,13)$可以把 $12\times n$ 的陣列全部都拍攝到。

推論 13 陣列 $13\times n$ 需 4 個拍攝點 $P_1(0,0)$、$P_2(9,0)$、$P_3(8,0)$、P_4 $(0,17)$ 。

證明：

利用推論 12 可知，利用 P_1~P_4，可以把 $12\times n$ 的點看完，新增的一排 x=13，使用 P_1 P_4 兩個拍攝點，就可以處理。

所以，$P_1(0,0)$、$P_2(9,0)$、$P_3(8,0)$、P_4 $(0,17)$四個拍設點可以把 $13\times n$ 的陣列都拍攝到。

推論 14 陣列 $14\times n$ 需 4 個拍攝點 $P_1(0,0)$、$P_2(15,0)$、$P_3(8,0)$、$P_4(0,17)$ 。

證明：

根據引理 2，想讓 x=6、10、12、14 這 4 排的點都被拍攝到，所以必須涵蓋 (6 ± 2^k) (6 ± 3^k) (10 ± 2^k) (10 ± 5^k) (12 ± 2^k) (12 ± 3^k) (14 ± 2^k) (14 ± 7^k)等型態。實際去探索後 $P_2(15,0)$涵蓋(6 ± 3^k) (10 ± 5^k) (12 ± 3^k) (14 ± 2^k) (14 ± 7^k)，$P_3(8,0)$則涵蓋(6 ± 2^k) (10 ± 2^k) (12 ± 2^k)。所以，使用 $P_1(0,0)$、$P_2(15,0)$、$P_3(8,0)$、$P_4(0,17)$可以將陣列 $14\times n$ 都拍攝到。

推論 15 陣列 $15\times n$ 需 4 個拍攝點 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(14,0)$ $P_4(0,17)$。

證明：

根據引理 2，想讓 x=6、10、12、14 這 4 排都符合要求，所以必須涵蓋 (6 ± 2^k) (6 ± 3^k) (10 ± 2^k) (10 ± 5^k) (12 ± 2^k) (12 ± 3^k) (14 ± 2^k) (14 ± 7^k) (15 ± 3^k) (15 ± 5^k)等型態。實際去探討，$P_2(15,0)$涵蓋(6 ± 3^k) (10 ± 5^k) (12 ± 3^k) (14 ± 2^k) (14 ± 7^k)，$P_3(14,0)$則涵蓋(15 ± 5^k) (15 ± 3^k) (12 ± 2^k) (10 ± 2^k) (6 ± 2^k)，所以 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(14,0)$ $P_4(0,17)$可以將陣列 $15\times n$ 全部拍攝到。

推論 16 陣列 $16\times n$ 需 4 個拍攝點 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(14,0)$ $P_4(0,17)$

證明：

利用推論 15 可知，利用 P_1~P_4 可以把 $15\times n$ 的點看完。多出的 x=16，可以由 P_1 P_4 視線看盡，所以可以全部入鏡。

所以，使用 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(14,0)$ $P_4(0,17)$可以把陣列 $16\times n$ 全部拍攝到。

推論 17 陣列 $17\times n$ 需 4 個拍攝點 $P_1(0,0)$　$P_2(15,0)$　P_3 (14,0)　$P_4(0,19)$

證明：

利用推論 16 可知，利用 P_1~P_4 可以把 16 $\times n$ 的點看完，多出的 x=17，可以由 P_1 P_4 視線看盡，所以可以全部入鏡。

所以，使用 $P_1(0,0)$　$P_2(15,0)$　$P_3(14,0)$　P_4 (0,17)可以把陣列 $17\times n$ 全部拍攝到。

推論 18 陣列 $18\times n$ 需 4 個拍攝點 $P_1(0,0)$　$P_2(15,0)$　$P_3(14,0)$　P_4 (0,19)

證明：

想讓 x=6、10 、12、14、18 這 5 排都符合要求所以必須涵蓋 (6 ± 2^x) (6 ± 3^x) (10 ± 2^k) (10 ± 5^k) (12 ± 2^k) (12 ± 3^k) (14 ± 2^k) (14 ± 7^k) (15 ± 3^k) (15 ± 5^k) (18 ± 2^k) (18 ± 3^k)等型態。找一找之後 ，發現(15,0) (14,0) 可以完成。

所以，使用 $P_1(0,0)$　$P_2(15,0)$　$P_3(14,0)$　P_4 (0,19)可以把陣列 $18\times n$ 全部拍攝到。

推論 19 陣列 $19\times n$ 需 4 個拍攝點　$P_1(0,0)$　$P_2(15,0)$　$P_3(14,0)$　P_4 (0,23)

證明：

根據推論 19 可知，使用 P_1~P_4 可以把 18 $\times n$ 的點看完，多出的 x=19，可以由 P_1 P_4 視線看盡，所以可以全部入鏡。

所以，使用 $P_1(0,0)$　$P_2(15,0)$　$P_3(14,0)$　P_4 (0,23)可以把陣列 $19\times n$ 全部拍攝到。

推論 20 陣列 $20\times n$ 需 5 個拍攝點 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(8,0)$ $P_4(16,0)$ $P_5(0,23)$

證明：

想讓 x=6、10 、12、14、18、20 這 6 排都符合要求所以必須滿足 (6 ± 2^k) (6 ± 3^k) (10 ± 2^k) (10 ± 5^k) (12 ± 2^k) (12 ± 3^k) (14 ± 2^k) (14 ± 7^k) (15 ± 3^k) (15 ± 5^k) (18 ± 2^k) (18 ± 3^k) (20 ± 2^k) (20 ± 5^k) ，找一找之後，發現(15,0) (16,0) (8,0) 可以完成。

所以，使用 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(8,0)$ $P_4(16,0)$ $P_5(0,23)$可以把陣列 $20\times n$ 全部拍攝到。

推論 21 陣列 $21\times n$ 需 5 個拍攝點 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(22,0)$ $P_4(14,0)$ $P_5(0,23)$

證明：

想讓 x=6、10、12、14、18、20、21 這 7 排都符合要求所以必須滿足 (6 ± 2^k) (6 ± 3^k) (10 ± 2^k) (10 ± 5^k) (12 ± 2^k) (12 ± 3^k) (14 ± 2^k) (14 ± 7^k) (15 ± 3^k) (15 ± 5^k) (18 ± 2^k) (18 ± 3^k) (20 ± 2^k) (20 ± 5^k) (21 ± 3^k) (21 ± 7^k)，找一找之後，發現(15,0) (22,0) (14,0) 可以完成。所以，使用 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(22,0)$ $P_4(14,0)$ $P_5(0,23)$可以把陣列 $20\times n$ 全部拍攝到。

推論 22 陣列 $22\times n$ 需 6 個拍攝點 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(21,0)$ $P_4(22,0)$ $P_5(14,0)$ $P_6(0,23)$

證明：

想讓 x=6、10 、12、14、18、20、21、22 這 8 排都符合要求所以必須滿足 (6 ± 2^k) (6 ± 3^k) (10 ± 2^k) (10 ± 5^k) (12 ± 2^k) (12 ± 3^k) (14 ± 2^k) (14 ± 7^k) (15 ± 3^k) (15 ± 5^k) (18 ± 2^k) (18 ± 3^k) (20 ± 2^k) (20 ± 5^k) (21 ± 3^k) (21 ± 7^k) (22 ± 2^k) (22 ± 11^k) ，找一找之後，發現(15,0) (22,0) (14,0) (21,0) 可以完成。

所以，使用 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(21,0)$ $P_4(22,0)$ $P_5(14,0)$ $P_6(0,23)$可以把陣列 $20\times n$ 全部拍攝到。

推論 23 陣列 23×n 需 6 個拍攝點 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(21,0)$ $P_4(22,0)$ $P_5(14,0)$ P_6 (0,23)

證明：

根據推論 22 可知，利用 P_1~P_6 可以把 22 ×n 的點看完，多出的 x=23，可以由 P_1 P_6 視線看盡，所以可以全部入鏡。

所以，使用 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(21,0)$ $P_4(22,0)$ $P_5(14,0)$ P_6 (0,23)可以把陣列 20×n 全部拍攝到。

推論 24 陣列 24×n 需 6 個拍攝點 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(21,0)$ $P_4(22,0)$ $P_5(14,0)$ P_6 (0,29)

證明：

想讓 x=6 .10 .12.14.18.20.21.22.24 這 9 排都符合要求所以必須涵蓋 (6 ± 2^k) (6 ± 3^k) (10 ± 2^k) (10 ± 5^k) (12 ± 2^k) (12 ± 3^k) (14 ± 2^k) (14 ± 7^k) (15 ± 3^k) (15 ± 5^k) (18 ± 2^k) (18 ± 3^k) (20 ± 2^k) (20 ± 5^k) (21 ± 3^k) (21 ± 7^k) (22 ± 2^k) (22 ± 11^k) (24 ± 2^k) (24 ± 3^k)等型態。找一找之後，發現(15,0) (22,0) (14,0) (21,0)，可以完成。

所以，使用 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(21,0)$ $P_4(22,0)$ $P_5(14,0)$ P_6 (0,29)可以把陣列 20×n 全部拍攝到。

推論 25 陣列 25×n 需 6 個拍攝點 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(21,0)$ $P_4(22,0)$ $P_5(14,0)$ P_6 (0,29)

證明：

根據推論 24 可知，使用 P_1~P_6 可以把 24 ×n 的點看完，多出的 x=25 ，可以由 P_1 P_6 視線看盡，所以可以全部入鏡。

所以，使用 $P_1(0,0)$ $P_2(15,0)$ $P_3(21,0)$ $P_4(22,0)$ $P_5(14,0)$ P_6 (0,29)可以把

陣列 20×n 全部拍攝到。

假設不大於 m 的正整數中含有二個以上質因數的合成數有 $c_1,c_2,\ldots,c_{\kappa(m)}$等，共 $\kappa(m)$個，c_i 為其中任一個，而其質因數有 $q_{i1},q_{i2},\ldots,q_{ij}$ 等，j 為某固定正整數。若一點集合 T_m，其元素涵蓋所有點($c_i\pm q^x{}_{ij}$)的型態, 其中 x 為非負整數，且元素個數為最少者，則我們定義$\chi(m)$= T_m 的元素個數。如此，由以上推論及演算法的經驗，我們獲得一個重要的結論，詳述如下。

定理 3 設 m 是大於 5 的固定正整數，在陣列 $m\times n$ 中，拍攝者的位置限制在原點及 x、y 軸正向的格子點上，且 x 坐標不超過 $m+1$，則需要$\chi(m)+2$ 個拍攝點就可以拍攝整個陣列。

證明：其證明方法如上述演算法。

(二)假設 m 為固定正整數，n 為任意正整數，若拍攝者的位置，限制在 x 軸上且其 x 坐標為 0 到 $m+1$ 的整數，則對於 $m\times n$ 陣列則有下列結果。証明中所使用的符號 $m,n,r,s,t,\ldots$等都是正整數。

定理 4 在陣列 $m\times n$ 中，拍攝者的位置限制在 x 軸上且其 x 坐標為 0 到 $m+1$ 的整數，若 $m=4k$ 則恰需要 $m/2$ 個拍攝點；若 $m\neq 4k$ 則恰需要$[m/2]+1$ 個拍攝點就可以拍攝整個陣列，其中$[x]$表高斯函數。

證明：

若要將 $x=t$ 直線上的格子點完全拍攝到，則必須在$(t-1,0)$或$(t+1,0)$設置一個拍攝點, 因為如果其他位置的拍攝點為$(r_1,0)$, $(r_2,0),\ldots,(r_j,0)$,$r_i\neq t-1$ 且 $r_i\neq t+1$，當 s 與所有 $t-r_i$ 皆不互質時，坐標為(t,s)的點將會看不到，而且一個拍攝點最多只能完全拍攝兩直線。因此將正整數 m 分成 $4k$,$4k+1$,$4k+2$,$4k+3$ 四類。每 4 行一組，把拍攝點放置在中間兩行的 x 軸上如圖 3 所示是最佳的方法，則 $m=4k$ 時，恰需要 $2k$ 個拍攝點。$m= 4k+1$ 時，恰需要 $2k+1$ 個拍攝點就可以拍攝到整個陣列，而 $m=4k+2$

與 $m=4k+3$, 則恰需要 $2k+2$ 個拍攝點就可以把整個陣列拍攝到。故得證。

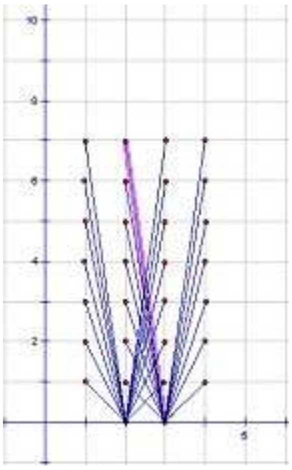

圖 3

(三)若拍攝者的位置限制在 y 軸上且其 y 坐標為非負整數，下列內容以 $10\times n$ 陣列為例說明。

先將小於或等於 10 的所有擁有 2 個以上質因數的數列出來：6、10。接著將這些數字因數分解找出他們的質因數，而拍攝點的 y 座標就是 6 與 10 的質因數，即為 2、3、5，接下來再增加原點以及 $(0,r)$ r 為大於 10 的質數，即可將這個陣列完全拍攝到。

原因：

以原點和 $(0,r)$ 就可以把 x 坐標只含 1 個質因數的直線上的格子點完全拍攝，也就是除了 $x=6$ 和 $x=10$ 這兩行之外的直線，都能由原點與 $(0,r)$ 完全拍攝。而藉由 $(0,2)$、$(0,3)$ 還有原點能使的 $x=6$ 這直線上拍攝不到的點剩下 $(6,6k)$，k 是正整數，$(0,2)$、$(0,5)$ 還有原點則能使 $x=10$ 這直線上拍攝不到的點剩下 $(10,10s)$，s 是正整數，這兩種型態的點最候都能由 $(0,r)$ 拍攝，所以 $10\times n$ 這個陣列，可以被 $(0,2)$、$(0,3)$、

(0,5)、(0,0)、(0,r)所拍攝。藉由這個例子，將其推廣為下列結論。

定理 5 設 m 是大於 5 的整數, n 是任意正整數，在陣列 $m\times n$ 中，若拍攝者的位置限制在 y 軸上且其 y 坐標為非負整數，則需 $\kappa(m)+2$ 個拍攝點，就可以拍攝整個陣列，其中函數 $\kappa(m)$代表不大於 m 的所有含 2 個質因數以上的合成數的質因數個數，重複的質因數只算一次。

證明：

將不大於 m 的所有擁有 2 個質因數以上的合成數列出來：$m_1,m_2,\ldots m_i$,再將其因數分解找出他們的質因數 $p_1,p_2,\ldots p_{\kappa(m))}$共 $\kappa(m)$個，而拍攝點的 y 坐標就是這些質因數，接下來再增加原點以及(0,r)，r 為大於 m 的質數，即可將這個陣列完全拍攝到。故共需 $\kappa(m)+2$ 個拍攝點。

令我感覺到特別興奮的是，我們發現函數 $\kappa(m)$與計算質數個數的π函數竟有如此巧妙的關係，如定理 6 所示。

定理 6 函數 $\kappa(m)=\pi(m/2)$，其中函數$\pi(m/2)$中代表不大於 $m/2$ 的所有質數個數。

證明：

對任意質數 p 而言，其所形成的合成數中，最小者為 $2p$，若 $2p\leqq m$，則 $p\leqq m/2$，故得證 $\kappa(m)=\pi(m/2)$。

二、空間中

現在我們來定義陣列 $r\times s\times t$：

以第一卦限的(1,1,1)為起點，恆星依序在第一卦限的格子點上排列，形成陣列 $r\times s\times t$。

若假設宇宙中的恆星為位於第一卦限的陣列 $r\times s\times t$ 的格子點上，而我們從原點去觀察這些星星，會發現有些恆星看不到。去探索這些恆星的位置，可以使用平

面上類似的方法，對於恆星(x,y,z)，若 x,y,z 不互質，這個點就會被擋住。

定理 7 設 P 點坐標為(x,y,z)，若 x,y,z 不互質，則由原點拍攝不到 P 點。

證明：

某恆星 A 所在的座標為(ma,mb,mc)，$(a,b,c)=1$ 那麼從原點去觀測某恆星 $\overrightarrow{OA}=(ma,mb,mc)$其方向向量可以表示為$(a,b,c)$若又存在某恆星 $B(a,b,c)$ $\overrightarrow{OB}=(a,b,c)$ 其方向向量也為(a,b,c)所以 A 和 B 以及原點在同 1 條直線上，故若從原點觀察 A 會被 B 點擋住。

接下來，我們在 x 軸與 y 軸新增一些觀測點，以便於觀測由原點觀測不到的點。

推論 26.設 m, a, b, c 為質數且$(a,b,c)=1$, 坐標為(ma,mb,mc)的點使用原點、$P_1(1,0,0)$ 與 $P_2(0,1,0)$可以觀測到。

證明：

若有顆恆星的座標在(ma,mb,mc)，$m,.a,.b,.c$ 為質數，但$(a,b,c)=1$。現在想在 x 軸或 y 軸上找拍攝點去觀察。用了 $P_1(1,0,0)$　$P_2(0,1,0)$這兩個點。現在要探討原點和 P_1　P_2 都觀察不到的情形。

用 P_1 點去觀測則(ma,mb,mc)在 P_1 的視線看過去會成為$(ma-1,mb,mc)$。如果 P_1 看不到這個點 則$(ma-1,mb,mc)=d \neq 1$　所以 $d \mid ma-1$; $d \mid mb$; $d \mid mc$

$d \mid a(mb)-b(ma-1)=b$　所以 $d=1$(不合) or b 又 $d \mid mc$　$\therefore b=d=c$

用 P_2 點去觀測則(ma,mb,mc)在 P_2 的視角看過去 會成為$(ma,mb-1,mc)$ 。如果 P_2 看不到這個點 則$(ma,mb-1,mc)=k \neq 1$　所以 $k \mid ma$; $k \mid mb-1$; $k \mid mc$

$k \mid b(ma)-a(mb-1)=a$　所以 $k=1$(不合) or a 又 $k \mid mc$　$\therefore a=k=c$

$\therefore a=b=k=c$ 與原本的命題矛盾 故 (ma,mb,mc) 使用 P_1、P_2 還有原點一定可以觀測到。

推論 27 設 m, a, b, c, p 為質數且$(a,b,cp)=1$, 坐標為(ma,mb,mcp)的點，使用原點、$P_1(1,0,0)$與 $P_2(0,1,0)$觀測不到的點型態為(ma,mb,mab)。

證明:

如果座標的型態為(ma,mb,mcp)，$(a,b,cp)=1$，一樣探討使用$P_1(1,0,0)$ 和$P_2(0,1,0)$所觀察不到的情形。

用 P_1 點去觀測點(ma,mb,mcp)，以 P_1 為新原點看過去，會成為$(ma-1,mb,mcp)$。設最大公因數$(ma-1,mb,mcp)=d$，所以 $d \mid ma-1$; $d \mid mb$; $d \mid mcp$，因此 $d \mid a(mb)-b(ma-1)=b$ ，如果 P_1 看不到這個點，則 $d\neq 1$，又 b 為質數，所以 $d=b$，又因為 $d \mid mcp$ 且 $m,.c,p$ 為質數 $\therefore$ $d=b=c$ 或 p 不失一般性，不妨令 $d=c$

用 P_2 點去觀測點(ma,mb,mcp)，則以 P_2 為新原點看過去，會成為$(ma,mb-1,mcp)$。設最大公因數$(ma-1,mb,mcp)=k$，則 $k \mid ma$; $k \mid mb-1$; $k \mid mcp$, 所以 $k \mid b(ma)-a(mb-1)=a$ 如果 P_2 看不到這個點，則 $k\neq 1$ ，因為 a 為質數，所以 $k=a$，又 $k \mid mcp$ 且 $m,.c,p$ 為質數 $\therefore a=k=c$ 或 p ，但若 $a=c$ 則 $a=c=d=b$，此與$(a,b,cp)=1$ 矛盾，故 $a=k=p$。

所以使用原點、P_1 與 P_2 觀察不到的點形態為(ma,mb,mab)，故得證。

另一方面，這時候如果再加入 P_3 $(b,0,0)$去觀測，則點(ma,mb,mab)就會變為$(ma-b,mb,mab)$。

$\because (ma-b,b)=1$ 且 $(ma-b,m)=1$ $\therefore (ma-b,mb)=1$ $\therefore (ma-b,mb,mab)=1$ 故被擋住的點(ma,mb,mab)可以由 P_3 $(b,0,0)$觀測到。

推論 28 設 m, a, b, c, p, n 為質數且$(a,bp,cn)=1$, 坐標為(ma,mbp,mcn)的點，使用原點、$P_1(1,0,0)$與 $P_2(0,1,0)$觀測不到的型態為(ma,mbp,mab)。

證明：

如果點坐標的型態為(ma,mbp,mcn)且$(ma,mbp,mcn)=m$，$(a,bp,cn)=1$。

一樣探討使用 $P_1(1,0,0)$ 和 $P_2(0,1,0)$所觀測不到的情形。

若以 P_1 為新原點去觀測，點(ma,mbp,mcn)會成為$(ma-1,mbp,mcn)$。

設最大公因數$(ma-1,mbp,mcn)=d$，如果 P_1 看不到這個點，則 $d\neq 1$。

所以 $d \mid ma-1$; $d \mid mbp$; $d \mid mcn$，因此 $d \mid a(mbp)-bp(ma-1)=bp$，

所以 $d=1$(不合) or b or p or bp 又 $d \mid mcn$

$\therefore$ $d=b=c$ or $d=b=n$ or $d=p=c$ or $d=p=n$ or $d=bp=cn$

若以 P_2 為新原點去觀測，點(ma,mbp,mcn)會成為$(ma,mbp-1,mcn)$。

設最大公因數$(ma-1,mbp,mcn)=k$，如果 P_2 看不到這個點，則 $k\neq 1$。

所以 $k \mid ma$; $k \mid mbp-1$; $k \mid mcn$ ，因此 $k \mid bp(ma)-a(mbp-1)=a$

所以 $k=1$(不合) or a 又 $k \mid mcn$ $\therefore a=k=c$(檢驗會矛盾) 或 $a=k=n$

因為 $a=n$ 所以 $b\neq n$ $\therefore a=n$，$b=c$。

所以使用原點、P_1 與 P_2 觀察不到的形態為(ma,mbp,mab)，故得證。

另一方面，若以 P_3 $(b,0,0)$為新原點去觀測，原本的點(ma,mbp,mab)就會變為$(ma-b,mbp,mab)$。

$\because$ $(ma-b,b)=1$ ， $(ma-b,m)=1$，$(ma-b,a)=1$， $\therefore(ma-b,mab)=1$，

$\therefore(ma-b,mbp,mab)=1$。

故被擋住的點(ma,mbp,mab)，可加上觀測點 P_3 $(b,0,0)$觀測到。

推論 29 設 $m, a, b,.c, p, n$ 為質數且$(ap,bn,c)=1$, 坐標為(map,mbn,mc)的點，使用原點、$P_1(1,0,0)$與 $P_2(0,1,0)$可以觀測到。

證明：

如果座標的型態為(map,mbn,mc) 且 $(map,mbn,mc)=m$ ， $(ap,bn,c)=1$。

探討使用 $P_1(1,0,0)$ 和 $P_2(0,1,0)$所觀測不到的情形。

用 P_1 點去觀測則(map,mbn,mc)在 P_2 的視角看過去會成為$(map\text{-}1,mbn,mc)$。如果 P_2 看不到這個點則$(map\text{-}1,mbn,mc)=d\neq 1$ 所以 $d\mid map\text{-}1$; $d\mid mbn$; $d\mid mc$ $d\mid ap(mbn)\text{-}bn(map\text{-}1)=bn$ 所以 $d=1$(不合) or b or n or bn 又 $d\mid mc$ $\therefore$ $d=c=b$ or $d=c=n$

用 P_2 點去觀測 則(map,mbn,mc)在 P_2 的視角看過去 會成為$(map,mbn\text{-}1,mc)$。如果 P_2 看不到這個點 則$(map,mbn\text{-}1,mc)=k\neq 1$ 所以 $k\mid map$; $k\mid mbn\text{-}1$; $k\mid mc$ $k\mid bn(map)\text{-}ap(mbn\text{-}1)=ap$ 所以 $k=1$(不合) or a or p or ap 又 $k\mid mc$ $\therefore$ $a=k=c$ 或 $p=k=c$ $\therefore d=c=b=a=k$ (不合) or $d=c=b=p=k$(不合) or $d=c=n=a=k$(不合) or $d=c=n=p=k$(不合)

所以使用原點、P_1 與 P_2 可以觀測到(map,mbn,mc)這種型態所有的點，故得證。

推論 30 設 m, a, b, c, p, n, r 為質數且$(ap,bn,cr)=1$, 坐標為(map,mbn,mcr)的點，使用原點、$P_1(1,0,0)$與 $P_2(0,1,0)$可以觀測到。

證明：

如果座標的型態為(map,mbn,mcr) 且 $(map,mbn,mcr)=m$， $(ap,bn,cr)=1$ 。

探討使用 $P_1(1,0,0)$ 和 $P_2(0,1,0)$所觀察不到的情形。

用 P_1 點去觀測 則(map,mbn,mcr)在 P_1 的視角看過去 會成為$(map\text{-}1,mbn,mcr)$ 。

如果 P_1 看不到這個點 則$(map-1,mbn,mc)=d \neq 1$

所以 $d \mid map-1$; $d \mid mbn$; $d \mid mcr$ $d \mid ap(mbn)-bn(map-1)=bn$

所以 $d=1$(不合) or b or n or bn 又 $d \mid mcr$ $\therefore$ $d=c=b$ or $d=b=r$ or $d=n=c$ or $d=n=r$

用 P_2 點去觀測 則 (map,mbn,mcr) 在 P_2 的視角看過去 會成為 $(map,mbn-1,mcr)$ 。

如果 P_2 看不到這個點 則$(map,mbn-1,mcr)=k \neq 1$

所以 $k \mid map$; $k \mid mbn-1$; $k \mid mcr$ $k \mid bn(map)-ap(mbn-1)=ap$

所以 $k=1$(不合) or a or p or ap 又 $k \mid mcr$ $\therefore a=k=c$ 或 $p=k=c$ or $k=a=r$ or $k=p=r$ $\therefore a=k=c=d=b$ or $a=k=c=d=n$ or $p=k=c=d=b$ or $p=k=c=d=n$ or $k=a=r=d=n$ or $k=a=r=d=b$ or $k=p=r=d=n$ or $k=p=r=d=b$ 以上帶入原本的條件皆不合 所以使用 P_1 、 P_2 和原點可以觀察到(map,mbn,mcr)型態的所有點。故得證。

參.結論與展望

一、結論

(一)、假設 m 為固定正整數，n 為任意正整數，若拍攝者的位置，為 x 軸正向與 y 軸正向上的點，且其 x 坐標不超過 $m+1$。將陣列 $m \times n$ 放置第一象限，下表呈現出 $m \times n$ 陣列中 m 的值和所需拍攝點數目的關係，如表 1 所示。

表 1

m 的值	1	2~5	6~9	10~19	20~21	22~25
拍攝點的數目	1	2	3	4	5	6

(二)、在陣列 $m \times n$ 中，拍攝者的位置限制在 x 軸上且其 x 坐標為 0 到 $m+1$ 的整數，若 $m=4k$，則至多需要 $m/2$ 個拍攝點；若 $m \neq 4k$，則至多需要$[m/2]+1$ 個拍攝點就可以拍攝整個陣列。

(三)、.由定理 4 和定理 5 得証設 m 是大於 5 的整數, n 是任意正整數，在陣列 $m \times n$ 中，若拍攝者的位置限制在 y 軸上且其 y 坐標為非負整數，則需 $\kappa(m)+2$ 個拍攝點，就可以拍攝整個陣列，其中函數 $\kappa(m)$代表不大於 m 的所有合成數的質因數個數，重複的質因數只算一次，且 $\kappa(m)=\pi(m/2)$。

(四)、若拍攝者的位置限制在 y 軸上且其 y 坐標為非負整數，由定理 4 得出 $m \times n$ 陣列中 m 的值和所需拍攝點數目的關係如表 2 所示。

表 2

m 的值	1	2~5	6~9	10~13	14~21	22~25	26~33	34~37
拍攝點的數目	1	2	4	5	6	7	8	9

(五)、在空間中，在不同的點坐標型態下，以原點和(1,0,0)及(0,1,0)等 3 個點所觀測的情形如下表所示，其中型態 2 和 3，若增加一個輔助觀測點(b, 0, 0)即可完全被觀測到如表 3 所示。

表 3

原坐標型態	經由 3 點觀測後，依然不能被拍攝到的點的型態
(ma,mb,mc)	所有上述型態的點，都可被原點 和(1,0,0) (0,1,0) 3 個點拍攝。
(ma,mb,mcp)	使用原點 和(1,0,0) (0,1,0) 3 個點拍攝不到的型態為(ma,mb,mab)
(ma,mbp,mcn)	使用原點 、(1,0,0) (0,1,0) 3 個點拍攝不到的型態為(ma,mbp,mab)
(map,mbn,mc)	所有上述型態的點，都可被原點 和(1,0,0) (0,1,0) 3 個點拍攝。
(map,mbn,mcr)	所有上述型態的點，都可被原點 和(1,0,0) (0,1,0) 3 個點拍攝。

二、展望

(一) 在平面上 26xn 以上的陣列，由於數字較大，希望能利用目前的演算法，使用電腦程式去輔助可以節省較多的時間、人力。

(二) 猜測：$\chi(m)+2 \le \kappa(m)+2 \le [m/2]+1$

(三) 猜測：在陣列 $m\times n$ 中，拍攝者的位置限制在 x 軸上且其 x 坐標為 0 到 m+1 的

整數，若 $m=4k$，則恰好需要 $m/2$ 個拍攝點；若 $m\neq 4k$，則恰好需要$[m/2]+1$ 個拍攝點就可以拍攝整個陣列。此猜測，目前正努力證明中。

(四) 探討平面上特殊形狀之陣列，所需最少拍攝點的問題正深入研究中，相信很快就會有成果。

(五) 在空間中，目前只討論了坐標 x、y、z 最多各含 3 個質因數的狀況，含更多質因數的型態，有待繼續的探索。

(六) 在空間中，以最佳的演算法找尋拍攝點的方法，尚待討論。

(七) 猜測：觀測陣列 $r\times s\times t$，若以小於 t 的所有質數當 x 坐標，在 x 軸上依序設置拍攝點以及原點，猜想應該可以觀測到整個陣列。

肆. 參考文獻

1. JOSHUA D. LAISON and MICHELLE SCHICK (2007), Seeing Dots: Visibility of Latice Points, Mathematic Magazine, Vol. 80, No4, October, 274-282

評語

此研究報告主要研究拍攝陣列時所需拍攝點的數目，相當有趣。但既然是研究拍攝點的數目，當然是越少越好，因此，在現有的成果中，應証明其數為最少，或估計其與最少數的關係。另外，$\pi(x)$的出現，相當有趣，建議應好好了解其含意。