2009 年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

編號： 010006

作品名稱

逆勢求生-K 子祺和局之研究

得獎獎項

數學科大會獎第一名

美國正選代表:美國第 60 屆國際科技展覽會

學校名稱： 國立科學工業園區實驗高級中學

作者姓名： 江盛浩

指導老師： 吳毅成　葉佐欽

關 鍵 字： Connect 、 樹狀圖 、 和局

作者簡介

我是江盛浩；就讀國立新竹科學工業園區實驗高級中學數理班三年級。

我研究的題目是「逆勢求生- K 子棋和局之研究」，結論得出「Connect(11,2)為和局」優於目前文獻紀錄最好的結果「Connect(15,2)為和局」；以及「Connect(3p+f(p), p)為和局，更精確的說：$K = 3p+8+3\ [\log2((K+4)/21)]$。在$3 \leq p<1000$ 時，所得的 K值都是目前全世界最好的結果。」

今年是我自國中三年級起參予臺灣國際科學展覽第四次競賽並第四度入選決賽，不知這樣的經歷是否有打破連續參加臺灣國際科學展覽競賽的最高紀錄。這四年來我專注科展專題研究也勤走交通大學實驗室，不僅讓我能貼近數學之美也更加讓我深入體驗數學的奧秘。

摘要

本專題是研究K 子棋之勝負和。我們這裡要考慮的K 子棋，稱為Connect(K,p)，定義如下：由黑方先下，在無限大的棋盤上黑白雙方輪流各下p子，先將K 個同色的子連成無間隔的水平線、垂直線或對角線者贏。若黑棋和白棋永遠無法連成K 子，則判定為和局。

本研究僅專注於和局之研究，並得出以下結果：

一、Connect(11,2)為和局。目前全世界最好的結果是Connect(15,2)為和局。

二、Connect(3p+f(p), p)為和局，更精確的說：$K = 3p+8+3[\log2((K+4)/21)]$。例如 p=3 時Connect(17,3)為和局、p = 4 時Connect(23,4)為和局。在3≤p<1000 時，所得的K 值都是目前全世界最好的結果。

Abstract

This project is about the research of the win, loss or draw of K-in-a-row. The K-in-a-row games,also called Connect(K,p) here, defined as followed: when starting from the black side, the black and white sides take turns putting p pieces in an infinite board. The side who connects up to K consecutive pieces horizontally, vertically or diagonally wins. If neither the black nor the white can connect k pieces, the game draws.

This project focuses on the study of the draw of the Connect games. Our results are as follows:

1. Connect(11,2) is a draw game. Currently, the best result in the world is to prove that Connect(15,2) is draw.

2. Connect(3p+f(p), p) are draw games, accurately, $K = 3p+8+3\ [\log2((K+4)/21)]$. For example, when p=3, Connect(17,3) will be a draw; and when p=4, Connect(23,4) will be a draw. When $3 \leq p < 1000$, the K values are lower than any other in the world.

逆勢求生

K子棋和局之研究

壹、研究動機

在五子棋Connect(5,1)中，已證明出黑方必勝。另一方面R.K. Guy 和J.L. Selfridge(1980)證明出Connect(8,1)為和局。

當一次下的子數不為1 時又是如何呢？目前已由Pluhar(2002)證明出當p≥1000時，Connect(p+80log2p+160, p)為和局；另外，Ming-Yu Hsieh 和Shi-Chun Tsai(2007)則得出p≥1 時Connect(4p+7,p)為和局。

當p 很大時，Pluhar 的結果非常好，然而p 太大，一般不會有人嘗試玩一次下1000顆以上的K 子棋；而Hsieh 和Tsai 的結果則是K/p≒4，略大。於是我著手尋找p<1000，更小的K 使Connect(K, p)是和局。

貳、研究目的

一、證明Connect(11,2)為和局。

二、證明Connect(3p+f(p), p)為和局(其中當p → ∞，f(p)/p → 0)。

對所有的p<1000 Pluhar 沒有得出K。

這些結果都比Hsieh 和Tsai 的結果好，其中K/p 比值趨近於3。

參、研究過程

由於黑方是先手，如果白方有辦法獲勝，則黑方用相同策略也可以獲勝，故白方不會贏。因此我僅專注黑方是否會獲勝，若不會，則為和局。

一、證明Connect(11,2)為和局。

在證明Connect(11,2)為和局之前，我們先定義一種遊戲，稱為ConnectLine(p)。

<u>定義一</u>：在一個棋盤圖形中(如圖1所示)，如K子棋一般，黑白雙方輪流下子在格子點上(對任何線段交點，我們就直接當作有格子點，不特別畫出)，黑方先。黑方可選擇下1~p子，白方可下的子數不大於與黑方前一手的子數。若黑棋可下滿圖中任何線段上的格子點(必須為連續直的、橫的、斜的線條)，則黑方獲勝；否則為和局。這樣下法的遊戲，我們稱為ConnectLine(p)。

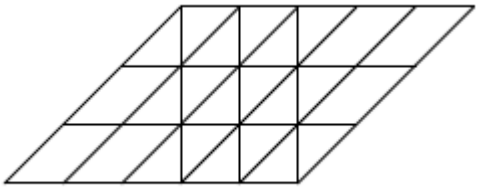


圖1

定理一：如圖1所示的棋盤中，ConnectLine(2)的玩法為和局。

之後我們會回來證明定理一。我們先來看定理一成立，可讓我們證明Connect(11,2)為和局。若將定理一中的圖1在無限的棋盤上，排成如圖2所示，則斜線和直線黑棋最多只能下4×3-2=10子，而橫線黑棋最多只能下6×2-2=10子，如圖3所示。這樣一來就可以確定Connect(11,2)為和局了。

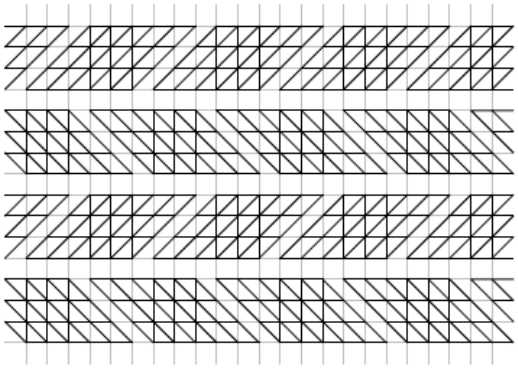


圖2

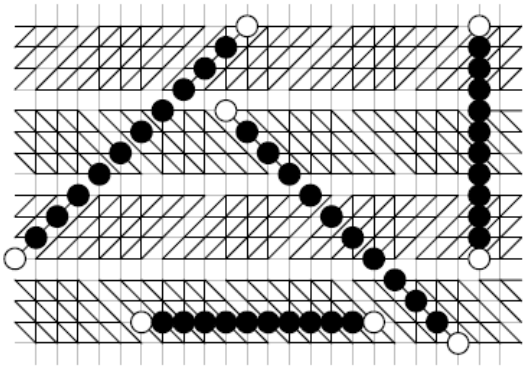


圖3

定理一證明：

考慮以下幾種黑方第一手的走法：

(一) 黑方下在第2條直線第2、3個位置上，白方用如圖4所示的方式阻擋。

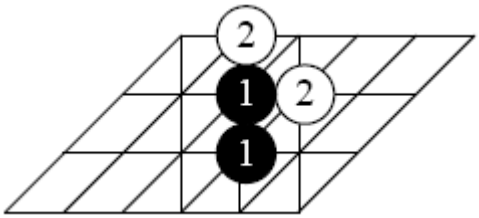


圖4

(二) 黑方只下一子。白方下在第2條直線第2或第3個位置上(如圖5所示)。

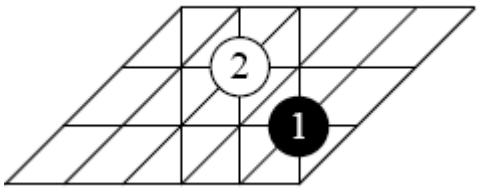


圖5

(三) 黑方下兩子，其中一顆子在第2條直線第2個位置上，另一顆子則在其它地方。白方將其中一顆子下在第2條直線第3個位置上，另一顆子則下在第3 條斜線上(如圖6所示)。

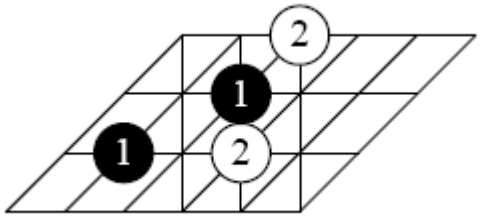


圖6

(四) 黑方下兩子，都下在同一條直線或斜線上。白方將一顆子也下在同一條線段上，另一顆子下在第2條直線第2或第3個位置上(如圖7所示)。

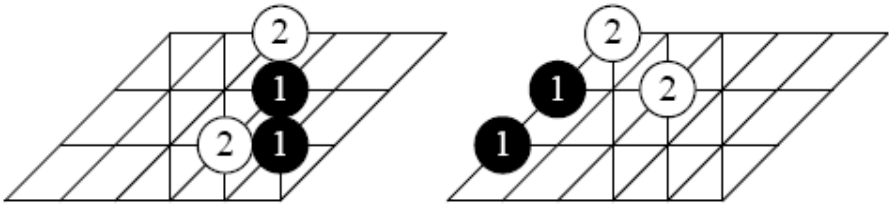


圖7

(五) 其它不同於以上的下法。

以上幾種下法，我只針對第一種和第二種做討論。

<u>先不考慮橫線</u>

若只看直線和斜線還沒有被白棋擋住的線段，會得出如圖8所示，且都只有一顆黑子(左為第一種，右為第二種)：

圖8

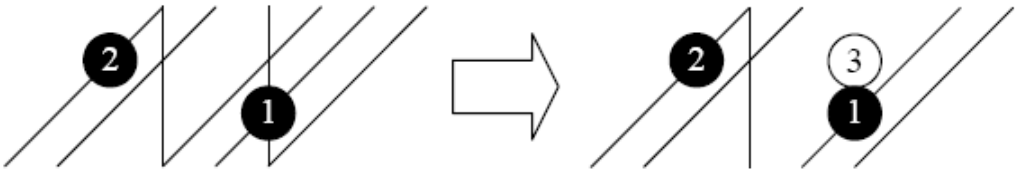
只看有黑棋的部份為樹狀圖(沒有迴圈)，依照以下小定理一(Lemma 1)，則對此圖ConnectLine(2)的下法為和局，這也就是說黑方無法只靠直線和斜線連線。

小定理一(Lemma 1)：

在一個樹狀圖(沒有迴圈，如圖8所示)，只有一個黑子，若每個線段至少有四個點，則ConnectLine(2)的下法，一定和局。

小定理之證明：

若黑方下一子，則白方可下在該兩個黑子之間的任一線段上(包含起始)，則此樹狀圖分割成兩個樹狀圖，且每一個樹狀圖只有一個黑子。因此可用遞迴方式證明出來。若黑方下兩子，可用類似的方式切出三個樹狀圖。



<u>考慮橫線</u>

橫線長度是6，因此如果黑方要靠橫線連線，必須先在橫線上下4 子且那時白方無法阻擋。

我們要證明黑方無法靠橫線連線連成4 子，必須先考慮每個獨立樹狀圖。

1. 若一個獨立樹狀圖沒有黑子，則第一個黑子沒有威脅，則白方可防橫線。

2. 若一個獨立樹狀圖有一黑子且最長長度是h，則黑方可靠連續攻擊強制(白方沒有選擇)下h子。但黑棋強制的子只能有一半[(h+1)/2]在同一條橫線。例如圖9所示，此樹狀圖中最長的攻擊路線只有五條線，黑方下6子

後就無法繼續攻擊，因此黑棋最多連成3子。

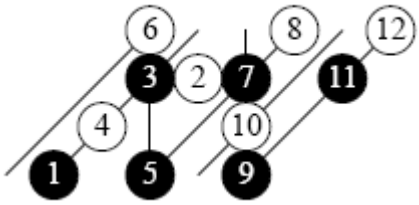


圖9

我們用上述的兩種方式分析，可得出黑方無法在任一橫線強制下出4 子。

其他(三)、(四)…可以用類似方式分析下去，在此不贅述。吳毅成教授的學生(2008)也以電腦跑出相同結果。

由定理一可得出Connect(11,2)為和局。

二、證明Connect(3p+f(p),p)為和局。

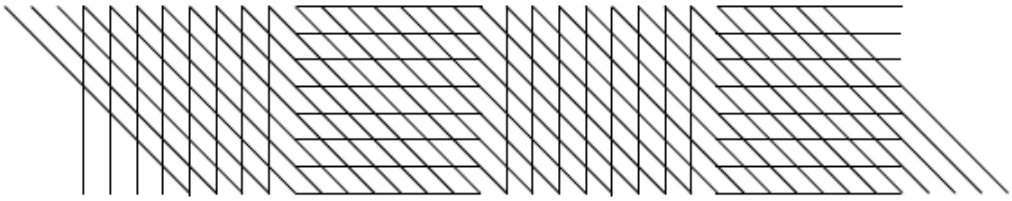


圖10

在證明本問題前，我們想先證明以下定理：

定理二：L及p都是正整數，且L>p。如圖10所示的棋盤中(註：圖10左右會無限延伸)，每一個線段長都為L。若ConnectLine(p)的玩法為和局，則Connect(3L-1,p)也是和局。

定理二證明：

將圖10在垂直方向無限地複製排列如圖11所示，則每一直線、橫線、斜

線黑棋最多只能下3L-2子。這樣一來就可以確定Connect(3L-1,p)為和局了。

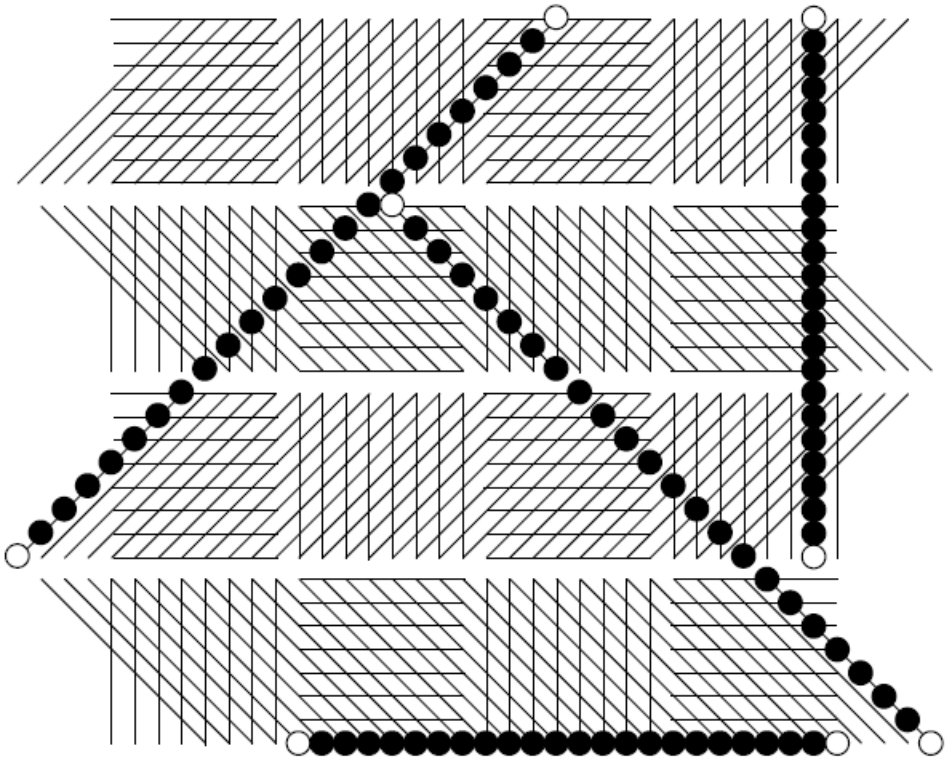


圖11

以上定理二是可以讓我們推出「ConnectLine(3p+f(p),p)是和局」的一個重要定理。但我們還需要更進一步來得出以下幾個定理。

定理三：假設每個線段長度都是L。在圖10棋盤中，若ConnectLine(p)的玩法為和局，則在圖12棋盤中(如圖12所示)，ConnectLine(p)的玩法也是和局，反之亦然。

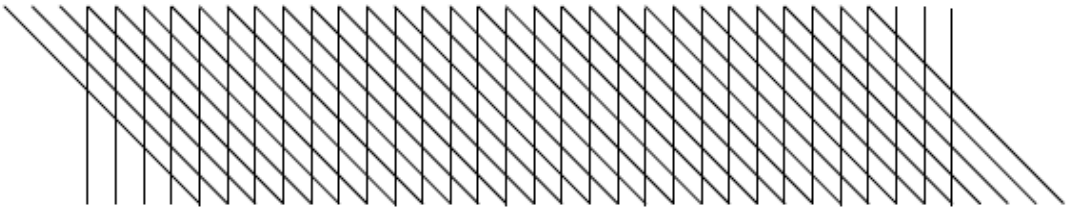


圖12

(註：在圖形理論上，圖10與圖12實際上是Isomorphic)

定理三證明：

(一) 首先先將圖10分區，並用座標(x,y,z)表示每一個交點，其中z 代表第幾區(z是偶數時，有直線；但是奇數時，是橫線)。線段的定義如下(並參見如圖13所示)：

1. 直線i：{(x,y,z) | z 為偶數且$i=x+Lz$}　註：當z為奇數時，直線 i 是{}。

2. 橫線i：{(x,y,z) | z 為奇數且$i=y+Lz$}　註：當z為偶數時，橫線 i 是{}。

3. 斜線i：$\{(x,y,z) \mid i=x+y+Lz\}$

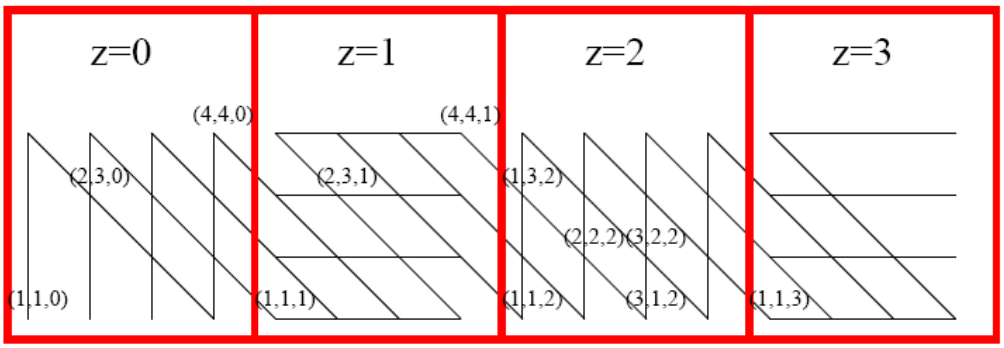


圖13

(二) 將圖12所示也依照L分區，並用座標(x,y,z)表示每一個交點，其中z代表第幾區(每L條直線一區)。線段的定義如下(並參見如圖14所示)：

1. 直線i：$\{(x,y,z) \mid i=x+Lz\}$

2. 斜線i：$\{(x,y,z) \mid i=x+y+Lz\}$

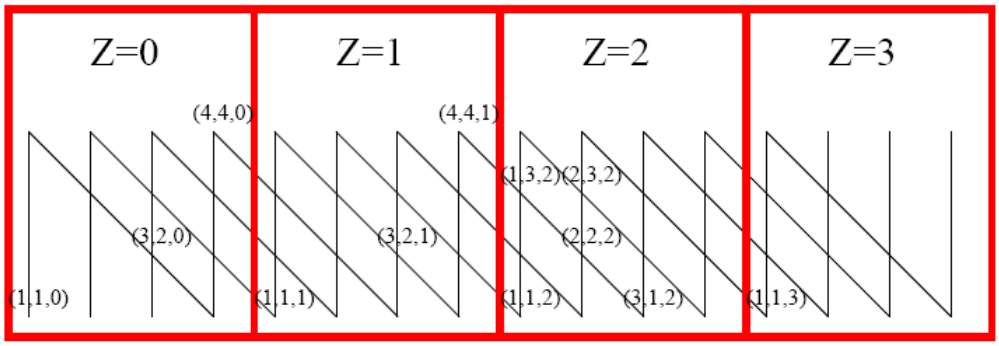


圖14

(三) 若將圖10所示，座標系統改為(X,Y,Z)，方法如下：

1. Z=z
2. 當z 為偶數，$X=x$、$Y=y$
3. 當z 為奇數，$X=y$、$Y=x$

則線段定義改成：

1. 直線i：{(X,Y,Z)|Z為偶數且$i= X+LZ$ } 註：當Z 為奇數時，直線i ={}。
2. 橫線i：{(X,Y,Z)|Z為奇數且$i= X+LZ$ } 註：當Z 為偶數時，橫線i ={}。
3. 斜線i：$\{(X,Y,Z) \mid i=X+Y+LZ\}$

很明顯地，直線i 與橫線i 可合併成。

1. 線條i：$\{(X,Y,Z) \mid i=X+LZ\}$
2. 斜線i：$\{(X,Y,Z) \mid i=X+Y+LZ\}$

這麼一來，與圖12所示的線段集合，可說是一模一樣(Isomorphic)。若下子在圖12所示的(x,y,z)，則相當於下在如圖10所示的(X,Y,Z)；反之亦然。因此，若在圖12所示中 ConnectLine(p) 的玩法為和局，則在圖10所示棋盤中 ConnectLine(p) 的玩法也是和局；反之亦然。因此，此定理可以得證。

因為如圖12所示必較容易推廣，所以之後我都用圖12來分析。為了簡化說明，我們定義以下遊戲。

<u>定義二</u>：在如圖12所示中，若圖12的線段長度為L，且我們採用ConnectLine(p)玩法，則稱為ConnectB(L,p)遊戲。

從定理二及定理三，我們可以直接得出以下定理四。

定理四：若 ConnectB(L,p) 是和局，則 Connect(3L-1,p) 也是和局。

以下定理五，是用遞迴的方式將「ConnectB(L,p)是和局」的結果，推到「ConnectB(2L+1,L+p)是和局」。

定理五：如果ConnectB(L,p)是和局，則ConnectB(2L+1,L+p) 也是和局。

證明：

(一) 對ConnectB(2L+1,L+p)的遊戲，我們將棋盤分成以下三個區域(紅、黃、藍，如圖15所示)，分別討論。每個紅色區塊為一個相等的平行四邊形，邊長為L+1；每個藍色及黃色區塊為三角形，邊長為L。

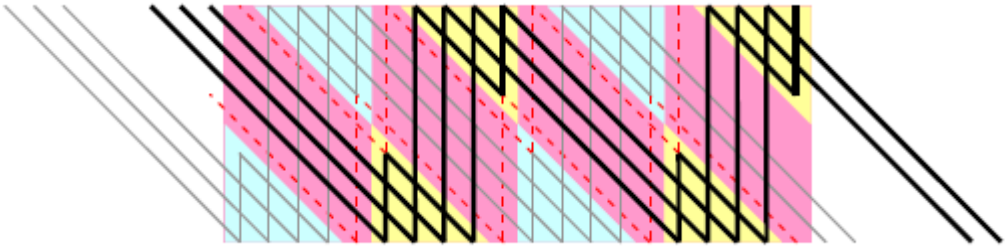


圖15

(二) 對黑方的任一手棋，假設在圖15中下了s子(s≤L+p)，其中分別在這三區下了s1、s2、s3(s1+s2+s3 =s)子。接下來我們將分別討論每個區域的情形。

(三) 紅色區域：

我們考慮任一紅色平行四邊形(邊長為L+1)。為了方便起見，我們改成正方形來討論，如圖16所示。

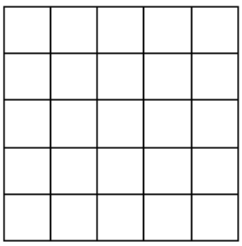


圖16

原先(Hsieh&Tsai, 2007)有個定理，大致如下：在$(p+2)x(p+2)$的正方形棋盤如圖16所示，對ConnectLine(p)的玩法，最多只有一條線有黑子，且該線只有一黑子。(註：所有橫線與直線中，只有一個線。)

我們將之延伸一個小定理如下：

小定理二(Lemma 2)：在任何n×n的正方形棋盤上方及右方均延伸一個點，如圖17所示。若黑棋不能下在延伸點上，則對ConnectLine(p)的玩法，白方下完後，可讓黑棋最多只有一條線有黑子，且只有一黑子。即使 p>n，此定理仍成立。

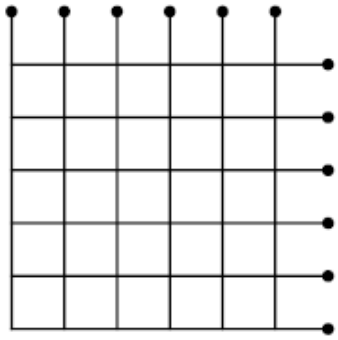


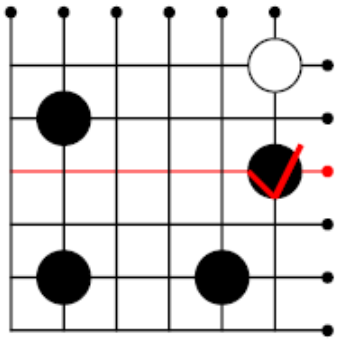
圖17

小定理二證明：

所有未被下子的線h，都用n(h)代表該線上的黑子數，但若該線有白子，則為0。讓N 代表所有h 之n(h)總和。

用遞迴的觀念來證明：由於「白方下完後，可讓黑方最多只有一條線有黑子，且只有一黑子。」，因此N 最多為1。

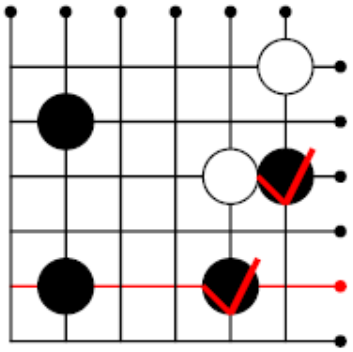
1. 黑方下了n’(n ≤n)子，白方先選擇其中1子，並擋住此黑子上的一條線，此時N為1。



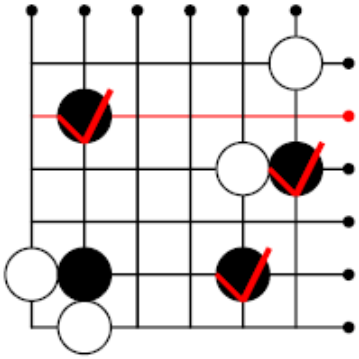
2. 白方再選另一黑子，若此子的直橫線都有白子，N不會增加，此狀況可以不要考慮。

3. 若此子只有直線或橫線有白子，N會增加1，但這狀況白方就用一子堵住該線即可，N不會增加。

4. 若直線與橫線都沒有白子，則N會增加2，但這時由於該點的直線與橫線都沒有白子，若有其他線n(h)至少為1，這可用直線或橫線與之找一個交點。此交點為空時，就可用下在此處，可讓N減2，讓N不會增加。



5. 狀況同上，但此交點非空(即有黑子在上面)，白方可下兩子在該交點的直線和橫線上，則也可讓N減至少2。



6. 重複以上動作，直到左有的黑子都被選過，這樣無論如何N最大只可能是1。

用此方法可得出：在紅色區域內，每一個平行四邊形在白方下完後黑棋最多只能在一條線段上有1 子。

(四) 黃、藍色區域：

黃色區域和藍色區域的圖形是一樣的，所以我只對黃色區域做討論如圖18所示。

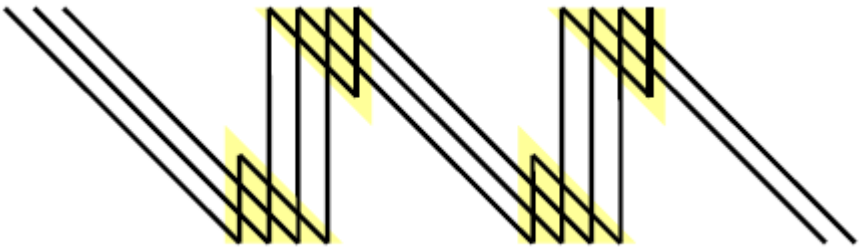


圖18

然而，從圖18所示可看出，若我們將紅色及藍色區塊去掉，則可壓縮成如圖19所示。

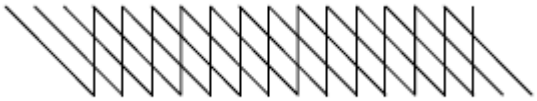


圖19

黑棋在黃色區域下了s2子。因為本證明假設ConnectB(L,p)是和局，也就是黑棋無法連線，所以可得出當 s2≤p 時，白方下完後黃色區域內黑棋最多只能在線段上(黃色部份)有L-p-1子；或者說，在白方下之前，黑棋最多只能在線段上(黃色部份)有L-1子，也就是說還有一個空點未下。

但現在 s2≤ L+p，即有可能 s2>p，我們需要先用小定理三來協助解決，可得出白方下完後黃色區域內黑棋最多只能在線段上有L-p-1 子(假設每個大線段2L+1 都有空點，給白棋下；這會在下一項證明)。小定理三是利用類似小定理二的做法，如圖20所示。

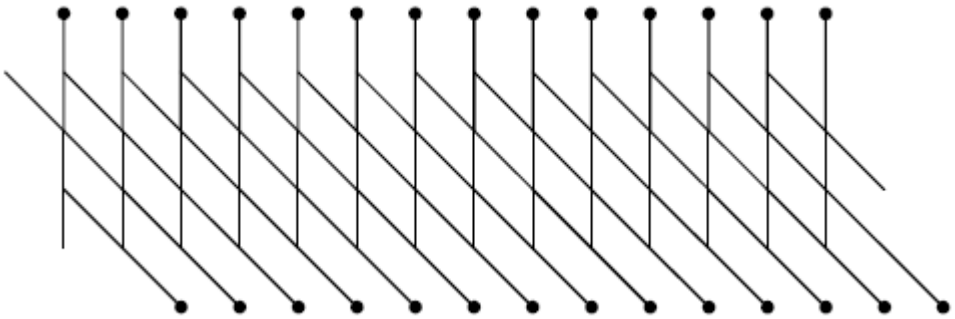


圖20

小定理三(Lemma 3)：假設ConnectB(L,p)是和局。將圖12中的每個線段(長度為L)延伸一個點，直線往上，斜線往右下，如上圖。若黑棋不能下在延伸點上，則對ConnectLine(p’)的玩法，每條線段最多只有L-p-1 黑子。即使p’ > p，此定理仍成立。

小定理三證明：

「ConnectB(L,p)是和局」，表示有一個下棋策略S可使黑棋無法連成L子。

對黑方任一手，假設有p”(p”≤p’)子。若p”≤p，則用策略S下即可。若p”>p，我們可以先拿其中p子來看， 還是用原來策略S下，但一旦發現，應

該下的位置有個已有不是空點，而是被後續的(p”-p)佔住，則多用一子，即兩子(加上原來應該下一子)，改下在該空點的兩個延伸點上即可。然後，用同樣的方法，反覆處理剩餘的子。

(五) 回到ConnectB(2L+1, L+p)的玩法。用以上策略，我們可以得出每次黑方下完後，每個沒有白棋的線段，一定有一個空點；這也隱含，每次白方下完後，每個沒有白棋的線段，一定最多只有$(L-p-1)+1=L-p$個黑子。我們用這個假設，以歸納法來證明如下。

在黑方下之前(也就是白方下完後)，由於每個沒有白棋的線段，一定最多只有L-p個黑子，一次下L+p，最多讓該線段達$(L-p)+(L+p) = 2L \leq 2L+1$，一定會留下空點。這麼一來，這空點就可以當作小定理二及小定理三的延伸點，如此就可以用小定理二及小定理三來下白子，並可獲得結果如下。

1. 在紅色區域內，每一個平行四邊形在白方下完後黑棋最多只能在一條線段上有1子。
2. 在黃、藍色區域內，白方下完後黑棋最多只能在線段上有L-p-1 子。

如此一來，每個線段最多只有(L-p-1)+1= L-p黑子。這證明了歸納法的假設。由於歸納法的假設，在開始的時候，就成立，這個假設是正確的。

從這歸納法得出，每次黑方下完後，每個沒有白棋的線段，一定有一個空點；這即說明ConnectB(2L+1, L+p)是和局。

定理六：ConnectB(4,1)是和局。

證明：ConnectB(4,1)的棋盤如圖21所示。

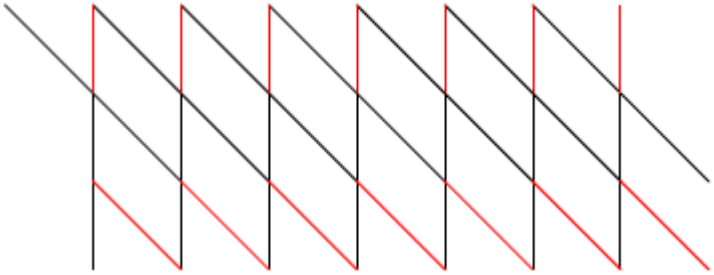


圖21

(一) 將紅色線段去掉變成如圖22所示，如果圖22黑棋無法連線，則原來的圖(如圖21所示)黑棋也無法連線。

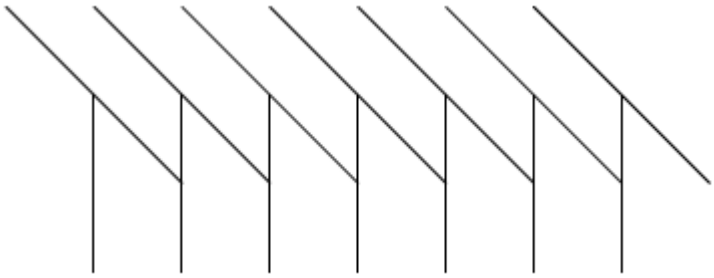


圖22

(二) 此圖是樹狀圖，從小定理一即可獲得ConnectLine(2)的下法是和局，這很容易就推導ConnectLine(1)也是和局。

由定理四、五、六可得出：

- ConnectB(4,1)，黑方無法連線，Connect(11,1)為和局。
- ConnectB(9,5)，黑方無法連線，Connect(26,5)為和局。
- ConnectB(19,14)，黑方無法連線，Connect(56,14)為和局。
- ConnectB(39,33)，黑方無法連線，Connect(116,33)為和局。
- ConnectB(79,72)，黑方無法連線，Connect(236,72)為和局。
- 以下以此類推。

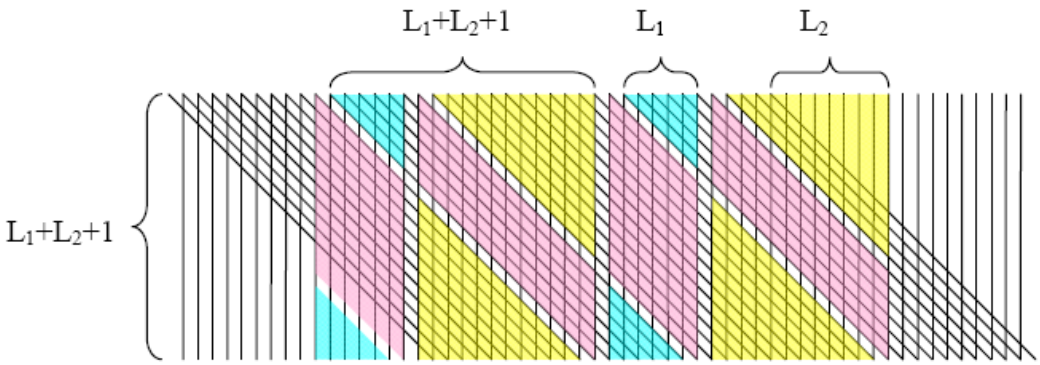
另外還可以得出定理七、八、九。

定理七：ConnectB(5,2)是和局。

定理八：ConnectB(6,3)是和局。

定理九：ConnectB(8,4)是和局。

定理十：若ConnectB(L1,p1)是和局、ConnectB(L2,p2)是和局，且L1≥L2，則ConnectB(L1+L2+1,L2+p1)也是和局。



證明：

同定理五可得出：

1. 在紅色區域內，每一個平行四邊形在白方下完後黑棋最多只能在一條線段上有1子。

2. 在黃色區域內，白方下完後黑棋最多只能在線段上有 L1-p1-1 子。

3. 在藍色區域內，白方下完後黑棋最多只能在線段上有 L2-p2-1 子。

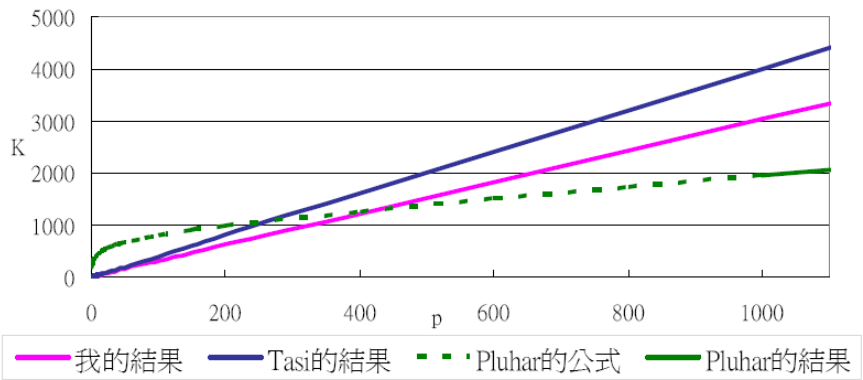
綜合紅、黃和藍三個區域的結果，可得出ConnectB(L1+L2+1,L2+p1)中：在白方下完後黑棋最多只能在一條線段上有L1-p1子，即使之後黑方下L2+p1子，最多也只能連L1+L2子，可得出 ConnectB(L1+L2+1,L2+p1)是和局。

由定理六、七、八、九、十可得出當$K=3p+8+3[log2((K+4)/21)]$ 時Connect(K,p)為和局。因此Connect(3p+f(p),p)為和局。

肆、結論

一、Connect(11,2)為和局。

二、Connect(3p+f(p),p)為和局(其中當p →∞，f(p)/p → 0)。



註：Pluhar的結果，只有在p≥1000時，才可應用此Pluhar的公式。

伍、應用

一、在尋找新的棋類遊戲時，可運用本研究去除一些必勝或必和的遊戲規則。

二、在電腦證明一些較複雜的棋類時，可運用本研究去除一些不必要的計算，減少所花的時間。

陸、參考資料

一、Zetters, T.G.L.(1980). Problem S.10 proposed by R.K. Guy and J.L. Selfridge, Amer. Math.Monthly 86(1979), solution 87(1980) 575-576.(證出8 子棋為和局)

二、Ming Yu Hsieh and Shi-Chun Tsai, On the fairness and complexity of generalized k-in-a-rowgames, Theoretical Computer Science, Volume 385 Issue 1-3 October 2007 (證出4p+7 子棋為和局)

三、I-Chen Wu, Dei-Yen Huang and Hsiu-Chen Chang, "Connect6", ICGA Journal(SCI), Vol. 28,No. 4, pp. 234-241, December 2005.(提出Connect(K,p)的概念)

四、Pluhar, A.(2002). The accelerated k-in-a-row game, Theoretical Computer Science. 271(1-2)865-875.($2p+80\log p+160$)

五、Ping-Hong Lin, Bo-Ting Chen, I- Chen Wu 在我證明後，另外也使用電腦跑出相同結果。

評語

此作品探討 k 子旗雙方各下 p 子先將 k 個同色的子連成無間隔水平線、垂直線或對角線者贏，此作品探討和區之研究，不同過去五子棋探討贏的策略，此作品具有創意、有趣，符合科學研究精神。

Forcing a Draw in K-in-a-Row Games

Introduction

This is an abbreviated version of the full paper [1] with the title "On Draw K-in-a Row Games" which has been accepted for publication in the Proceedings of Advances in Computer Games, Pamplona, Spain, May 11 - May 13, 2009.

Abstract

(k, p)-games studied in this project are k-in-a-row games with the additional rule that the players put p stones at a time. Here is the precise rule. For a fixed positive integer p, two players Black (always plays first) and White alternately place p stones of their color at empty intersections of an infinite Go-like board. The winner is the first player reaching k consecutive stones horizontally, vertically or diagonally. A player is said to have a winning strategy if there is a rule leading to his winning no matter what the opponent plays. The game is said to draw if neither player has a winning strategy.

Using a computer search algorithm, Allis proved that the most commonly played (5, 1)-game on a 15-by-15 board Black has a winning strategy. Borrowing arguments first proposed by John Nash, it can be proved that White has no winning strategy in all (k, p)-games. The surprising finding of this project shows that White can force a draw in infinitely many (k, p)-games!

Our main results are:

1. For the (11, 2)-game, White can force a draw. Consequently, White can force a draw over all (k, 2)-games, k > 2. This result is sharper than the optimal known record of having a draw in a (15, 2)-game.

2. For a fixed p = 3, ..., 999, if $k \geq 8+3p+3$ ceiling $(\log_2((k+7)/24))$, then White can force a draw in the (k, p)-game. The lower bound expressed in this result is also optimal so far.

(k, p)-games:

General Setting:

For a fixed positive integer p, two players Black (always plays first) and White alternately place p stones of their color at empty intersections of an infinite Go board (Figure 1.).

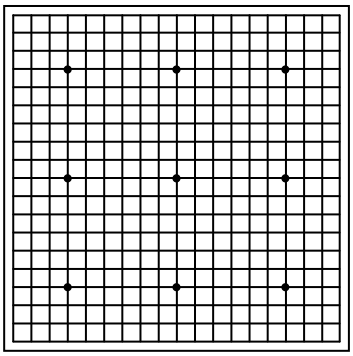


Figure 1. Go board.

Winner:

The winner is the first player reaching k consecutive stones horizontally, vertically or diagonally.

Winning Strategy:

A player is said to have a winning strategy if there is a rule leading to his winning no matter what the opponent plays.

Draw:

The game is said to draw if neither player has a winning strategy.

Current Popular Games:

Tic-Tac-Toe: Similar to (3, 1)-game but played on 3×3 boards.
Gomoku: Similar to (5, 1)-game but played on 15×15 boards.
Connect6: Similar to (6, 2)-game but played on 19×19 boards and one stone for the first move [2].

Background:

Here is a history of the optimal results of (k, p)-games.

1. Based on Nash's strategy-stealing argument [3], White has no winning strategy for any (k, p)-game.

2. Zetters discovered that White can force a draw in the (8,1)-game [4] (The green dot in Figure 13.).

3. Pluhar discovered that White can force a draw in $(p+80\times\log_2 p+160, p)$-games for all $p \geq 1000$ [5] (Uncharted, to the right of Figure 13.).

4. Hsieh and Tsai discovered that White can force a draw in $(4p+7, p)$-games for all $p \geq 1$ [6] (The pink dots in Figure 13.).

Our Breakthroughs:

(1) White can force a draw in the (11, 2)-game.

This result is sharper than the best previously established record of having a draw in a (15, 2)-game.

(2) For each fixed $p \geq 1$, if $k \geq 8+3p+3\lceil\log_2((k+7)/24)\rceil$, then White can force a draw in the (k, p)-game.

For a fixed $3 \leq p \leq 999$, the minimum value of k satisfying this inequality is also the optimal in the world so far.

- Pluhar studied only for cases with $p \geq 1000$.

- The result from Hsieh and Tsai displays a curve of slope = 4, while ours shows a curve of slope = 3.

Main Result 1: White can force a draw in the (11, 2)-game.

<u>Strategy:</u>

Global (Figure 2.):

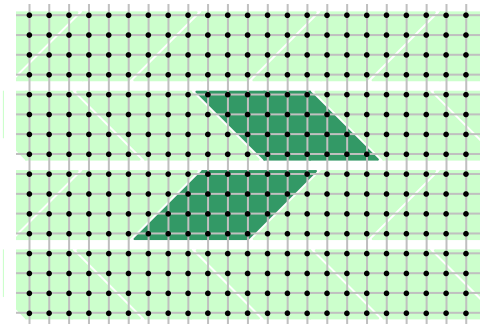


Figure 2. The board divided into disjoint regions.

- Divide the board into disjoint regions as shown.

Local (Figure 3.):

- All "crucial" rows of each region are marked (Figure 3.).

  Note that when rows are partially ordered by set-inclusion, all crucial rows are maximal rows of each region.

- Strategy: As indicated in Figure 4, no crucial row of any region is to be totally occupied by Black.

  Such blocking strategy is feasible in view of the exhaustive computer search [1].

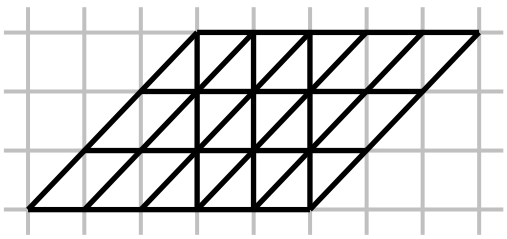


Figure 3. Crucial rows of a egion.

Therefore, White can force a draw in the (11, 2)-game.

Main Result 2: For each fixed p ≥ 1, if $k \geq 8+3p+3\lceil \log_2((k+7)/24) \rceil$, then White can force a draw in the (k, p)-game.

<u>Straightforward:</u>

If White can force a draw in a (k, p)-game, then he can force a draw in a (k', p)-game for any k' > k.

<u>Less Straightforward:</u>

If (p, k) belongs to the boundary of the region $\{(x, y): y \geq 8+3x+3\lceil \log_2((y+7)/24) \rceil\}$, then it belongs to one of 8 "discrete segments" $S_1, S_2, \ldots, S_u, \ldots, S_8$ with the u-th segment consisting of 2^{u+1} points (except S_1 and S_8) (The blue dots in Figure 13.).

<u>Strategies:</u>

Global (Figure 5.):

For each fixed L, Global(L) is the partition of the board into disjoint regions as shown.

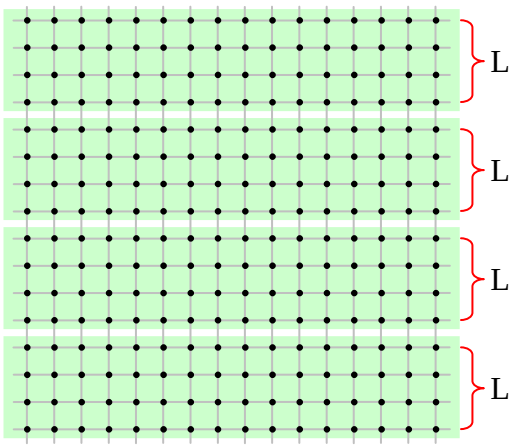


Figure 5. The board is divided into disjoint regions.

Local (Figure 6.):

For the game with p stones placed at each move, Local(L,p) is the strategy that prevents Black from totally occupying a complete crucial row as marked in Figure 6. .

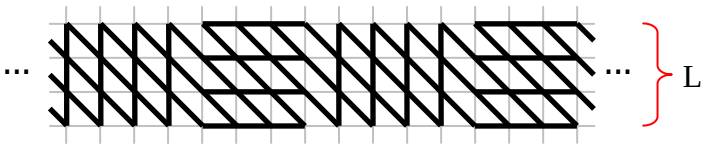
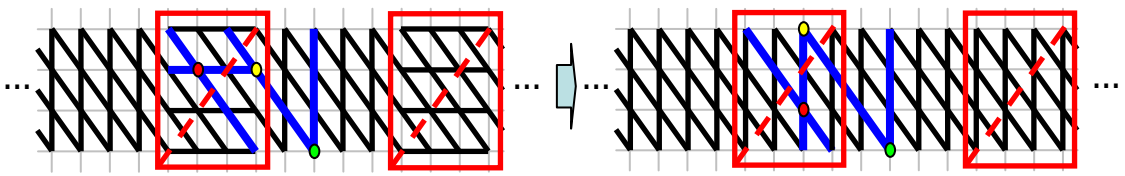


Figure 6. Crucial rows of a region.

Visual interpretation (Figure 7.):

When the region is transformed and the moves are mapped accordingly as indicated in Figure7., the transformed region takes a simpler appearance: all crucial rows are either vertical or diagonal in one direction only.



(a) Crucial rows of a region. (b) Crucial rows of a transformed region.

Figure 7. Each red frame, along with the crucial rows, is reflected across the dash line.

<u>Boundary parameterized:</u>

Whenever (p, k) satisfies the equality $k = 8+3p+3\lceil \log_2((k+7)/24) \rceil$, there is a unique integer L such that $k = 3L-1$. Each point on the boundary thus receives a unique label L, $4 \le L \le 1003$.

A Sufficient Condition for Local(L, p):

- The condition "After each move by White, the number of black stones in each unblocked row be no bigger then L–p–1." can be taken as the "existence" of Local(L, p).

- Although the existence of Local(L, p) is to be precisely established, we see that by combining Global(L) with Local(L, p), Black can be prevented from forming (3L–1)-in-a-row (Figure 8.). Consequently, White can force a draw in (3L–1, p)-game.

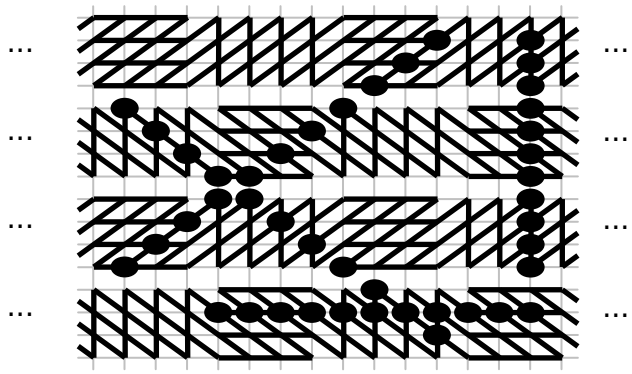


Figure 8. Each (3L–1)-in-a-row black stones must cover a crucial row.

Existence of Local(L, p) for Points on the Boundary:

Step 1. For each point with label L = 4, 5, 6, 7, 8, the existence is separately treated in [1].

Step 2. For L ≥ 9, the existence follows by applying induction to the following two Lemmas.

Lemma 1. Assume that Local(L, p) exists. Then Local(2L+1, L+p) exists (Figure 9.).

Lemma 2. Assume that Local(L, p) exists. Then Local(2L+2, L+p+1) exists (Figure 10.).

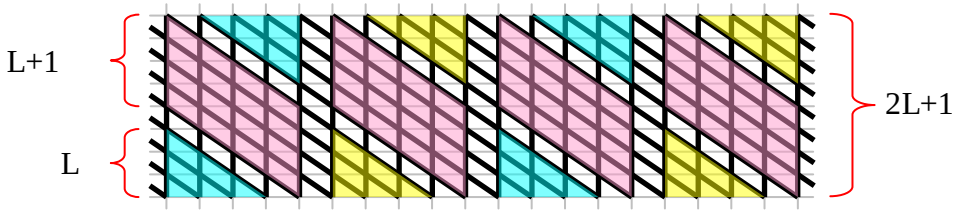


Figure 9. Crucial rows of each region of width 2L+1.

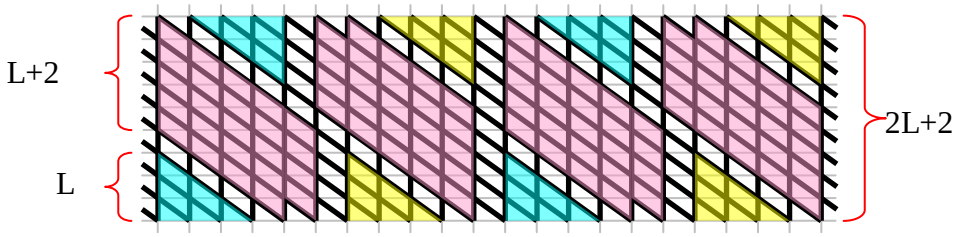


Figure 10. Crucial rows of each region of width 2L+2.

Step 3. Combining the above, we find that:

(1) For points of S_1, the labels are L = 4, 5, 6, so the result follows from Step 1.

(2) For the two points (3, 20) and (4, 23) of S_2 the labels are L = 7, 8, so the result from Step 1.

(3) For the other 6 points of S_2, we see that the labels are ranging from 9 to 14, so the result follows from Step 2.

(4) By repeated applications of Step 2 to each point of S_u, $3 \leq u \leq 8$, we see that Main Result 2 holds.

Outline of the Proof of Lemma 1:

Goal:

Writing L' = 2L+1 and p' = L+p, we are to prove that after each move by White, the number of black stones in each unblocked row can be kept no bigger then L'–p'–1 = L–p.

Shuffling:

After each transformed region is painted with yellow, blue and red according to the pattern indicated in Figure 8., we then shuffle the yellow parts into one infinite strip, the blue parts into one infinite strip as indicated in Figure 11., and leave the red parts alone (Figure 12.).

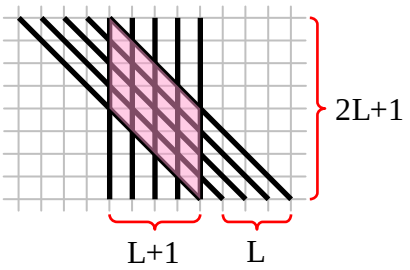


Figure 11. Red part.

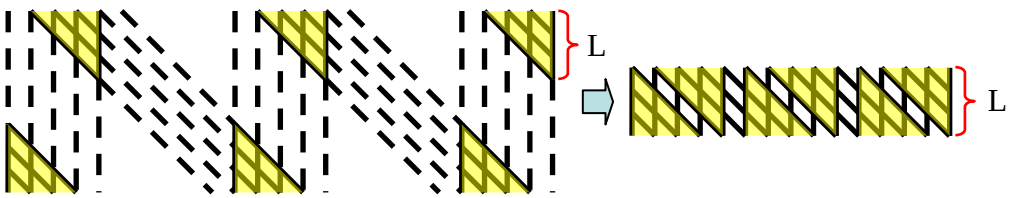


Figure 12. Yellow part.

Goal is achieved by showing:

After each move by White, the number of black stones in each unblocked crucial row meets exactly one of the two requirements given in last two horizontal rows of Table 1:

Table 1. State maintained by White.

	Red	Yellow	Blue
Requirement 1	≤ 1	$\leq L-p-1$	0
Requirement 2	≤ 1	0	$\leq L-p-1$

This is made possible when the induction hypothesis is applied to each of the three parts. Therefore, after each move by White, the number of black stones in an unblocked crucial row can be restricted to at most L–p.

<u>Outline of the Proof of Lemma 2:</u>

This is similar to Lemma 1, except Figure 10. is used.

Therefore, the desired result holds for points on the boundary, consequently, the whole shaded region.

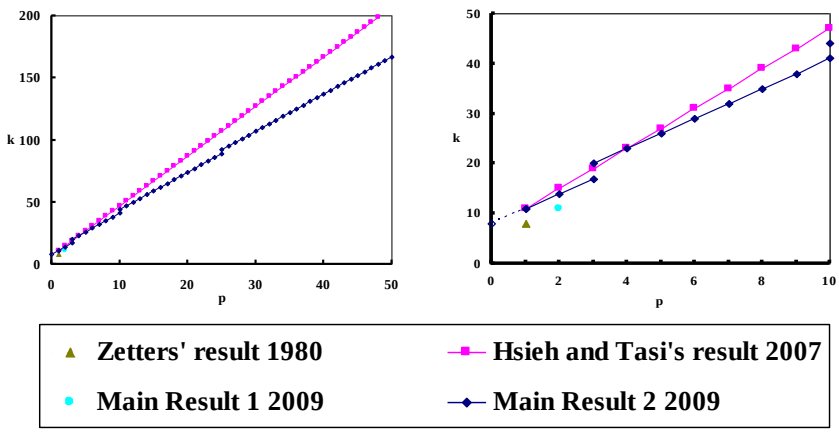


Figure 13. Background and Main Results.

Conclusions:

1. White can force a draw in the (11, 2)-game.

2. For each fixed p ≥ 1, if $k \geq 8+3p+3\lceil \log_2((k+7)/24) \rceil$, then White can force a draw in the (k, p)-game.

3. Ongoing investigation: Find ***all*** (k, p)-games that may reach a draw.

References:

1. Chiang, S.-H., Wu, I-C., and Lin, P.-H., On Draw K-in-a-Row Games, accepted for publication in the Proceedings of the 12th Conference on Advances in Computer Games (ACG12), Pamplona, Spain, May 2009.

2. Wu, I-C. and Huang, D.-Y., A New Family of k-in-a-row Games, The 11th Conference on Advances in Computer Games (ACG11), Taipei, Taiwan, August 2005.

3. Berlekamp, E. R., Conway, J. H., and Guy, R. K., Winning Ways for your Mathematical Plays, Vol. 3, 2nd ed., A K Peters. Ltd. Canada, 2003.

4. Zetters, T.G.L., 8 (or more) in a row, American Mathematical Monthly, Vol. 87, pp. 575-576, 1980.

5. Pluhar, A., The accelerated k-in-a-row game, Theoretical Computer Science, Vol. 271, pp. 865-875, 2002.

6. Hsieh, M.-Y. and Tsai, S.-C., On the fairness and complexity of generalized k-in-a-row games, Theoretical Computer Science, Vol. 385, pp. 88-100, 2007.