

# 臺灣二〇〇八年國際科學展覽會

科 別：物理與太空科學

作品名稱：翻轉「膜」力

得獎獎項：佳作

學校 / 作者：國立新竹女子高級中學  
國立新竹女子高級中學

曾琬翔  
張皓婷

## 作者簡介



曾琬翔(左)

目前就讀於新竹女中數理資優班三年級，畢業於新竹光華國中數理資優班，就讀期間曾參加過兩次科展，皆獲得良好的成績。對於事物有強烈的好奇心，勇於挑戰新事物。透過這次參展經驗，使我了解科學研究不僅需要投入多時間，毅力與耐心更是重要。最後感謝老師、同學，因為大家的鼓勵與協助，才能完成這次的研究。

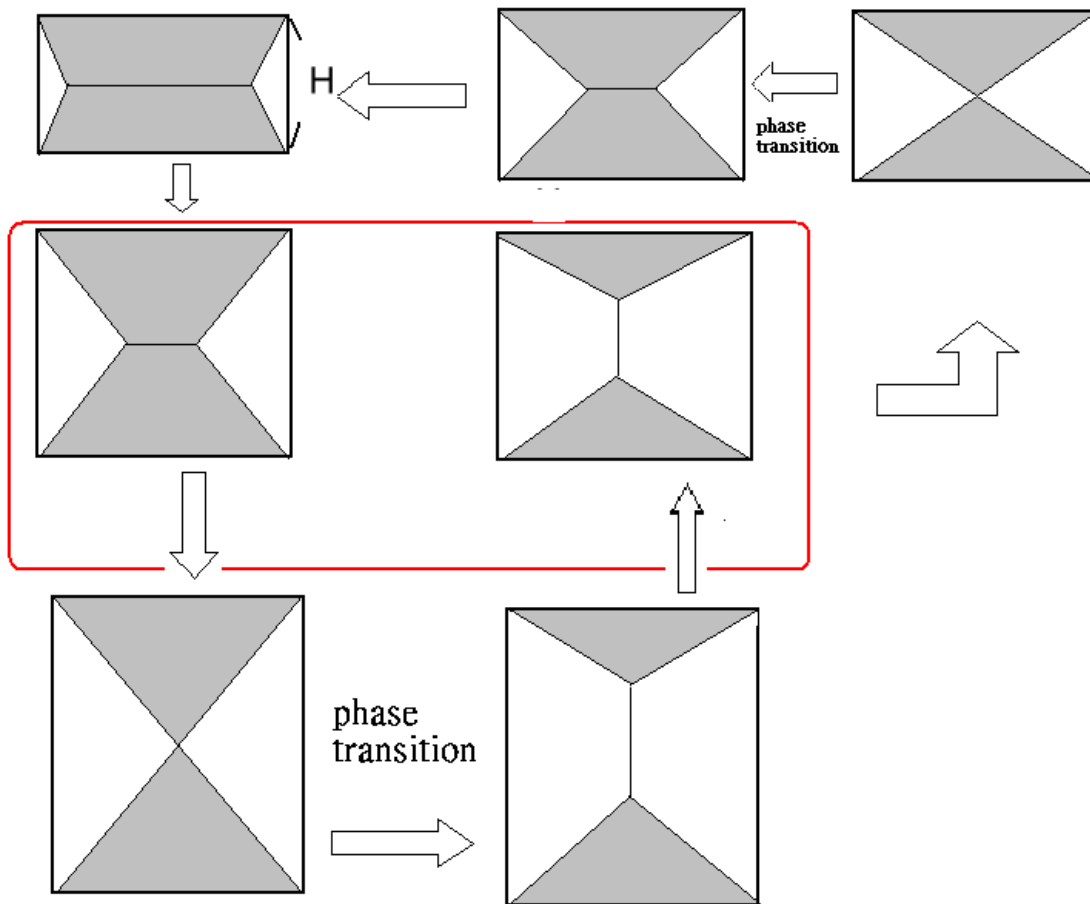
張皓婷(右)

目前就讀於新竹女中數理資優班三年級，個性活潑、開朗，曾擔任三任班聯會代表。樂於參加各種科學競賽、班上活動以及社團。這次的研究是一個特別的經驗，投入了許多時間與心力，從中學習到許多不同思考方法與科學實驗技巧。儘管過程中遇到許多瓶頸，但最後都一一克服，對我而言，是求學階段一次珍貴的回憶。

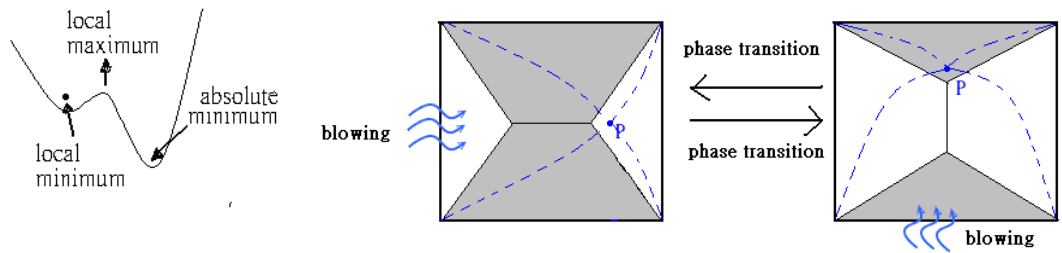
## Abstract

The starting point of this experiment is to study the structure of soap-film. By changing the height of the triangular prisms, cuboids and pentagonal prisms, I observed the patterns set by the soap within the frameworks. It is surprised that when the proportion of prism is in a specific range, the phase in the middle of the structure will overturn 90 degree and then transmitted into another kind of balance pattern. I named this process “phase transition”.

According to the experiment ,we can conclude the change of film patterns within variable prisms are all applied to this regular cycle: :



We know the soap films are forever attempting to minimize their energy. It stands to reason that surface tension tend to set up the film in its minimal surface. From the point of Mathematic, each structure should have only one single balance pattern, which is set up on the base of Fermat point and this pattern should stand to the minimize of it's energy. However, we discovered that in some specific cases, one structure can allowed two kinds of balance films-patterns to exist. In these cases, any small vibration can cause the happening of “phase transition”. To sum up, I presume some structures have two different types of balance film-patterns: one of which stands to the local minimum (in this condition the pattern's surface area isn't the smallest); the other stands to the absolute minimum (in this condition the pattern's surface area is the smallest). <Picture one>



<Picture one>

<picture two>

There is an energy valley separate local minimum from absolute minimum. The second pattern (local minimum) will appear when the structure is blocked from attaining its absolute minimum, but surface intention is not powerful enough to support the film jumping over the energy valley. In this condition, if we works on the structure (such as blowing), which would provide the film of energy to cross the valley, and then phase transition take place. Vice versa, we can also force the film to jump from absolute minimum to local minimum and phase transition will occur as well. In a word, phase transition can happen in each two way, which connects the two types of balance pattern.

<Picture two>

This report lays stress to find out the condition of phase transition. We also analyze the structure of soap-film by its included angles and surface area in hope to go deep into the science of soap-film.

## 壹、 研究摘要

我們實驗的出發點在於研究泡膜的立體結構。藉由改變正立方柱的高，觀察其平衡薄膜形式，意外的發現當正立方柱的邊長比在某個範圍時，泡膜結構中央會瞬間 90 度翻轉，形成另一種平衡型式，我們將這個過程命名為**面轉變(Phase Transition)**。爲了進一步了解面轉變發生的相關因素，我們設計了一連串的實驗，針對正三角柱、正四角柱、正五角柱、正六角柱發生面轉變的時機和條件分析討論。

此外，我們還分析了泡膜結構中**膜與膜夾角的特性**、**最小表面積**和**表面能**之間的相關性，對於泡膜的立體結構做了一系列深入的探討。

## 貳、 研究動機

有一次去參觀台中科博館，那次的展覽當中有一項很特別的作品，我們看見泡膜包圍著柱體模型，而在支架當中泡膜呈現出一種很不同的形狀結構「咦！泡泡不是都是圓形或不規則形的嗎？這種結構好奇怪啊！」這個疑問在我們的腦海成形，越來越壯大的好奇心更是如同滔滔江水滾滾而來。歷經了千辛萬苦，我們自己手工完成了三角柱、四角柱、五角柱甚至六角柱的支架，而每種支架都包含了三種不同大小的規格，是不是不同形狀的支架中會有不同的結構呢？而大小會不會有影響呢？會不會有什麼出乎意料的現象產生呢？所以我們開始進行對泡膜力學所展開的實驗。

## 參、 研究目的

- 一、 觀察泡膜在不同正立方柱中的立體膜結構
- 二、 探討「膜」力平衡結構中膜與膜夾角必然特性
- 三、 研究中央膜“面轉變”發生的時機與因素
- 四、 探討**最小表面積和能量**的相關性

## 肆、 實驗原理

### 一、【表面能(Surface energy)】

液體的表面分子，受到各方引力不均衡，造成液體表面趨向於收縮成最小之表面積，其所做的功稱爲表面能。液體之表面張力(Surface tension)  $\gamma$  即單位面積上的表面能，由熱力學導出之單位面積表面能  $H$ ，與表面張力  $\gamma$  之關係如下：

$$H = \gamma - T \left( \frac{\Delta \gamma}{\Delta T} \right)_p$$

其中  $\left( \frac{\Delta \gamma}{\Delta T} \right)_p$  表示定壓下面表面張力位溫度之變化率，

本實驗溫度變化不計，故  $H = \gamma$

## 二、【費瑪點】

如右圖，以三角形 $\triangle ABC$ 之三邊，分別向外做正三角形，得P點為這三個正三角形外接圓的交點，

則 $PA + PB + PC = \text{minimum}$ 。

P點為費瑪點

\*證明：

在三角形中任取一點E， $P \neq E$

則 $PA + PB + PC \leq EA + EB + EC$ 。

因為PAGB為一凸四邊形，根據托勒密定理：

$EA \cdot BG + EB \cdot AG \geq EG \cdot AB$ ；

等式成立於EAGB共圓----- (1)

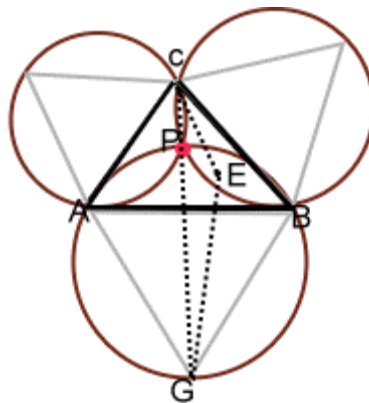
$\because AB = AG = BG \quad \therefore EA + EB \geq EG$

$\Rightarrow EA + EB + EC \geq EG + EC \geq GC$

即 $PA + PB + PC \leq EA + EB + EC$ ；

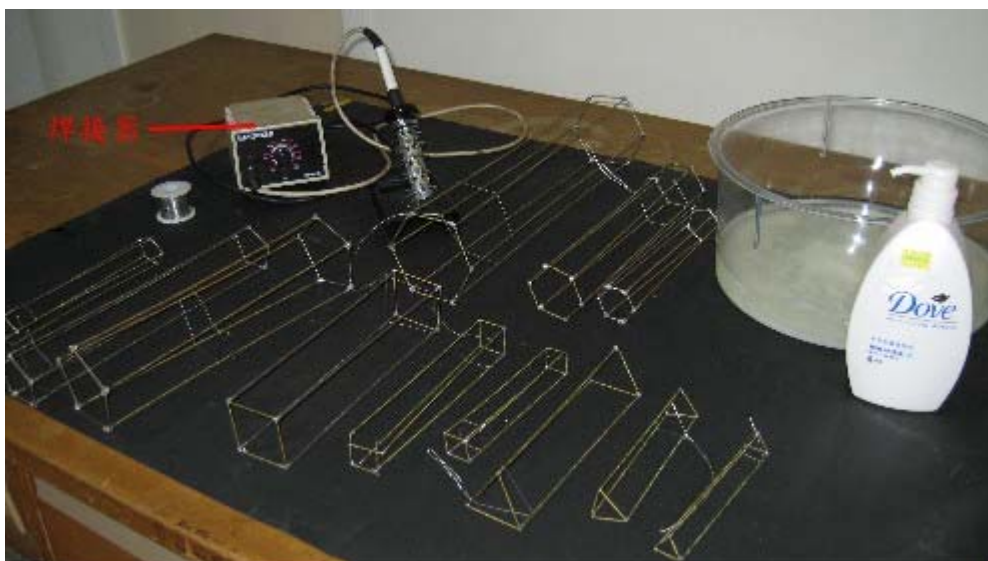
等式成立於G,P,C共線----- (2)

由(1)、(2)得知，當E=P時，會有極值產生。P點稱“費瑪點”。



## 伍、 研究設備與器材

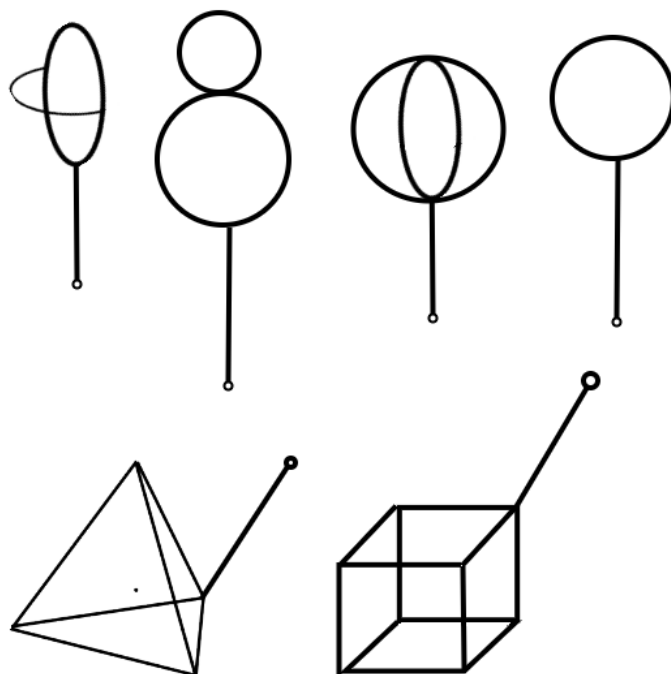
- |          |                     |
|----------|---------------------|
| 一、 不鏽鋼絲  | 八、 甘油               |
| 二、 銅條    | 九、 砂糖               |
| 三、 鉗子    | 十、 水                |
| 四、 焊槍    | 十一、 尺               |
| 五、 焊錫絲   | 十二、 數位相機            |
| 六、 助焊劑   | 十三、 Cabri 3D (繪圖軟體) |
| 七、 多芬洗髮乳 | 十四、 小畫家             |



## 陸、 研究過程與方法

### 一、 基本觀測

表面張力實驗器材組



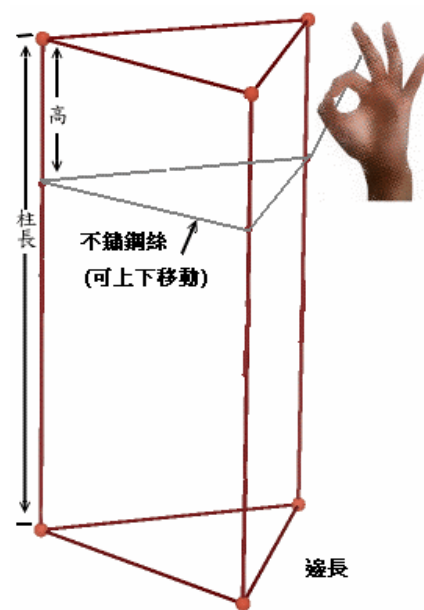
高二下物理表面張力研究泡膜的平衡型式，藉由觀察泡膜在不同的幾何圖形模型(如上圖)的薄膜型式，初步認識表面張力。我們觀察泡膜的立體結構因不同形狀的模型，有多樣化的呈現，決定展開進一步的討論。

### 二、 模型製作

本實驗主要是要探討泡膜在立體柱狀結構所形成平衡狀態，所以製作立體支架模型是此實驗相當重要的一環。為了使實驗的精確度更好，立體結構模型必須堅固及端正，並且不易生鏽。經過一連串的失敗後，老師認為焊接會是最好的方法，因此向朋友借了一套基本的焊接器材。將焊槍與焊錫絲，同時接觸到待焊位置，使熔錫能迅速固定銅條，

下表是我們需要的立體模型的尺寸：

邊長	2cm	3cm	5cm
正三角柱柱長	15cm	15cm	20cm
正四角柱柱長	15cm	20cm	25cm
正五角柱柱長	20cm	30cm	30cm
正六角柱柱長	20cm	30cm	40cm



(以正三角柱為例，其他類推)

### 三、 泡膜配方

多芬洗髮精：水=1：6 ； 2 升溶液約加入 3 大匙甘油

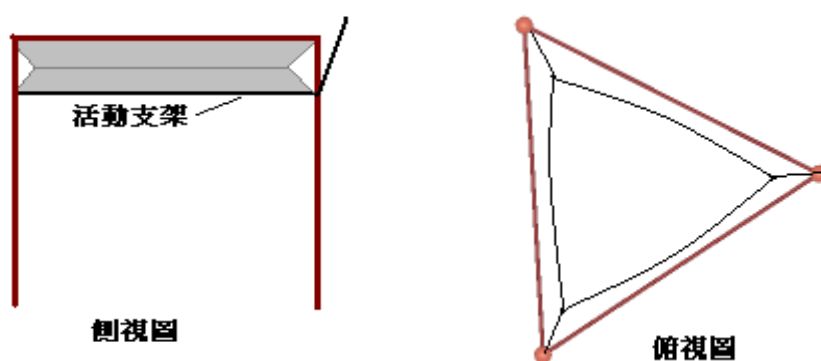
### 四、 名詞定義

- (1) **中央膜**：正立方柱形成泡膜，達平衡時產生穩定結構之中間截面。
- (2) **臨界點**：中央膜面的面積縮小為一個點的位置。
- (3) **面轉變(Phase Transition)**：正立方柱穩定結構之中央膜隨著不銹鋼絲上下移動的過程，中央膜由垂直翻轉成平行，或平行翻轉成垂直的現象。

### 五、 實驗步驟

(實驗一)正三角柱，固定底邊長，改變其高，觀察並記錄泡膜面轉變的過程

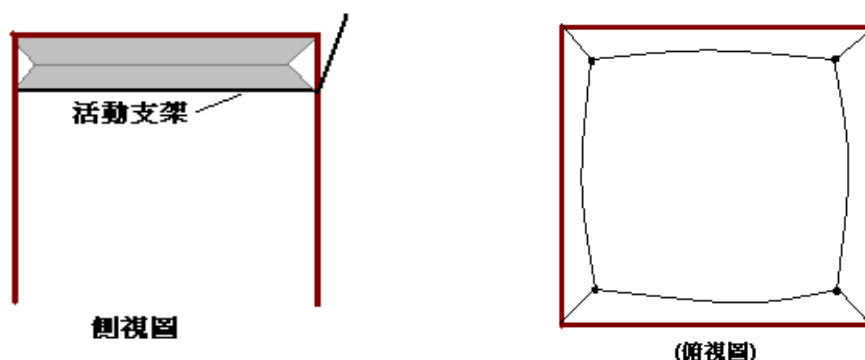
1. 將三角柱支架浸入已調配好的泡泡水中。
2. 確認每面支架皆有泡膜附著在上，如下圖。



3. 下拉活動支架使正三角柱的高增加，直至泡膜發生面轉變。記錄面轉變的過程，並測量相關結構長度。
4. 上拉支架縮短正三角柱的高，使泡膜發生第二次面轉變。紀錄其過程並測量相關結構長度。
5. 重複步驟 1-4 數次，得連續五組數據，平均分析之。

(實驗二)正四角柱，固定底邊長，改變其高，觀察並記錄泡膜面轉變的過程

1. 將四角柱支架浸入已調配好的泡泡水中。
2. 確認每面支架皆有泡膜附著在上，如下圖。

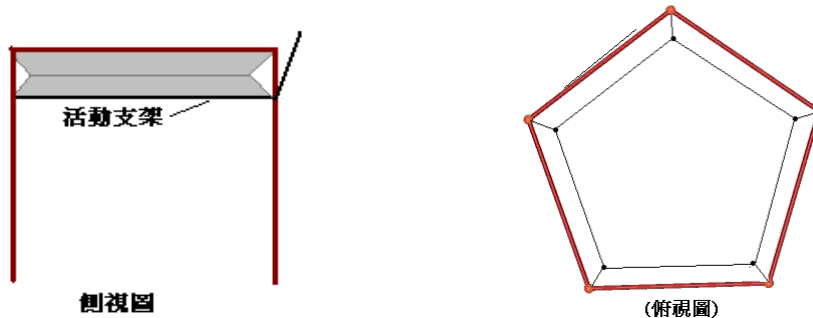




3. 下拉活動支架使正四角柱的高增加，直至泡膜發生面轉變。記錄相轉變的過程，並測量相關結構長度。
4. 上拉支架縮短正四角柱的高，使泡膜發生第二次面轉變。紀錄其過程並測量相關結構長度。
5. 重複步驟 1-4 數次，得連續五組數據，平均分析之。

**(實驗三)正五角柱，固定底邊長，改變其高，觀察並記錄泡膜面轉變的過程**

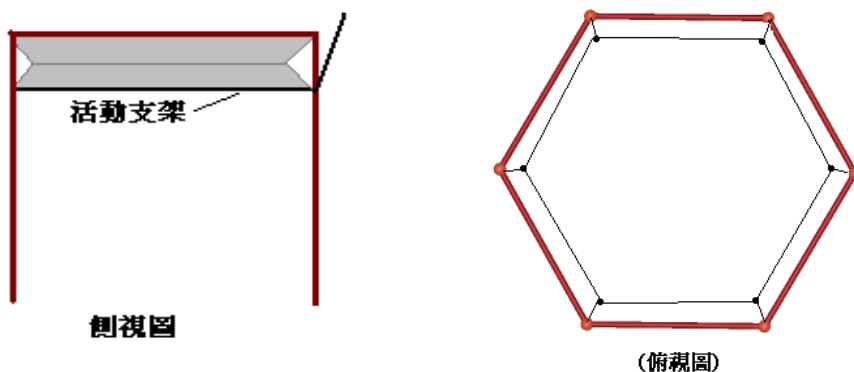
1. 將正五角柱支架浸入已調配好的泡泡水中。
2. 確認每面支架皆有泡膜附著在上，如下圖。



3. 下拉活動支架使正五角柱的高增加，直至泡膜發生面轉變。記錄相轉變的過程，並測量相關結構長度。
4. 上拉支架縮短正五角柱的高，使泡膜發生第二次面轉變。紀錄其過程並測量相關結構長度。
5. 重複步驟 1-4 數次，得連續五組數據，平均分析之。

**(實驗四)正六角柱，固定底邊長，改變其高，觀察並記錄泡膜面轉變的過程**

1. 將正六角柱支架浸入已調配好的泡泡水中。
2. 確認每面支架皆有泡膜附著在上，如下圖。



3. 下拉活動支架使正六角柱的高增加，直至泡膜發生面轉變。記錄相轉變的過程，並測量相關結構長度。
4. 上拉支架縮短正六角柱的高，使泡膜發生第二次面轉變。紀錄其過程並測量相關結構長度。
5. 重複步驟 1-4 數次，得連續五組數據，平均分析之。

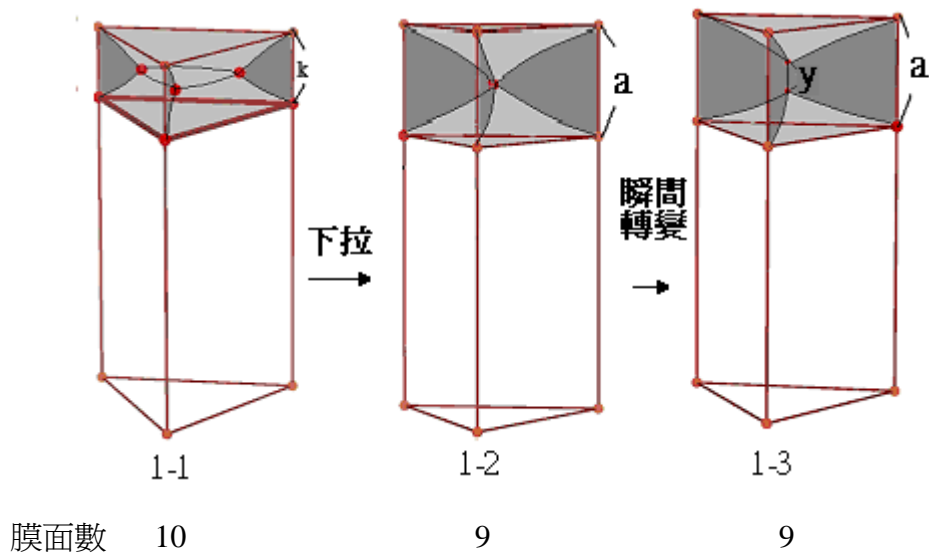
(實驗五)

1. 測量正三角柱發生面轉變的範圍
2. 測量正四角柱發生面轉變的範圍
3. 測量正五角柱發生面轉變的範圍

柒、研究結果

(實驗一) 固定正三角柱底面邊長，改變其高，泡膜變化如下： $(a > b > k)$

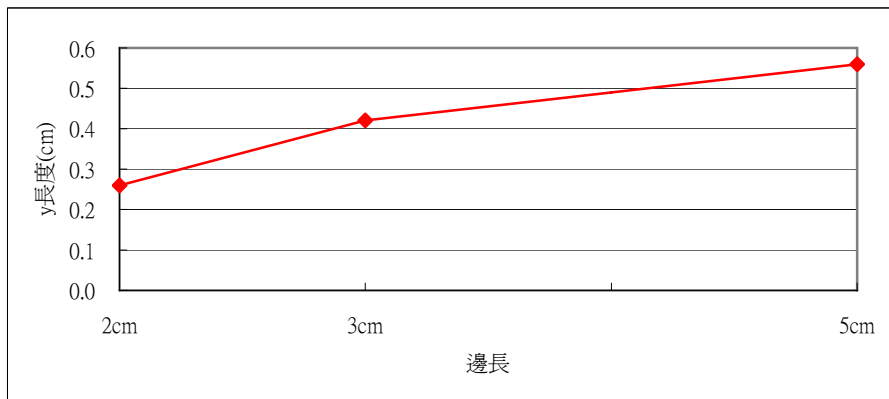
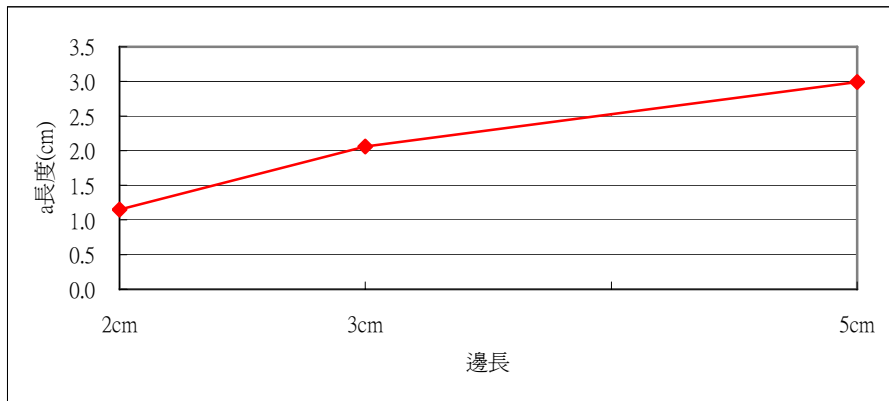
【前半段】



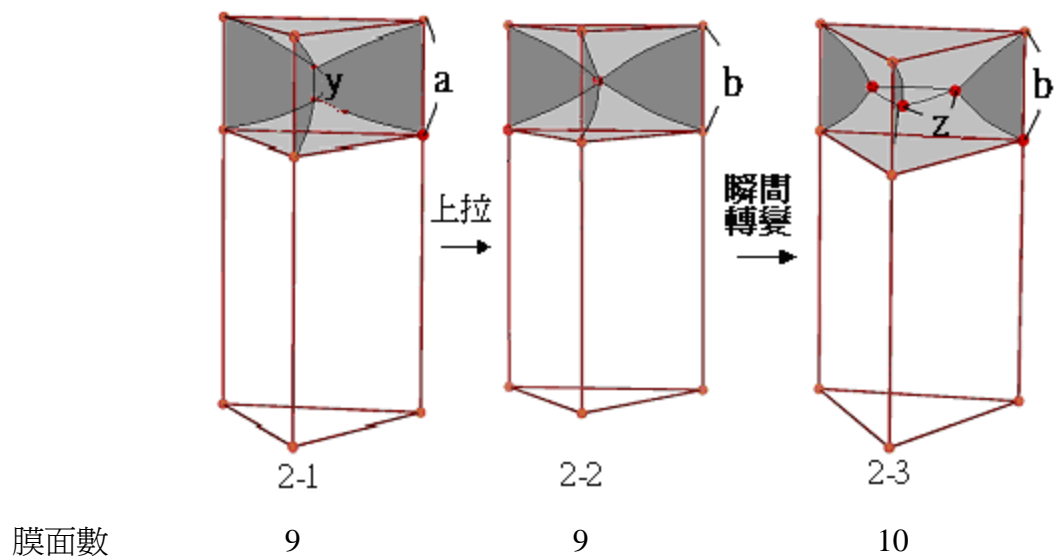
邊長 2cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
a (cm)	1.10	1.20	1.15	1.10	1.20	1.15
y (cm)	0.20	0.30	0.25	0.30	0.25	0.26

邊長 3cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
a (cm)	2.00	2.00	2.10	2.00	2.20	2.06
y (cm)	0.40	0.40	0.40	0.50	0.40	0.42

邊長 5cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
a (cm)	3.00	2.90	3.00	2.90	3.00	2.96
y (cm)	0.60	0.50	0.60	0.50	0.60	0.56



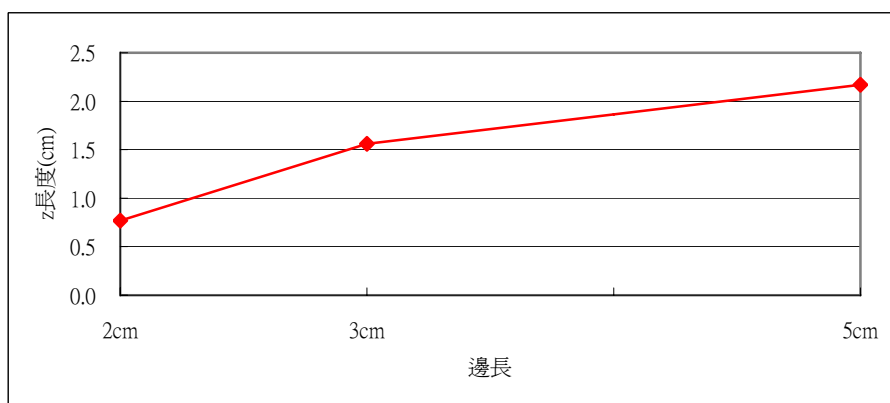
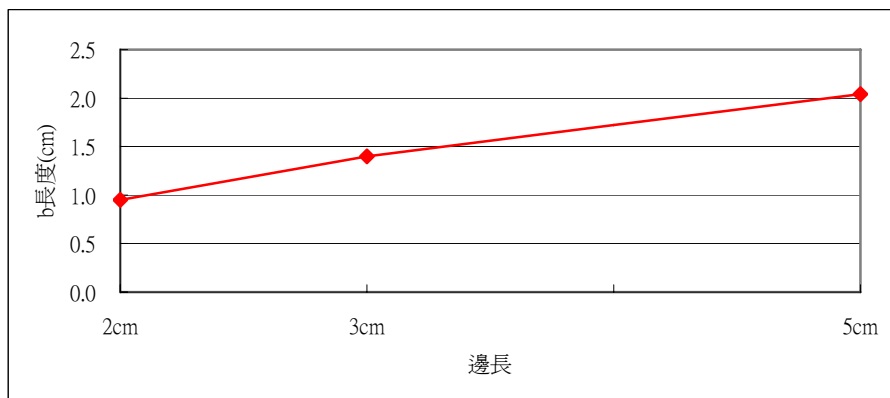
【後半段】



邊長 2cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
b (cm)	0.90	0.90	1.00	0.95	1.00	0.95
z (cm)	0.75	0.80	0.80	0.80	0.70	0.77

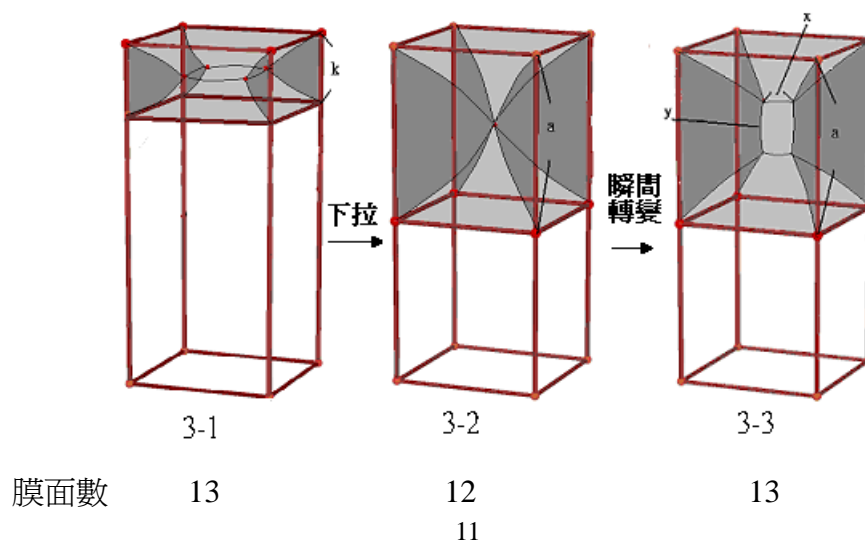
邊長 3cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
b (cm)	1.30	1.40	1.50	1.40	1.40	1.40
z (cm)	1.60	1.60	1.50	1.50	1.60	1.56

邊長 5cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
b (cm)	2.10	2.00	2.00	2.00	2.10	2.04
z (cm)	2.20	2.10	2.20	2.25	2.10	2.17



(實驗二) 固定正四角柱底面邊長，改變其高，泡膜變化如下： $(a > b > k)$

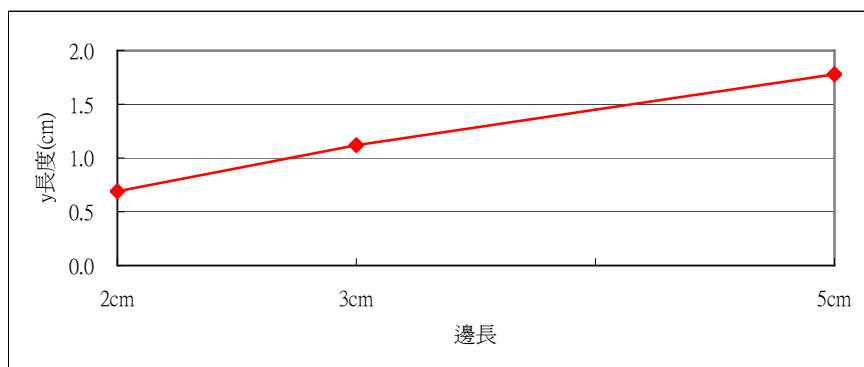
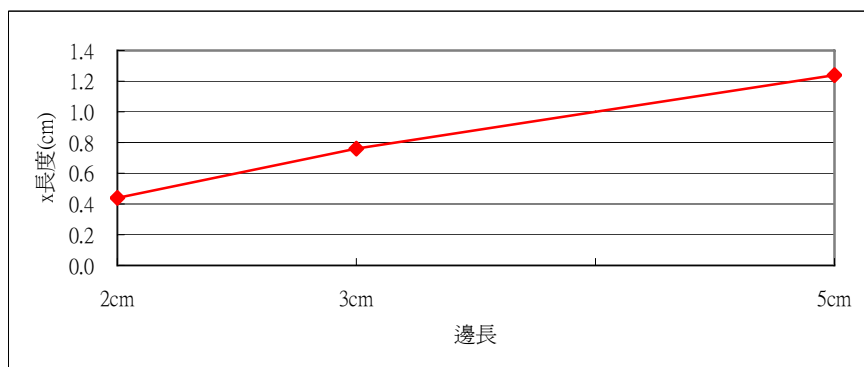
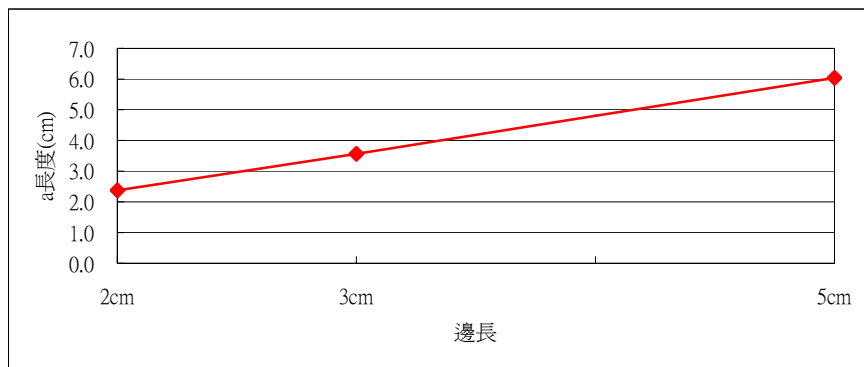
【前半段】



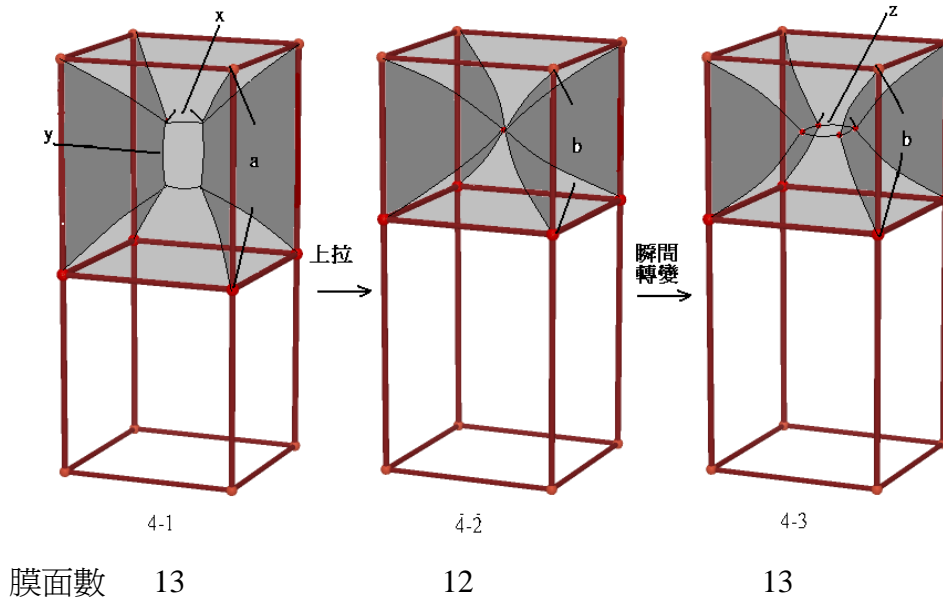
邊長 2cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
a (cm)	2.35	2.35	2.40	2.30	2.45	2.37
x (cm)	0.45	0.50	0.35	0.45	0.45	0.44
y (cm)	0.70	0.73	0.65	0.60	0.75	0.69

邊長 3cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
a (cm)	3.60	3.60	3.50	3.50	3.60	3.56
x (cm)	0.70	0.80	0.80	0.70	0.80	0.76
y (cm)	1.00	1.20	1.10	1.10	1.20	1.12

邊長 5cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
a (cm)	6.10	6.00	6.00	6.00	6.10	6.04
x (cm)	1.30	1.20	1.20	1.20	1.30	1.24
y (cm)	1.80	1.80	1.80	1.70	1.80	1.78



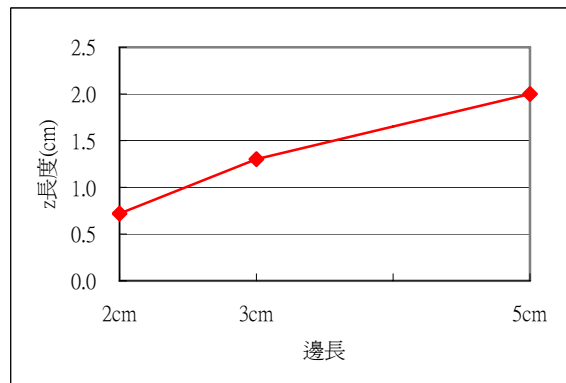
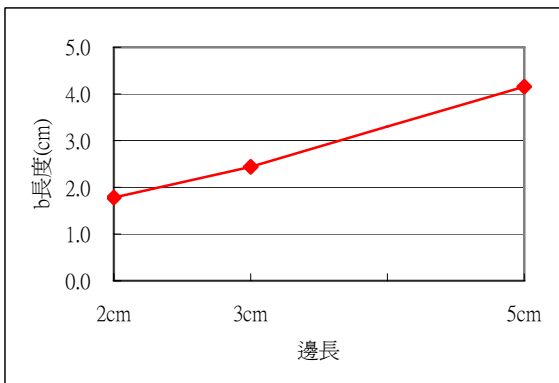
【後半段】



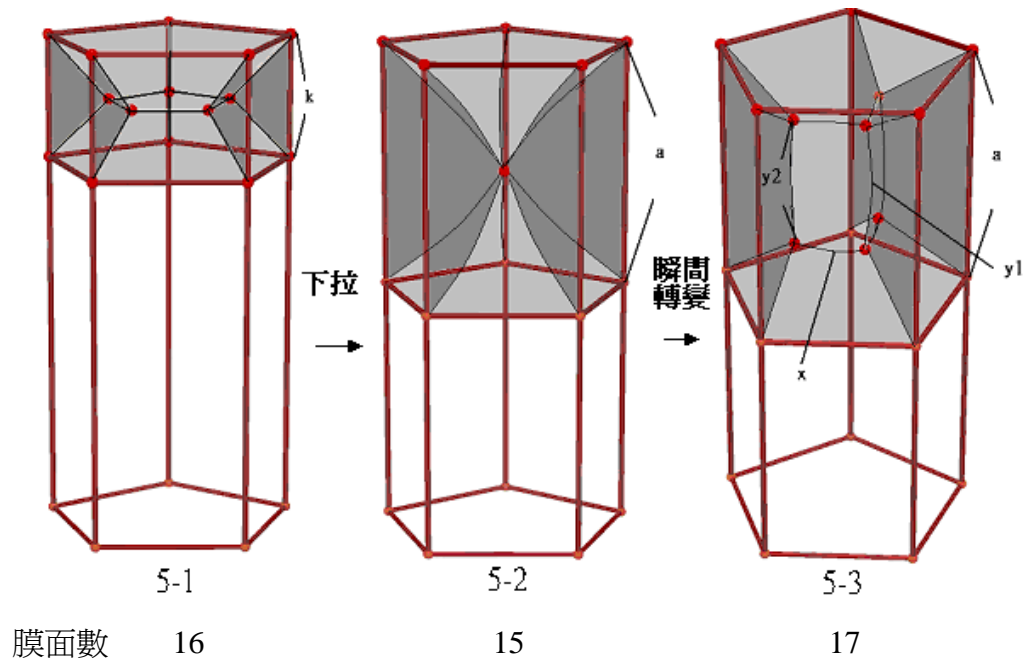
邊長 2cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
b (cm)	1.80	1.80	1.70	1.85	1.75	1.78
z (cm)	0.80	0.75	0.65	0.75	0.65	0.72

邊長 3cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
b (cm)	2.50	2.40	2.40	2.40	2.50	2.44
z (cm)	1.20	1.30	1.40	1.30	1.30	1.30

邊長 5cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
b (cm)	4.20	4.20	4.10	4.20	4.10	4.16
z (cm)	2.10	2.00	1.90	2.00	2.00	2.00



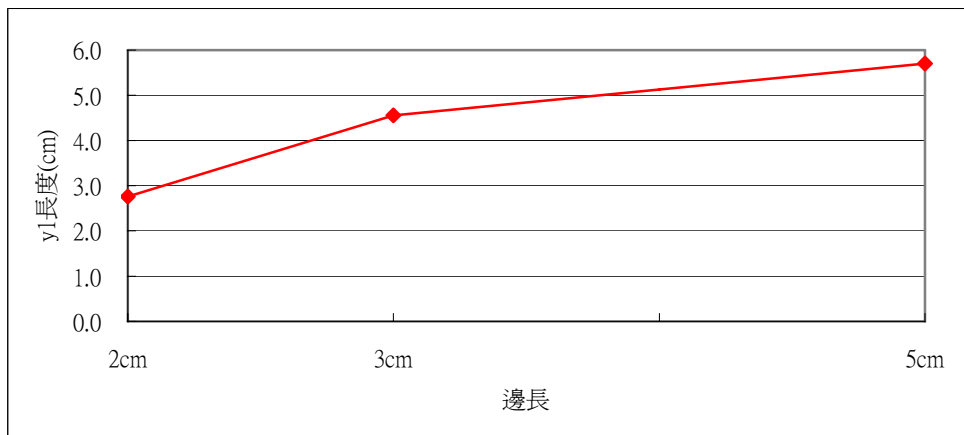
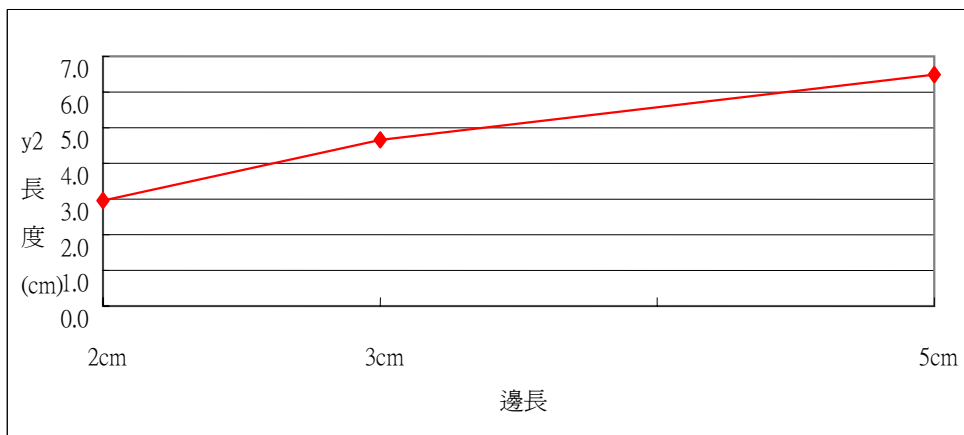
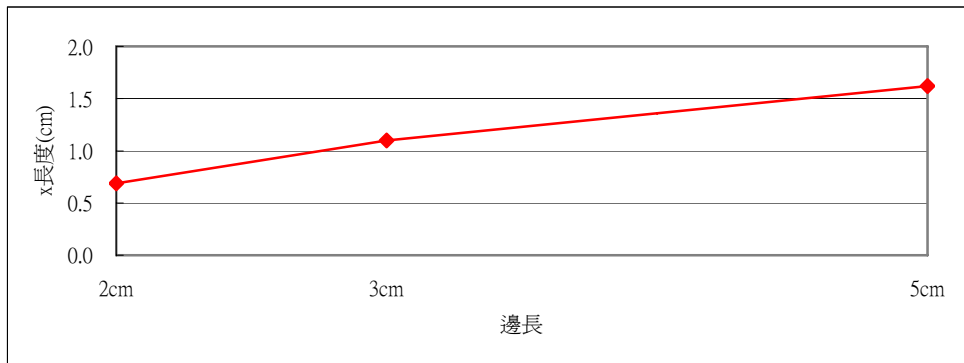
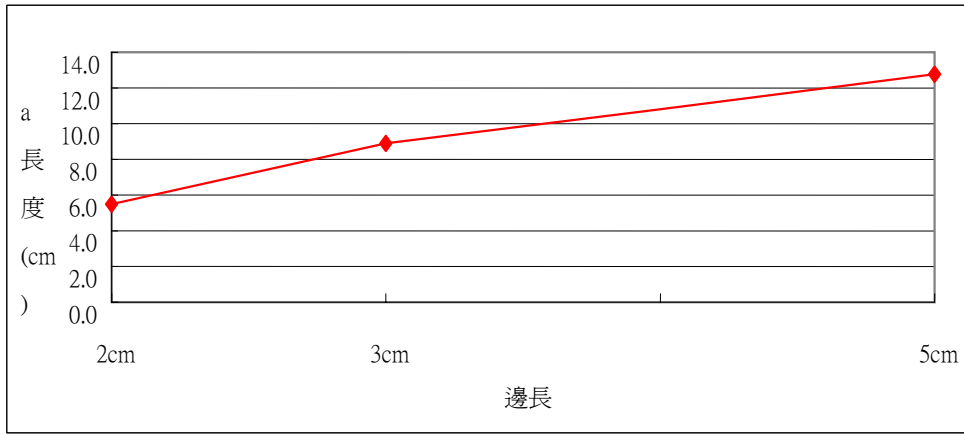
(實驗三) 固定正五角柱底面邊長，改變其高，泡膜變化如下： $(a > b > k)$   
 【前半段】



邊長 2cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
a (cm)	5.45	5.55	5.45	5.55	5.50	5.50
x (cm)	0.75	0.65	0.75	0.60	0.70	0.69
y1(cm)	2.65	2.80	2.80	2.75	2.80	2.76
y2(cm)	2.90	3.00	3.00	2.90	3.00	2.96

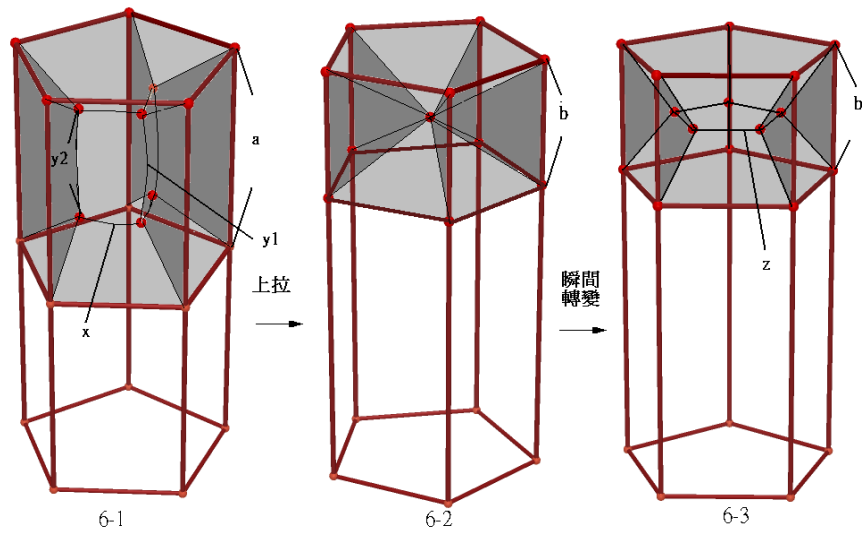
3cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
a (cm)	9.00	8.80	8.90	9.00	8.80	8.90
x (cm)	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
y1(cm)	4.50	4.60	4.60	4.60	4.50	4.56
y2(cm)	5.00	4.90	5.00	4.95	4.90	4.95

5cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
a (cm)	12.80	12.80	12.70	12.65	12.80	12.75
x (cm)	1.70	1.70	1.50	1.60	1.60	1.62
y1(cm)	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70
y2(cm)	6.30	6.60	6.60	6.50	6.40	6.48





【後半段】

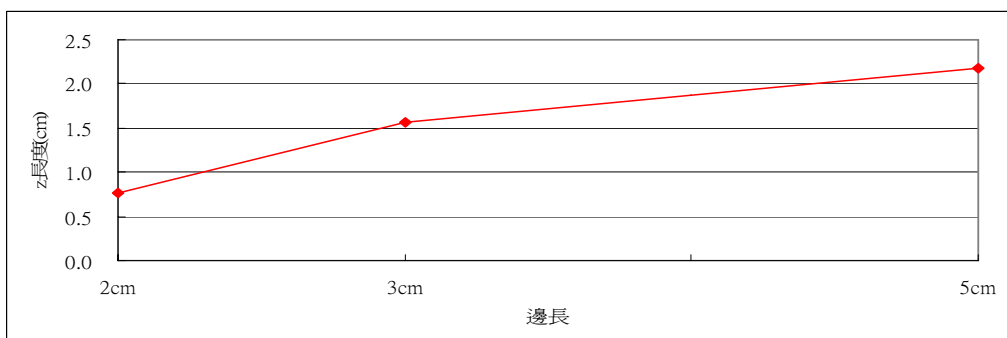
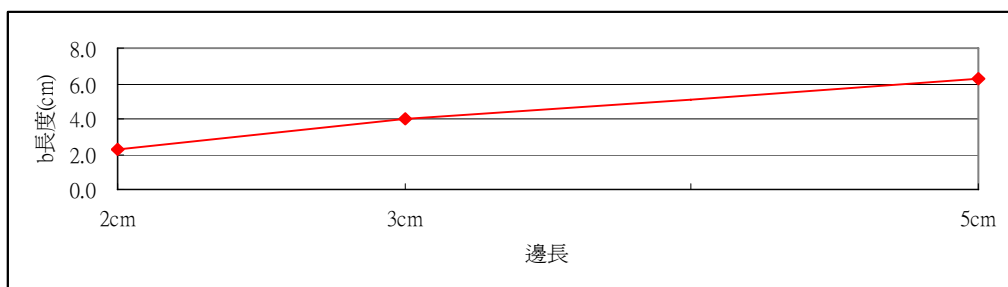


膜面數      17                                      15                                      16

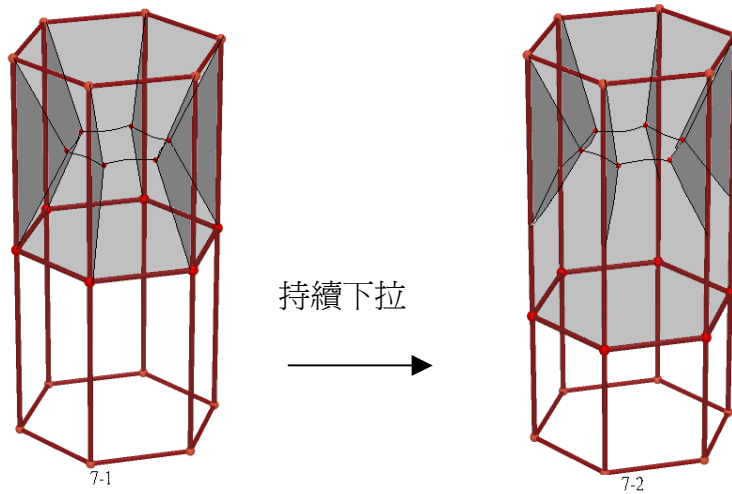
2cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
b (cm)	2.75	2.65	2.60	2.75	2.65	2.68
z (cm)	0.80	0.90	0.90	0.65	0.90	0.83

3cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
b (cm)	4.10	4.00	3.90	3.90	4.00	3.98
z (cm)	1.60	1.40	1.60	1.50	1.50	1.52

5cm	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均
b (cm)	6.30	6.40	6.10	6.20	6.30	6.26
z (cm)	1.80	1.90	1.90	1.90	1.80	1.86



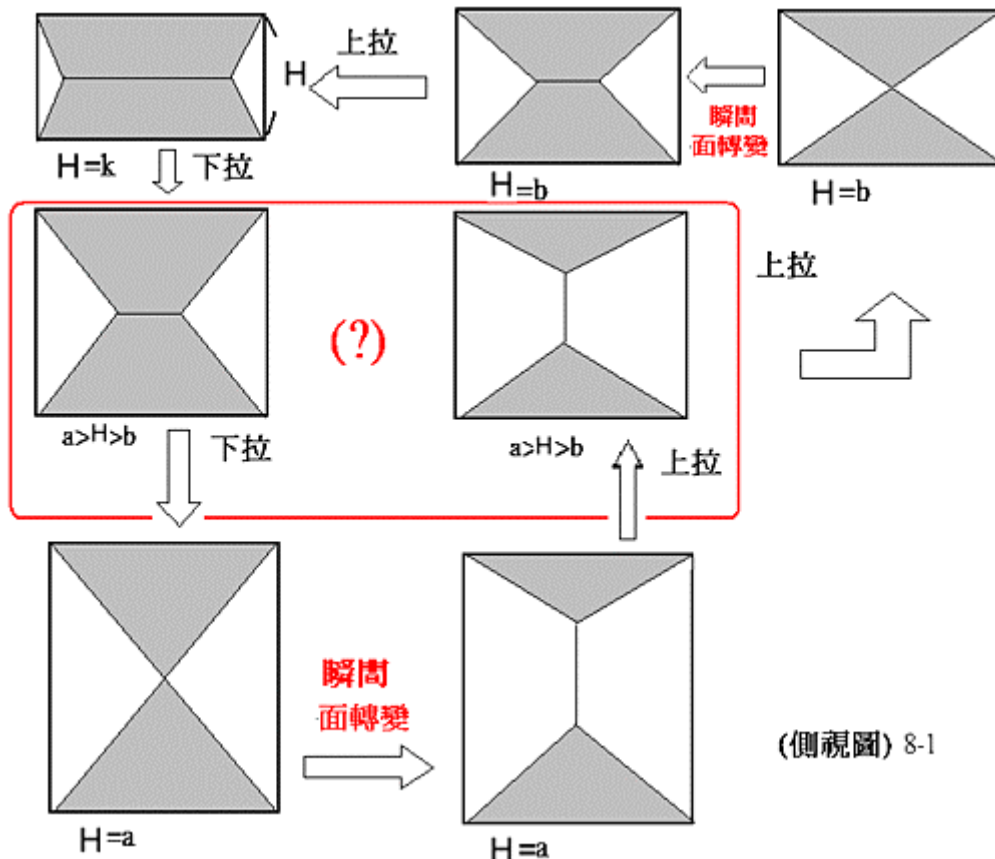
(實驗四)固定正六角柱底面邊長，改變其高，我們發現就算不斷增加正六角柱的高，仍然無法像其他立體結構般出現面轉變的現象，其泡膜變化如下：



綜合以上四個實驗過程，得知正立方柱(正五角柱、四角柱、三角柱)，除了正六角柱外，在某一特定邊長比時，都會發生面轉變，其循環過程如下：

( $a > b > k$ ； $H$  為變動中的高)

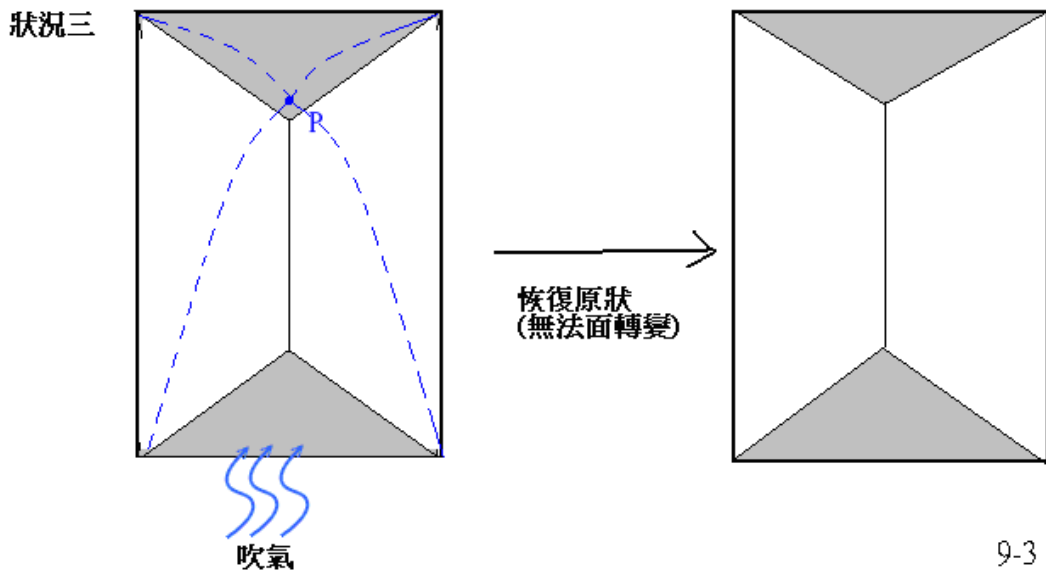
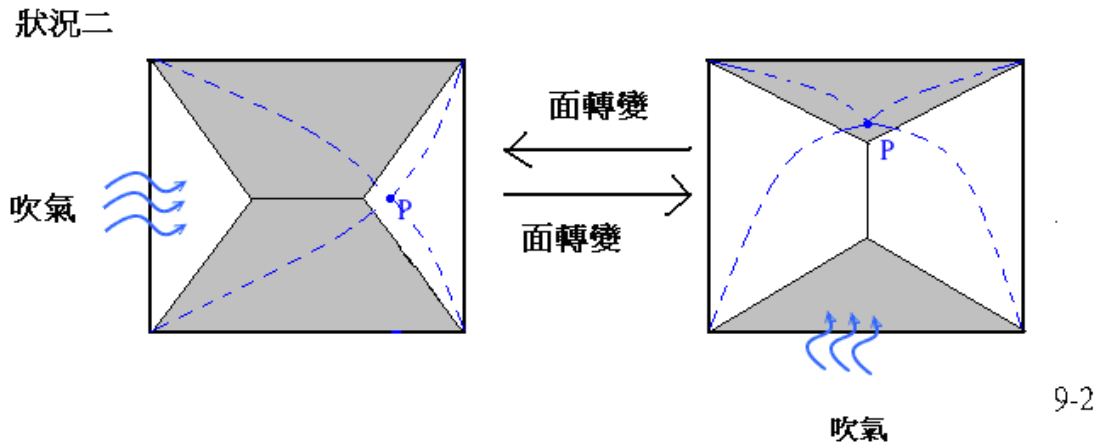
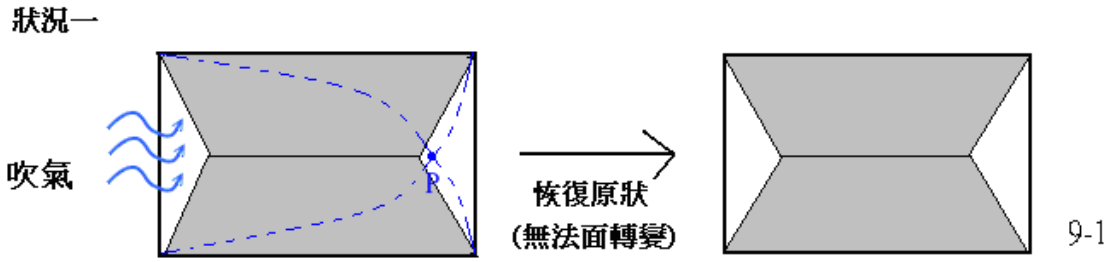
正立方柱面轉變循環圖



(側視圖) 8-1

由(?)發現在  $a > H > b$  的範圍中，竟然會因為上拉或下拉而有不同的平衡形式。我們回想實驗過程中，當  $H$  已經十分逼近  $a$  時，常常因為一些震動或者是外力而發生面轉變。我們猜測正立方柱之  $H$  在某個範圍內時，具有兩種平衡薄膜形式，並可雙向發生面轉變，因此設計實驗五來佐證我們的想法。

(實驗五)尋找正三角柱、正四角柱、正五角柱可雙向發生面轉變的範圍。  
對角柱的其中一面吹氣，發現有以下三種狀況：**(P：臨界點)**



調整正立方柱的高，使其處於狀況二的型態，發現此高度並不唯一，  
以逼近法來測量此範圍，找出高度的上限及下限，得以下結果：

下限~上限(cm) \ 邊長	2cm	3cm	5cm
正三角柱	0.90~1.10	1.40~1.80	2.20~2.80
正四角柱	2.00~2.25	2.80~3.30	4.90~5.60
正五角柱	3.00~4.35	5.10~7.00	8.00~11.00

依上頁表格算出上限~下限和邊長的比值，如下表。

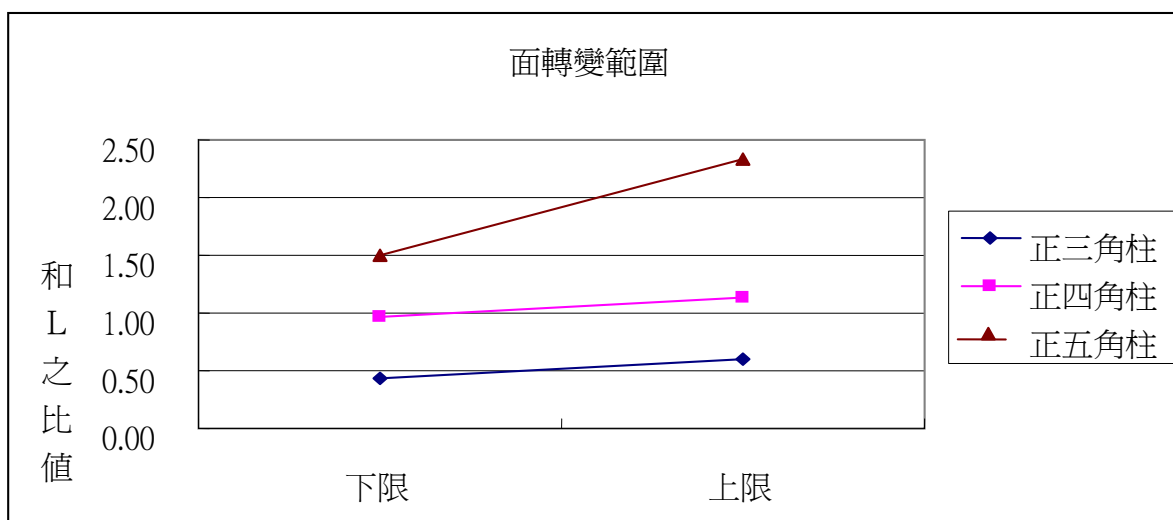
與 L 之比值 \ 邊長(L)	2cm	3cm	5cm
正三角柱	0.45L~0.55L	0.47L~0.60L	0.44L~0.56L
正四角柱	1.00L~1.13L	0.97L~1.10L	0.98L~1.12L
正五角柱	1.50L~2.18L	1.70L~2.33L	1.60L~2.20L

由上表得知，

當底面邊長為 L 時，正三角柱的高在 **0.44L~0.60L** 可雙向發生面轉變。

當底面邊長為 L 時，正四角柱的高在 **0.97L~1.13L** 可雙向發生面轉變。

當底面邊長為 L 時，正五角柱的高在 **1.50L~2.33L** 可雙向發生面轉變。



整理之前實驗所得數據，如下表：

cm \ 邊長(L)	2cm	3cm	5cm
正三角柱 a	1.15	2.06	2.96
正三角柱 b	0.95	1.40	2.04
正四角柱 a	2.37	3.56	6.04
正四角柱 b	1.78	2.44	4.16
正五角柱 a	5.50	8.90	12.75
正五角柱 b	2.68	3.98	6.26

與 L 之比值 \ 邊長(L)	2cm	3cm	5cm
正三角柱 a	0.58L	0.69L	0.59L
正三角柱 b	0.48L	0.47L	0.41L
正四角柱 a	1.19L	1.19L	1.21L
正四角柱 b	0.89L	0.81L	0.83L
正五角柱 a	2.75L	2.97L	2.55L
正五角柱 b	1.34L	1.33L	1.25L

## 分析上下限與 a、b 之間的關係

### 正三角柱

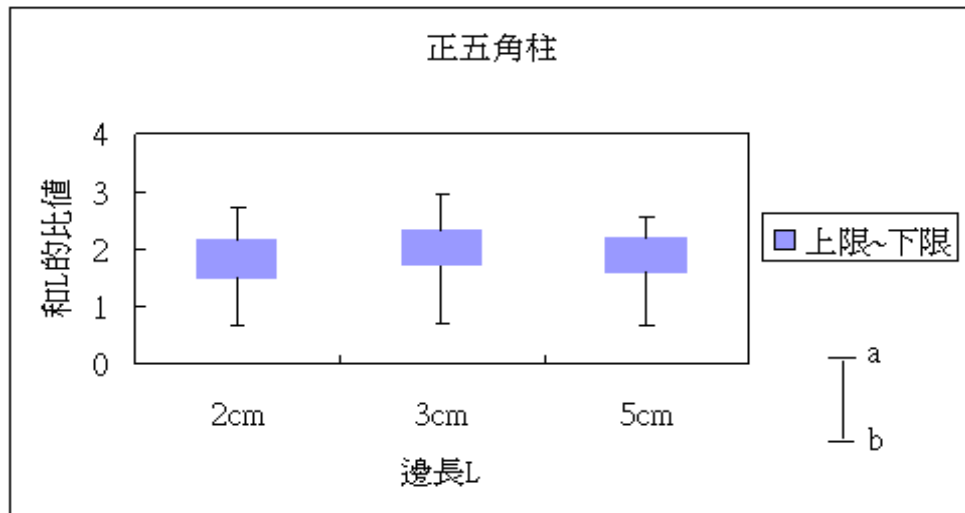
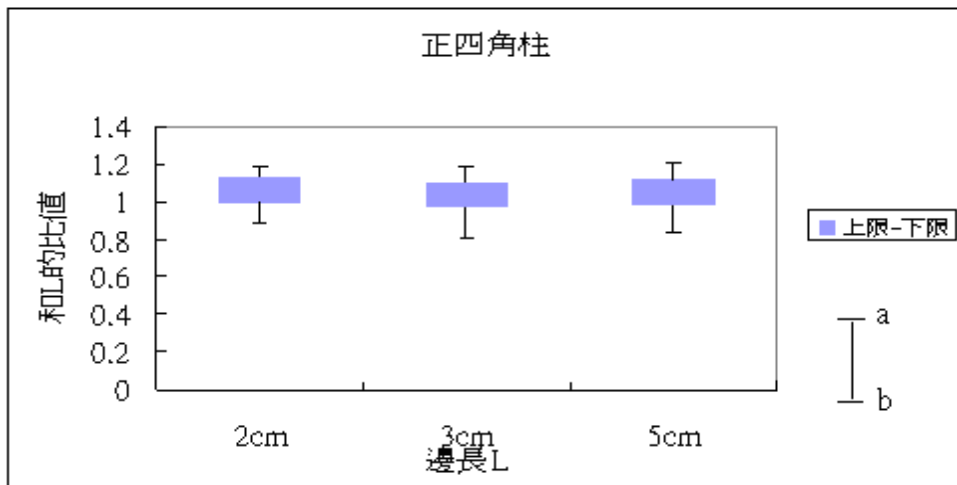
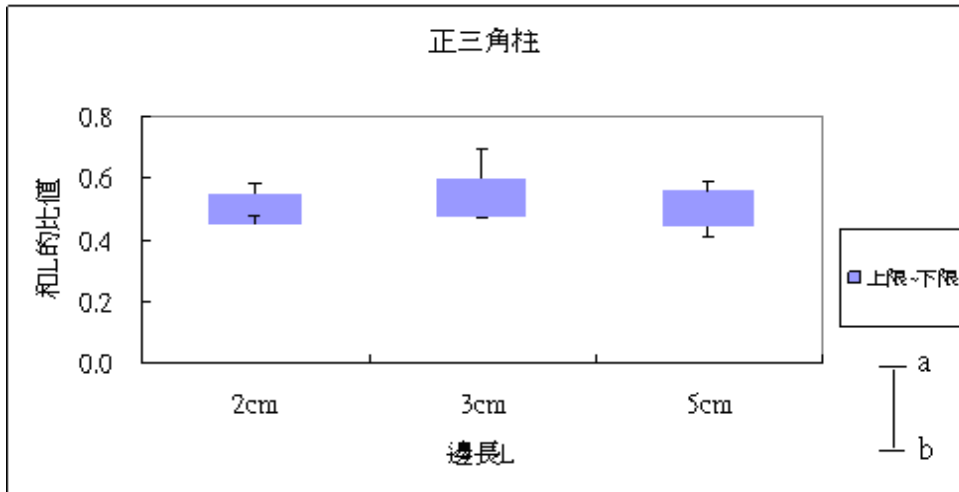
邊長(L) 與 L 之比值	2cm	3cm	5cm
a	0.58L	0.69L	0.59L
上限	0.55L	0.60L	0.56L
b	0.48L	0.47L	0.41L
下限	0.45L	0.47L	0.44L

### 正四角柱

邊長(L) 與 L 之比值	2cm	3cm	5cm
a	1.19L	1.19L	1.21L
上限	1.13L	1.10L	1.12L
b	0.89L	0.81L	0.83L
下限	1.00L	0.97L	0.98L

### 正五角柱

邊長(L) 與 L 之比值	2cm	3cm	5cm
a	2.75L	2.97L	2.55L
上限	2.18L	2.33L	2.20L
b	1.34L	1.33L	1.25L
下限	1.50L	1.70L	1.60L



發現  $a > \text{上限}$  且  $b < \text{下限}$ ，得知：

當  $H < \text{下限}(b \text{ 點})$  時，薄膜平衡型式如圖 9-1；

當  $\text{下限} \leq H \leq \text{上限}$  時，薄膜平衡型式如圖 9-2；

當  $H > \text{上限}(a \text{ 點})$  時，薄膜平衡型式如圖 9-3。

(例外：邊長兩公分之正三角柱  $b > \text{下限}$ ，差距為  $0.03 * 2 = 0.06\text{cm}$ ，差距極小，推測是實驗誤差所致。)

## 捌、實驗討論

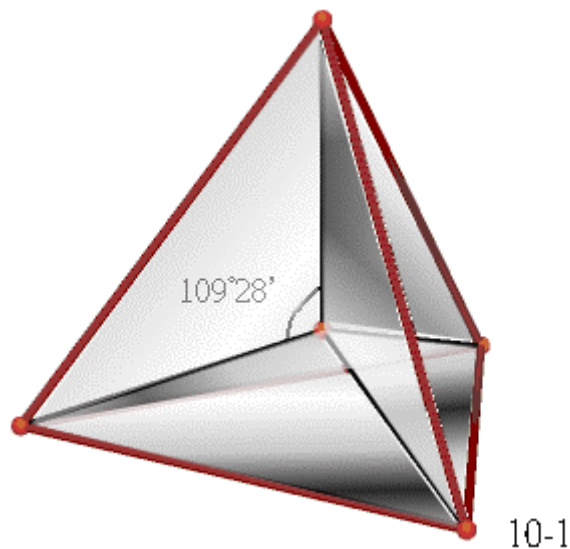
### (討論一) 平衡薄膜形式的建立原則

#### 一、引用原理：

##### 【普拉圖泡膜幾何通則】

由比利時科學家普拉圖(Joseph A. F. Plateau)提出：

- (1) 附著在鐵絲框架(或其他封閉的結構體)上的泡膜，就有平滑的結構。
- (2) 泡膜之間只會以下列兩種方式之一相連接：三個表面沿著一平滑曲線相連，或六個平面形成四條曲線在一個頂點相接。
- (3) 以曲線或同一頂點相接的泡膜，其面與面之之間夾角相等：  
三個表面相接時夾角為  $120^\circ$ ，六個表面相接時夾角約為  $109^\circ 28'$  (Maraldi angle)。



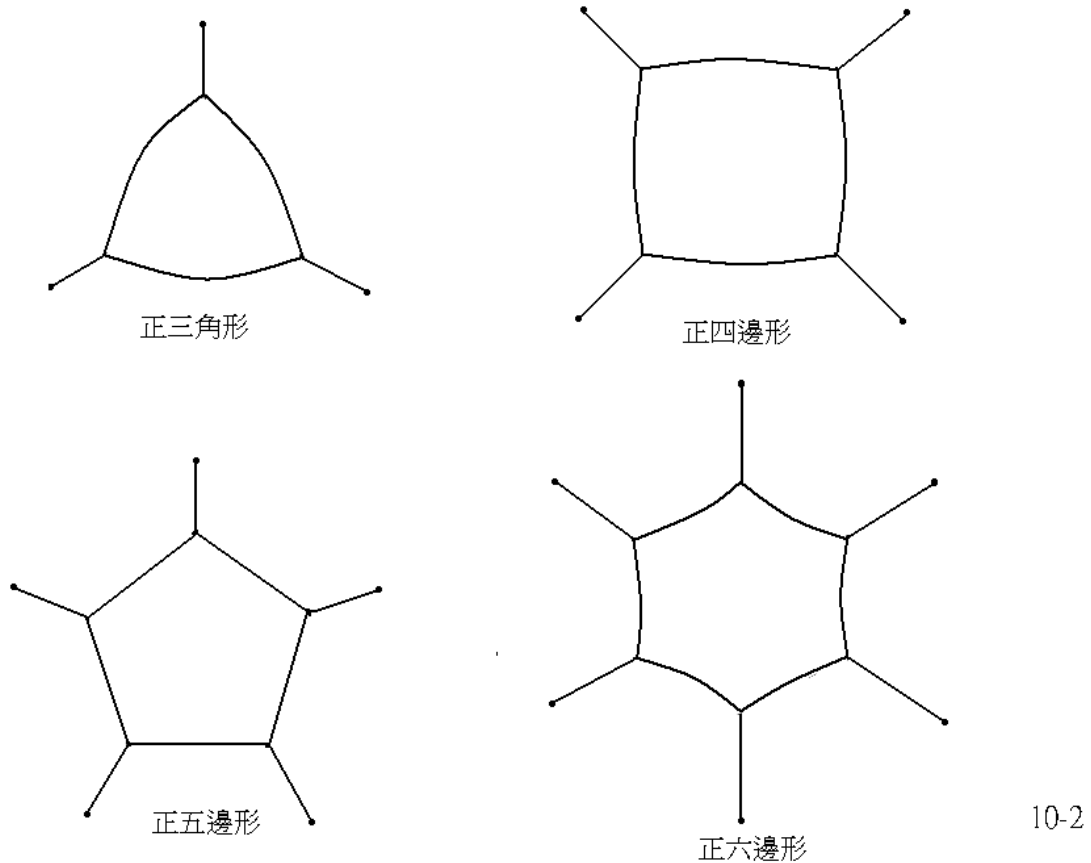
實驗發現泡膜在構築立體圖形時，均遵守兩點要則：

1. 一點上均連接四條線段，每兩相交線段夾角均為  $109^\circ 28'$  (Maraldi angle)
2. 一線段均為三平面之交線，每兩相交平面夾角均為  $120^\circ$

此觀察結果符合通則。

## 二、多邊形泡膜的曲度問題

由【普拉圖泡膜幾何通則】可以進一步討論多邊形泡膜的曲度問題，下圖為俯視各個正立方柱，泡膜邊緣彎曲的簡圖：



觀察上圖發現，正五角柱的泡膜邊緣為近乎於直線，沒有曲度；正三角柱、正四角柱的泡膜向外微微彎曲，且曲度為正三角形 > 正四邊形；正六角柱的泡膜則視微微內凹。泡膜在建構圖形時，每兩相交線段夾角必為  $109^{\circ}28'$  (Maraldi angle =  $\theta_M$ )，依此分析：

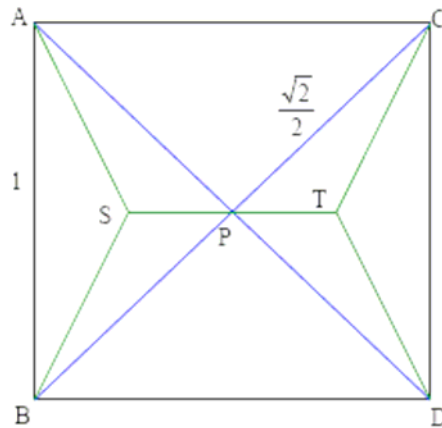
1. 正三角柱：正三角形內角為  $60^{\circ}$ ，遠小於  $\theta_M$ ，故泡膜須大幅向外彎曲，使兩線段的夾角達到  $109^{\circ}28'$ ，才能建立平衡的薄膜結構。
2. 正四角柱：正方形的內角為  $90^{\circ}$ ，小於  $\theta_M$ ，故泡膜仍須向外彎曲，以取得平衡。不過因為角度差距較正三角柱小，故曲度也小於正三角柱。
3. 正五角柱：正五邊形的內角為  $108^{\circ}$ ，和  $\theta_M$  差距甚小，故觀察得泡膜邊緣近乎於直線。
4. 正六角柱：正六邊形的內角為  $120^{\circ}$ ，略大於  $\theta_M$ ，故泡膜須向內彎曲以縮小角度，可觀察到泡膜邊緣微微內凹。



## (討論二) 最小表面積

根據表面能與表面張力的原理，泡膜的平衡型式建立在總表面積最小時的狀態。正立方柱的每一個側面可獨立視為一個長方形，在表面張力和內聚力的作用下，薄膜表面積會呈現最小狀態。

實驗過程中發現，泡膜不會以圖形的費瑪點(如下圖，兩對角線的交點:P)為節點，取而代之的是以另兩個節點(S,T)建構出平衡薄膜型式，此二點分別是 $\triangle APB$ 及 $\triangle CPD$ 的費瑪點。利用最小表面積的想法解釋此現象：



(例)

邊長為1的正方形中

以費瑪點P為節點所得之總長為 $2\sqrt{2}$

而以S、T為節點所得之總長為

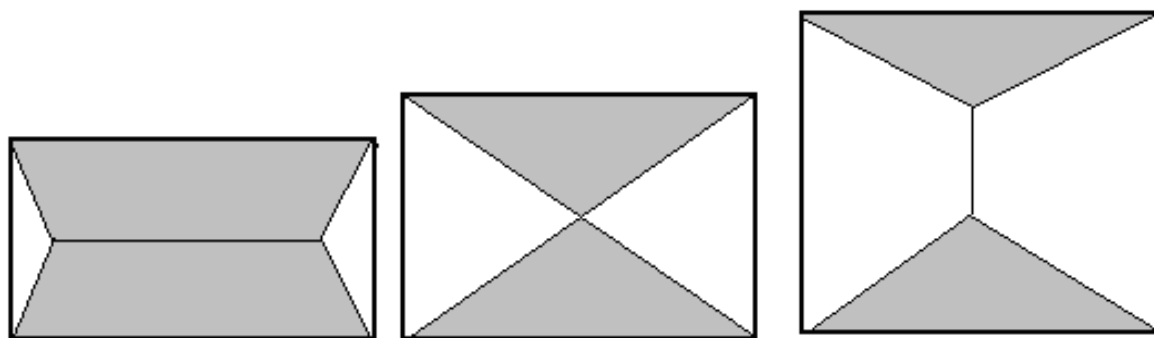
$$\frac{4}{\sqrt{3}} + 2 \times \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = 1 + \sqrt{3} < 2\sqrt{2}$$

由上推導，泡膜在四邊形中，以費瑪點P為節點的表面積大於以S、T為節點的表面積，為使表面積達降到最低，泡膜結構選擇後者做為平衡薄膜型式。故正立方柱側面長方形的薄膜是由兩片梯形、兩片三角形組成的。

>>>由此推論多邊形亦是如此。

如此一來便可以解釋為什麼當臨界點出現時(如上圖 $\triangle APC$ 及 $\triangle BPD$ 的結構；側視圖)，面轉變會瞬間發生。在臨界點出現時，泡膜會選擇轉換成以 $\triangle APB$ 及 $\triangle CPD$ ，或者是 $\triangle APC$ 及 $\triangle BPD$ 為基本圖形，由兩個節點組成的平衡型式，使總表面積降到最低。

### (討論三) 膜面數



H1

H2

H3

不論是哪種正立方柱，隨著H的改變(變動中的高)，其側視圖皆會出現H1.H2.H3三種型式，H1.H3為穩定結構，H2是面轉變時的過渡圖形(僅存於一瞬間)。由實驗得下表：

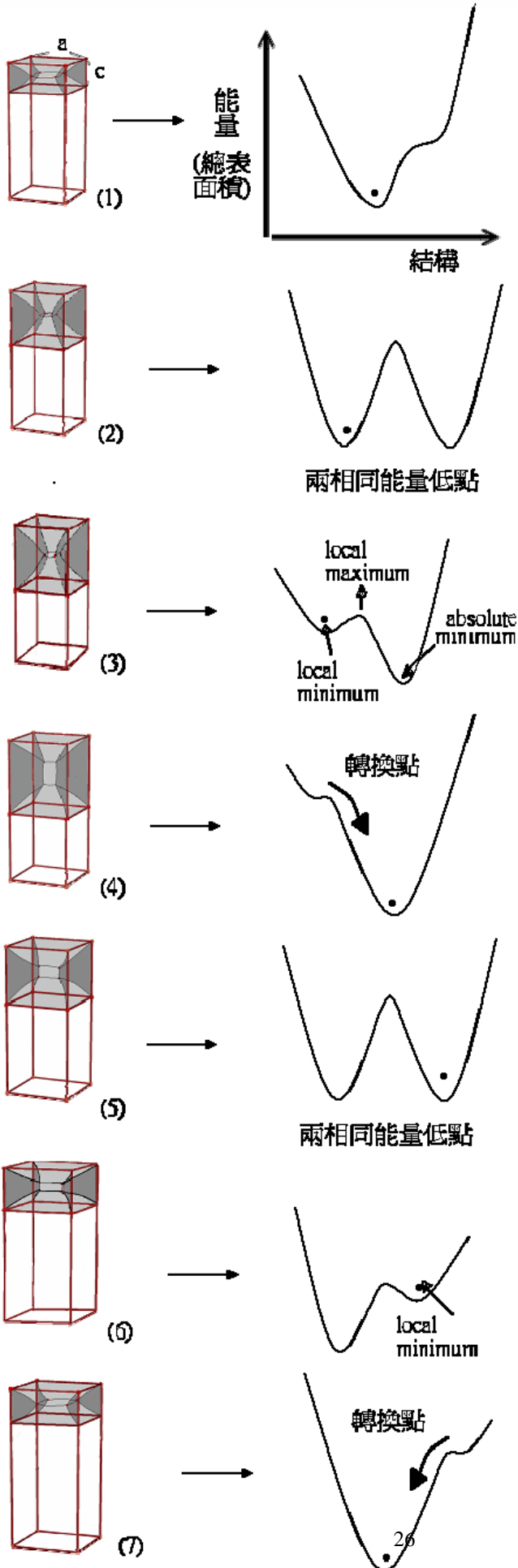
角柱 \ 狀態	H1	H2	H3
正三角柱(n=3)	10	9	9
正四角柱(n=4)	13	12	13
正五角柱(n=5)	16	15	17

1. 當H1型式時，n邊形正立方柱框架的每一邊均和中央膜形成一片獨立薄膜，故有總膜數=3n+1(中央膜)。
2. 當H2型式時，n邊形正立方柱框架的每一邊均和臨界點形成一片獨立薄膜，故有總膜數=3n。
3. 當H3型式時，n邊形正立方柱框架的每一邊共有3n個膜會同時交於n-2條線、n-3個面。  
故H3狀態會有  $3n+(n-3)=4n-3$  個膜。

推得一般式：

狀態	H1	H2	H3
一般式	3n+1	3n	4n-3

(討論四) 泡膜結構和能量變化的循環，以四角柱討論



(1)當  $c$  遠小於  $a$  時，兩相交線段夾角均為  $109^{\circ}28'$  (Maraldi angle)，兩相交平面夾角均為  $120^{\circ}$ ，表面積最小，十分穩定。若藉由外力使它脫離平衡狀態，表面積將增加，當外力解除時，泡膜將回到原本的位置，此時泡膜位於能量谷的底部。

(2)隨著  $c$  加長，中央膜會越來越小。當  $c=a$  時，薄膜有兩種平衡狀態形式，左圖為其中之一。但因能量丘的存在，結構須藉外力才能發生面轉變。此時為面轉變的起始點。

(3)繼續加長  $c$  使其大於  $a$ ，中央膜持續縮小，此時的泡膜位於能量的相對低點 (local minimum)，表面積已非最小，但由於能量丘的存在，結構依然保持穩定。

(4)當  $c$  近似  $1.1a$  時，中央膜面積趨近於 0。此時能量丘消失，面轉變瞬間發生，薄膜以  $90$  度翻轉，薄膜能量進入絕對低點 (absolute minimum)，結構中央出現長方形。

(5)縮短  $c$  的長度，直到  $c=a$ 。發現中央膜是正方形，此時薄膜有兩種形式，一是左圖，另一為上圖(2)。

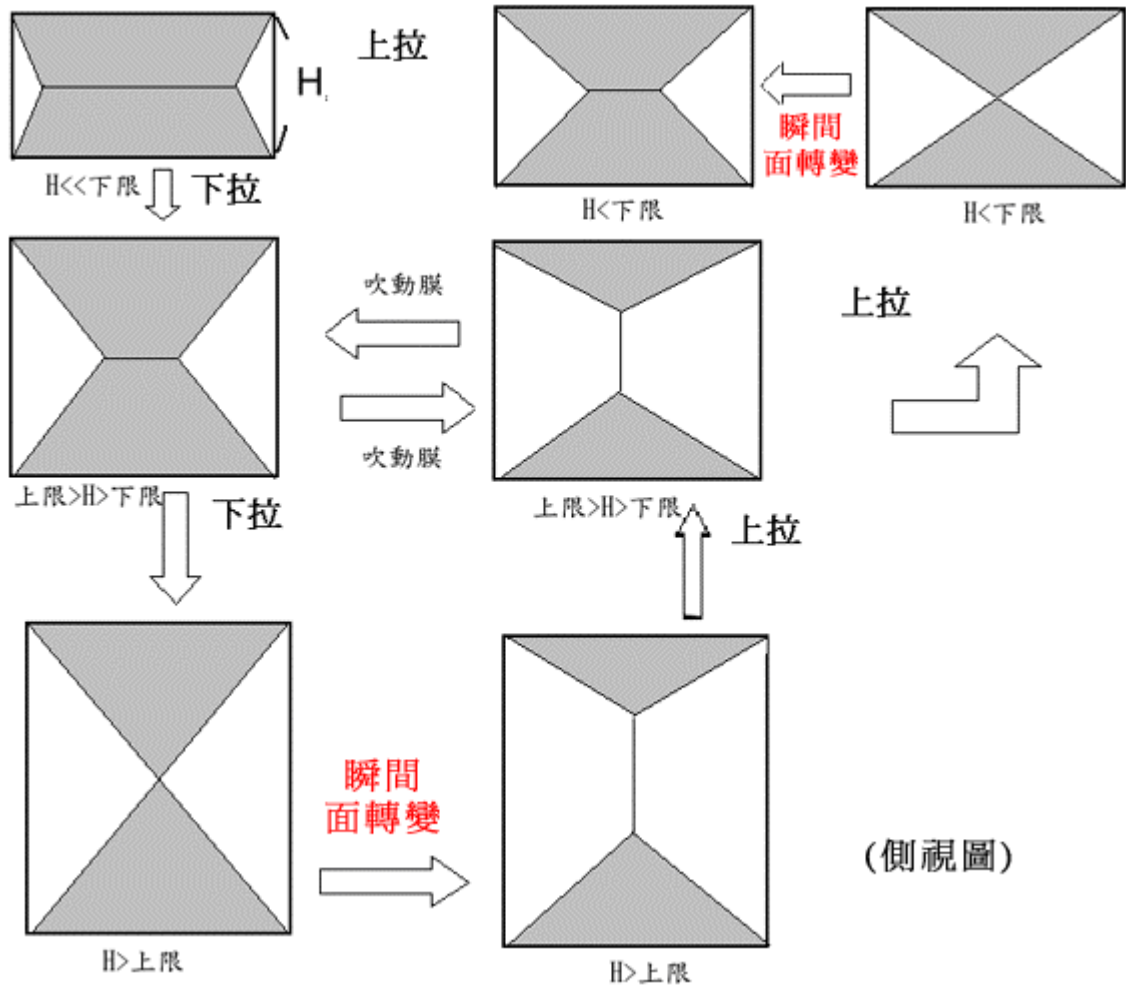
(6)進一步使  $c$  小於  $a$ ，此時的表面積已非最小，但是因為能量丘的存在，結構無法自行轉變。

(7)繼續縮小  $c$ ，當中央膜面積近似於 0 時，能量丘消失，此時薄膜結構瞬間開始變形，能量回至能量谷的底部。

## 玖、實驗結論

### (一) 正立柱平衡薄膜形式的循環

綜合以上實驗，發現隨著  $H$  的改變，正立方柱的平衡薄膜形式，會依循一定的循環的模式，如下圖：

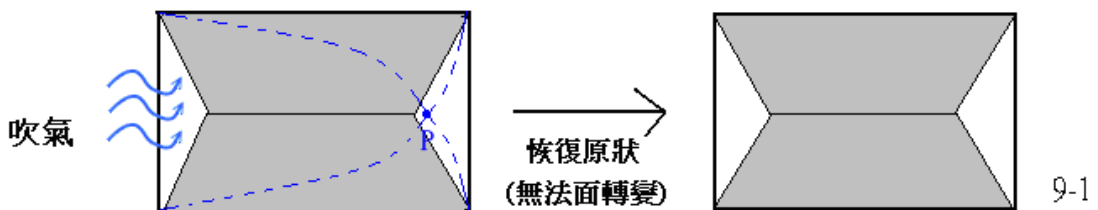


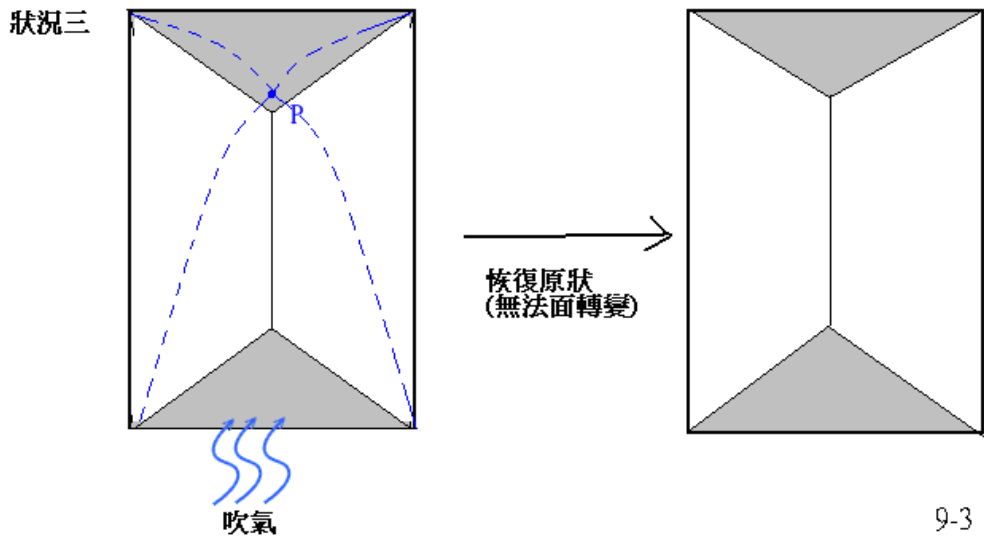
### (二) 面轉變和能量的相關性

#### 1. (參考下圖 9-1、9-3，接下頁)

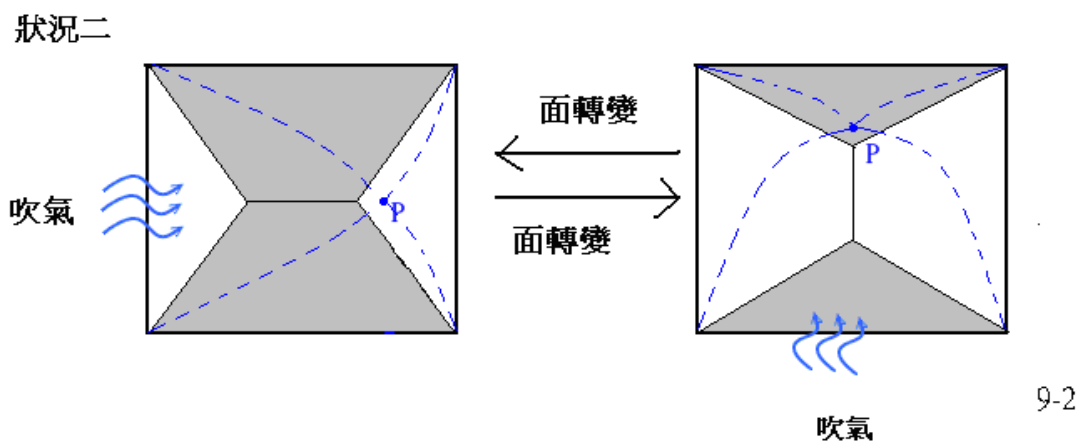
當  $H > \text{上限} \ \& \ H < \text{下限}$ ，此時結構位於能量的底部，泡膜結構符合【普拉圖泡膜幾何通則】，僅有一種平衡型式，十分穩定。

狀況一

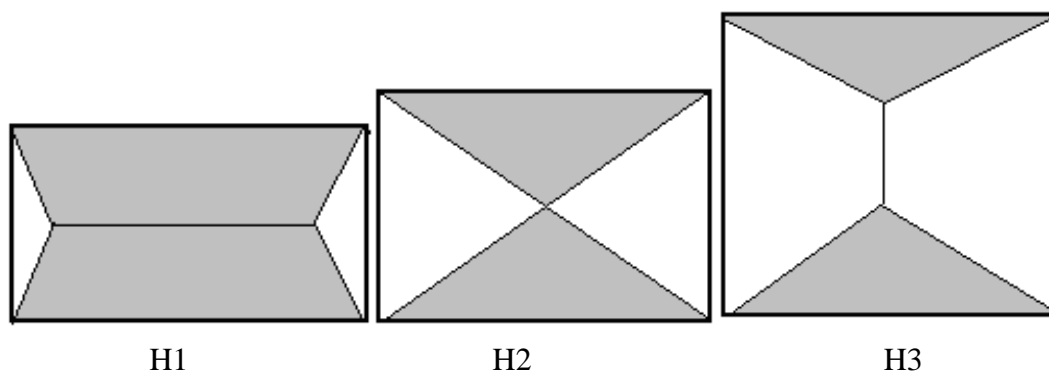




2. 當  $\text{上限} \geq H > \text{下限}$  時，結構能量位於**能量丘的底部**，我們稱此點為**能量的”相對低點”(local minimum)**。在這範圍中的薄膜總表面積已非最小，但因受制於**能量丘**，薄膜結構無法自行發生面轉變。必須藉由外力(吹氣、搖晃...)作功，才能越過**能量丘**，達到**能量的絕對低點(absolute minimum)**。
3. 當  $H = \text{下限}$  時，此時**能量的”相對低點”=”絕對低點”**，即此結構擁有**兩種**表面積相同的平衡薄膜形式。此時為**面轉變發生的起始點**。
4. 當**中央膜面積趨近於零**， $H$  近似於**上限**，此時**能量丘消失**，**面轉變瞬間發生**，薄膜以 90 度翻轉，薄膜能量進入**絕對低點(absolute minimum)**。
- 5 (參考下圖 9-2)  
 當底面邊長為  $L$  時，正三角柱的高在  $0.44L \sim 0.60L$  可雙向發生面轉變。  
 正四角柱的高在  $0.97L \sim 1.13L$  可雙向發生面轉變。  
 正五角柱的高在  $1.50L \sim 2.33L$  可雙向發生面轉變。



### (三) 膜數量的規則



正  $n$  邊形立方柱之側面平衡薄膜形式，分別在 H1、H2、H3 三種狀態下，膜面數的一般式可表示為：

狀態	H1	H2	H3
一般式	$3n+1$	$3n$	$4n-3$

### (四) 膜力平衡和最小表面積的相關性

由於表面張力傾向於將泡膜的總表面積縮成最小，以數學的觀點來說，費瑪點(結構中與所有頂點相連接，其線段的總和最小)所產生的最短路徑應可建構出泡膜的立體結構。但實驗發現，實際上並不是所有泡膜的結構都和費瑪點的最短路徑相符合。由此可知，物理上影響平衡薄膜形式的因素有：膜力平衡、單位面積表面能(表面張力)，兩者相互平衡之下的最小表面積，不等於數學的極值。此為本實驗極重大的領悟，數學理論上的推導不一定與物理上的現象吻合。

## 拾、展望及感想

DIY 製作立體模型是一次辛苦的經驗，因為模型數量不多，向工廠訂做模型的成本實在太高，我們為了得到理想中的模型，逼不得已只好親自焊接。雖然過程辛苦且危險，卻是一段難得的回憶。

這次實驗我們一直無法精確地計算泡膜的總表面積，主要是因為泡膜曲度的影響。期待將來能對泡膜曲度及總表面積做更深一層的探討。此外，由於本次實驗是著重於 3D 泡膜結構的探討，希望將來能在特異結構上也能有進一步的突破。

在泡泡美麗的外表下，隱含了博大精深的物理知識，正如同偉大的物理學家凱爾文爵士 (Lord Kelvin) 就曾經說過：「請吹一個泡泡，並好好觀察它。你可以窮一生之力對它進行研究，而不斷獲得物理學的知識。」，這些知識正等著我們去探討發掘。

## 拾壹、參考資料

1. David Lovett, Demonstrating Science with Soap Films, Department of Physics, University of Essex
2. 傅宗玫、陳正平/臺灣大學大氣科學研究所。科學發展月刊，第29卷 第11期。冒泡的美。
3. 國立臺中第一高級中學。第四十六屆中小學科學展覽會。高中組 物理科。表面張力與最短路徑探討
4. 龍騰出版社。高二下物理。第十章。流體的性質。

## 評語

本件作品探討肥皂泡膜薄膜所張成的形狀，內容完整，但較欠缺原創性，應可增加實驗變因，探討較新穎的物理現象。