臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱 ：平分拋物線

學校 / 作者 ：國立臺中女子高級中學　　　　張璨云
國立臺中女子高級中學　　　　楊士潔

作者簡介

我是張璨云，出生於西元 1990 年，小學畢業於彰化縣立員林國小資優班，五年級曾獲得第十三屆全港小學數學邀請賽優異獎；六年級曾獲得第七屆小學數學世界邀請賽三等獎。

國中畢業於彰化縣立員林國中資優班，二年級曾獲得彰化縣第四十五屆國民中小學科展國中組數學科優等、澳洲 AMC 台灣區第二名及全美中學數學分級能力測驗 AMC8 滿分。

目前就讀於臺中女中數理資優班，對理科頗有興趣，一年級曾獲得全美中學數學分級能力測驗 AMC10 傑出獎及高師大所舉辦之 95 年網路數學競賽高中組一等獎，並於一年級下學期起投入心力於本次科展主題之研究，以期能獲得佳績。

作者簡介

我叫楊士潔，1990 年生於台中縣。從小就被送到功文學習數學，因此對數學有一股熱忱，我還喜歡看天空，看雲的變化、天體運行...等，對天空的事物有極大的興趣。

國小畢業前內向害羞；國小畢業後接受同學的薰陶，逐漸變得開朗活潑，雖然年紀、長相都比他人成熟，但仍保留一顆赤子之心。

國小時期得獎無數，國中成績還算不差，曾兩度參加過 AMC8 競賽，分別拿下 23、24 分的成績(滿分 25 分)、PME 全國中小學數學優等生認證檢定表現特優、第十八屆全國奧林匹克數學競賽三等獎，高中考進台中女中數理資優班，但成績一落千丈，不過我總是能用笑容面對一切困難與不愉快。

中文摘要

這個研究起源於一個平分圓的問題：在平面上 $2n+1$ 個點 $(n \in \mathbb{N})$ ，其中任三點不共線，任四點不共圓，任取三點可以畫出唯一的圓，若一半的點在圓內，一半的點在圓外，則此圓爲平分圓，Federico Ardila 教授在 America Monthly 111 期[2]中發表了一篇論文，證明平分圓的個數爲 n^2 個。我們研究的目的是：如果將圓改成抛物線，則平分抛物線的個數是否爲一定值?若爲定值，則爲多少個?

我們的研究題目是：平面上 $2n+1$ 個在正常位置上的點 $(n \in \mathbb{N})$ ，平分抛物線的個數爲何?

<說明：定義在平面上 $2n+1$ 個點 $(n \in \mathbb{N})$ ，其中任三點不共線，任四點不共抛物線，現在我們將對稱軸方向固定時，任兩點連線也不與對稱軸平行，則任取三點可以決定出一個唯一抛物線，若有一半的點在抛物線內，一半的點在抛物線外，則此抛物線稱爲平分抛物線。>

我們將研究的主要結果分述如下：

一、證明在平面上 $2n+1$ 個點 $(n \in \mathbb{N})$ ，平分抛物線個數爲定值。

二、證明在平面上 $2n+1$ 個點 $(n \in \mathbb{N})$ ，平分抛物線個數爲 n^2 個。

接著推廣至：若平分抛物線改成 $(a \vee b)$ 抛物線，則個數爲何?

<說明：若 a 個點在抛物線內， b 個在抛物線外，或 b 個點在抛物線內， a 個點在抛物線外 $(a+b=2n-2)$ ，則稱此抛物線爲 $(a \vee b)$ 抛物線。>

我們將研究的主要結果分述如下：

一、證明在平面上 $2n+1$ 個點 $(n \in \mathbb{N})$ ， $(a \vee b)$ 抛物線個數爲定值。

二、證明在平面上 $2n+1$ 個點 $(n \in \mathbb{N})$ ， $(a \vee b)$ 抛物線個數爲 $2(ab+a+b+1)$ 個。

Abstract

This study originated from a question of "The Number of Halving Circles": Setting $2n+1$ points in the plane is in general position if no three of the points are collinear and no four are concyclic. We call a circle halving with respect to those $2n+1$ points if it has three points of those $2n+1$ points on its circumference, $n-1$ points in its interior, and $n-1$ in its exterior. Then we call this circle "Halving Circle." Professor Federico Ardila issued a paper in the America Monthly 111 [2]. The goal of that paper is to prove the following fact: any set of $2n+1$ points in general position in the plane has exactly n^2 halving circles. The purpose we make the study of is: If we turn circles into parabolas, how many Halving Parabolas are there?

The title we make the study of is: Setting $2n+1$ points in the plane $(n \in \mathbb{N})$, how many Halving Parabolas are there?
＜Interpretation: Setting $2n+1$ points in the plane is in general position if no two of the points are parallel with the fixing direction of the axis of symmetry, no three of the points are collinear and no four are on the same parabola. We call a parabola halving with respect to those $2n+1$ points if it has three points of those $2n+1$ points on its curve, $n-1$ points in its interior, and $n-1$ in its exterior. Then we call this circle "Halving Parabola." ＞

We show our main effect below:

1. Proving that $2n+1$ points in the plane $(n \in \mathbb{N})$, the number of Halving Parabolas is constant.
2. Proving that $2n+1$ points in the plane $(n \in \mathbb{N})$, the number of Halving Parabolas is n^2.

Spread: If we turn Halving Parabolas into $(a \vee b)$ Parabolas, how many $(a \vee b)$ Parabolas are there?
＜Interpretation: Setting $2n+1$ points in the plane is in general position if no two of the points are parallel with the fixing direction of the axis of symmetry, no three of the points are collinear and no four are on the same parabola. We call a parabola separating with respect to those $2n+1$ points if it has three points of those $2n+1$ points on its curve, a points in its interior and b in its exterior, or b points in its interior and a in its exterior. Then we call this circle "$(a \vee b)$ Parabola." ＞

We show our main effect below:

1. Proving that $2n+1$ points in the plane $(n \in \mathbb{N})$, the number of $(a \vee b)$ Parabolas is constant.
2. Proving that $2n+1$ points in the plane $(n \in \mathbb{N})$, the number of $(a \vee b)$ Parabolas is $2(ab+a+b+1)$.

壹、研究動機

這個研究源自於 APMO1999 的第 5 題[1]，在平面上有 $2n+1$ 個點 $(n\in\mathbb{N})$，其中任三點不共線，任四點不共圓（我們稱此 $2n+1$ 個點在正常位置上），過任三點所畫出來的圓，當圓內與圓外的點個數相同時，我們稱之爲平分圓，要證明平分圓之個數的奇偶性與 n 相同 $(n\in\mathbb{N})$ ，接著在 America Monthly 111[2]中 Federico Ardila 教授對於平分圓的個數有更進一步的研究，並可精確算出其個數，在閱讀完此論文後我們便嘗試將圓的條件改成拋物線，在平面上有 $2n+1$ 個點 $(n\in\mathbb{N})$ ，其中任三點不共線，任四點不共拋物線，在固定對稱軸方向的情況下(即每個拋物線的對稱軸都互相平行)，過任三點可決定唯一的一拋物線，若所畫出的拋物線將剩餘的 $2n-2$ 個點($2n+1-3=2n-2$)平分成一半的點在拋物線內部、一半的點在外部，我們稱之爲平分拋物線，並計算“平分拋物線”的個數。

貳、研究目的

一、 探討 $2n+1$ 個點 $(n\in\mathbb{N})$ ，其中任三點不共線，任四點不共拋物線，現在我們將對稱軸方向固定時，任兩點連線也不與對稱軸平行，稱爲在正常位置上的點，過任三點所能構成的平分拋物線個數是否爲一定值？

二、 找出 $2n+1$ 個 $(n\in\mathbb{N})$ 在正常位置上的點，過任三點所能構成的平分拋物線個數爲何？

三、 探討 $2n+1$ 個 $(n\in\mathbb{N})$ 在正常位置上的點，過任三點所構成的拋物線內部有 a 個點且外部有 b 個點，或內部有 b 個點且外部有 a 個點，此種拋物線的個數是否爲一定值？

四、 找出 $2n+1$ 個 $(n\in\mathbb{N})$ 在正常位置上的點，過任三點所能構成的拋物線內部有 a 個點且外部有 b 個點或內部有 b 個點且外部有 a 個點，此種拋物線的個數爲何？

參、研究器材

紙、筆、電腦、Word 軟體、Opera Widgets Functions 2d。

肆、定義

一、這篇文章中所提及之拋物線皆以給定的直線 L 爲其對稱軸方向，不失一般性，本文我們將 L 皆取爲鉛直線。

二、在正常位置上的點：這些點滿足任三點不共線、任四點不共拋物線、任兩點連線不與 L 平行。

三、平分拋物線：平面上 $2n+1$ 個在正常位置上的點，在固定對稱軸方向的情況下過任三個點可以畫出唯一的一個拋物線，若此拋物線內、外都各有 $n-1$ 個點，則稱此拋物線爲平分拋物線。

四、$(a\vee b)$ 拋物線：表示內部有 a 個點且外部有 b 個點，或內部有 b 個點且外部有 a 個點的拋物線其中 $b>a$ 。

五、 $P_iP_jP_k\,(a,b)$ ：過 P_i 、 P_j 、 P_k 三點的拋物線，且拋物線內部有 a 個點、外部有 b 個點。

伍、研究過程及方法

一、平分拋物線

【引理 1.1】平面上$2n+1$個在正常位置上的點至少可畫出一平分拋物線。

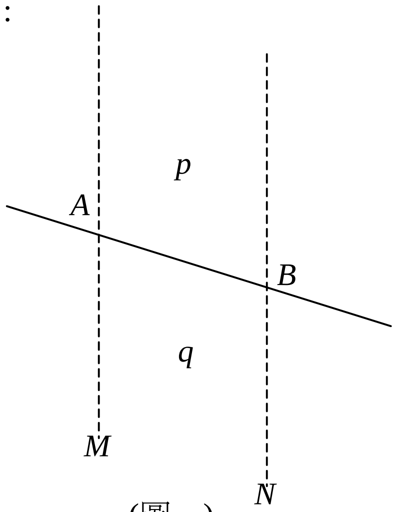
（ pf ）

(一) 取兩點A、B，使得$\overleftrightarrow{AB}$將平面分割成兩半平面，且所有的點皆落在其中一半平面。

(二) 分別過A、B作兩條與L平行的直線M、N，令在二平行線M、N之間且在$\overleftrightarrow{AB}$上半平面的所有點為p個，在M、N之間且在$\overleftrightarrow{AB}$下半平面的所有點為q個，且$q=0$。

接著我們將過A、B兩點構成的拋物線分成兩種類型：

1. $\overleftrightarrow{AB}$不垂直L：(如圖一)



(圖一)

此時過A、B兩點的拋物線，其對稱軸L'可能在平面上平行L的任意位置，扣除過$\overline{AB}$中點的情況。

現在我們把L'由右側無窮遠處移動到左側無窮遠處，拋物線內包含的點逐漸減少，且一次減少一個，其中當L'跨過$\overline{AB}$中點前後，拋物線內點的個數都是p個。L'移動時，拋物線內點的個數變化如下：

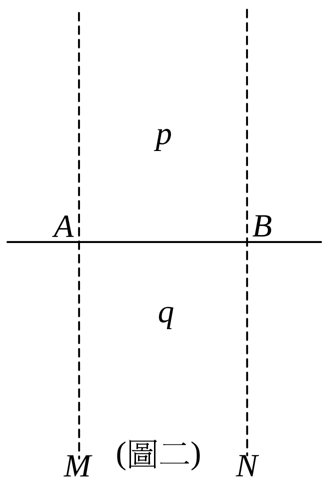
$2n-1 \to p \xrightarrow{L'\text{跨過}\overline{\text{AB}}\text{中點}} p \to 0$，

其中於$p \to p$的過程中拋物線的開口方向由上變成下。

(1)若$p \le n-1 \Rightarrow$在$2n+1 \to p$的過程中至少產生一個平分拋物線。

(2)若$p \ge n \Rightarrow$在$p \to 0$的過程中至少產生一個平分拋物線。

2. $\overleftrightarrow{AB} \perp L$：



(圖二)

在這種情況，過A、B之拋物線的對稱軸L'必為$\overline{AB}$之中垂線。如圖二所示，我們將拋物線的頂點由下方無窮遠處移動到上方無窮遠處，拋物線內點的個數變化如下：

$p \to 2n-1 \xrightarrow{\text{頂點通過}\overline{\text{AB}}} 0 \to p$，

其中於$2n-1 \to 0$的過程中拋物線的開口方向由上變成下，且在$p \to 2n-1$和由$0 \to p$的過程中，拋物線內包含的點都是逐一增減。

(1)若$p \le n-1 \Rightarrow$在$p \to 2n-1$的過程中至少產生一個平分拋物線。

(2)若$p \ge n \Rightarrow$在$0 \to p$的過程中至少產生一個平分拋物線。

(三) 由上述兩個情況知，同一平面上$2n+1$個在正常位置上的點至少可畫出一平分拋物線。

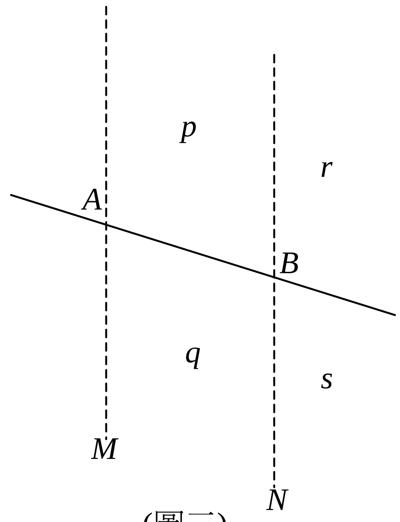
【引理 1.2】平面上$2n+1$個在正常位置上的點，過任兩個點至少可畫出一平分拋物線。

（ pf ）

(一) 任取兩點A、B，分別過A、B作兩條與對稱軸平行的直線M、N，令在M、N之間且在$\overleftrightarrow{AB}$上半平面的所有點爲p個；在M、N之間且在$\overleftrightarrow{AB}$下半平面的所有點爲q個；在M、N外且在$\overleftrightarrow{AB}$上半平面的所有點爲r個；在M、N外且在$\overleftrightarrow{AB}$下半平面的所有點爲s個，如圖二。(令$r+p>s+q$又$r+p+s+q=2n-1 \therefore r+p \geq n$，$s+q \leq n-1$)。

接著同引理 1.1，我們將過A、B兩點所構成的拋物線分成下列兩種情況：

1. $\overleftrightarrow{AB}$不垂直L：(如圖三)



(圖三)

此時過A、B兩點的拋物線，其對稱軸L'可能在平面上平行L的任意位置，扣除過$\overline{AB}$中點的情況。現在我們把L'由右側無窮遠處移動到左側無窮遠處，拋物線內包含的點逐漸增減，且一次減少一個或增加一個，來回變動，其中當L'跨過$\overline{AB}$中點前後，拋物線內點的個數都是$p+q$個。L'移動時，拋物線內點的個數變化如下：

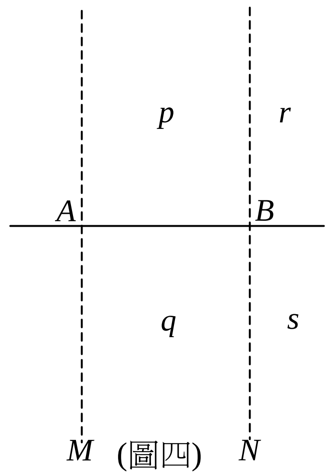
$r+p \to p+q \xrightarrow{L'\text{跨過}\overline{AB}\text{中點}} p+q \to s+q$，

其中於$p+q \to p+q$的過程中拋物線的開口方向由上變成下。

(1)若$p+q \leq n-1 \Rightarrow$因爲$r+p \geq n$，所以在$r+p \to p+q$的過程中至少產生一個平分拋物線。

(2)若$p+q \geq n \Rightarrow$因爲$s+q \leq n-1$，所以在$p+q \to s+q$的過程中至少產生一個平分拋物線。

2. $\overleftrightarrow{AB} \perp L$：



(圖四)

在這種情況，過A、B之拋物線對稱軸L'必爲$\overline{AB}$之中垂線。如圖四所示，我們將拋物線的頂點由下方無窮遠處移動到上方無窮遠處，拋物線內點的個數變化如下：

$p+q \to r+p \xrightarrow{\text{頂點通過}\overline{AB}} s+q \to p+q$，

其中於$r+p \to s+q$的過程中拋物線的開口方向由上變成下，且在$p+q \to r+p$和$s+q \to p+q$的過程中，拋物線內包含的點都是逐一增減。

(1)若 $p+q \le n-1 \Rightarrow$ 因爲 $r+p \ge n$，所以在 $p+q \to r+p$ 的過程中至少產生一個平分拋物線。

(2)若 $p+q \ge n \Rightarrow$ 因爲 $s+q \le n-1$，所以在 $s+q \to p+q$ 的過程中至少產生一個平分拋物線。

(二) 由上述兩種情況可知，同一平面上 $2n+1$ 個在正常位置上的點，過任兩個點至少可畫出一平分拋物線。

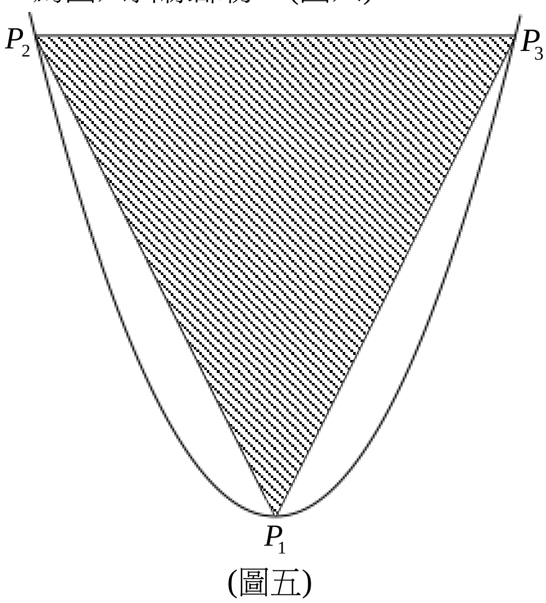
【引理 1.3】試證能找到 $2n+1$ 個 $(n \ge 2$ 且 $n \in \mathbb{N})$ 點 P_1、P_2、…、P_{2n}、P_{2n+1}，使得 P_1、P_2、…、P_{2n-1} 在同一拋物線且 $\overleftrightarrow{P_kP_{2n}}$ $(k=1$、…、$2n-1)$ 能平分其餘的 $2n-2$ 個點，P_{2n+1} 爲一點不被 P_1、P_2、…、P_{2n} 任三點構成的拋物線包在內的點。

（ *pf* ）

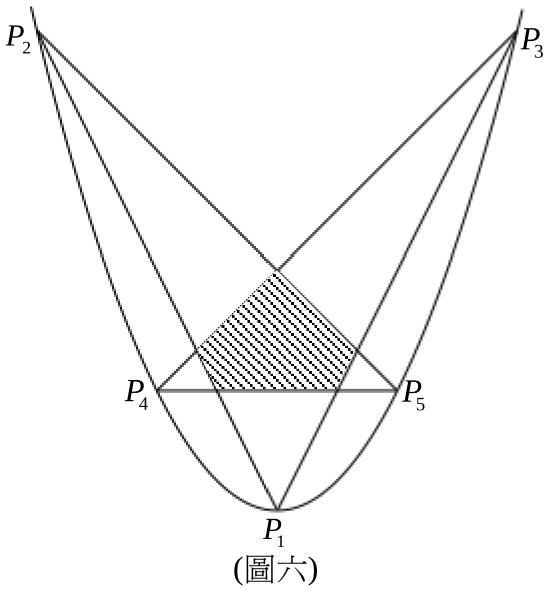
(一) 作一拋物線，頂點爲 P_1，拋物線對稱軸爲 L'。

(二) 當 $n=2$ 時，拋物線頂點爲 P_1，作直線 $L_2 \perp L'$，設直線交拋物線於 P_2、P_3，P_4 落在 B_1 內部，P_4 可爲 B_1 內部中任一，其中 B_1 爲圖五斜線部份。(圖五)

(三) 當 $n=3$ 時，承圖五，作直線 L_3 介於 $\overline{P_2P_3}$ 與 P_1 中且垂直 L'，設此直線交拋物線於 P_4、P_5，連 $\overline{P_2P_5}$、$\overline{P_3P_4}$、$\overline{P_4P_5}$ 點，P_6 落在 B_2 內部，P_6 可爲 B_2 內部中任一點，其中 B_2 爲圖六斜線部份。(圖六)



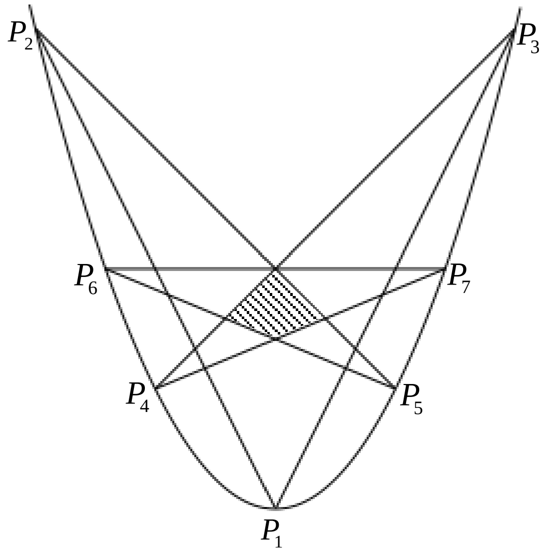
(圖五)



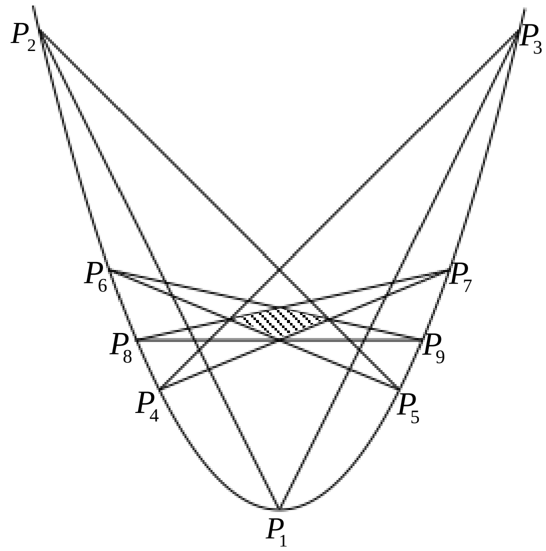
(圖六)

(四) 當 $n=4$ 時，承圖六，過 $\overline{P_2P_5}$ 與 $\overline{P_3P_4}$ 的交點作直線 L_4 且垂直 L'，設此直線交拋物線於 P_6、P_7，連 $\overline{P_4P_7}$、$\overline{P_5P_6}$、$\overline{P_6P_7}$，P_8 落在 B_3 內部，P_8 可爲 B_3 內部中任一點，其中 B_3 爲圖七斜線部份。(圖七)

(五) 當 $n=5$ 時，承圖七，過 $\overline{P_4P_7}$ 與 $\overline{P_5P_6}$ 的交點作直線 L_5 且垂直 L'，設此直線交拋物線於 P_8、P_9，連 $\overline{P_6P_9}$、$\overline{P_7P_8}$、$\overline{P_8P_9}$，P_{10} 落在 B_4 內部，P_{10} 可爲 B_4 內部中任一點，其中 B_4 爲圖八斜線部份。(圖八)



(圖七)



(圖八)

(六) 以此類推找出P_{10}、…、P_{2n-1}的位置。

(七) 從圖可以發現$B_1 \supset B_2$，$B_2 \supset B_3$，…，$B_{n-2} \supset B_{n-1}$，為了確定$B_k (1 \le k \le n-1, k \in \mathbb{N})$不為空集合，我們做以下的證明，不失一般性，我們假設拋物線$\Gamma : y = \dfrac{1}{2}x^2$，直線$L_i : y = y_i (2 \le i \le n-1, i \in \mathbb{N})$，顯然$\Gamma$與$L_i$的焦點分別為$P_{2i-2}$及$P_{2i-1}$，不妨令$P_1$的$y$值為$y_1$，且$y_1 = 0$，接著考慮$\langle y_k \rangle$ $(k = 1, 2, ..., n-1)$。

顯然由計算可得，$y_1 = 0, y_2 = 8, y_3 = 2, y_4 = 4, \cdots$

(1)$\because$ P_{2k-2}、P_{2k-1}的y值為y_k $\therefore x = \mp\sqrt{2y_k}$；$\because$ P_{2k}、P_{2k+1}的y值為y_{k+1} $\therefore x = \mp\sqrt{2y_{k+1}}$；

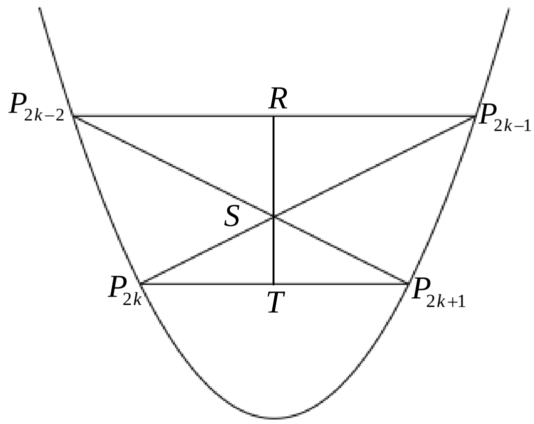
S的y值為y_{k+2}，又$\Delta SP_{2k}P_{2k+1} \sim \Delta SP_{2k-2}P_{2k-1}$ $\therefore \dfrac{\overline{P_{2k-2}P_{2k-1}}}{\overline{P_{2k}P_{2k+1}}} = \dfrac{\overline{RS}}{\overline{ST}}$

$$\Rightarrow y_{k+2} = y_{k+1} + \frac{(y_k - y_{k+1})}{\sqrt{2}(\sqrt{y_{k+1}} + \sqrt{y_k})}\sqrt{2y_{k+1}} = \sqrt{y_k y_{k+1}} \ (k \ge 2, k \in \mathbb{N}) \text{(如圖九)}$$

(2) $y_2 = 8$

$$\begin{array}{l} y_3 = 2 \\ y_4 = \sqrt{y_3 y_2} \\ y_5 = \sqrt{y_4 y_3} \\ \quad\vdots \\ y_{k+1} = \sqrt{y_k y_{k-1}} \\ \underline{\times) y_{k+2} = \sqrt{y_{k+1} y_k}} \end{array}$$

$$\sqrt{y_2} \cdot y_{k+1} \cdot y_{k+2} = 16\sqrt{y_{k+1}} \Rightarrow y_{k+2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{y_{k+1}}}$$



(圖九)

(3)接著把$\langle y_k\rangle$分成$\langle y_{2m}\rangle$與$\langle y_{2m-1}\rangle$ $(m\in\mathbb{N})$，再利用數學歸納法證明$\langle y_{2m}\rangle$爲一遞減數列；$\langle y_{2m-1}\rangle$爲一遞增數列

①當$m=1,2$時，$\langle y_{2m-1}\rangle$中，$y_1=0$、$y_3=2$，$y_1<y_3$；

$\langle y_{2m}\rangle$中，$y_2=8$、$y_4=4$，$y_2>y_4$。

②當$m=k-2,k-1$時，假設$\langle y_{2m}\rangle$爲遞減數列；$\langle y_{2m-1}\rangle$爲遞增數列恆成立

故$\langle y_{2m-1}\rangle$中，$y_{2k-5}<y_{2k-3}$；$\langle y_{2m}\rangle$中，$y_{2k-4}>y_{2k-2}$。

③當$m=k-1,k$時，$\langle y_{2m-1}\rangle$中，$y_{2(k-1)-1}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{y_{2k-4}}}$，$y_{2k-1}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{y_{2k-2}}}$

$\because y_{2k-4}>y_{2k-2}>0 \therefore y_{2k-3}<y_{2k-1}$；$\langle y_{2m}\rangle$中，$y_{2(k-1)}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{y_{2k-3}}}$，$y_{2k}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{y_{2k-1}}}$

$\because y_{2k-1}>y_{2k-3}>0 \therefore y_{2k-2}>y_{2k}$

由數學歸納法知$\langle y_{2m}\rangle$爲一遞減數列；$\langle y_{2m-1}\rangle$爲一遞增數列

④因爲下標爲偶數時，皆取上一次y值範圍的最大值，而下標爲奇數時，則取上一次y值範圍的最小值，又最大值永遠會比最小值大，因此下標爲偶數的y皆會較下標爲奇數的y來的大。

由①、②、③、④的討論可得B_k永遠存在，因此以這種方法我們一定可以找到$2n-1$個點P_1、P_2、…、P_{2n-1}，使得P_1、P_2、…、P_{2n-1}在同一拋物線且$\overleftrightarrow{P_kP_{2n}}$ $(k=1、…、2n-1)$能平分其餘的$2n-2$個點。

P_{2n+1}在$\overleftrightarrow{P_{2n-2}P_{2n-1}}$左或右側無窮遠處，極靠近$\overleftrightarrow{P_{2n-2}P_{2n-1}}$。這樣可以確定$P_{2n+1}$爲一點不被$P_1$、$P_2$、…、$P_{2n}$任三點構成的拋物線包在內的點。

【定理 1.1】平面上$2n+1$個在正常位置的點$(n\in\mathbb{N})$，當n固定時，平分拋物線的個數N_s $(s=2n+1)$爲一個定值。

(pf)

由引理 1.2，過任兩點至少可畫出一平分拋物線：$\therefore N_s\geq\dfrac{C_2^{2n+1}}{3}=\dfrac{(2n+1)n}{3}$；

又$2n+1$個點可畫出C_3^{2n+1}個固定對稱軸方向的拋物線：$\therefore N_s\leq C_3^{2n+1}=\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$。

故N_s有上下界，一定能分別找出一種排法使得N_s有最大值和最小值。

(一) 假設將 $2n+1$ 個點排成在 P_1、P_2、…、P_{2n}、P_{2n+1} 的位置時，N_s 有最小值，則令 $S_{\min}=\{P_1、…、P_{2n+1}\}$；將 $2n+1$ 個點排成在 Q_1、Q_2、…、Q_{2n+1} 的位置時，N_s 有最大值，則令 $S_{Max}=\{Q_1、…、Q_{2n+1}\}$。接著我們要逐一將 P_1 移動到 Q_1、P_2 移動到 Q_2、…、P_{2n+1} 移動到 Q_{2n+1} 來觀察移動的過程中 N_S 是否會改變。

(二) 令 $P_1(t)$ 爲表示在時刻 t，P_1 所在位置的函數，$P_1(0)=P_1$ 且設 $P_1(t)=A$、$P_1(t+\Delta t)=B$，$\Delta t\to 0$。

(三) 移動的過程中，有下面 3 種狀況可能會改變 N_S 的個數：

1. 通過 P_i、P_j 的連線：如圖十所示

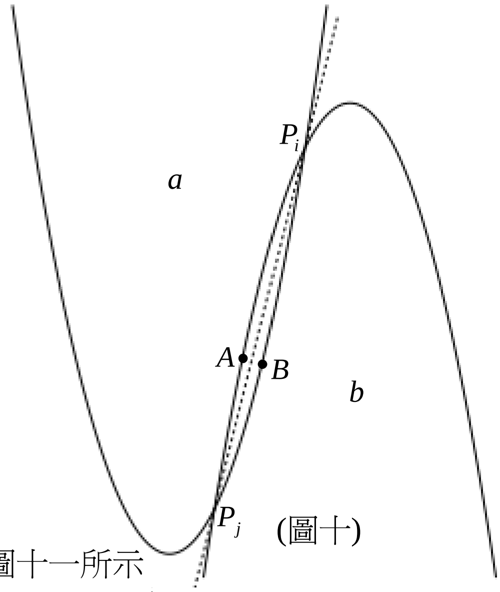
$P_iP_jA(a,b)\xrightarrow{\text{開口方向改變}}P_iP_jB(b,a)$

有以下兩種情況：

(1) P_iP_jA 及 P_iP_jB 都爲平分拋物線。

(2) P_iP_jA 及 P_iP_jB 都不爲平分拋物線。

$\Rightarrow$ 通過 P_i、P_j 的連線時，N_s 個數不變。



(圖十)

2. 通過經 P_i 且與對稱軸方向平行的直線：如圖十一所示

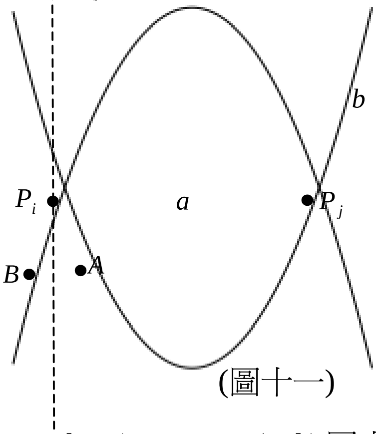
$P_iP_jA(a,b)\xrightarrow{\text{開口方向改變}}P_iP_jB(a,b)$

有以下兩種情況：

(1) P_iP_jA 及 P_iP_jB 都爲平分拋物線。

(2) P_iP_jA 及 P_iP_jB 都不爲平分拋物線。

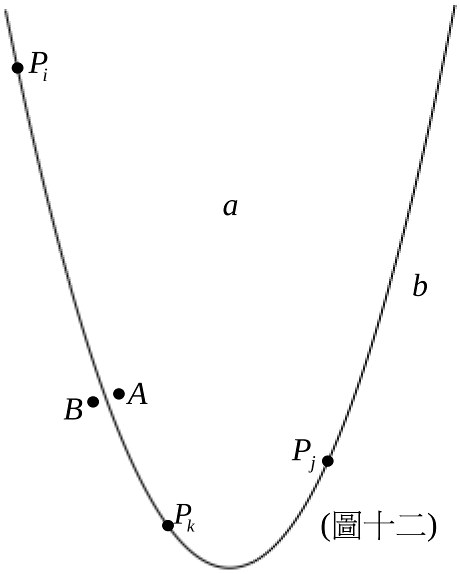
$\Rightarrow$ 通過經 P_i 且與對稱軸方向平行的直線時，N_s 個數不變。



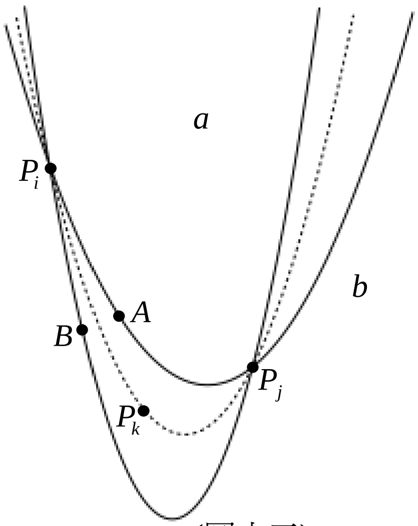
(圖十一)

3. 通過拋物線 $P_iP_jP_k$：

① $P_iP_jP_k(a,b)\to P_iP_jP_k(a-1,b+1)$ 圖十二 ② $P_iP_jA(a-1,b+1)\to P_iP_jB(a,b)$ 圖十三



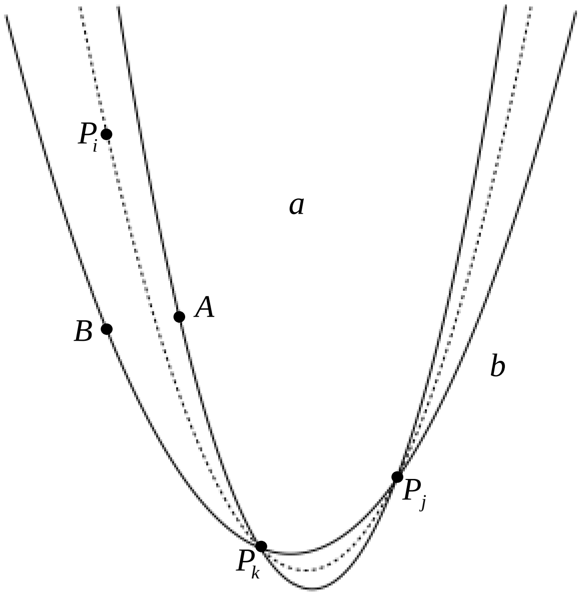
(圖十二)



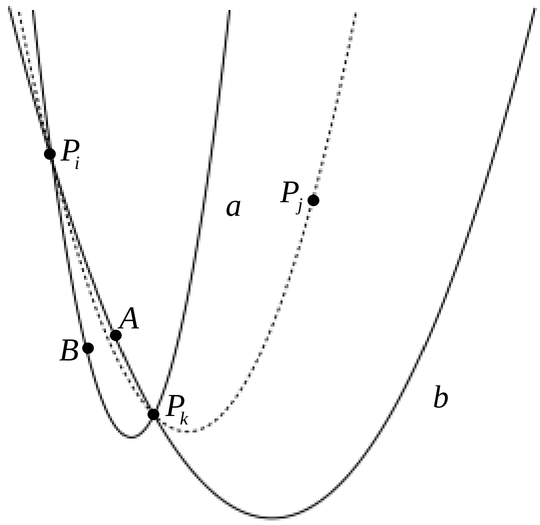
(圖十三)

③ $P_j P_k A(a-1,b+1) \to P_j P_k B(a,b)$　　④ $P_i P_k A(a,b) \to P_i P_k B(a-1,b+1)$

如圖十四　　如圖十五



(圖十四)



(圖十五)

有以下三種情況：

(1) ①④原爲平分抛物線變成非平分抛物線，此時②③會從非平分抛物線變成平分抛物線。

(2) ①④原爲非平分抛物線變成平分抛物線，此時②③會從平分抛物線變成非平分抛物線。

(3) $a \neq b$ 、 $a-1 \neq b+1$，則在①、②、③、④中移動前和移動後都不爲平分抛物線。

$\Rightarrow$通過抛物線 $P_i P_j P_k$ 時， N_s 個數不變。

4. 經由 1.、2.、3.的討論發現，當由 P_1 移動到 Q_1 時 N_s 並不會改變，同理可知由 P_2 移動到 Q_2 ，… ， P_{2n+1} 移動到 Q_{2n+1} ， N_s 也不會改變，因此 N_s 爲一定值。

【定理 1.2】平面上 $2n+1$ 個在正常位置上的點 $(n \in \mathbb{N})$ ，平分抛物線的個數 N_s 爲 n^2 。

（ *pf* ）

由定理 1.1，平面上 $2n+1$ 個在正常位置上的點，當 n 固定時，平分抛物線的個數 N_s 爲一個定值，接著我們以引理 1.3 的方式架構出 $2n+1$ 個點 P_1、P_2、…、P_{2n-1}、O、Q ，其中 P_1、P_2、…、P_{2n-1} 在同一抛物線上， O 爲抛物線內的點， Q 爲抛物線外的點，我們再將 P_1、P_2、…、P_{2n-1} 做些許的微調，使得其任四點不共抛物線。

接下來我們要討論 N_s 的個數會是多少，並從上列敘述可知此 $2n+1$ 個點可分成下列 4 種抛物線討論：

(1) P_i、P_j、P_k所構成的平分拋物線有$N_{2n\text{-}1}$個

$\because O$和Q必定分別在拋物線的內與外

$\therefore$扣掉O和Q，P_i、P_j、P_k所構成的平分拋物線有$N_{2n\text{-}1}$個

(2) P_i、P_j、O所構成的平分拋物線有0個

在引理1.3建構出的圖形上選一點P_i，作$\overleftrightarrow{P_iO}$，交$P_1$、$P_2$、…、$P_{2n-1}$所構成的拋物線的另一邊於$A$，$P_j$沿著此拋物線移動，我們觀察此時拋物線$P_i\,P_j\,O$內包含的點個數。

如圖分別過P_i、A作兩條與L平行的直線M、N，令在M左側且在$\overleftrightarrow{P_iO}$上方的所有點爲$p$個，在$N$右側且在$\overleftrightarrow{P_iO}$上方的所有點爲$q$個，在$M$、$L$之間有$r$個，在$L$、$N$之間有$s$個。

$\because \overleftrightarrow{P_iO}$將拋物線上其餘的$2n-2$個點平分

$\therefore\ p+q=r+s=n-1$

①若P_j移動到$\overleftrightarrow{P_iO}$上方，$M$左側。(圖十六)

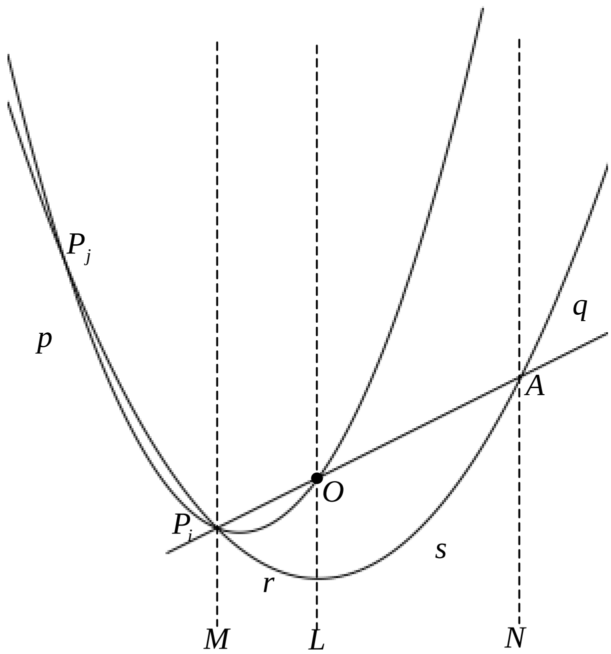
$\Rightarrow$拋物線$P_i\,P_j\,O$內包含的點個數小於p個

$\Rightarrow$此時拋物線$P_i\,P_j\,O$內包含的點個數$<n-1$個

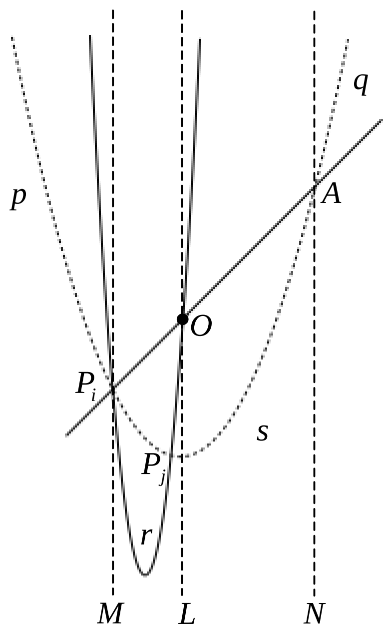
② 若P_j移動到M、L之間。(圖十七)

$\Rightarrow$拋物線$P_i\,P_j\,O$內包含的點個數必小於r個

$\Rightarrow$此時拋物線$P_i\,P_j\,O$內包含的點個數$<n-1$個



(圖十六)



(圖十七)

③ 若P_j移動到L、N之間。(圖十八)

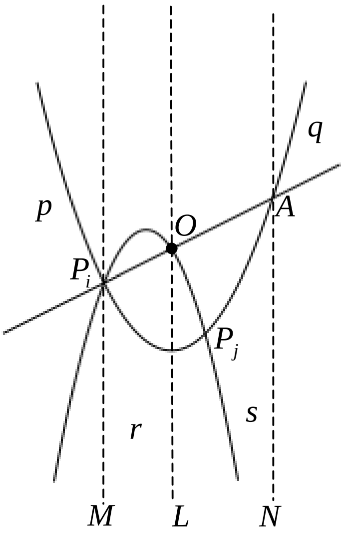
$\Rightarrow$拋物線$P_i\ P_j\ O$內包含的點個數必小於$r+s$個

$\Rightarrow$此時拋物線$P_i\ P_j\ O$內包含的點個數$< n-1$個

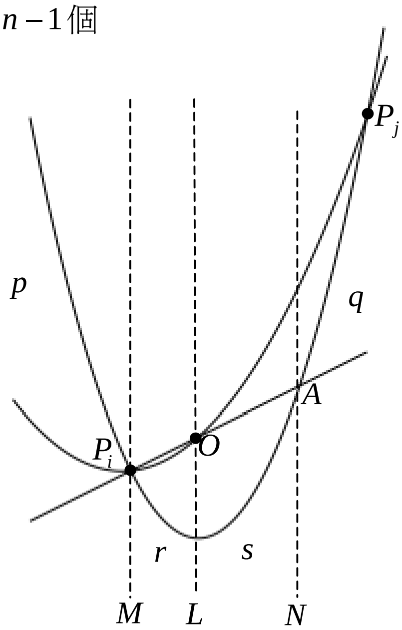
④ 若$\mathrm{P_j}$移動到$\overleftrightarrow{P_iO}$上方，$N$右側。(圖十九)

$\Rightarrow$拋物線$P_i\ P_j\ O$內包含的點個數必小於$p+q$個

$\Rightarrow$此時拋物線$P_i\ P_j\ O$內包含的點個數$< n-1$個



(圖十八)



(圖十九)

⑤經由①、②、③、④的討論發現拋物線$P_i\ P_j\ O$皆不可能爲平分拋物線。

(3) P_i、P_j、Q所構成的平分拋物線有0個(如圖二十)

因爲Q在無窮遠處，所以拋物線P_iP_jQ近乎一條直線

，故只需看$\overleftrightarrow{P_iP_j}$是否平分其餘的$2n-2$個點

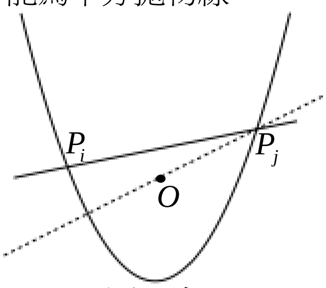
①O和Q在同側：

$\Rightarrow$此時拋物線$P_i\ P_j\ Q$內包含的點個數大於$n-1$個

②O和Q在異側：

$\Rightarrow$拋物線$P_i\ P_j\ Q$內包含的點個數小於$n-1$個

③經由①、②的討論發現拋物線$P_i\ P_j\ Q$皆不可能爲平分拋物線。



(圖二十)

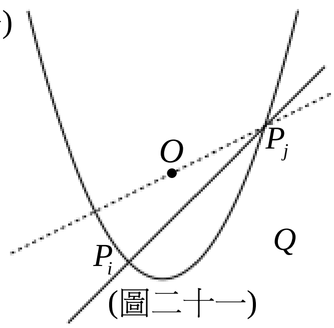
(4) P_i、O、Q所構成的平分拋物線有$2n-1$個(如圖二十一)

$\because Q$在無窮遠處

$\therefore$拋物線P_iOQ近乎一條直線

又$\overleftrightarrow{P_iO}$可以平分其餘的$2n-2$個點

所以拋物線P_iOQ皆爲平分拋物線，



(圖二十一)

故共產生$2n-1$個平分拋物線。

由上面 4 種情況得知$N_{2n+1}=N_{2n-1}+2n-1$且因構成一個唯一的拋物線最少要 3 個點

$\Rightarrow N_3=1$

$$
\begin{aligned}
&N_3=1\\
&N_5=N_3+2\times 2-1\\
&N_7=N_5+2\times 3-1\\
&\ldots\\
&\ldots\\
&\underline{+)N_{2n+1}=N_{2n-1}+2n-1}\\
&N_{2n+1}=1+3+5+\ldots+2n-1=\frac{n(2n-1+1)}{2}=n^2
\end{aligned}
$$

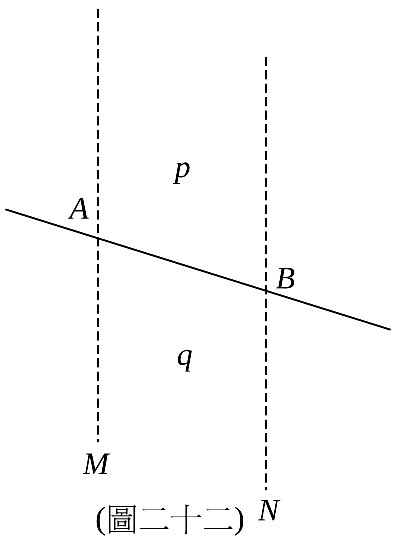
二、$(a\vee b)$拋物線

【引理 2.1】平面上$2n+1$個在正常位置的點至少可畫出一$(a\vee b)$拋物線。

（ pf ）

(一) 取兩點A、B，使得$\overleftrightarrow{AB}$將平面分割成兩半平面，且所有的點皆落在其中一半平面。

(二) 分別過A、B作兩條與 L 平行的直線M、N，令在M、N之間且在$\overleftrightarrow{AB}$上半平面的所有點為p個，在M、N之間且在$\overleftrightarrow{AB}$下半平面的所有點為q個，且$q=0$。接著我們將過A、B兩點構成的拋物線分成兩種類型：



(圖二十二)

1. $\overleftrightarrow{AB}$不垂直L：(如圖二十二)

此時過A、B兩點的拋物線，其對稱軸L'可能在平面上平行L的任意位置，扣除過$\overline{AB}$中點的情況。現在我們把L'由右側無窮遠處移動到左側無窮遠處，拋物線內包含的點逐漸減少，且一次減少一個，其中當L'跨過$\overline{AB}$中點前後，拋物線內點的個數都是p個。L'移動時，拋物線內點的個數變化如下：

$2n-1\rightarrow p\xrightarrow{L'\text{跨過}\overline{\mathrm{AB}}\text{中點}}p\rightarrow 0$，

其中於$p\rightarrow p$的過程中，圖形不連續，拋物線的開口方向由上變成下。

(1) 若$b>a\geq p$，則兩個$(a\vee b)$拋物線皆在$2n-1\rightarrow p$的過程中出現。

(2) 若$b\geq p>a$，則$(a\vee b)$拋物線一個在$p\rightarrow 0$的過程中出現；$(a\vee b)$拋物線一個在$2n-1\rightarrow p$的過程中出現。

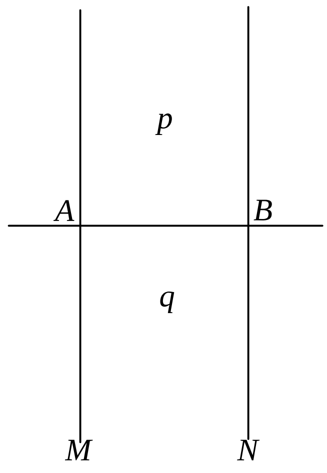
(3) 若 $p > b > a$ ，則兩個$(a \vee b)$抛物線皆在 $p \to 0$ 的過程中出現。

2. $\overleftrightarrow{AB} \perp L$ ：

在這種情況，過 A 、 B 之抛物線對稱軸 L' 必為 $\overline{AB}$ 之中垂線。如圖二十三所示，我們將抛物線的頂點由下方無窮遠處移動到上方無窮遠處，抛物線內點的個數變化如下：

$p \to 2n-1 \xrightarrow{\text{頂點通過}\overline{AB}} 0 \to p$ ，

其中於 $2n-1 \to 0$ 的過程中，圖形不連續，抛物線的開口方向由上變成下，且在 $p \to 2n-1$ 和由 $0 \to p$ 的過程中，抛物線內包含的點都是逐一增加。



(圖二十三)

(1) 若 $b > a \geq p$ ，則兩個$(a \vee b)$抛物線皆在 $2n-1 \to p$ 的過程中出現。

(2) 若 $b \geq p > a$ ，則$(a \vee b)$抛物線一個在 $p \to 0$ 的過程中出現；$(a \vee b)$抛物線一個在 $2n-1 \to p$ 的過程中出現。

(3) 若 $p > b > a$ ，則兩個$(a \vee b)$抛物線皆在 $p \to 0$ 的過程中出現。

(三) 由上述兩個情況可知，同一平面上 $2n+1$ 個在正常位置上的點至少可畫出一$(a \vee b)$抛物線。

【引理 2.2】平面上 $2n+1$ 個在正常位置的點，過任兩個點的直線將平面分成 n_1 和 n_2 個 $(n_1 + n_2 = 2n-1 \text{且} n_1 > n_2)$ ，若 $|a-b| < |n_1 - n_2|$ ，則至少可畫出一$(a \vee b)$抛物線。

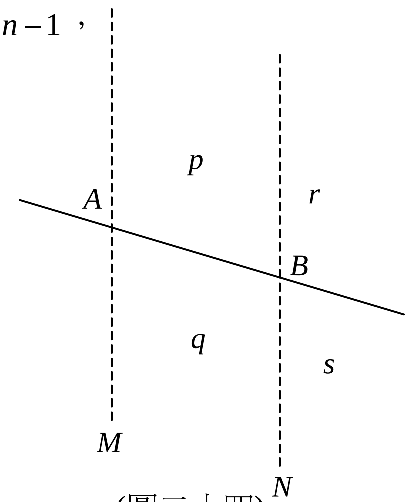
（ pf ）

任取兩點 A 、 B ，分別過 A 、 B 作兩條與對稱軸平行的直線 M 、 N ，令在 M 、 N 之間且在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上半平面的所有點為 p 個；在 M 、 N 之間且在 $\overleftrightarrow{AB}$ 下半平面的所有點為 q 個；在 M 、 N 外且在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上半平面的所有點為 r 個；在 M 、 N 外且在 $\overleftrightarrow{AB}$ 下半平面的所有點為 s 個。(令 $r + p = n_1 \geq n$ ， $s + q = n_2 \leq n-1$ ， $r + p + s + q = n_1 + n_2 = 2n-1$)。

接著同引理 2.1，我們將 L 與過 A 、 B 兩點所構成的抛物線分成下列兩種情況：

1. $\overleftrightarrow{AB}$ 不垂直 L ：(如圖二十四)

此時過 A、B 兩點的抛物線，其對稱軸 L' 可能在平面上平行 L 的任意位置，扣除過 $\overline{AB}$ 中點的情況。現在我們把 L' 由右側無窮遠處移動到左側無窮遠處，抛物線內包含的點逐漸增減，且一次減少



(圖二十四)

一個或增加一個，來回變動，其中當 L' 跨過 $\overline{AB}$ 中點前後，拋物線內點的個數都是 $p+q$ 個。L' 移動時，拋物線內點的個數變化如下：

$r+p \rightarrow p+q \xrightarrow{L'\text{跨過}\overline{AB}\text{中點}} p+q \rightarrow s+q$，

其中由於 $p+q \rightarrow p+q$ 的過程中，圖形不連續，拋物線的開口方向由上變成下。

(1) 當 $r+p>b$：

①若 $p+q \le b$，則在 $r+p \rightarrow p+q$ 的過程中至少會產生一個 $(a \vee b)$ 拋物線。

②若 $p+q>b \ge n>n-1 \ge s+q$，則在 $p+q \rightarrow s+q$ 的過程中至少會產生一個 $(a \vee b)$ 拋物線。

(2) 當 $b \ge r+p$：

①若 $p+q \le a$，則在 $r+p \rightarrow p+q$ 的過程中至少會產生一個 $(a \vee b)$ 拋物線。

②若 $p+q>a$：

ⓘ $s+q \le a$，則在 $p+q \rightarrow s+q$ 的過程中至少會產生一個 $(a \vee b)$ 拋物線。

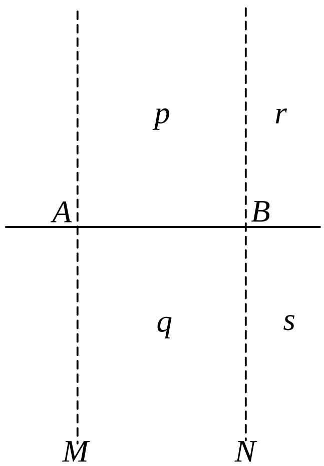
ⓘⓘ $s+q>a$，則不一定會產生 $(a \vee b)$ 拋物線，但 $\because b \ge r+p=n_1>n_2=s+q>a$，$\therefore |a-b|>|n_1-n_2|$ 不符合題目，故不需討論。

2. $\overleftrightarrow{AB} \perp L$：

在這種情況，過 A、B 之拋物線對稱軸 L' 必爲 $\overline{AB}$ 之中垂線。如圖二十五所示，我們將拋物線的頂點由下方無窮遠處移動到上方無窮遠處，拋物線內點的個數變化如下：

$p+q \rightarrow r+p \xrightarrow{\text{頂點通過}\overline{AB}} s+q \rightarrow p+q$，

其中於 $r+p \rightarrow s+q$ 的過程中，圖形不連續，拋物線的開口方向由上變成下，且在 $p+q \rightarrow r+p$ 和 $s+q \rightarrow p+q$ 的過程中，拋物線內包含的點都是逐一增減。



(圖二十五)

(1) 當 $r+p>b$：

①若 $p+q \le b$，則在 $p+q \rightarrow r+p$ 的過程中至少會產生一個 $(a \vee b)$ 拋物線。

②若 $p+q>b$，因爲 $p+q>b \ge n>n-1 \ge s+q$，所以在 $s+q \rightarrow p+q$ 的過程中至少會產生一個 $(a \vee b)$ 拋物線。

(2) 當 $b \ge r+p$：

①若 $p+q \le a$，則在 $p+q \rightarrow r+p$ 的過程中至少會產生一個 $(a \vee b)$ 拋物線。

②若 $p+q>a$：

ⓘ $s+q \le a$ ，又 $a \le n-2 < n \le r+p$ ，則在 $s+q \to p+q$ 的過程中至少會產生一個 $(a \vee b)$ 拋物線。

ⓘⓘ $s+q > a$ ，則不一定會產生 $(a \vee b)$ 拋物線，但 $\because b \ge r+p = n_1 > n_2 = s+q > a$ ，$\therefore |a-b| > |n_1 - n_2|$ 不符合題目，故不需討論。

因此由上面 1.、2.的討論得證

【引理 2.3】試證能找到 $2n+1$ 個 $(n \ge 2 且 n \in \mathbb{N})$ 在 P_1、P_2、…、P_{2n}、P_{2n+1} 的點，使得 P_1、P_2、…、P_{2n-1} 在同一拋物線且 $\overleftrightarrow{P_k P_{2n}}$ $(k=1、…、2n-1)$ 能平分其餘的 $2n-2$ 個點，P_{2n+1} 爲一點不被 P_1、P_2、…、P_{2n} 任三點構成的拋物線包在內的點。

（ *pf* ）同引理 1.3 之證明。

【定理 2.1】平面上 $2n+1$ 個在正常位置的點($n \in \mathbb{N}$)，$(a \vee b)$ 拋物線的個數 N_s 爲一個定值。

（ *pf* ）

由引理 2.2 知道：滿足 $|n_1 - n_2| > |a-b| \Leftrightarrow n_1 - n_2 \ge b-a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 \ge b+1 \\ n_2 \le a \end{cases}$ ，故滿足此條件的 n_1 、 n_2 有：

n_1	n_2
$b+a+1$	0
:	:
$b+1$	a

共 $a+1$ 個

$\Rightarrow$ 平面上 $2n+1$ 個在正常位置的點至少可畫出 $a+1$ 個 $(a \vee b)$ 拋物線。

$\because$ $2n+1$ 個點可畫出 C_3^{2n+1} 個點固定對稱軸方向的拋物線；

$\therefore N_s \le C_3^{2n+1} = \dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$ 。

$\because N_s$ 有上下界，

$\therefore$ 一定能分別找出一種排法使得 N_s 有最大値和最小値。

(一) 將 $2n+1$ 個點排成在 P_1 、 P_2、…、P_{2n+1} 的位置時， N_s 有最小値，則令 $S_{\min} = \{P_1、…、P_{2n+1}\}$ 。將 $2n+1$ 個點排成在 Q_1、Q_2、…、Q_{2n+1} 的位置時，N_s 有最大値，則令 $S_{Max} = \{Q_1、…、Q_{2n+1}\}$ 。接著我們要逐一將 P_1 移動到 Q_1 、 P_2 移動到 Q_2、…、P_{2n+1} 移動到 Q_{2n+1} 來觀察移動的過程中 N_S 是否會改變。

(二) 令$P_1(t)$爲表示在時刻t，P_1所在位置的函數，$P_1(0)=P_1$且設$P_1(t)=A$、$P_1(t+\Delta t)=B$，$\Delta t \to 0$。

(三) 移動的過程中，有下面 3 種狀況可能會改變N_S的個數：

1. 通過P_i、P_j的連線：如圖二十六所示

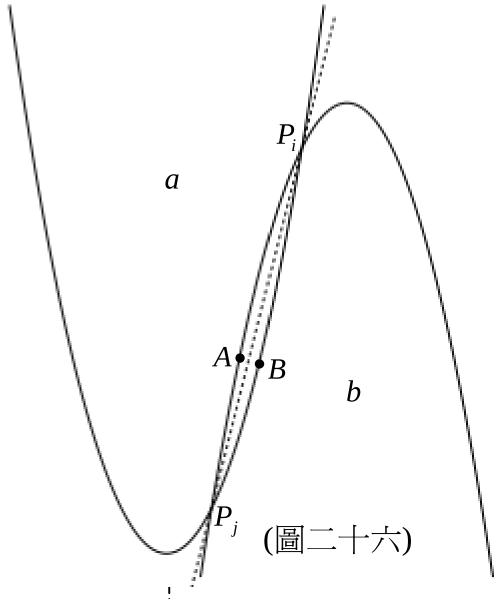
   $P_iP_jA(b,a)\xrightarrow{\text{開口方向改變}}P_iP_jB(a,b)$

   有以下兩種情況：

   (1) P_iP_jA及P_iP_jB都爲$(a\vee b)$拋物線。

   (2) P_iP_jA及P_iP_jB都不爲$(a\vee b)$拋物線。

   $\Rightarrow$通過P_i、P_j的連線時，N_s個數不變。



(圖二十六)

2. 通過經P_i且與對稱軸方向平行的直線：

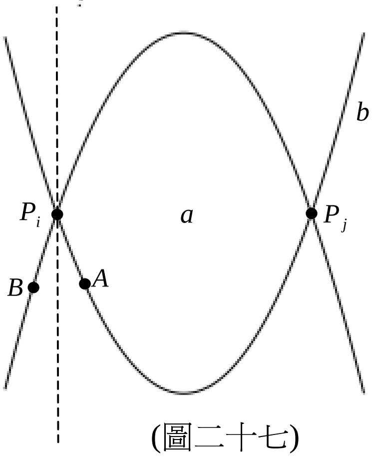
   $P_iP_jA(a,b)\xrightarrow{\text{開口方向改變}}P_iP_jB(a,b)$

   有以下兩種情況：(如圖二十七所示)

   (1) P_iP_jA及P_iP_jB都爲$(a\vee b)$拋物線。

   (2) P_iP_jA及P_iP_jB都不爲$(a\vee b)$拋物線。

   $\Rightarrow$通過經P_i且與對稱軸方向平行的直線時，N_s個數不變。

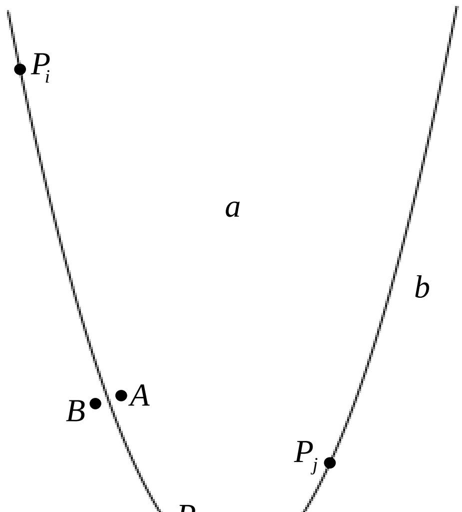


(圖二十七)

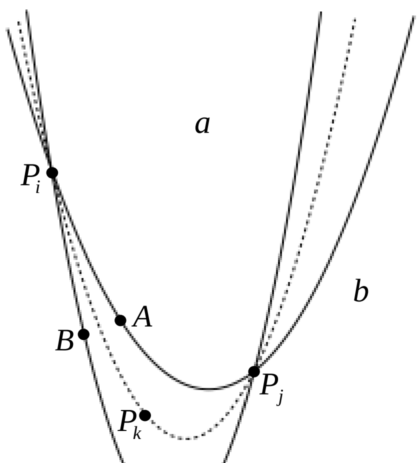
3. 通過拋物線$P_iP_jP_k$：

   ① $P_iP_jP_k(a,b)\to P_iP_jP_k(a-1,b+1)$ 如圖二十八

   ② $P_iP_jA(a-1,b+1)\to P_iP_jB(a,b)$ 如圖二十九



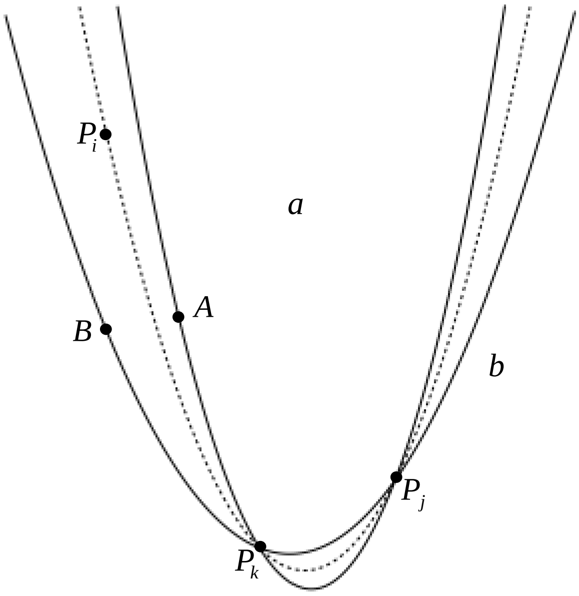
(圖二十八)



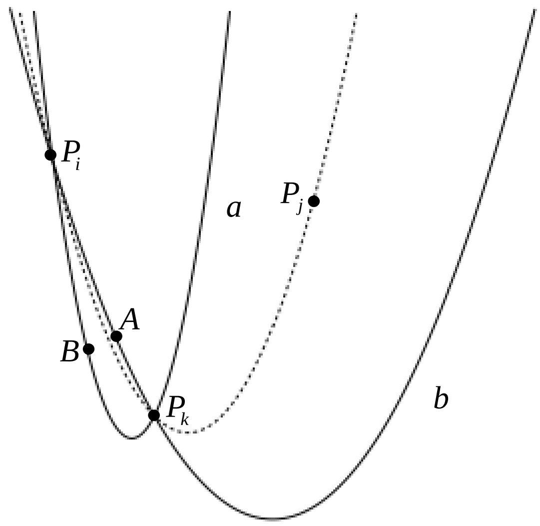
(圖二十九)

③ $P_jP_kA(a-1,b+1)\to P_jP_kB(a,b)$ 如圖三十

④ $P_jP_kA(a,b)\to P_jP_kB(a-1,b+1)$ 如圖三十一



(圖三十)



(圖三十一)

有以下三種情況：

(1) ①④原爲$(a\vee b)$拋物線變成非$(a\vee b)$拋物線，此時②③會從非$(a\vee b)$拋物線變成$(a\vee b)$拋物線。

(2) ①④原爲非$(a\vee b)$拋物線變成$(a\vee b)$拋物線，此時②③會從$(a\vee b)$拋物線變成非$(a\vee b)$拋物線。

(3) ①④原爲非$(a\vee b)$拋物線變成非$(a\vee b)$拋物線，此時②③會從非$(a\vee b)$拋物線變成非$(a\vee b)$拋物線，則①、②、③、④中移動前和移動後都不爲$(a\vee b)$拋物線。

$\Rightarrow$通過拋物線$P_iP_jP_k$時，N_s個數不變。

4. 經由 1.、2.、3.的討論發現，當由P_1移動到Q_1時N_s並不會改變，同理可知P_2移動到Q_2、…、P_{2n+1}移動到Q_{2n+1}，N_s也不會改變，因此N_s爲一定值。

【定理 2.2】平面上$2n+1$個在正常位置的點($n\in\mathbb{N}$)，$(a\vee b)$拋物線的個數N_s爲$2(ab+a+b+1)$。

（ *pf* ）

由定理 2.1，平面上$2n+1$個在正常位置的點，當n固定時，平分拋物線的個數N_s爲一個定值，接著我們以引理 1.3 的方式架構出$2n+1$個點P_1、P_2、…、P_{2n-1}、O、Q，其中P_1、P_2、…、P_{2n-1}在同一拋物線上，O爲拋物線內的點，Q爲拋物線外的點，我們再將P_1、P_2、…、P_{2n-1}做些許的微調，使得其任四點不共拋物線。

接下來我們要討論N_s的個數會是多少，並從上列敘述可知此$2n+1$個點可分成下列 4 種拋物線討論：

1. P_i、P_j、P_k 所構成的 $(a \vee b)$ 拋物線有 $N_{(a-1 \vee b-1)}$ 個

$\because O$ 和 Q 必定分別在拋物線的內與外

$\therefore$ 扣掉 O 和 Q，拋物線 $P_iP_jP_k$ 有 $N_{(a-1 \vee b-1)}$ 個，其中當 $a=0$，$P_iP_jP_k$ 所構成拋物線的個數爲 0 個。

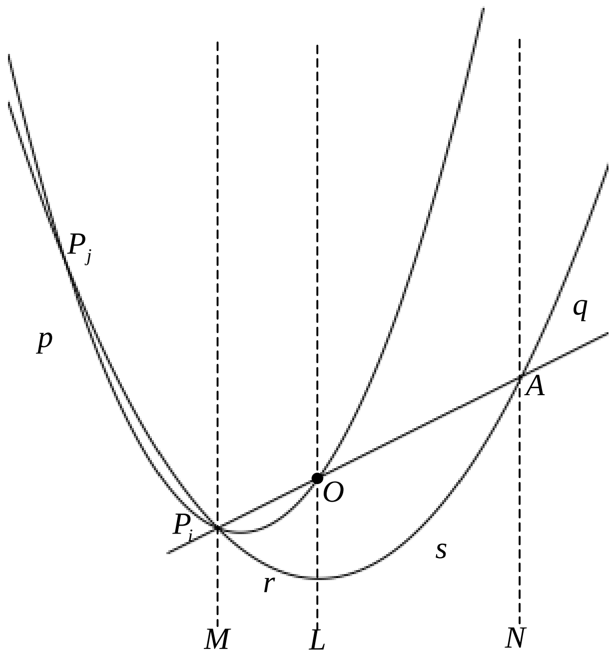
2. P_i、P_j、O 所構成的 $(a \vee b)$ 拋物線有 $2n-1$ 個

在引理 1.3 建構出的圖形上選一點 P_i，作 $\overleftrightarrow{P_iO}$，設交拋物線的另一邊於 A，P_j 沿著拋物線上下移動。分別過 P_i、A 作兩條與 L 平行的直線 M、N，令在 M 左側且在 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 上方的所有點爲 p 個，在 N 右側且在 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 上方的所有點爲 q 個，在 M、L 之間有 r 個，在 L、N 之間有 s 個。

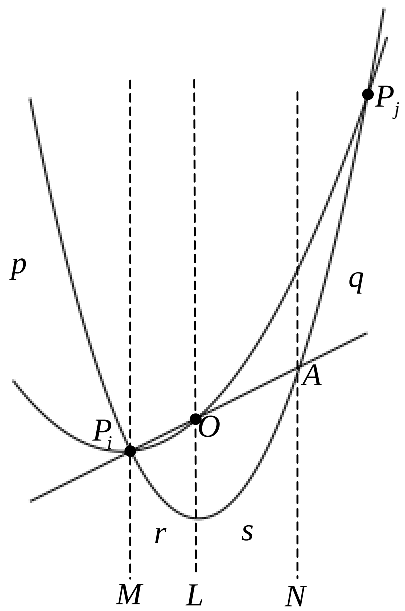
$\because \overleftrightarrow{P_iO}$ 將拋物線上其餘的 $2n-2$ 個點平分，$\therefore\ p+q=r+s=n\text{-}1$，

① P_j 在 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 上方

$\Rightarrow$ 拋物線 P_iP_jO 中，P_j 若在 N 的右側，則拋物線內的點會由 $n-2 \to p$ (如圖三十二)，　P_j 若在 M 的左側，則拋物線內的點會由 $p-1 \to 0$ (如圖三十三)，在這兩次移動的過程中，拋物線內點的個數都會逐一增減。



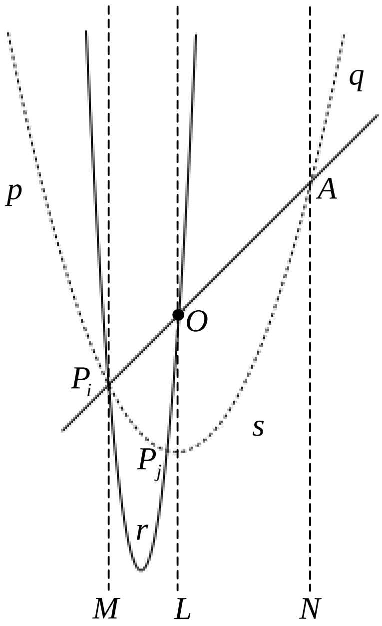
(圖三十二)



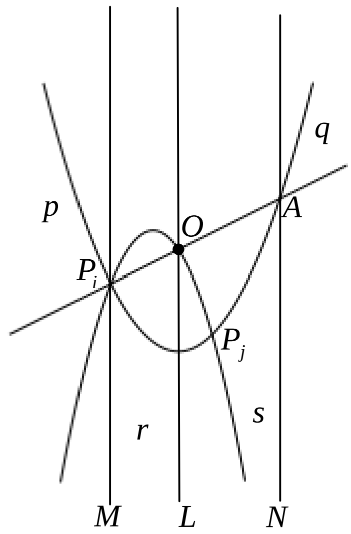
(圖三十三)

② P_j 在 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 下方

$\Rightarrow$ 抛物線 P_iP_jO 中，若 P_j 在 N 、 L 之間，則抛物線內的點會由 $n-2 \to r$ (如圖三十四) ，若 P_j 在 M 、 L 之間，則抛物線內的點會由 $r-1 \to 0$ (如圖三十五) ，在這兩次移動的過程中，抛物線內的點個數都會逐一增減。



(圖三十四)



(圖三十五)

經由①、②的討論可得知，抛物線 P_iP_jO 內的點必定 $< n-1$ 個。

$\therefore$ 不論 P_j 在 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 上或下方都可以有兩個 P_i 對應使得抛物線爲 $(a \vee b)$ 抛物線

又 $\because$ 每個點會重複算到 $\Rightarrow$ 抛物線 P_iP_jO 有 $2n-1$ 個。

3. P_i、P_j、Q 所構成的 $(a \vee b)$ 抛物線有 $2n-1$ 個(如圖三十六)

$\because$ Q 在無窮遠處

$\therefore$ 抛物線 P_iP_jQ 近乎一條直線

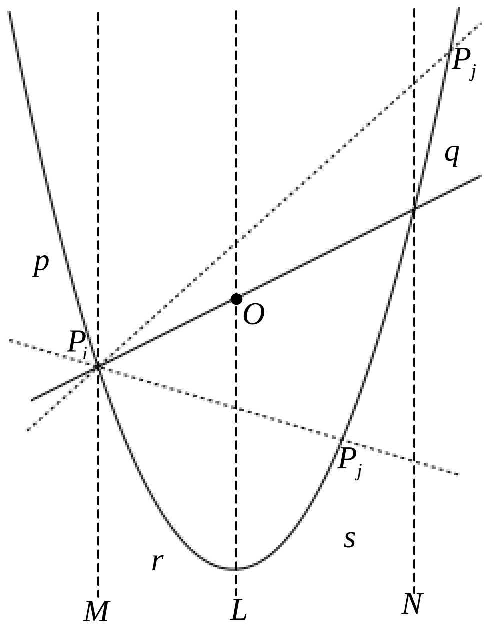
$\therefore$ 只需看 $\overleftrightarrow{P_iP_j}$ 是否將其餘的 $2n-2$ 個點分爲 $(a \vee b)$

每個 P_i 都有兩個 P_j 對應使得抛物線爲 $(a \vee b)$ 抛物線

但由於先後選取順序的關係

$\Rightarrow (2n-1) \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 2n-1$

$\Rightarrow$ 抛物線 P_iP_jQ 有 $2n-1$ 個



(圖三十六)

4. P_i、O、Q 所構成的平分拋物線有 0 個

$\because Q$ 在無窮遠處

$\therefore$ 拋物線 P_iOQ 近乎一條直線

又 $\overleftrightarrow{P_iO}$ 可以平分其餘的 $2n-2$ 個點

$\therefore$ 拋物線 P_iOQ 有 0 個

由上面 4 種情況得知 $N_{(a\vee b)}=N_{(a-1\vee b-1)}+4n-2=N_{(a-1\vee b-1)}+2a+2b+2$

$N_{(0\vee b-a)}=2b-2a+2$

$N_{(1\vee b-a+1)}=N_{(0\vee b-a)}+2+2b-2a+2+2$

...

...

$+)\,N_{(a\vee b)}=N_{(a-1\vee b-1)}+2a+2b+2$

$N_{(a\vee b)}=2(ab+a+b+1)$

陸、結果與討論

一、平分拋物線

(一) 平面上$2n+1$個在正常位置上的點至少可畫出一平分拋物線。

(二) 平面上$2n+1$個在正常位置上的點，過任兩個點至少可畫出一平分拋物線。

(三) 試證能找到$2n+1$個$(n \ge 2$且$n \in \mathbb{N})$在正常位置上的點P_1、P_2、…、P_{2n}、P_{2n+1}，使得 P_1、P_2、…、P_{2n-1}在同一拋物線且$\overleftrightarrow{P_kP_{2n}}$ $(k=1$、…、$2n-1)$能平分其餘的$2n-2$個點，P_{2n+1}爲一點不被P_1、P_2、…、P_{2n}任三點構成的拋物線包在內的點。

(四) 平面上$2n+1$個在正常位置上的點$(n \in \mathbb{N})$，當n固定時，平分拋物線的個數 N_s $(s=2n+1)$爲一個定值。

(五) 平面上$2n+1$個在正常位置上的點$(n \in \mathbb{N})$，平分拋物線的個數N_s 爲n^2。

二、$(a \vee b)$拋物線。

(一) 平面上$2n+1$個在正常位置上的點至少可畫出一$(a \vee b)$拋物線。

(二) 平面上$2n+1$個在正常位置上的點，過任兩個點的直線將平面分成n_1和n_2個 $(n_1+n_2=2n-1$且$n_1>n_2)$，若$|a-b|<|n_1-n_2|$，則至少可畫出一$(a \vee b)$拋物線。

(三) 試證能找到$2n+1$個在正常位置上的點P_1、P_2、…、P_{2n}、P_{2n+1} $(n \ge 2)$，使得P_1、P_2、…、P_{2n-1}在同一拋物線且$\overleftrightarrow{P_kP_{2n}}$ $(k=1$、…、$2n-1)$能平分其餘的$2n-2$個點，P_{2n+1}爲一點不被 P_1、P_2、…、P_{2n}任三點構成的拋物線包在內的點。

(四) 平面上$2n+1$個在正常位置上的點($n \in \mathbb{N}$)，$(a \vee b)$拋物線個數N_s 爲一個定值。

(五) 平面上$2n+1$個在正常位置上的點($n \in \mathbb{N}$)，$(a \vee b)$拋物線個數N_s爲$2(ab+a+b+1)$。

三、展望與討論

由圓發展到拋物線，並得到我們所有疑惑的解答，接著我們希望繼續探討三次、四次曲線或球面是否也會得到一樣漂亮的結果。

柒、結論與應用

五、 $2n+1$個$(n \in \mathbb{N})$在正常位置上的點，過任三點所能構成的平分拋物線個數爲一定值，且爲n^2個。

六、 $2n+1$個$(n \in \mathbb{N})$在正常位置上的點，過任三點所能構成的$(a \vee b)$拋物線個數爲一定值，且爲$2(ab+a+b+1)$個。

捌、參考文獻

1.陳昭地、張幼賢、朱亮儒，民國 88 年，1999 年第 11 屆亞太數學奧林匹亞競賽試題及參考解答，科學教育月刊 219 期 p.55~61。

2.Federico Ardila, August-September 2004, The Number of Halving Circle, America Monthly 111,p.586~591。

評語

1) 作品中所用到的專有名詞如「拋物線」並非最一般性的拋物線。整體的研究發展似乎相當倚賴前人的工作。

2) 本作品頗有動態展示的可能，作者可進一步朝向這方向作研究。