

臺灣二〇〇八年國際科學展覽會

科 別：物理與太空科學

作品名稱：曲桿「弦」臂- $\lambda/4$ 的玄機

學校 / 作者：國立新竹女子高級中學
國立新竹女子高級中學

周 易
梁心怡

作者簡介



周易(右)

目前就讀於新竹女中數理資優班三年級，帶著強烈的求知慾參加此次科展。國小時曾在美國住過兩年，英文就像是我的第二個母語。藉著對於科學的興趣和出色的英文能力，時常利用網路和電視的科學節目了解科技的奧妙。高中時期多次參加與科學相關的活動，這些寶貴的經驗都帶給我極大的影響。此次科展過程雖然艱辛，但是畢生難忘。

梁心怡(左)

目前就讀於新竹女中數理資優班三年級，國中即有參加科展的經驗，並獲得不錯的成績。從小對於閱讀與科學都很有興趣，喜歡從生活週遭觀察與學習不同的事物。在因緣際會之下，可以從事這次的研究，從中學習到許多知識與經驗。縱然實驗過程艱辛，卻是我高中生涯中寶貴的回憶。

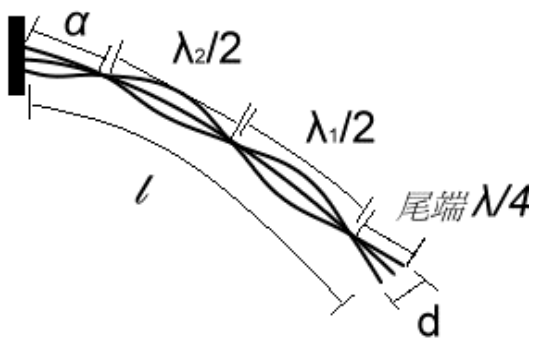
The Myth of $\lambda/4$ —Vibration of bend string

Inspirations: Vibrating the string of thing bar from longitudinal to transverse; from both arm to single arm; from the waves of the string to the mystery of $\lambda/4$.

Battle: Resonance frequency, string tension force, half stationary wave, questions flying everywhere.

Revolution: Overturn the theory that the tension force on the same string equalizes everywhere by measuring the length of each $\lambda/2$; proof that the tension force enlarges from the top of the string to the end because of the gravity of the string; Calculate the constant of the difference between the length of the incomplete wave on the end and $\lambda/4$ / the last complete $\lambda/2$.

Proof that the constant is decided by the thickness of the string rather than the length of the string; Finding the fact that the number of complete $\lambda/2$ on the same string equals no matter where the vibrating spot is.



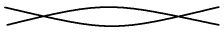
曲桿「弦」臂---- $\lambda/4$ 的玄機

壹、研究摘要：

靈光乍現：弦的震盪由直到彎，從單懸到雙懸迴盪不已，共振駐波顯現半波長的微妙變化。
 故佈疑陣：曲弦振盪、共振頻率、弦上張力、半駐波長，玄機重重。
 高潮迭起：推翻同一弦上所受張力相同，得知曲弦曲度不同所受張力亦不等的真相。
 明天過後：重現曲弦程度，知彈性係數迴旋，將曲弦駐波性質變化摸透透。

貳、研究動機：

想當年，我還年幼懵懂無知的時候，看了這部「臥虎藏龍」。原本看著玉嬌龍和李慕白爲了區區一把「青冥劍」而爭的你死我活感到十分地匪夷所思。但是，看到他們在竹林中耍劍時，我目瞪口呆。WHY！？印象中只不過是一把剛硬的劍罷了，爲什麼能舞出如此柔美的曲線？錯愕的我，如同機械般地不停按倒退鈕，希望能從中看出其傷敵於意料之外的玄機。

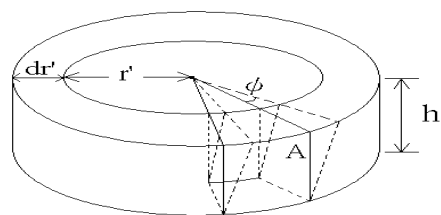
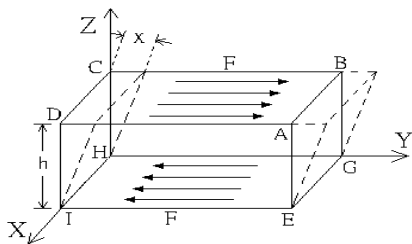
上了高中於專題研究課程中，乍現老師在課堂用一支鋼弦震盪出  如此優美的韻「力」。小時候的疑問便又浮現，這不正如同「青冥劍」用劍之美嗎？於是這段洋溢著我們年少輕狂、磅礴熱血的科學研究就此展開！！

參、研究目的：

- 一、探討不同長度、粗細的弦在同一震盪模式下，共振頻率、半波長、尾端之不完整波形長度、諧波數、波速之各種特性。
- 二、研究弦尾端之不完整波形與其他物理量之相關性。
- 三、研究弦於震盪時每個諧波半波長 $\lambda/2$ 之差異與弦上張力變化。

肆、實驗原理：

觀念 < I >



依 切應力=切應變係數(S) \times 切應變 切應力= $\frac{F_n}{A}$ 切應變= $\frac{x}{h}$

切應變係數 Shear modulus= $\frac{F_n/A}{x/h}$ 又稱扭轉係數 torsion modulus

中空圓柱的切應變係數：

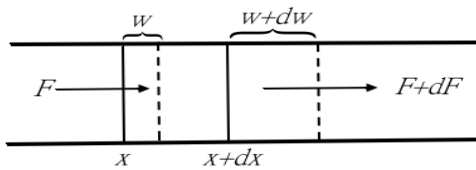
$$\frac{F}{A} = S \frac{r' \phi}{h}$$

$$dF = S \frac{r' \phi}{h} 2\pi r' dr' = \frac{2\pi S \phi}{h} r'^2 dr' \quad F = \frac{2\pi S \phi}{3h} r'^3 = \frac{2\pi S \phi}{3h} r'^3$$

$$d\tau = r' dF = \frac{2\pi S \phi}{h} r'^3 dr' \quad \tau = \int_0^r \frac{2\pi S \phi}{h} r'^3 dr' = \frac{\pi S \phi}{2h} r'^4$$

$$S = \frac{2h\tau}{\pi \phi r'^4} = \frac{2h}{\pi r'^4} \tau / \phi \quad \text{令 } \tau / \phi = k_\phi \quad \Rightarrow \text{故 } S = \frac{2h}{\pi r'^4} k_\phi = \frac{2h}{A r'^2} k_\phi$$

觀念 < II >



$$\text{應力} = \frac{F_\perp}{A} \quad \text{伸長應變} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad Y(\text{楊氏彈性係數}) = \frac{F_\perp / A}{\Delta l / l_0}$$

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$dF = F(x+dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} dx = AY \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

$$F = ma$$

$$dF = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = AY \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$c_L = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{F/A}{\Delta l/l_0}}{\frac{m}{Al_0}}} = \sqrt{\frac{FAl_0}{m\Delta l}} = \sqrt{\frac{Fl_0}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\text{本實驗中, } \Delta l / l_0 = 0 \quad \Rightarrow c_L = v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

觀念 < III >

$$m \frac{\lambda}{4} = l \quad \lambda = \frac{4l}{m} \quad f_m = \frac{V}{\lambda} = \frac{mV}{4l} = m \frac{c_L}{4l}, \quad m=1,3,5,\dots$$

弦一端固定，另一端為自由端，震盪時產生的弦駐波，尾端必為 $\lambda/4$ 。

伍、研究器材：

- | | |
|----------------------|---------------------------------|
| 1. 電腦—Data studio 軟體 | 2. 科學工作室 USB750Interface |
| 3. PASCO 機械振盪器 | 4. 直尺 |
| 5. 方格紙 | 6. 雷射指示筆(定位用) |
| 7. 棉線(標記用) | 8. 吉他弦(第二弦：弦 A 第三弦：弦 B 第五弦：弦 C) |

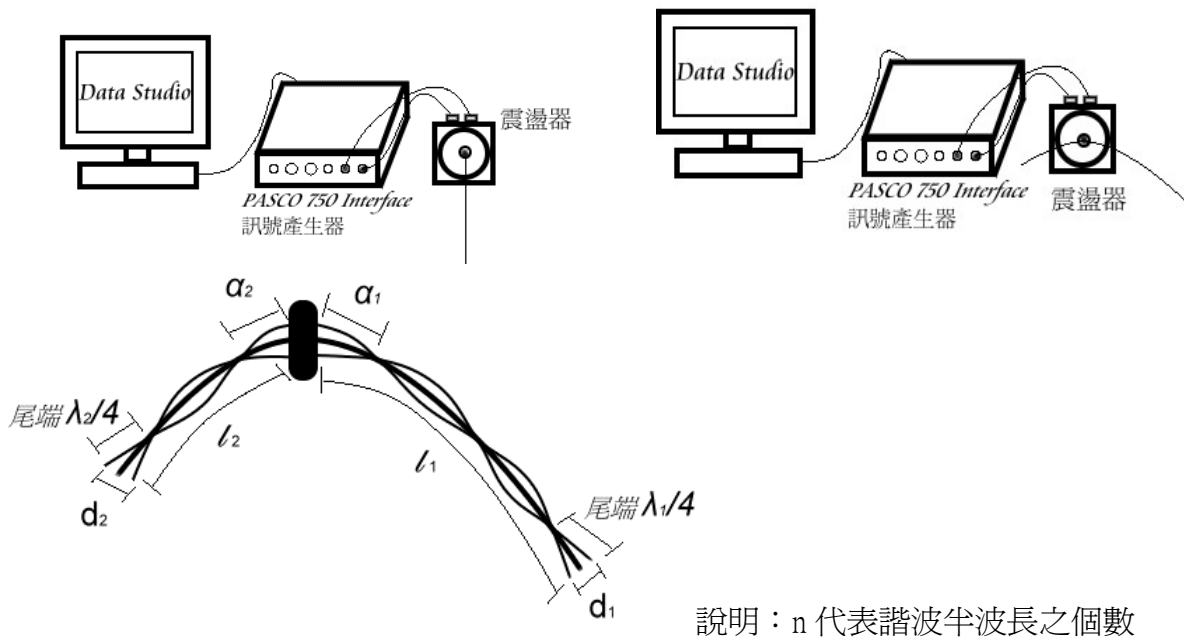
種類(編號) 長度(cm)	弦 A	弦 B	弦 C
20	1 條	1 條	1 條
25	1 條	1 條	1 條
30	1 條	1 條	1 條
35	1 條	1 條	1 條
40	1 條	1 條	1 條
70		1 條	

說明：弦皆未彎折，即彈性未被破壞

陸、實驗步驟

一、**實驗**-----觀察弦 B 在同一震盪模式不同比例長度時各物理量的比較。

(一) 裝置：



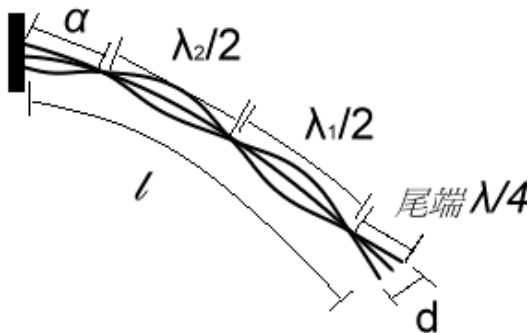
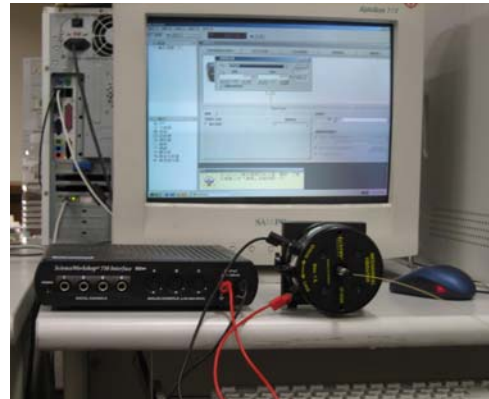
(二) 步驟：

1. 取一 70cm 的第三弦垂直懸吊震盪，調整 750 介面控制其頻率，觀測其各節點的位置並用棉線標記。
2. 將棉線和弦頂端的距離算出，得到 19cm、31cm、43cm、55cm 為其穩定震盪點，於是將弦以 15：55、19：51、27：43、31：39 之比例震盪。
3. 測量其 n(諧波半波長個數)、d(尾端 $\lambda/4$ 之開叉寬度)、尾端 $\lambda/4$ 、 α (被固定點所截

之不完整波的長度)、 $\bar{\lambda}/2$ ($\frac{l - \alpha - \text{尾端}\lambda/4}{n}$) 之值並作比較。

二、**實驗二**-----觀察不同粗細、長度的弦以一邊固定震盪後各物理量的比較。

(一) 裝置：

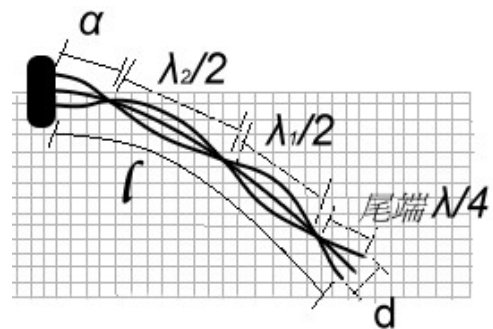
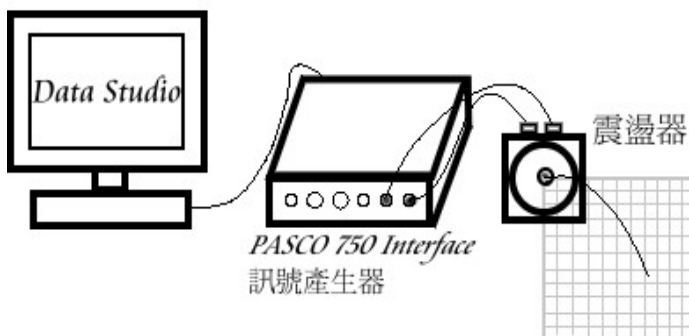


(二) 步驟：

- 1.把弦 A、弦 B、弦 C 各剪裁成 20、25、30、35、40cm。測出其共振頻率，再將各弦以一邊固定、用其共振頻率震盪。
- 2.將方格紙置於其後，用雷射筆將各節點定位於紙上，測量其 α 、尾端 $\lambda/4$ 、 d 、 $\lambda/2$ (由下數來第一個完整波) 等等。
- 3.在 excel 上比較 $\bar{\lambda}/2$ 、 ΔX ($\frac{\bar{\lambda}}{2} - \text{尾端}\lambda/4$)、 $\lambda_1/2$ 、 ΔX_1 ($\frac{\lambda_1}{2} - \text{尾端}\lambda/4$) 之關係。

三、**實驗三**-----以弦 A 為依據，計算出其 v (波速)、 F (弦上張力) 和每個 $\lambda/2$ 的受力情形。

(一) 裝置：



(二) 步驟：

1. 選用弦 A 進一步探討，因其震盪較穩定。
2. 以棉線標記結點測量其各 $\lambda/2$ 的長度。
3. 將已知量代入觀念 $\langle \Pi \rangle$ 公式計算出其 ν 、 F 並作分析比較。

柒、實驗結果與分析

一、實驗數據

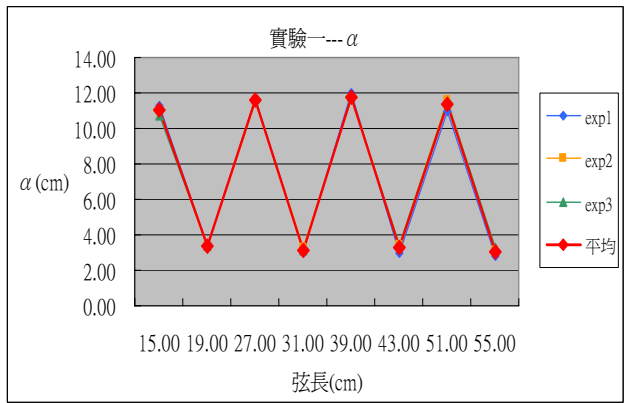
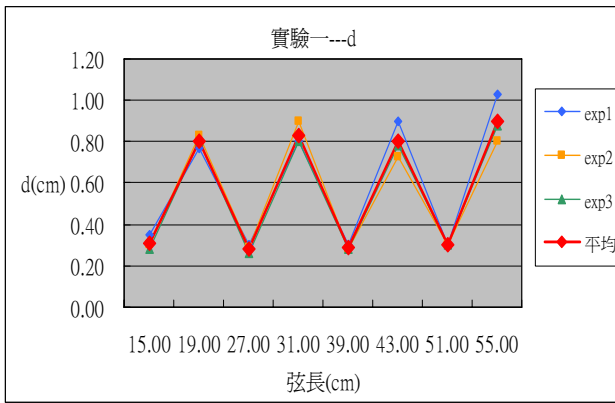
實驗一

l (cm)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)
15.00		0.35	11.30	3.73	
19.00	1.00	0.77	3.37	3.93	11.70
27.00	1.00	0.30	11.67	3.97	11.37
31.00	2.00	0.80	3.10	4.00	11.97
39.00	2.00	0.30	12.03	4.00	11.48
43.00	3.00	0.90	3.00	4.03	11.99
51.00	3.00	0.30	10.97	4.00	12.01
55.00	4.00	1.03	2.80	3.73	12.13

l (cm)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)
15.00		0.30	10.98	3.95	
19.00	1.00	0.83	3.40	3.93	11.68
27.00	1.00	0.29	11.55	3.98	11.48
31.00	2.00	0.90	3.28	3.98	11.88
39.00	2.00	0.28	11.65	3.98	11.66
43.00	3.00	0.73	3.45	3.93	11.88
51.00	3.00	0.30	11.58	3.95	11.84
55.00	4.00	0.80	3.10	3.88	12.01

l (cm)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)
15.00		0.28	10.75	3.95	
19.00	1.00	0.80	3.33	3.90	11.80
27.00	1.00	0.26	11.68	4.05	11.30
31.00	2.00	0.80	3.10	3.93	11.98
39.00	2.00	0.28	11.73	4.00	11.64
43.00	3.00	0.78	3.48	3.95	11.86
51.00	3.00	0.30	11.50	3.93	11.86
55.00	4.00	0.88	3.28	3.83	11.98

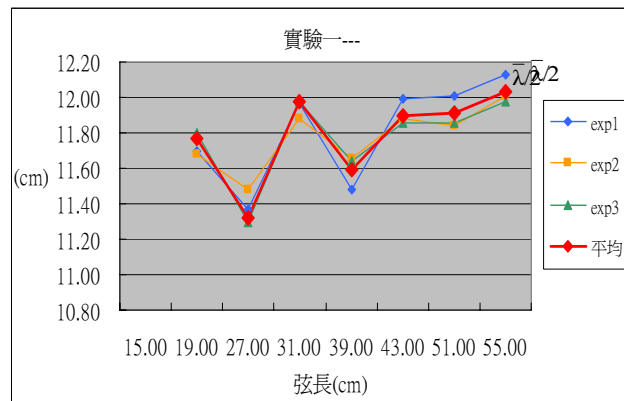
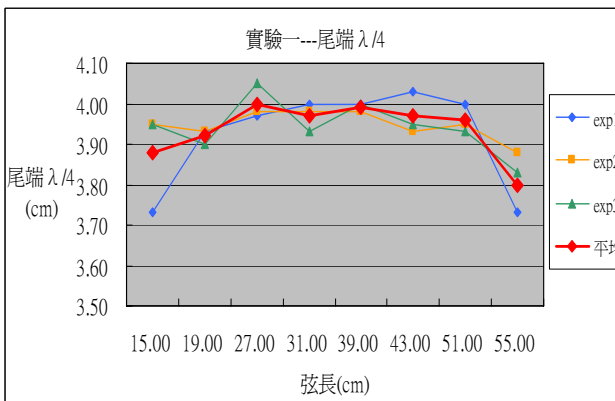
l (cm)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)
15.00		0.31	11.01	3.88	
19.00	1.00	0.80	3.37	3.92	11.77
27.00	1.00	0.28	11.63	4.00	11.32
31.00	2.00	0.83	3.16	3.97	11.98
39.00	2.00	0.29	11.80	3.99	11.59
43.00	3.00	0.80	3.31	3.97	11.90
51.00	3.00	0.30	11.35	3.96	11.91
55.00	4.00	0.90	3.06	3.80	12.03



分析： 雙懸臂兩端的 d 呈一大一小。

雙懸臂兩端的 α 呈一大一小。

綜合討論：當一邊之 d 為較小值(約 0.3cm)，則其同一邊之 α 必為較大值(約 11~12cm)。



分析： 尾端 $\lambda/4$ 之長度約介於 3.8~4cm 之間，相差不大。

當弦長 l 在 43cm 以上，其 $\lambda/2$ 之長度較趨於穩定。

實驗二

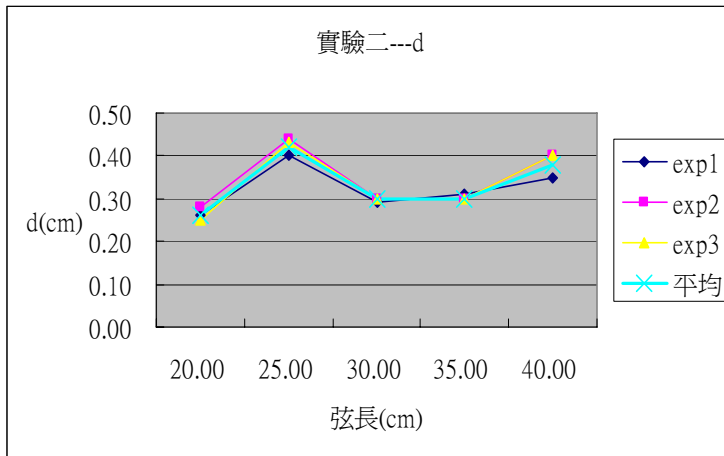
第二弦 弦 A

弦 A---exp1										
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)	
20.00	60.00	1.00	0.26	6.80	3.58	9.65	9.82	1.25	1.33	
25.00	60.00	1.00	0.40	11.68	3.60	9.70	9.87	1.25	1.34	
30.00	60.00	2.00	0.29	5.40	3.60	10.50	10.00	1.65	1.40	
35.00	60.00	2.00	0.31	10.78	3.60	10.34	10.00	1.56	1.40	
40.00	60.00	3.00	0.35	4.53	3.60	10.62	10.05	1.72	1.43	

弦 A---exp2									
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)
20.00	60.00	1.00	0.28	6.65	3.61	9.71	9.71	1.22	1.29
25.00	60.00	1.00	0.44	11.68	3.60	9.70	9.85	1.25	1.33
30.00	60.00	2.00	0.30	5.38	3.65	10.50	10.00	1.61	1.35
35.00	60.00	2.00	0.30	10.55	3.61	10.42	10.05	1.59	1.42
40.00	60.00	3.00	0.40	4.63	3.58	10.60	10.00	1.73	1.42

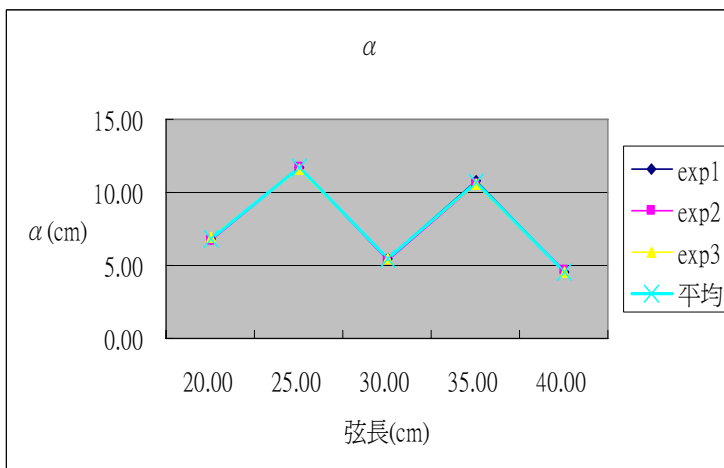
弦 A---exp3									
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)
20.00	60.00	1.00	0.25	6.88	3.60	9.50	9.95	1.13	1.39
25.00	60.00	1.00	0.43	11.58	3.60	9.83	9.93	1.31	1.37
30.00	60.00	2.00	0.30	5.48	3.59	10.47	10.00	1.65	1.41
35.00	60.00	2.00	0.30	10.60	3.58	10.43	9.98	1.61	1.41
40.00	60.00	3.00	0.40	4.55	3.60	10.62	10.00	1.71	1.40

弦 A---平均									
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)
20.00	60.00	1.00	0.26	6.78	3.60	9.62	9.84	1.20	1.32
25.00	60.00	1.00	0.42	11.65	3.60	9.74	9.88	1.27	1.35
30.00	60.00	2.00	0.30	5.42	3.61	10.49	10.00	1.64	1.39
35.00	60.00	2.00	0.30	10.64	3.60	10.40	10.01	1.59	1.41
40.00	60.00	3.00	0.38	4.57	3.59	10.61	10.02	1.72	1.42

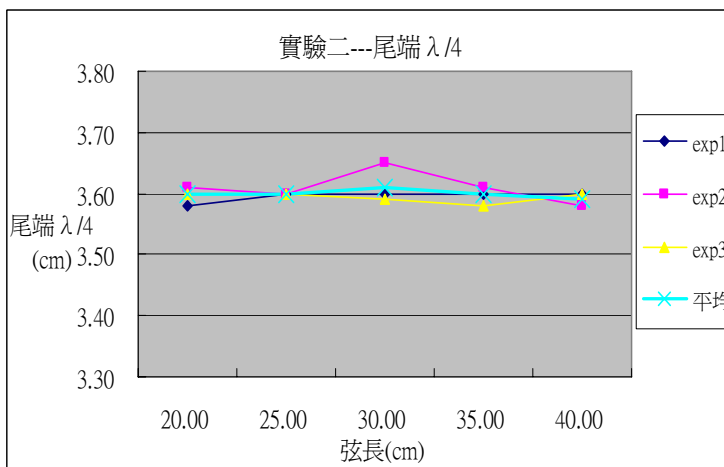


分析：

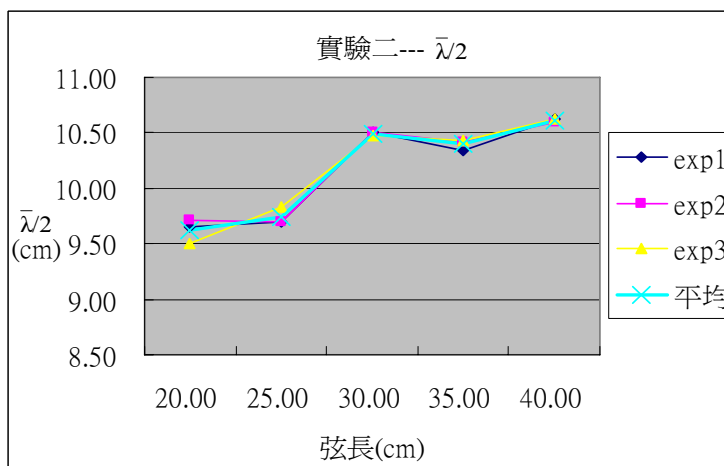
- 1.單懸臂時 d 介於 $0.27\sim 0.42\text{cm}$ 之間
 - 2.單懸臂時的 d 和雙懸臂時的圖形沒有相同趨勢。
- 討論：雙懸臂時，一側會產生縱波影響其另一側。單懸臂時則無此現象。



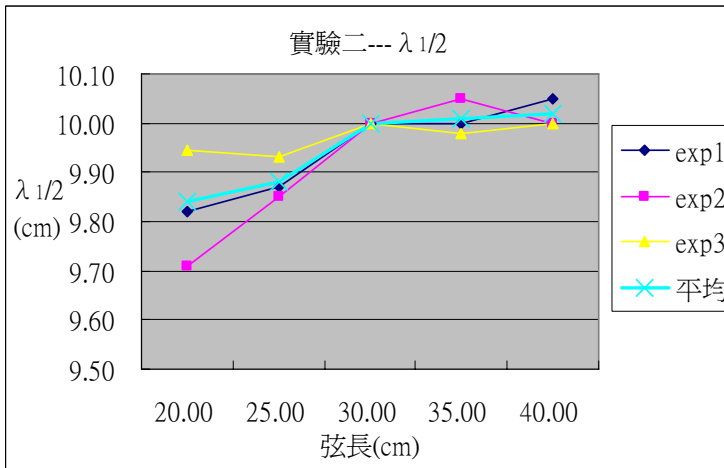
分析：因其離固定點較近，所以受縱波影響最小，因次不論單懸臂或雙懸臂皆成一大一小。



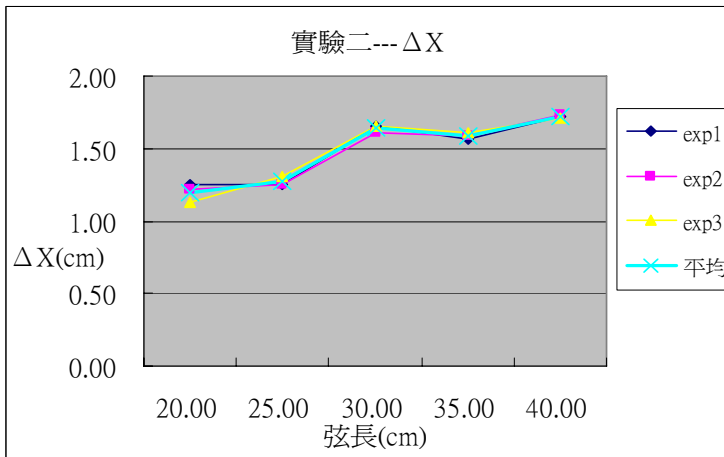
分析：尾端 $\lambda/4$ 之值約為 3.6cm ，不受其弦長影響。



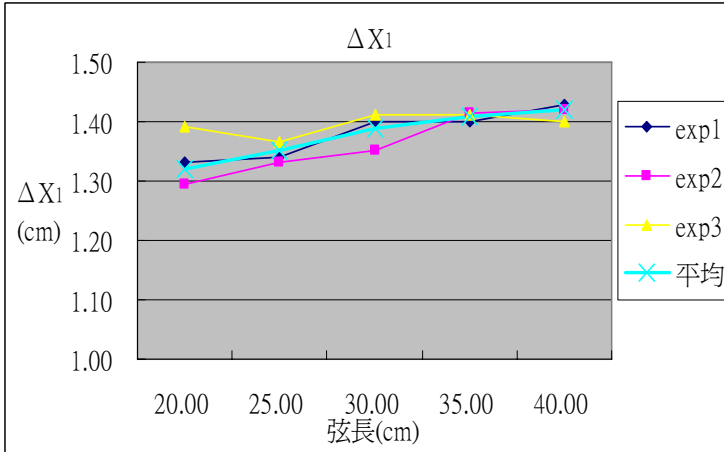
分析： $\bar{\lambda}/2$ 大致隨弦長增大而增大。



分析： $\lambda_1/2$ (最下面的 $\lambda/2$) 大致不受弦長影響。



分析： $\Delta X(\frac{\bar{\lambda}}{2} - \text{尾端} \lambda/4)$ 大致隨弦長增大而增大，但是部分不穩定。



分析： $\Delta X_1(\frac{\bar{\lambda}_1}{2} - \text{尾端} \lambda/4)$ 幾乎為一定值。

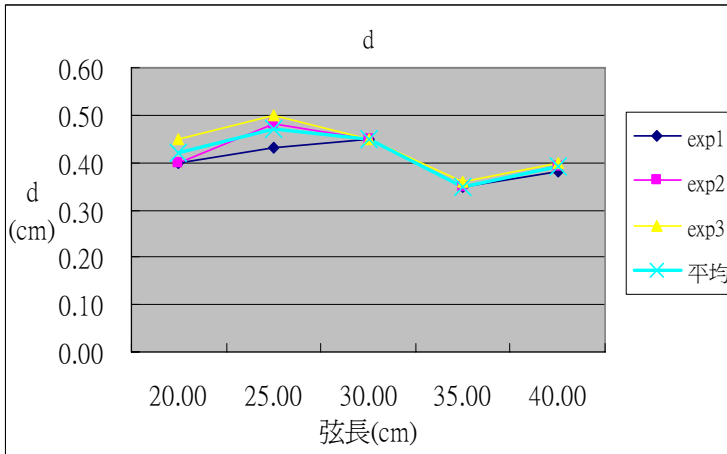
第三弦 弦 B

弦 B---exp1									
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)
20.00	50.00	1.00	0.40	9.00	3.05	7.93	8.44	0.90	1.17
25.00	50.00	2.00	0.43	4.53	3.05	8.73	8.51	1.32	1.21
30.00	50.00	2.00	0.45	9.23	3.10	8.84	8.63	1.31	1.22
35.00	50.00	3.00	0.35	5.50	3.00	8.85	8.85	1.43	1.43
40.00	40.00	3.00	0.38	7.03	3.20	9.93	9.35	1.76	1.48

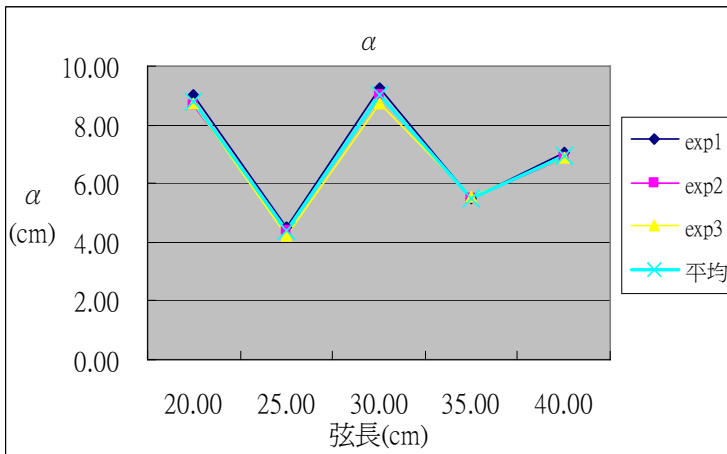
弦 B---exp2									
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)
20.00	50.00	1.00	0.40	8.65	3.13	8.23	8.48	0.99	1.11
25.00	50.00	2.00	0.48	4.40	3.05	8.78	8.53	1.34	1.22
30.00	50.00	2.00	0.45	9.00	3.03	8.99	8.55	1.47	1.25
35.00	50.00	3.00	0.35	5.50	3.05	8.42	8.82	1.39	1.36
40.00	40.00	3.00	0.39	6.85	3.15	10.00	9.08	1.85	1.39

弦 B---exp3									
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)
20.00	50.00	1.00	0.45	8.75	3.10	8.15	8.25	0.98	1.03
25.00	50.00	2.00	0.50	4.20	3.10	8.84	8.55	1.32	1.18
30.00	50.00	2.00	0.45	8.73	3.10	9.10	8.80	1.47	1.31
35.00	50.00	3.00	0.36	5.53	3.02	8.82	8.72	1.41	1.34
40.00	40.00	3.00	0.40	6.90	3.30	9.93	9.36	1.67	1.38

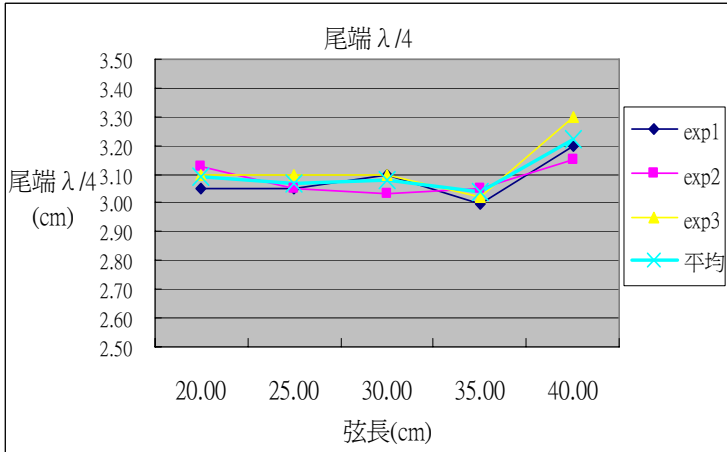
弦 B---平均									
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)
20.00	50.00	1.00	0.42	8.80	3.09	8.10	8.39	0.96	1.10
25.00	50.00	2.00	0.47	4.38	3.07	8.78	8.53	1.33	1.20
30.00	50.00	2.00	0.45	8.99	3.08	8.98	8.66	1.42	1.25
35.00	50.00	3.00	0.35	5.51	3.04	8.70	8.80	1.41	1.36
40.00	40.00	3.00	0.39	6.93	3.22	9.95	9.26	1.76	1.41



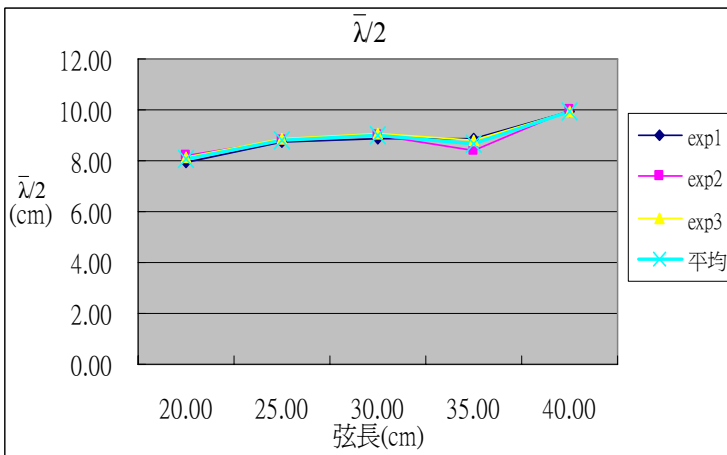
分析：單旋臂時 d 介於 0.35~0.48cm 之間，其平均稍大於弦 A 。



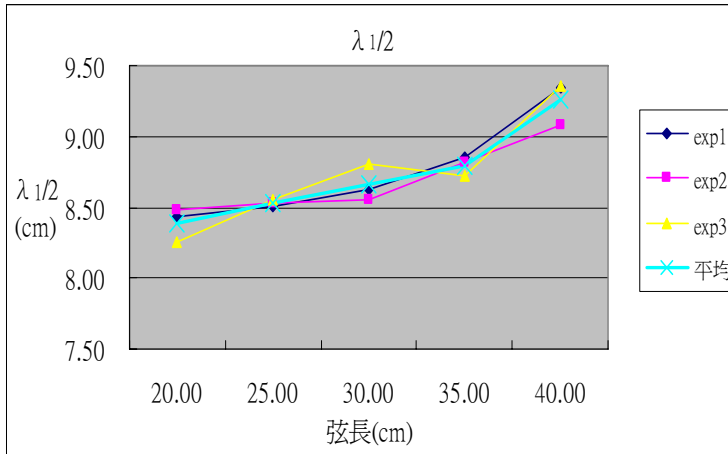
分析：圖形有一大一小趨勢，但較為不穩定。



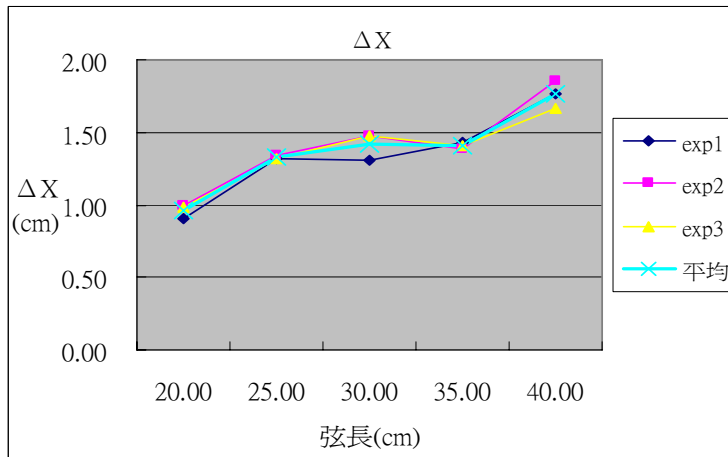
分析：尾端 $\lambda/4$ 不受弦長影響，且弦越粗其值越小。



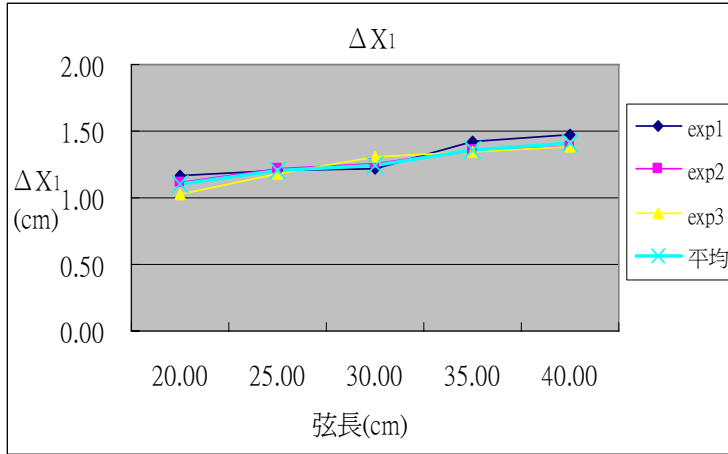
分析： $\bar{\lambda}/2$ 大致隨弦長增大而增大。



分析： $\lambda_1/2$ 隨弦長增大而增大，且圖形為一斜直線，弦越粗其值越小。



分析： $\Delta X(\frac{\bar{\lambda}}{2} - \text{尾端}\lambda/4)$ 大致隨弦長增大而增大，但是部分不穩定。



分析： $\Delta X_1(\frac{\bar{\lambda}_1}{2} - \text{尾端}\lambda/4)$ 大致隨弦長增大而增大，且圖形為斜直線。

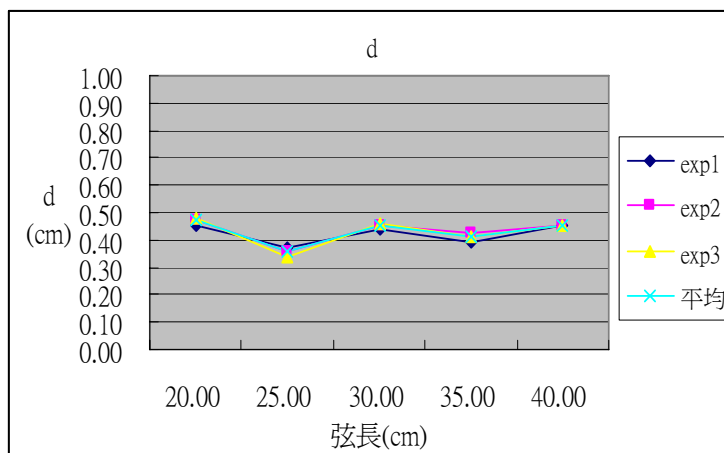
第五弦 弦 C

弦 C---exp1									
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)
20.00	40.00	1.00	0.45	8.16	3.28	8.56	8.98	1.00	1.21
25.00	60.00	2.00	0.37	7.00	2.71	7.63	7.35	1.11	0.97
30.00	40.00	2.00	0.44	8.15	3.20	9.38	9.03	1.49	1.32
35.00	50.00	3.00	0.39	6.28	2.90	8.62	8.00	1.41	1.10
40.00	40.00	3.00	0.45	8.20	2.93	9.69	8.80	1.92	1.47

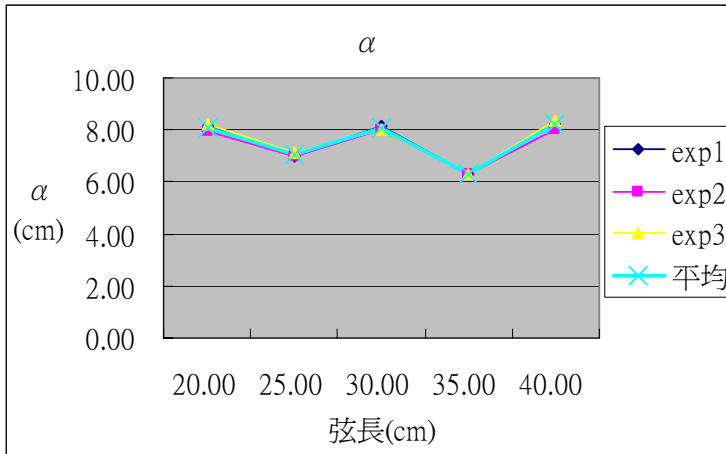
弦 C---exp2									
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)
20.00	40.00	1.00	0.47	7.95	3.30	8.78	8.90	1.14	1.15
25.00	60.00	2.00	0.36	7.00	2.70	7.64	7.40	1.12	1.00
30.00	40.00	2.00	0.45	8.03	3.30	9.29	9.00	1.35	1.20
35.00	50.00	3.00	0.43	6.33	2.90	8.59	8.58	1.40	1.32
40.00	40.00	3.00	0.45	8.03	2.90	9.62	8.73	1.91	1.47

弦 C---exp3									
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)
20.00	40.00	1.00	0.48	8.20	3.18	8.63	8.80	1.14	1.22
25.00	60.00	2.00	0.34	7.10	2.74	7.57	7.43	1.05	0.98
30.00	40.00	2.00	0.46	8.03	3.19	9.39	9.03	1.51	1.33
35.00	50.00	3.00	0.41	6.33	2.80	8.63	8.00	1.52	1.20
40.00	40.00	3.00	0.45	8.33	2.93	9.59	8.60	1.87	1.37

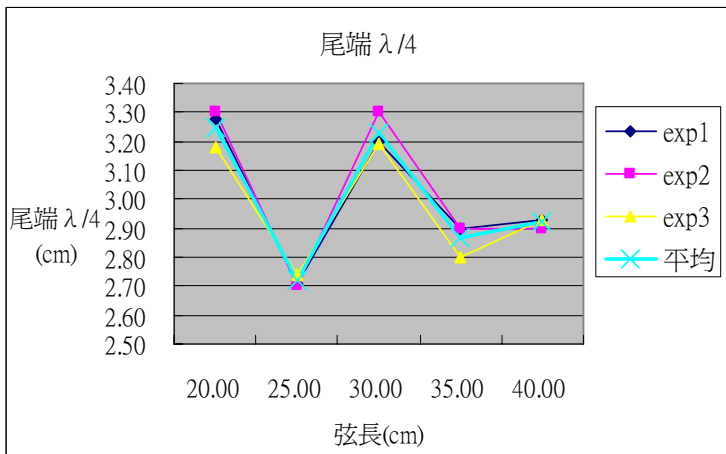
弦 C---平均									
l (cm)	f (Hz)	n (個)	d (cm)	α (cm)	尾端 $\lambda/4$ (cm)	$\bar{\lambda}/2$ (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX (cm)	ΔX_1 (cm)
20.00	40.00	1.00	0.47	8.10	3.25	8.66	8.89	1.10	1.19
25.00	60.00	2.00	0.36	7.03	2.72	7.61	7.39	1.05	0.98
30.00	40.00	2.00	0.45	8.07	3.23	9.35	9.02	1.40	1.28
35.00	50.00	3.00	0.41	6.31	2.87	8.61	8.21	1.34	1.27
40.00	40.00	3.00	0.45	8.19	2.92	9.63	9.15	1.75	1.44



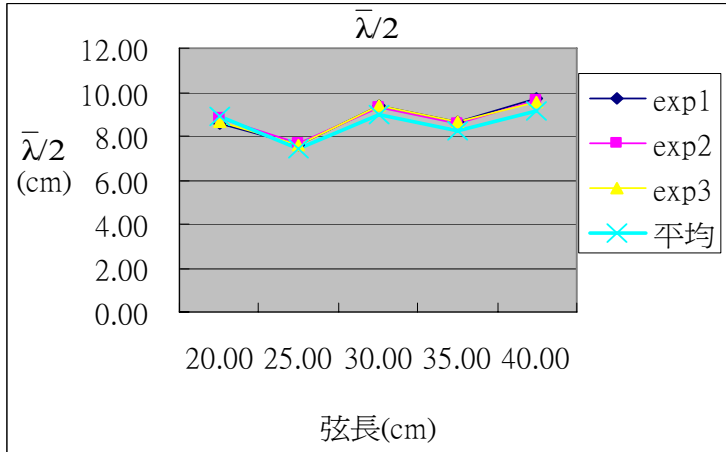
分析：單旋臂時 d 約介於 0.35~0.48cm 之間。



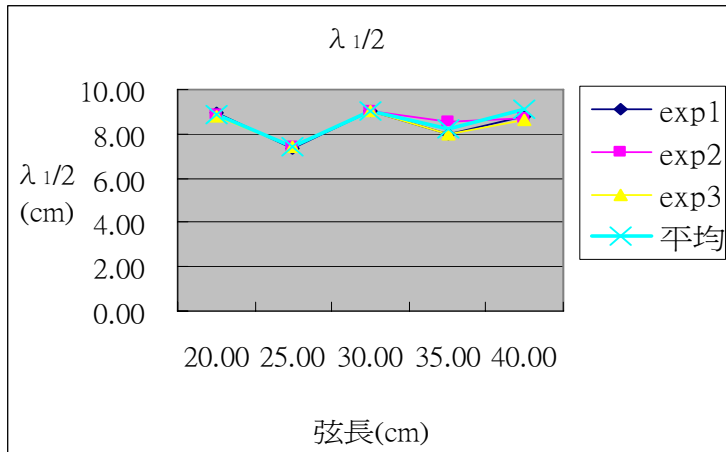
分析：略呈鋸齒狀，但較其他弦不穩定。



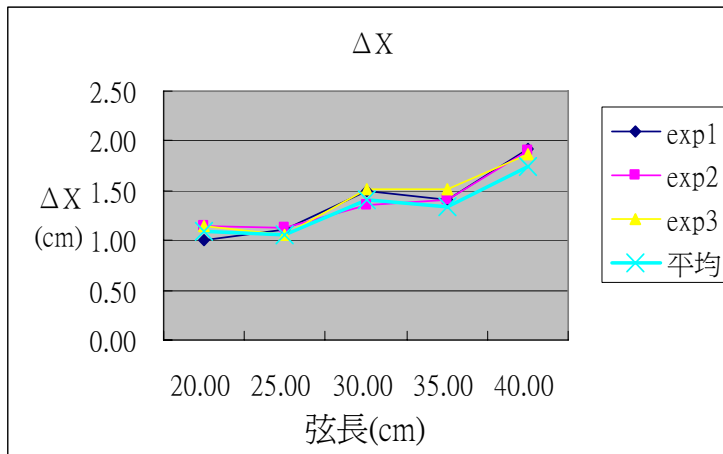
分析：其值忽大忽小，極為不穩定。



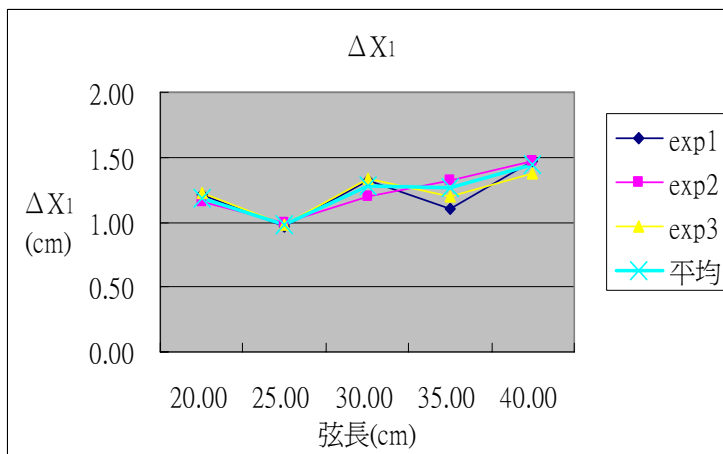
分析：其值約介於 8~10cm 之間，不太穩定。



分析：其值約介於 8~9cm 之間，不太穩定。



分析： $\Delta X(\frac{\bar{\lambda}}{2} - \text{尾端} \lambda/4)$
大致隨弦長增大而增大，
但是部分不穩定。



分析：其值約介於 1~1.5cm
之間。

二、實驗分析

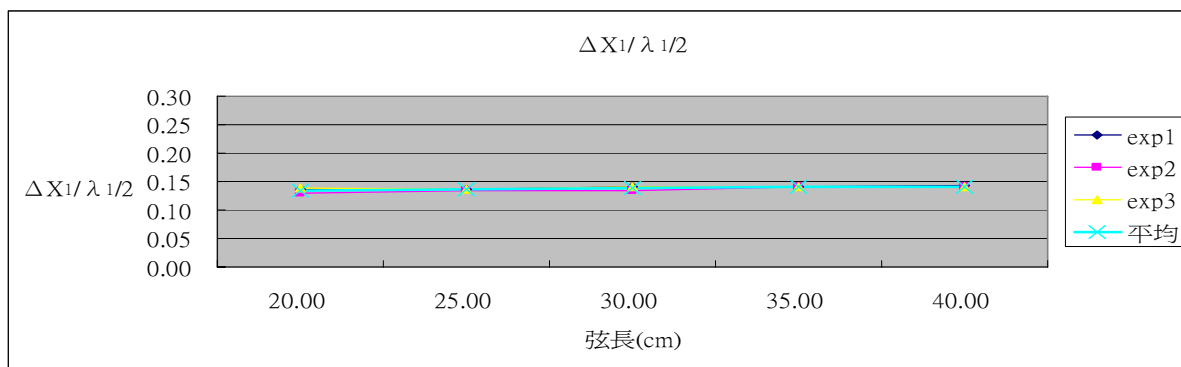
第二弦 弦 A

l (cm)	λ 1/2(cm)	ΔX_1 (cm)	$\Delta X_1 / \lambda$ 1/2
20.00	9.82	1.33	0.14
25.00	9.87	1.34	0.14
30.00	10.00	1.40	0.14
35.00	10.00	1.40	0.14
40.00	10.05	1.43	0.14

l (cm)	λ 1/2(cm)	ΔX_1 (cm)	$\Delta X_1 / \lambda$ 1/2
20.00	9.71	1.25	0.13
25.00	9.85	1.33	0.14
30.00	10.00	1.35	0.14
35.00	10.05	1.42	0.14
40.00	10.00	1.42	0.14

l (cm)	λ 1/2(cm)	ΔX_1 (cm)	$\Delta X_1 / \lambda$ 1/2
20.00	9.98	1.39	0.14
25.00	9.93	1.37	0.14
30.00	10.00	1.41	0.14
35.00	9.98	1.41	0.14
40.00	10.00	1.40	0.14

l (cm)	λ 1/2(cm)	ΔX_1 (cm)	$\Delta X_1 / \lambda$ 1/2
20.00	9.84	1.32	0.13
25.00	9.88	1.35	0.14
30.00	10.00	1.39	0.14
35.00	10.01	1.41	0.14
40.00	10.02	1.42	0.14



分析： $\Delta X_1/\lambda_1/2$ 之值為 0.13~0.14，得知 ΔX_1 和 $\lambda_1/2$ 成正比。

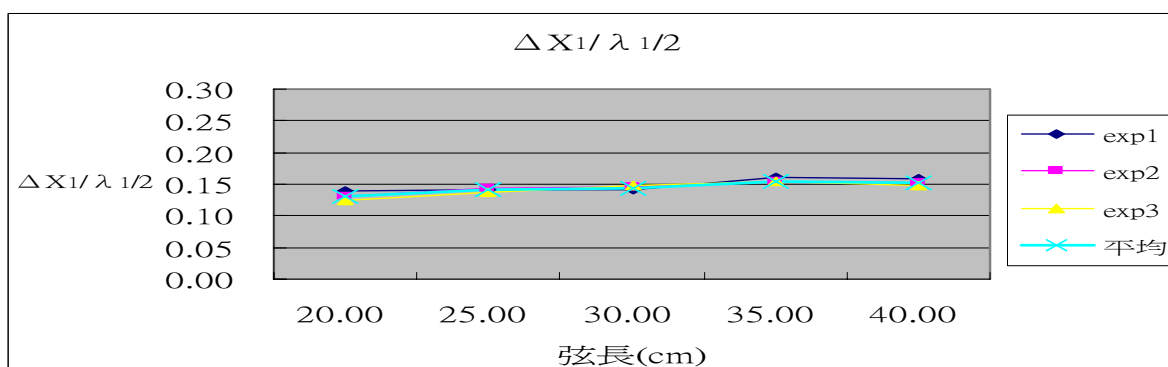
第三弦 弦 B

弦 B---exp1			
l (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX_1 (cm)	$\Delta X_1/\lambda_1/2$
20.00	8.44	1.17	0.14
25.00	8.51	1.21	0.14
30.00	8.63	1.22	0.14
35.00	8.85	1.43	0.16
40.00	9.35	1.48	0.16

弦 B---exp2			
l (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX_1 (cm)	$\Delta X_1/\lambda_1/2$
20.00	8.48	1.11	0.13
25.00	8.53	1.22	0.14
30.00	8.55	1.25	0.15
35.00	8.82	1.36	0.15
40.00	9.08	1.39	0.15

弦 B---exp3			
l (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX_1 (cm)	$\Delta X_1/\lambda_1/2$
20.00	8.25	1.03	0.12
25.00	8.55	1.18	0.14
30.00	8.80	1.31	0.15
35.00	8.72	1.34	0.15
40.00	9.36	1.38	0.15

弦 B---平均			
l (cm)	$\lambda_1/2$ (cm)	ΔX_1 (cm)	$\Delta X_1/\lambda_1/2$
20.00	8.39	1.10	0.13
25.00	8.53	1.20	0.14
30.00	8.66	1.25	0.14
35.00	8.8	1.36	0.15
40.00	9.26	1.41	0.15



分析： $\Delta X_1/\lambda_1/2$ 之值為 0.12~0.16，誤差甚小，亦推知 ΔX_1 和 $\lambda_1/2$ 成正比。

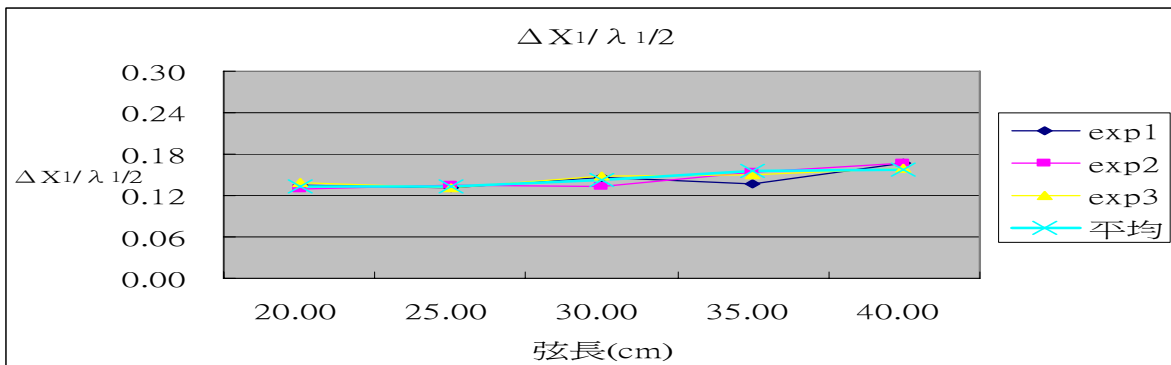
第五弦 弦 C

弦 C---exp1			
$l(\text{cm})$	$\lambda_{1/2}(\text{cm})$	$\Delta X_1(\text{cm})$	$\Delta X_1 / \lambda_{1/2}$
20.00	8.98	1.21	0.13
25.00	7.35	0.97	0.13
30.00	9.03	1.32	0.15
35.00	8.00	1.10	0.14
40.00	8.80	1.47	0.17

弦 C---exp2			
$l(\text{cm})$	$\lambda_{1/2}(\text{cm})$	$\Delta X_1(\text{cm})$	$\Delta X_1 / \lambda_{1/2}$
20.00	8.90	1.15	0.13
25.00	7.40	1.00	0.14
30.00	9.00	1.20	0.13
35.00	8.58	1.32	0.15
40.00	8.73	1.47	0.17

弦 C---exp3			
$l(\text{cm})$	$\lambda_{1/2}(\text{cm})$	$\Delta X_1(\text{cm})$	$\Delta X_1 / \lambda_{1/2}$
20.00	8.80	1.22	0.14
25.00	7.43	0.98	0.13
30.00	9.03	1.33	0.15
35.00	8.00	1.20	0.15
40.00	8.60	1.37	0.16

弦 C---平均			
$l(\text{cm})$	$\lambda_{1/2}(\text{cm})$	$\Delta X_1(\text{cm})$	$\Delta X_1 / \lambda_{1/2}$
20.00	8.89	1.19	0.13
25.00	7.39	0.98	0.13
30.00	9.02	1.28	0.14
35.00	8.21	1.27	0.15
40.00	9.15	1.44	0.16

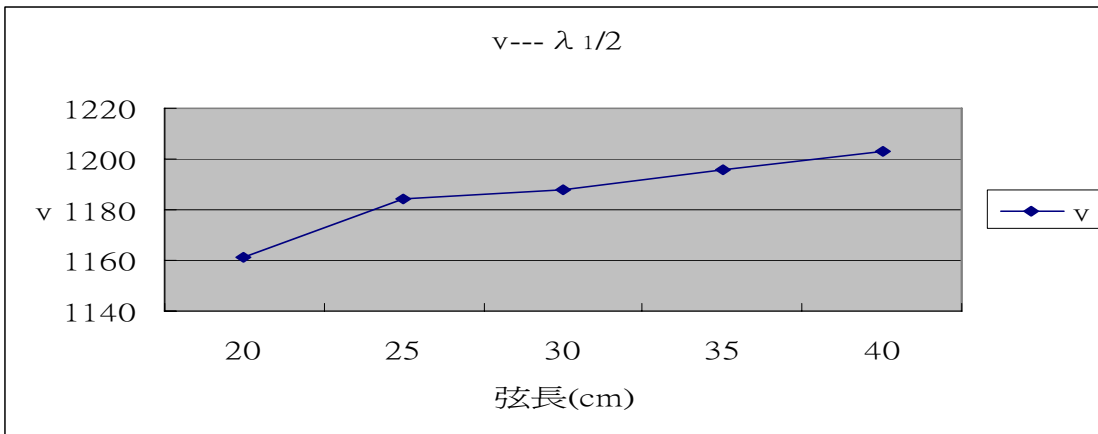


分析： $\Delta X_1 / \lambda_{1/2}$ 之值為 0.13~0.17，誤差甚小，亦推知 ΔX_1 和 $\lambda_{1/2}$ 成正比。

實驗三

弦 A					
弦長(cm)	20	25	30	35	40
波速(v)(cm/s)	1161	1184	1188	1196	1203

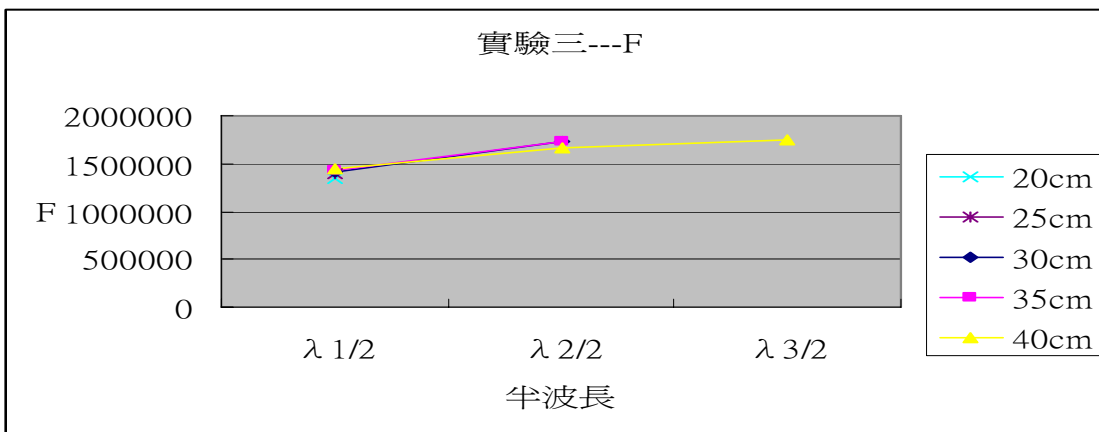
說明：因為不同弦長諧波半波長 n 的個數不一樣，因此只取所有長度皆可產生的 $\lambda_{1/2}$ 。



分析：λ₁/2 的 v (v = f · 2 · λ₁/2) 隨弦長增大而增大，且其圖形為一斜直線。

弦 A --- F(v ²)					
弦長 λ _i /2	20cm	25cm	30cm	35cm	40cm
λ ₁ /2	1347921	1401856	1411344	1430416	1447209
λ ₂ /2	\	\	1731856	1731856	1658944
λ ₃ /2	\	\	\	\	1742400

說明：畫「\」表示此弦長不產生此駐波。

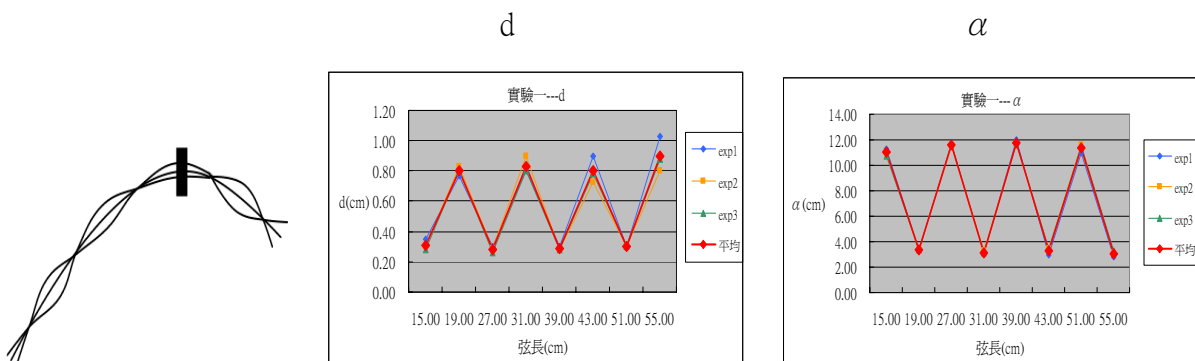


分析：F (∵ F ∝ v² ∴ 此處的 F 以 v² 表示) 隨弦長增大而增大。同一弦上不同波之 F 皆不等，越上面(及越接近震盪點)的半波長越大且 F 亦越大，圖形為一斜直線。

捌、實驗討論

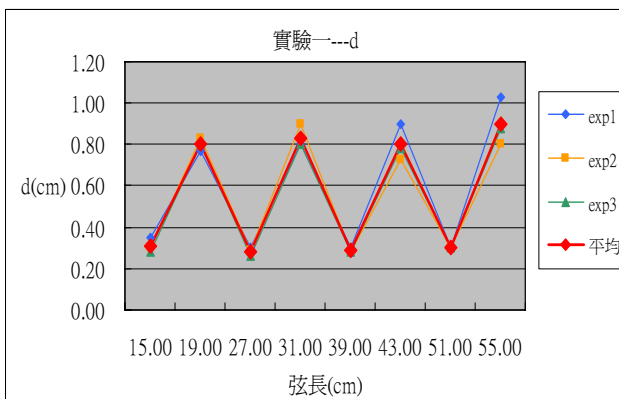
l	弦長	尾端 $\lambda/4$	尾端不完整波	ΔX_1	$\frac{\lambda_1}{2}$ -尾端 $\lambda/4$
n	諧波半波長之個數	$\bar{\lambda}/2$	$\frac{l - \alpha_1 - \text{尾端}\lambda/4}{n}$	v	波速
d	尾端 $\lambda/4$ 之開叉寬度	$\lambda_i/2$	由下數來第 i 個完整半波	f	頻率
α	被固定點所截之不完整波的長度	ΔX	$\frac{\bar{\lambda}}{2} - \text{尾端}\lambda/4$	F	弦上張力

- 一、在【實驗一】中，一開始先將弦 B 水平擺放，兩邊以不同長度比例震盪，卻發現任意取比例時會破壞其震盪點所以不穩定。發現當以垂直震盪的結點為固定點時，震盪極為穩定，所以才以垂直震盪為先，以求其振盪節點，再轉成水平震盪研究之。
- 二、由【實驗一】中觀測出 α 和 μ 的圖形有相同趨勢，即在弦的兩側必呈一大一小。(如下圖)當一邊之 d 為較小值(約 0.3cm)，則其同一邊之 α 必為較大值(約 11~12cm)。

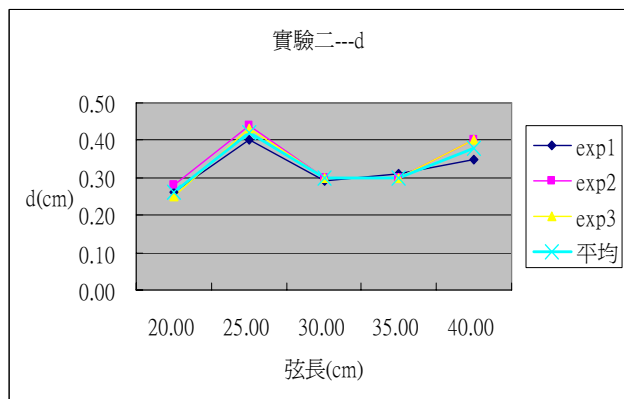


- 三、由【實驗一】雙懸臂震盪中，發現在震盪器固定點兩端之弦 B，由於兩端弦之共振頻率不同，且會受到另一端弦重量及弦波傳遞之影響，所以會呈現不穩定之震盪情形，進而開始做【實驗二】單懸臂震盪，以進行下列之研究探討。
- 四、在【實驗二】中由於為單懸臂震盪其弦不會被另一側弦產生的弦波所影響，故其 d 的圖形不同於雙懸臂的趨勢，而是介在一個範圍中(弦 A : 0.27~0.42cm 弦 B : 0.35~0.48cm 弦 C : 0.35~0.48cm)

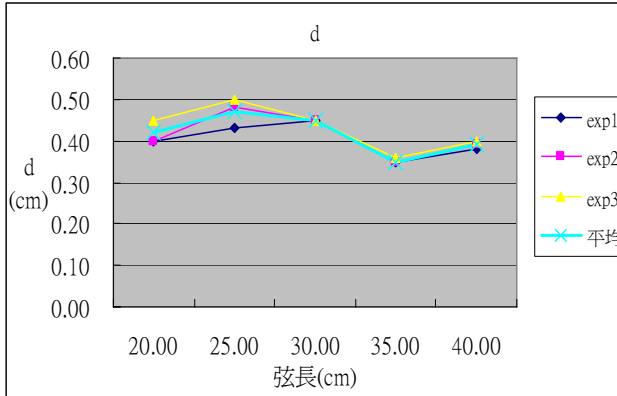
實驗一---弦 B



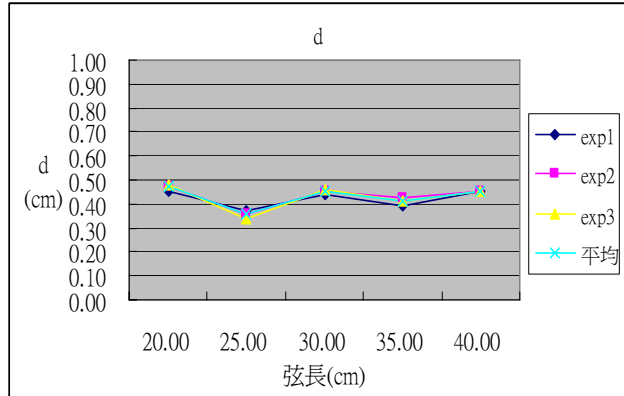
實驗二---弦 A



實驗二---弦 B

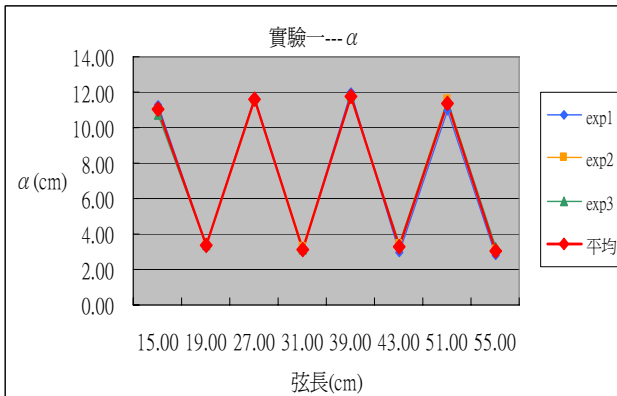


實驗二---弦 C

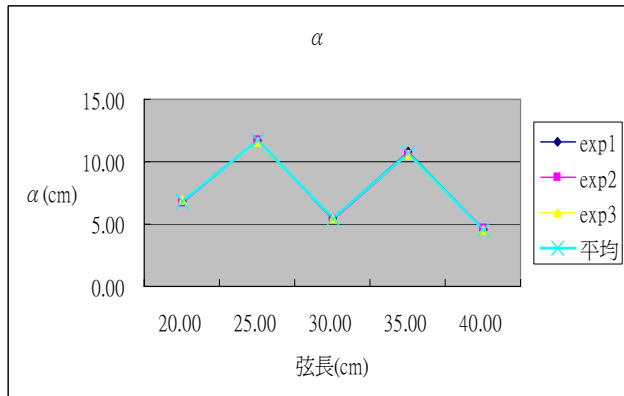


五、【實驗二】單懸臂震盪時 α 的圖形跟【實驗一】雙懸臂震盪時有相同的趨勢。推測因其離固定點較近，所以不受弦波影響，因此不論單懸臂或雙懸臂皆成一大一小。又發現【實驗二】 α 的圖形並沒有如同【實驗一】如此穩定，推測因【實驗二】時弦長為任意取之比例，而不是以節點為固定點。

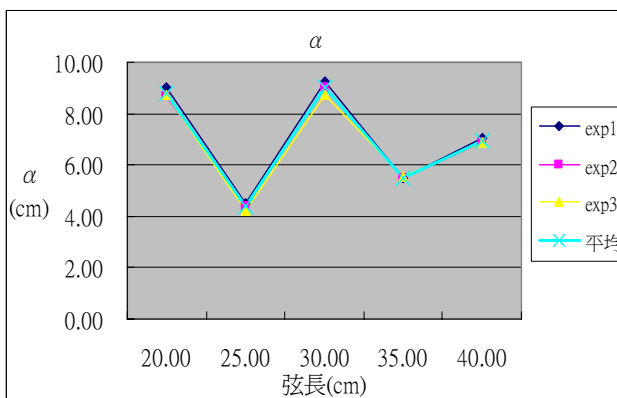
實驗一---弦 B



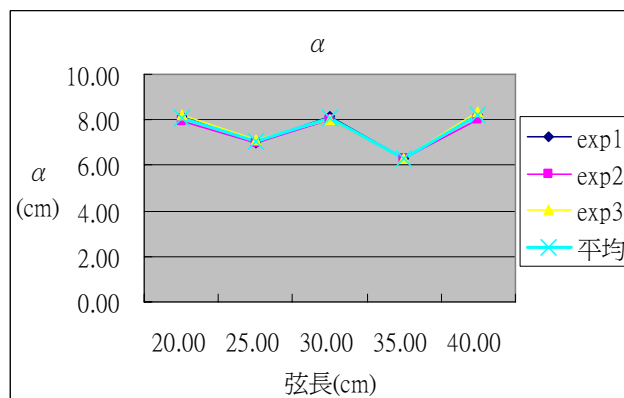
實驗二---弦 A



實驗二---弦 B



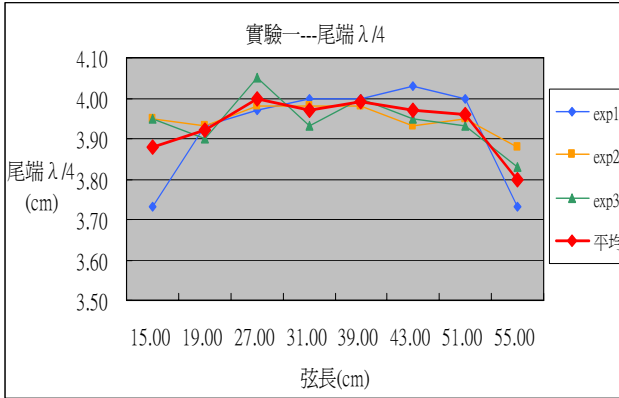
實驗二---弦 C



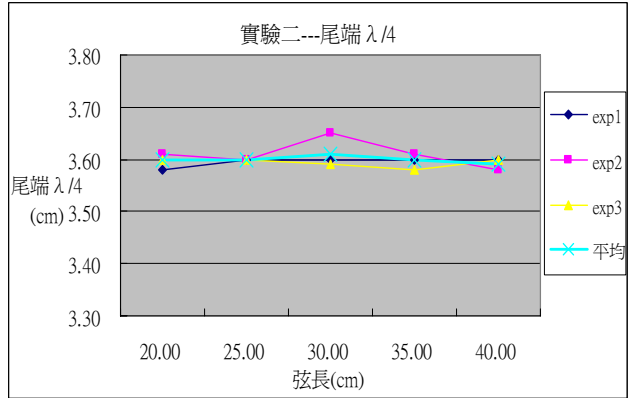
六、尾端 $\lambda/4$ 不受弦長影響，【實驗一】中其值介於 3.8~4cm，【實驗二】中弦 A 約 3.6cm，弦 B 3.1~3.2cm 弦 C 2.7~3.3cm，由數據推知：

- (1)由於雙懸臂震盪時受弦波影響，所以【實驗一】的弦 B 和【實驗二】的弦 B 雖為相同粗細，但其值略微不同。
- (2)弦越粗尾端 $\lambda/4$ 的值就越小且越不穩定。

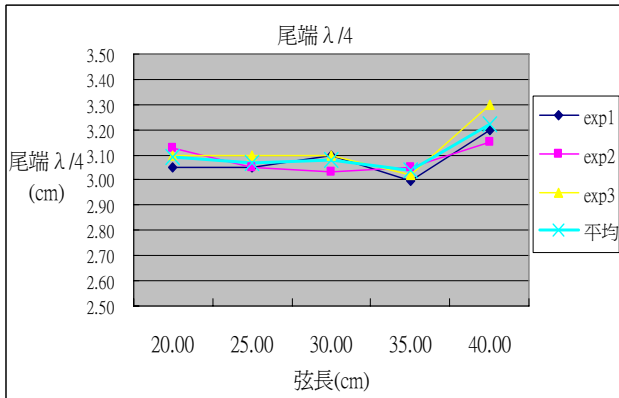
實驗一---弦 B



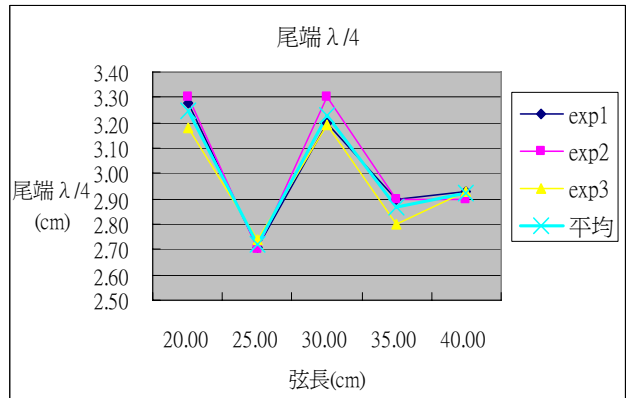
實驗二---弦 A



實驗二---弦 B

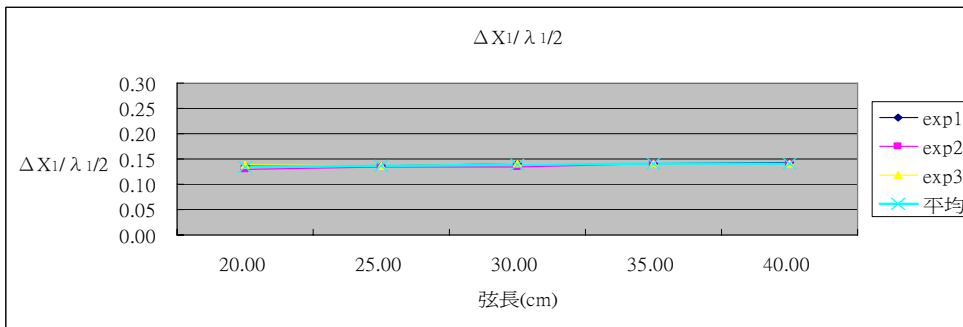


實驗二---弦 C

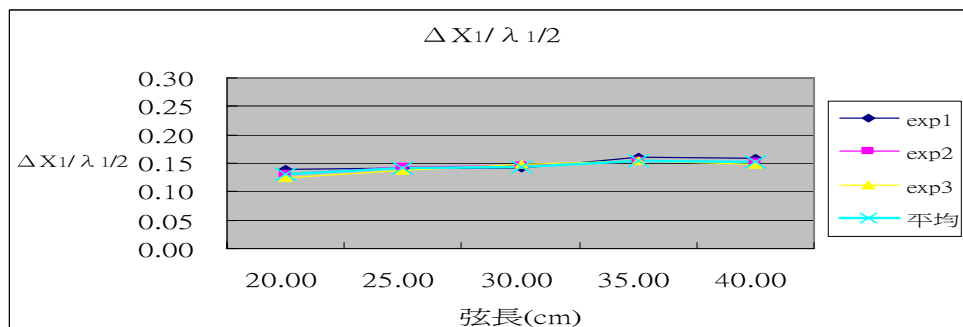


七、觀察發現尾端 $\lambda/4$ 之值並不為 $\lambda/2$ 的一半，兩者間有一差值 ΔX ，爲了求知其值受什麼物理量影響，於是算出 ΔX 和不同物理量之比值，發現其值和 $\lambda_1/2$ 有關係。由數據發現 $\Delta X_1 / \lambda_1/2$ 爲一定值，不受弦長或粗細影響。

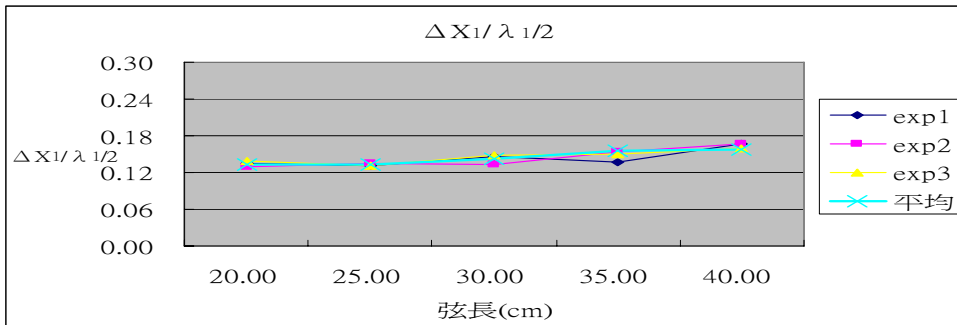
弦 A



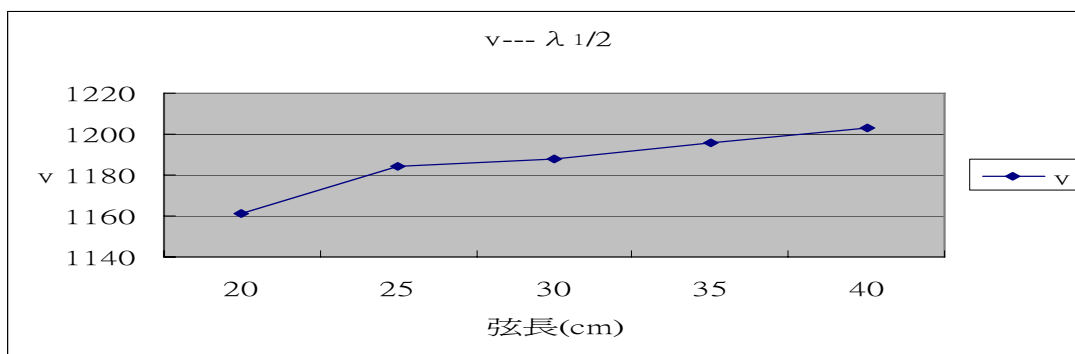
弦 B



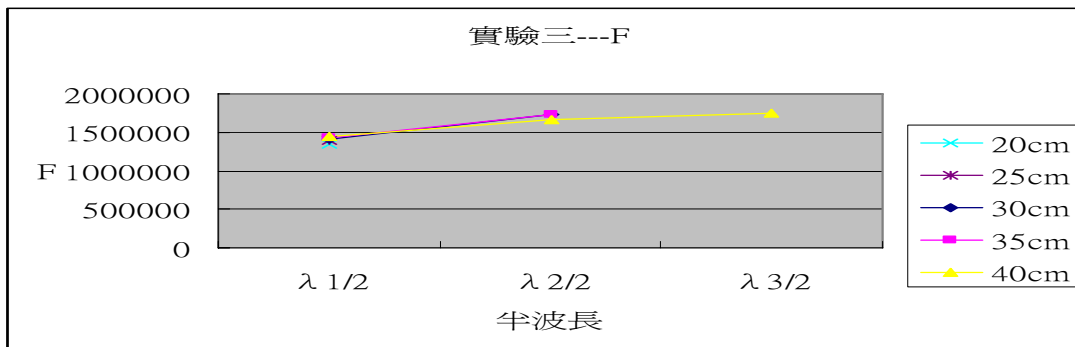
弦 C



- 八、由【實驗一】及【實驗二】中發現同一弦的每個 $\lambda/2$ 皆不一樣大，爲了進一步做深入探討，選用較穩定的弦 A 爲依據。實驗時發現物理量的穩定性隨弦變粗而變小，得知因越粗的弦外層包覆的螺旋彈簧之密度越不齊，因次外層無包覆的弦 A 最爲穩定。
- 九、【實驗三】中發現 $\lambda_1/2$ 的 v ($v = f \cdot 2 \cdot \lambda_1/2$) 隨弦長增大而增大，且其圖形爲一斜直線。



- 十、【實驗三】中發現 F ($F \propto v^2$) 隨弦長增大而增大。同一弦上不同波之 F 皆不等，越上面(及越接近震盪點)的半波長越大且 F 亦越大，圖形爲一斜直線。



- 十一、實驗結果顯示，推理曲弦上之波動由振動源雙向傳遞與單向傳遞干涉而成，波行進方向方程式表示爲 $y = y_0 \sin(kl \pm \omega t)$ (l ：弦長)。

玖、實驗結論

- 一、依弦上駐波得知，於同一條弦上波節間距必爲半波長。但曲弦上形成穩定駐波時相鄰波節間距卻由固定端向尾端逐漸減小，顯見弦上受力遞減。
- 二、由實驗證實同一條弦越上面的波所受向下重力越大，因此受力越大波速及波長亦越大。
- 三、由雙懸臂震盪實驗，得知同一長度的弦在同一頻率震盪下，不論所取比例爲何，兩邊諧波半波長之個數的總和必爲固定。以【實驗一】總弦長 70cm 爲例，在同一頻率下，兩邊諧波半波長之個數必爲 4。

- 四、由參考文獻 1. 得知環狀鋼弦震盪的固定點必為一節點，推論是因環弦長 $2\pi r = n\lambda$ 波長整數倍所致。但是在曲桿震盪下，其固定點必為波腹而非節點。
- 五、當弦長越大，其彎曲亦更大，所以曲弦的弦上張力增大，受力及波速變隨弦長增大而增大。
- 六、單懸臂震盪時 α 的函數曲線跟雙懸臂震盪時有相同的現象。是因其波離固定點較近，不受弦波影響，因此不論單懸臂或雙懸臂皆成一次變大一次變小的週期性變化。單懸臂 α 的圖形並沒有如同雙懸臂如此穩定，是因單懸臂弦長為任意取之比例，而不是以節點為固定點。
- 七、觀察發現尾端 $\lambda/4$ 之值並不為 $\lambda/2$ 的一半(理想 $\lambda/4$)，兩者間有一差值 ΔX 。在一連串比較分析之後，證實 ΔX 值和 $\lambda_1/2$ 之比為定值，且不受弦長影響。推論原因為尾端 $\lambda/4$ 及 $\lambda_1/2$ 在弦的最尾端，所以所受重力極小，僅受本身剛性彈力強度影響。

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = f\lambda \text{ 所以因為 } F \text{ 差異極小，只受 } \mu \text{ 影響。故尾端 } \lambda/4 \text{ 之 } \Delta X \text{ 差值僅受弦之粗}$$

細影響是本實驗的重大發現。

- 八、選用任意彈性弦，取一任意長度震，必須在特定頻率下驅動，才能形成良好穩定的共振駐波；波行進方向方程式表示為 $y = y_0 \sin(kl \pm \omega t)$ (l ：弦長)。

拾、感想與展望

- 牛刀小試：剛開始在還未了解弦時，先初步觀察一些現象。
- 身陷泥沼：沒想到觀測的誤差極為嚴重，使我們陷入絕境。
- 半舉白旗：在一連串的嘗試與失敗中，我們差點要放棄了。
- 玄機乍現：但是弦的玄機不斷出現，其奧妙無窮無盡。
- 風雲再起：在好奇心驅使下，我們克服種種困難，再度研究。
- 喜極而泣：雖歷經種種障礙，最後的結果卻使我們雀躍不已！
- 刻骨銘心：此次實驗的辛酸血淚與成就將會使我們一生難忘。
- 感激不盡：實驗中得到許多老師及同學的協助和激勵，讓我們永記在心。
- 未來展望：這次實驗的尾端 $\lambda/4$ 的 ΔX 的差值與老師多年前做過的專題研究題目，共鳴空氣柱實驗開口處 $\lambda/4$ 的微小差值 ΔX ，僅受空氣柱寬度的影響有異曲同工之妙。受限於時間影響，送展之後我們會繼續完成以垂直懸吊鉛直震盪測出其 $\Delta X_1 / \lambda_1 / 2$ 的值，預估此實驗應當會有同樣的結果。

拾壹、參考文獻

1. 作者：余孟璘、李姿慧 絃歌不輟---用圓駐波震盪模式探討彈性係數 第四十四屆全國科物理科第一名
2. Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing 原著 The Physics of Musical Instruments Springer-Verlag
3. 高二物質科學物理篇(上)力測量、高三物理(上)弦上駐波(南一版)

評語

優：清楚克服實驗之困難，完成各項數據之讀取與分析。

缺：僅有觀察之結論，無原因之探討。