臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱：N元二次不定方程式的整數解探討

學校／作者：臺北市立建國高級中學　　　陳揚叡

作者簡介

我叫陳揚叡，目前就讀台北建國中學一年級。從小時候我就對科學研究的領域有著濃厚的興趣，常常會找些相關的書籍來閱讀。國中時，我開始投入數學科展的研究，有十分優秀的老師指導我，讓我在數學的領域中獲益匪淺，學習到許多課本上希望沒有教授的知識，得以一窺更加奧妙的數學世界。希望參加這次的科展活動能藉由不管是評審老師的建議或是從其他作品所汲取的知識，讓我的視野更加遼闊。

A General Integer Solution Formula of N Variables Squares' Indeterminate Equation

There is a beautiful integer solution formula for the Pythagorean theorem equation, $x^2 + y^2 = z^2$, such as (m^2 - n^2, $2mn$, $m^2 + n^2$). The "m" and "n" of the solution formula are integer number. A book written by two Chinese mathematicians, Yen Chen-chun and Sheng Li-jen who expanded the Pythagorean theorem equation to the four variables squares' indeterminate equation, $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$. They claimed that they found its integer solution formula, such as (mn, $m^2 + mn$, $mn + n^2$, $m^2 + mn + n^2$) for any integer "m" and "n". But we found it losses many solutions. This paper corrected their faults due to the expanded Pythagorean theorem built by ourselves. Further more, we derived a general formula of N variables squares' indeterminate equation. Now, we can get integer solutions of the equation, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{n-1}^2 = x_n^2$ (for all natural number "n") easily by choosing integers m_1, m_2, m_3,⋯⋯, m_{n-1} up to you.

壹、摘要：

傳統的畢氏定理三元二次不定方程$x^2+y^2=z^2$有一組漂亮的整數解爲(m^2-n^2、$2mn$、m^2+n^2)；中國數學家嚴鎮軍、盛立人所著的從勾股定理談起一書中記載四元二次不定方程$x^2+y^2+z^2=w^2$的整數解爲(mn、m^2+mn、$mn+n^2$、m^2+mn+n^2)，這組解被我們發現有多處遺漏，本文以擴展的畢氏定理做基礎修正了他的整數解公式，並推廣取得 N 元二次不定方程的整數解公式。

Abstract：

There is a beautiful integer solution formula for the Pythagorean theorem equation, $x^2+y^2=z^2$, such as ($m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2$). The "m" and "n" of the solution formula are integer number. A book written by two Chinese mathematicians, Yen Chen-chun and Sheng Li-jen who expanded the Pythagorean theorem equation to the four variables squares' indeterminate equation, $x^2+y^2+z^2=w^2$. They claimed that they found its integer solution formula, such as (mn, m^2+mn, $mn+n^2$, m^2+mn+n^2) for any integer "m" and "n". But we found it losses many solutions. This paper corrected their faults due to the expanded Pythagorean theorem built by ourselves. Further more, we derived a general formula of N variables squares' indeterminate equation. Now, we can get integer solutions of the equation,

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_{n-1}^2=x_n^2$ (for all natural number "n") easily by choosing integers m_1, m_2, m_3,……, m_{n-1} up to you.

貳、研究動機：

在一般數學刊物中談到勾股數問題的推廣時，總是把$x^2+y^2+z^2=w^2$中的 x、y、z 分別當成長方體中的長、寬、高，來作比喻，也因爲受限於這個概念，我們在一本刊物從勾股定理談起中看到他的一般解爲$x=mn$、$y=m^2+mn$、$z=mn+n^2$、$w=m^2+mn+n^2$，其中 m、n 表任意正整數，可是我們很快的發現(12、15、16、25)這一組解並不在裡面，陸陸續續也有一些其他解被發現不在裡面，我們猜想可能作者誤以爲以長、寬、高討論可以涵蓋全部的解，也許我們應該回到平面的概念重新考慮它的所有解。更進一步的對五元、六元…等二次不定方程的整數解加以探討，看看是否也有公式可用，希望能獲得一個一般化的表示式。

参、研究目的：

一、探討銳角△的畢氏定理。

二、探討鈍角△的畢氏定理。

三、探討完整的廣義的畢氏定理的形式。

四、探討四元二次不定方程$x^2+y^2+z^2=w^2$整數完全解。

五、推廣到五、六、七…元二次不定方程的整數完全解。

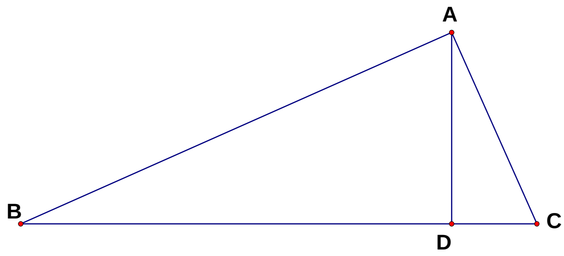
六、探討 N 元二次不定方程$x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_{n-1}^2=x_n^2$的整數完全解。

肆、研究過程：

一、理論探討：

(一)、檢視畢氏定理的證明

在相似△的課程中，介紹了一種畢氏定理的證明法，首先從直角△的直角頂 A，畫一垂直線 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$，如圖(1)



圖(1)

由△ABD～△ABC 得 $\overline{BA}^2=\overline{BD}\times\overline{BC}$ ……①

由△CAD～△CAB 得 $\overline{CA}^2=\overline{CD}\times\overline{CB}$ ……②

將①、②式相加得 $\overline{BA}^2+\overline{CA}^2=\overline{BD}\times\overline{BC}+\overline{CD}\times\overline{CB}$

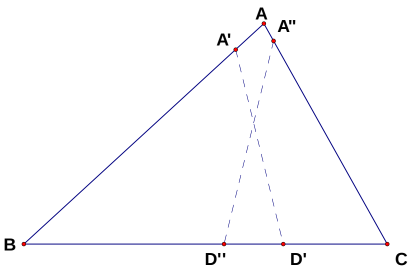
$=(\overline{BD}+\overline{CD})\times\overline{BC}$

$=\overline{BC}^2$

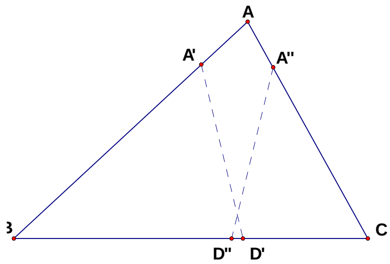
簡單扼要的導出了畢氏定理，如圖(1)，這完全歸功於直角△中這兩個相似子△(△ABD 及△ACD)處在那麼恰當的位置所致，但銳角△中有這種現象嗎？我們好奇的是銳角△或鈍角△中還有這些子△嗎？它們要如何畫出來？

回頭檢查圖(1)中兩個子△，若∠BAC 被壓縮而小於 90°時，那兩個子△(△DAB、△DAC)會被擠壓到哪裡去呢，我們猜想 $\overline{AD}$ 可能會拆開成 $\overline{A'D'}$ 及 $\overline{A''D''}$ 並維持△$A'D'B$～△ABC 及△$A''D''C$～△ABC，並且與圖(1)比較，∠$A'D'B$＝∠A，∠$A''D''C$＝∠A，∠$BA'D'$＝∠C，∠$CA''D''$＝∠B。

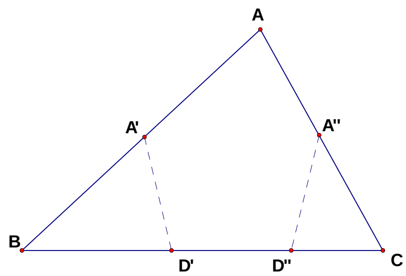
根據這些資料，我們試畫了很多遍，如圖(2-1)、(2-2)、(2-3)：



圖(2-1)



圖(2-2)



圖(2-3)

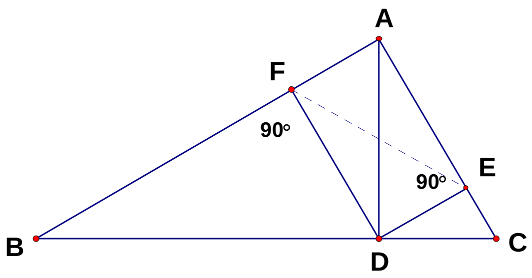
從上面三個猜想圖中，我們懷疑，在銳角△中應該會有第三個子△，也許是△$AA'A''$吧。

觀察圖(1)的直角△，它有兩個子△，如△ABD 和△ACD，但在圖(3)中另一種子△也有可能是△BDF，△CDE 和△AEF 等，不論是哪一組可能的子△候選者，我們在圖(3)中都可以發現到 D、E、F 這三點應該是所謂的關鍵點，而這三個點在直角△中偏偏非常容易找到，首先從直角 A 點畫出斜邊上的高 $\overline{AD}$，再分別從 D 點往兩股方向畫出垂線，即可馬上找到 E 和 F 點，因而快速地找到那些子△。

在第一組候選者△ABD 與△ACD 中，我們發現利用這兩個子△去推證畢氏定理時用到一個關鍵的關係式 $\overline{DB}+\overline{DC}=\overline{BC}$ 及另一個關係式 $\overline{DA}^2=\overline{DB}\times\overline{DC}$ 都和 D 有關。而在第二組候選者△AEF、△BDF、△CDE 中，我們也發現 $\overline{FA}\times\overline{FB}+\overline{EA}\times\overline{EC}=\overline{DB}\times\overline{DC}$ ，它和 D、E、F 三點也有關。

結論：由檢視畢氏定理及子△的位置關係發現找尋銳角△或鈍角△的類似畢氏關係式應該和找尋對應的 D、E、F 有關。

(二)、在直角△中，我們發現一種三邊依序垂直母△三邊的內接△

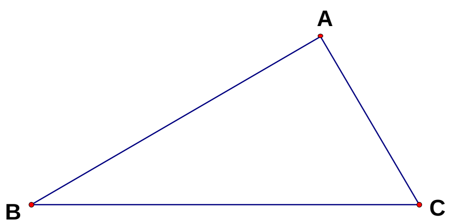


圖(3)

在圖(3)中，我們發現 $\overline{DE}\perp\overline{CA}$ ， $\overline{EA}\perp\overline{BA}$ ， $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ ，這△ADE 三邊似乎輪流垂直原△ABC 的三邊，同理△DFA 也是如此，這暗示若要找到 D、E、F 三點，應該要先找到△DEA 及△DFA 這種分別與原△三邊垂直的△。這在銳角△及鈍角△中似乎不那麼容易，因此我們再回到直角△來探索，先任取一個直角△ABC，我們使用課本中教到的投影法試著看是否可以投出△DEA 及△DFA，作法如下：

已知：直角△ABC，∠A=90°，如圖(4)

求作：利用投影法作出△DEA 及△DFA，使三邊分別垂直於△ABC 的三邊。



圖(4)

作法：(1)在 $\overline{BA}$ 上任取一點 P ，作 $\overline{PD'}\perp\overline{BC}$ 於 D'

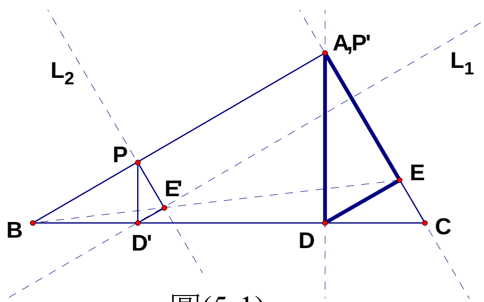
(2)過 D' 作直線 $L_1\perp\overline{AC}$

(3)過 P 作直線 $L_2\perp\overline{AB}$ ，交 L_1 於 E' 點

(4)以 B 為投射點，作 $\overleftrightarrow{BE'}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E 點

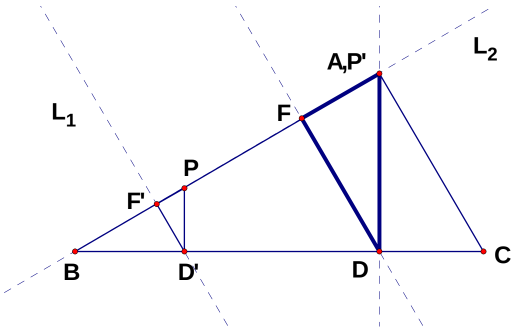
(5)過 E 點作 $\overline{EP'}/\!/\overline{E'P}$ ， $\overline{ED}/\!/\overline{E'D'}$

(6)連 $\overline{P'D}$ ，則△ DEP' 即為所求，如圖(5-1)



圖(5-1)

由畫出的投影△ DEP' 中，我們發現 $\overline{EP'}$ 和 $\overline{EA}$ 重合，也就是說其實△ DEP' 就是△DEA，同理我們也畫出△ DFP' ，如圖(5-2)，我們也發現其實△ $DFP' \cong$ △DFA。



圖(5-2)

在畫圖(5-1)和圖(5-2)時，我們發現當我們畫出 $\overline{PD'} \perp \overline{BC}$ 後，我們也只有兩種畫這被當投影用的小直角△可以畫出來，也就是說我們只能投影出兩種垂直三邊的△，一個是順時針垂直，一個是逆時針垂直。

結論：直角△中存在兩種依序垂直三邊的△，一個是順時針垂直，一個是逆時針垂直。

(三)、尺規作圖畫出三邊依序垂直銳角△三邊的內接△

模仿上述直角△的畫法，試試看能否在銳角△中畫出那種垂直三邊的三角形，並檢查那些可能的子△存在嗎？作法如下：

已知: 銳角△ABC，如圖(6)

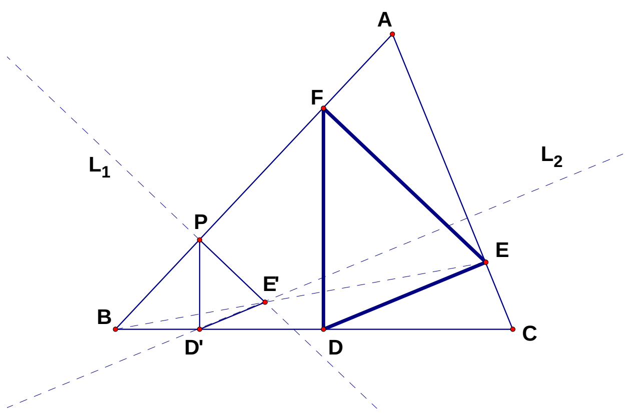
求作: 畫出與三邊垂直的△

作法: (1) 任作 $\overline{PD'} \perp \overline{BC}$

(2) 分別過 P， D' 兩點，作直線 L_1 ， L_2 垂直 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$

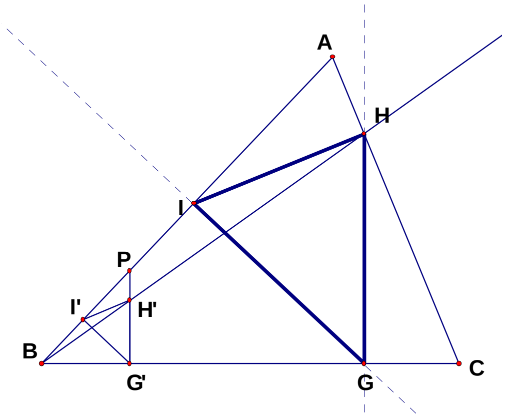
並設 L_1 、 L_2 交於 E'

(3) 以 B 爲投射點，將△ $PD'E'$ 投射成內接△DEF，則△DEF 即爲所求



圖(6)

依照同樣的方法我們再畫出逆時針垂直的內接△，如圖(7)。



圖(7)

當我們把順時針及逆時針的△放在一起時，好像會相似，以下是我們的證明：

已知：△ABC 中，$\overline{DE} \perp \overline{AB}$，$\overline{EF} \perp \overline{BC}$，$\overline{FD} \perp \overline{AC}$，$\overline{GH} \perp \overline{AB}$，$\overline{HI} \perp \overline{BC}$，$\overline{GI} \perp \overline{AC}$，

如圖(8)

求證：△DEF～△GHI～△ABC

證明：(1)∵∠1+∠2=90° 又∠1+∠A=90°

∴∠2=∠A

∵∠3+∠4=90° 又∠3+∠C=90°

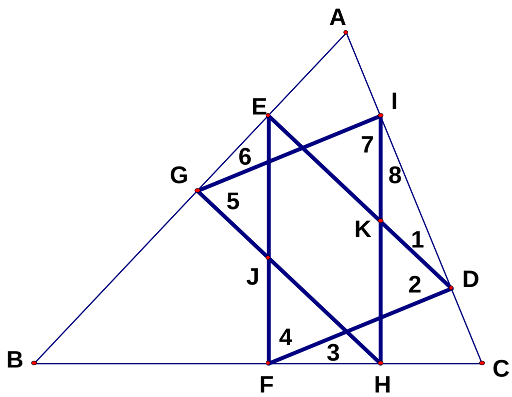
∴∠4=∠C

∴△DEF～△ABC

(2)同理，∠5=∠A、∠7=∠C

∴△GHI～△ABC(AA)

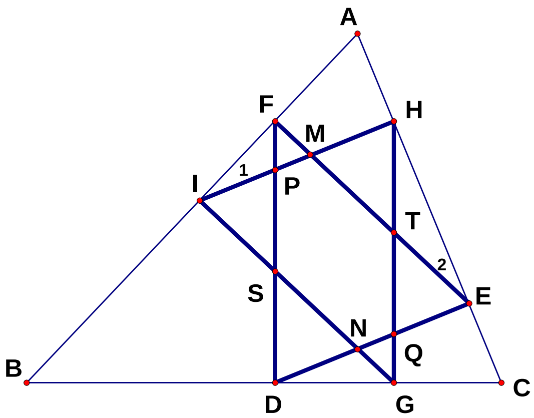
∴△DEF~△GHI~△ABC



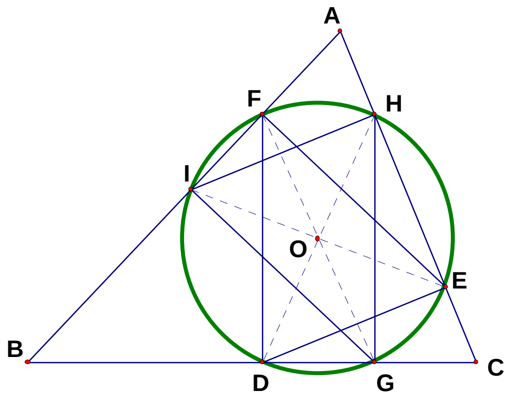
圖(8)

經過上述的證明後，我們發現△DEF、△GHI 均與原△ABC 相似。

我們立即想到，這兩個內接△會全等嗎？我們用 GSP 試過會全等，因此試著證明如下：



圖(9)



圖(10)

首先我們要先來證明 F、I、D、G、E、H 六點共圓。

已知：△DEF 和△GHI 皆爲三邊依序垂直△ABC 的內接△，如圖(9)

求證： F、I、D、G、E、H 六點共圓

證明：(1)連 $\overline{FH}$ 、$\overline{ID}$ 、$\overline{GE}$

(2)由前文中的性質知△DEF～△HIG

∴∠HIG=∠DEF……①

(3)由 $\overline{GI}\perp\overline{AB}$ 、$\overline{DE}\perp\overline{AC}$ 知

∠1+∠HIG=∠2+∠DEF=90°……②

(4)由①②知∠1=∠2

因此由同圓周角性質知 I、F、H、E 四點共圓……③

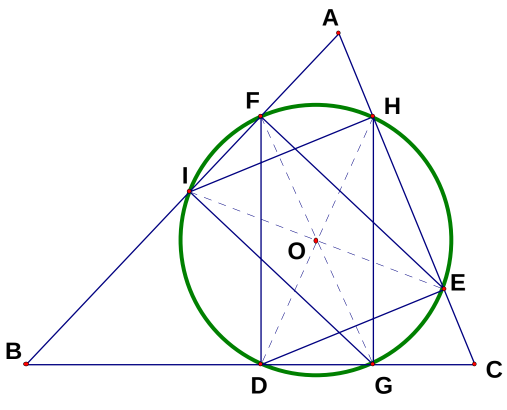
(5)同理可證 F、H、E、G 四點共圓……④

(6)由③④推得 I、F、H、E、G 五點共圓

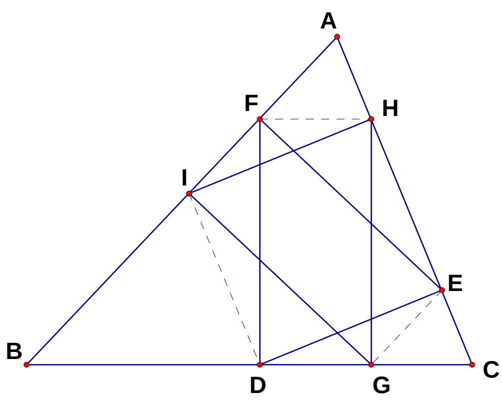
(7)又由 H、E、G、D 四點共圓，可以推得 I、F、H、E、G、D 六點共圓，如圖(10)。

在上述證明的過程中，很明顯的可得知四邊形 IFEG、四邊形 DFHG、四邊形 IHED 為矩形，因此六條對角線相交於同一點，設為 O，此點必為此共圓的圓心，而 $\overline{IE}$ 、$\overline{FG}$ 、$\overline{HD}$ 皆為其直徑。

當我們證明出 I、F、H、E、G、D 六點共圓後，我們就可輕易的證明內接△DEF 以及內接△HIG 必全等。說明如下：



圖(11)



圖(12)

已知：△ABC 為銳角△，△DEF 和△HIG 分別是三邊依序逆時針與順時針垂直原△ABC 三邊的內接△

求證：△DEF≅△HIG，如圖(11)

證明：(1)∵I、F、H、E、G、D 六點共圓且圓心為 O

∴$\overline{FG}$ 和 $\overline{HD}$ 皆為直徑

∴∠HFD=∠FHG=90°

∴圓內接四邊形 DFHG 必為矩形

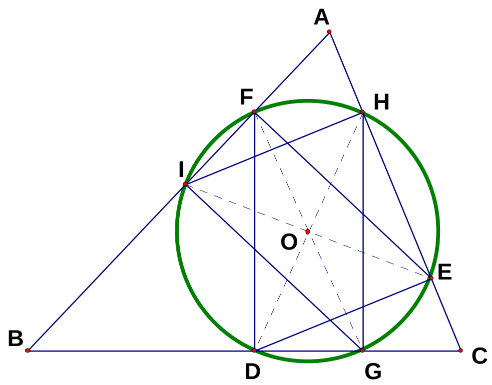
∴$\overline{FD}=\overline{HG}$

(2)同理 $\overline{FE}=\overline{IG}$ ， $\overline{DE}=\overline{IH}$

因此△DEF≅△HIG(SSS 全等)

特別値得一提的是在此證明中我們知道 $\overline{FH}\,//\,\overline{BC}$ 、 $\overline{EG}\,//\,\overline{AB}$ 、 $\overline{ID}\,//\,\overline{AC}$ ，如圖(12)，而這個「平行概念」在往後我們研究「廣義的畢氏定理」及「快速畫法」中有很大的幫助。

當我們將上文中的六點共圓的圓畫出來後，我們終於發現尋找已好幾個月了的子△，它們就是△BFG、△CHD 和△AIE，以下證明：



圖(13)

已知：如圖(13)，I、F、H、E、G、D 六點共圓，圓心爲 O

求證：△BFG～△BCA　△CHD～△CBA　△AIE～△ACB

證明：(1)首先我們要證明△BFG～△BCA

$\because \angle BFG=\frac{1}{2}\overset{\frown}{IDG}$

又 $\angle BCA=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DIFH}-\overset{\frown}{GE})$

$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DG}+\overset{\frown}{HE})$

$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{DG}+\overset{\frown}{ID})$　　$(\because \overline{IH}\,//\,\overline{DE})$

$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{IDG}$

$\therefore \angle BFG=\angle BCA$

(2)由∠B=∠B 及∠BFG=∠BCA

∴△BFG～△BCA(AA 相似)

(3)同理可證△CHD～△CBA 及△AIE～△ACB

經由這個證明後我們可以肯定△BFG、△CHD 及△AIE 必爲銳角△ABC 的三個子△，也可以肯定直角△中的兩個子△是△ABD 及△ACD，而∠A 附近的子△應該是退化掉了。

結論：

> 利用投影法作出順時針及逆時針垂直母△三邊的內接△，並找出銳角△中關鍵的三個子△。

(四)、發現銳角△各邊的廣義畢氏定理

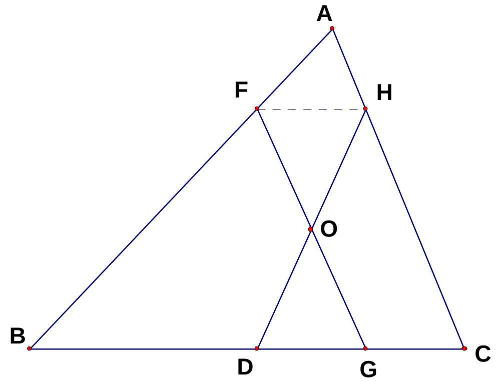
由於數學課時老師曾利用直角△那兩個子△的對應邊長比例關係式而導出直角△的畢氏定理，毫無疑問的我們可以大膽的猜想在銳角△中一樣可以利用這三個子△來導出銳角△的畢氏定理，說明如下：

已知：△ABC 爲銳角△，△DEF 和△GHI 爲三邊依序垂直△ABC 的△

求證：$\overline{BF}^2+\overline{FH}^2+\overline{HC}^2=\overline{BC}^2$　如圖(14)

$\overline{AI}^2+\overline{ID}^2+\overline{DC}^2=\overline{CA}^2$

$\overline{AE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GB}^2=\overline{AB}^2$



圖(14)

證明：(1)∵ $\overline{FH}\,//\,\overline{BC}$　∴△AFH～△ABC

又△GBF～△ABC，△DHC～△ABC

∴△AFH～△GBF～△DHC～△ABC

∴△AFH 面積：△GBF 面積：△DHC 面積：△ABC 面積

$=\overline{FH}^2 : \overline{BF}^2 : \overline{HC}^2 : \overline{BC}^2$(相似形的面積比=對應邊長的平方比)

(2)觀察△ABC 面積

=△GBF 面積+△DHC 面積+AFOH 面積-△ODG 面積

=△GBF 面積+△DHC 面積+△AFH 面積+△OFH 面積-△ODG 面積

=△GBF 面積+△DHC 面積+△AFH 面積　(∵△OFH≅△ODG)

∴ $\overline{BF}^2$k+$\overline{HC}^2$k+$\overline{FH}^2$k=$\overline{BC}^2$k

∴ $\overline{BF}^2+\overline{HC}^2+\overline{FH}^2=\overline{BC}^2$　　得證

(3)同理可證 $\overline{AI}^2+\overline{ID}^2+\overline{DC}^2=\overline{CA}^2$ 、 $\overline{AE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GB}^2=\overline{AB}^2$

以上這三個關係式即爲**銳角△的畢氏定理**，我們拿另一種直角△的畢氏定理的證明法來和它們比較：

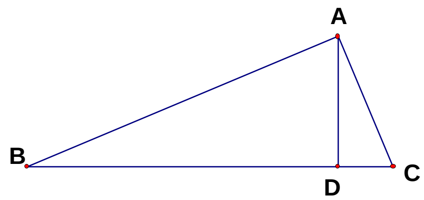
如圖(15)是直角△ABC，∠A=90°，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，觀察利用面積推導畢氏定理證明法如下：

由於△BDA～△ADC～△BAC

∴△BDA 面積：△ADC 面積：△BAC 面積

$=\overline{BA}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$

又由△BAC 面積=△BDA 面積+△ADC 面積



圖(15)

$\therefore \overline{BA}^2$ k+ $\overline{AC}^2$ k= $\overline{BC}^2$ k

$\therefore \overline{BA}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

此即爲畢氏定理，而因爲直角△BAC 中的頂點 A 處的子△已退化掉，所以面積爲零，若我們假設它存在的話，應該有一平行底邊的平行線段，只是現在這平行線段長爲零，所以說 $\overline{BA}^2+0^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ 應該是較完整的畢氏定理的型式，而我們上文中的銳角△畢氏定理的證明和此處之證明完全相同，因此我們敢大膽的說，我們已經找到銳角△的畢氏定理了。

結論：銳角△三邊的畢氏定理型式爲 $\overline{BF}^2+\overline{FH}^2+\overline{HC}^2=\overline{BC}^2$ ，$\overline{FH}\,//\,\overline{BC}$

$\overline{AI}^2+\overline{ID}^2+\overline{DC}^2=\overline{CA}^2$ ，$\overline{ID}\,//\,\overline{AC}$

$\overline{AE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GB}^2=\overline{AB}^2$ ，$\overline{EG}\,//\,\overline{AB}$

(五)、發現直角△兩股的廣義畢氏定理

如圖(16)，在直角△ABC 中，∠A=90°，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ ，$\overline{DE}\perp\overline{AB}$

試證：短股 $\overline{AE}^2+\overline{ED}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2$ ，$\overline{ED}\,//\,\overline{AC}$

證明：∵△ABC～△EDA～△EBD～△DAC

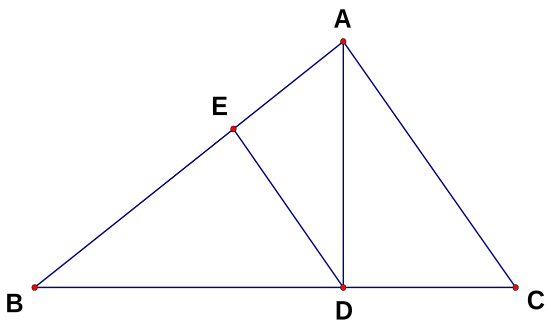
$\therefore$△EDA：△EBD：△DAC：△ABC $=\overline{AE}^2:\overline{ED}^2:\overline{DC}^2:\overline{AC}^2$

又△ABC 面積=△EDA 面積+△EBD 面積+△DAC 面積

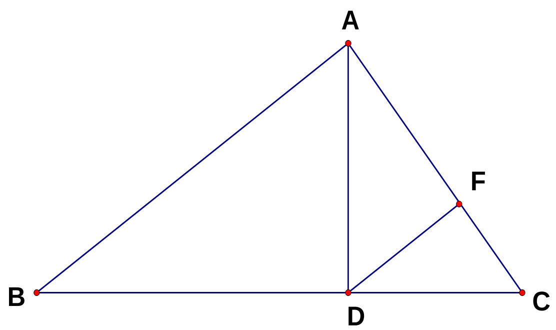
$\therefore \overline{AE}^2k+\overline{ED}^2k+\overline{DC}^2k=\overline{AC}^2k$

$\therefore \overline{AE}^2+\overline{ED}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2$　此即爲直角△ABC 中短股 $\overline{AC}$ 的畢氏定理。

同理很容易的我們可以導出長股 $\overline{AB}$ 的畢氏定理爲 $\overline{AF}^2+\overline{FD}^2+\overline{DB}^2=\overline{AB}^2$，如圖(17)



圖(16)



圖(17)

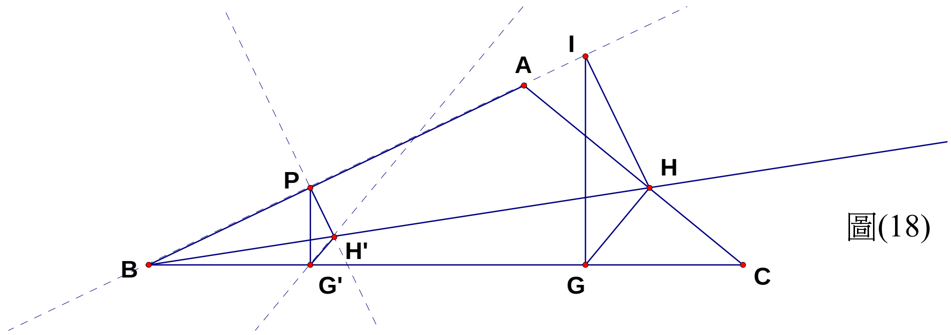
結論：

直角△短股 $\overline{AC}$ 畢氏定理爲 $\overline{AE}^2+\overline{ED}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2$，$\overline{ED}//\overline{AC}$

長股 $\overline{AB}$ 畢氏定理爲 $\overline{AF}^2+\overline{FD}^2+\overline{DB}^2=\overline{AB}^2$，$\overline{FD}//\overline{AB}$

(六)、尺規作圖畫出三邊依序垂直鈍角△三邊的內接△

接下來我們要來探討當頂點爲鈍角的鈍角△的奧秘，我們也嘗試畫出和原△三邊依序垂直的內接△，雖然因爲鈍角的關係以致有個交點落在延長線上，跑到原△外部去了，但我們還是可以將它畫出，作法如下：



圖(18)

已知：△ABC 中∠A＞90°，如圖(18)

求作：畫出一個依序垂直原△三邊的△

作法：(1)在 $\overleftrightarrow{BA}$ 任取一點 P，作 $\overline{PG'}\perp\overline{BC}$

(2)過 P 作 $\overline{PH'}\perp\overline{BA}$，過 G' 作 $\overleftrightarrow{G'H'}\perp\overleftrightarrow{CA}$，得△ $PG'H'$

(3)以 B 爲投射點，作 $\overleftrightarrow{BH'}$ 交 $\overline{CA}$ 於 H

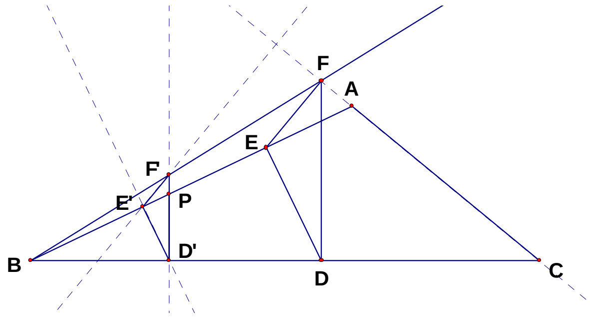
(4)作 $\overline{HI}//\overline{H'P}$ 交 $\overleftrightarrow{BA}$ 於 I

(5)作 $\overline{HG}//\overline{H'G'}$ 交 $\overline{BC}$ 於 G

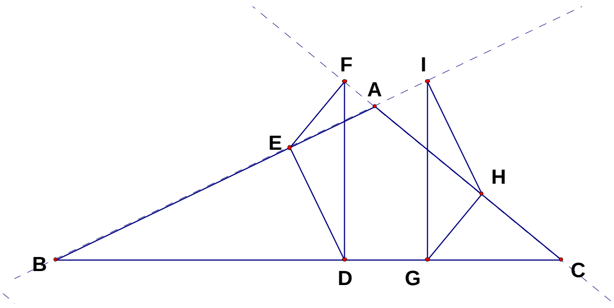
(6)連 $\overline{IG}$，則△GHI 即爲所求

證明：因△ $PG'H'$ 三邊依序垂直△ABC 的三邊，而△GHI 是以 B 爲投射點所作之相似△，當然△GHI 的三邊也依序垂直原△的三邊。

觀察圖(18)中的△GHI，他很明顯的以逆時針方向依序垂直△ABC，顯然的我們也可以以相同的方法畫出一個以順時針方向依序垂直△ABC 的△。如圖(19)所示，△DEF 即爲以順時針方向依序垂直原△ABC 三邊直線的△。

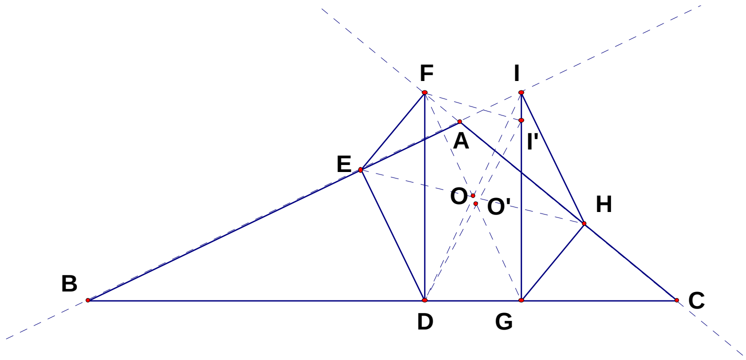


圖(19)



圖(20)

接下來我們同樣的相信這兩個△，△DEF 和△GHI 會全等，如圖(20)，且就如同在銳角△中那樣 G、H、I、F、E、D 六點也會共圓，只是我們發現無法如法炮製使用銳角△中的方法加以證明，但不氣餒的我們另外找一種共圓的證明法，敘述如下：



圖(21)

已知：△ABC 為鈍角△，∠BAC＞90°，△DEF 和△GHI 分別為順時針及逆時針依序垂直原△ABC 三邊的△，如圖(20)。

求證：(1)△DEF≅△IHG

(2)D、E、F、G、H、I 六點共圓。

證明：(1)$\because$ $\overline{FI}$ 與 $\overline{DG}$ 只有平行或不平行兩種可能，如圖(21)

(2)若 $\overline{FI}$ 平行 $\overline{DG}$

$\because$ $\overline{FD}\perp\overline{BC}$ ，$\overline{IG}\perp\overline{BC}$

$\therefore$ $\overline{FD}//\overline{IG}$ 　$\therefore$FDGI 為平行四邊形

又∠FDG=90° 　$\therefore$FDGI 為矩形

$\therefore$F、D、G、I 四點共圓

又∠IED=90° 　$\therefore$E 亦在該共圓上

同理 H 亦在該共圓上

$\therefore$D、E、F、G、H、I 六點共圓……①

(3)若$\overline{FI}$不平行$\overline{DG}$

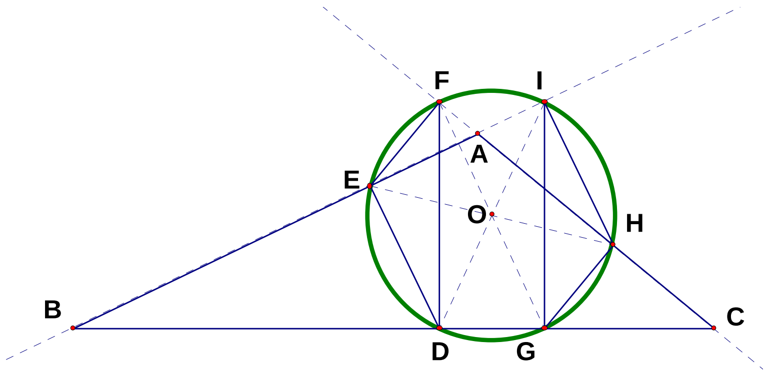
可從 F 點，作$\overline{FI'}$ // $\overline{DG}$交於I'點

同理 F、D、G、I'四點共圓
又∠FHG=90°
∴H、F、D、G、I'五點共圓……②

(4)不論是①式之共圓的圓，或是②式之共圓的圓，因爲兩者至少重複 H、F、D、G 四點，因此這兩個共圓的圓明顯的是同一個圓。故 I 與I'應該是同一點，因此得證 D、E、F、G、H、I 六點共圓。

(5)由 FDGI 爲矩形，得知$\overline{FD}=\overline{IG}$，也很容易的就能證出△DEF≅△IHG

就如同在銳角△的現象，當我們證出 D、E、F、G、H、I 六點共圓後，那三個子△立即呈現出來了，他們就是△BID、△CFG 和△AEH。證明如下：



圖(22)

已知：鈍角△ABC，如圖(22)，∠BAC＞90°，D、E、F、G、H、I 六點共圓
求證：△BID～△BCA　　△CFG～△CBA　　△AEH～△ACB

證明：(1)連$\overline{FI}$、$\overline{FG}$、$\overline{ID}$、$\overline{EH}$

(2)∵FDGI 爲矩形

∴令$\overline{FG}$和$\overline{ID}$交於 O，O 爲六點共圓的圓心

(3)∵EFIHGD 爲平行六邊形

∴$\overline{EF}=\overline{GH}$，$\overline{ED}=\overline{IH}$，$\overline{FI}=\overline{DG}$

∴$\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{GH}$，$\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{IH}$，$\overset{\frown}{FI}=\overset{\frown}{DG}$

(4)∵∠C 爲圓外角

∴∠C=$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{FED}-\overset{\frown}{GH})=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{ED}-\overset{\frown}{GH})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ED}$=∠BID

又∠B=∠B

∴△BID～△BCA，同理△CFG～△CBA

(5)∵∠C=∠BID(已證)

$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ED}$

$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{IH}$

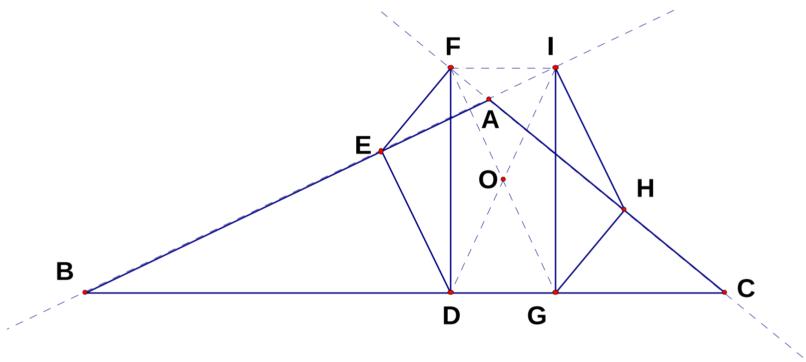
=∠AEH

∴△AEH～△ACB(AA)

經過這個證明後，我們確定△BID、△CFG 及△AEH 即爲鈍角△的三個子△。

結論：利用投影法作出垂直母△三邊(延長線)的內接△，並找出鈍角△中關鍵的三個子△。

(七)、發現鈍角△各邊的廣義畢氏定理



圖(23)

已知：△ABC 爲鈍角△，∠A＞90°，△BID，△CFG 及△AEH 爲其三個子△，如圖(23)

求證：$\overline{BI}^2+\overline{CF}^2+\overline{FI}^2=\overline{BC}^2$

證明：(1)如同在作圖中敘述，我們知道 FIGD 爲矩形

∴$\overline{FI}\,//\,\overline{BC}$

∴△AFI~△ACB

又∵△BID~△BCA　△CFG~△CBA，△AEH~△ABC

∴△AIF~△DBI ~△GFC~△ABC

∴△AIF 面積：△DBI 面積：△GFC 面積：△ABC 面積

$=\overline{IF}^2:\ \overline{BI}^2:\ \overline{CF}^2:\ \overline{BC}^2$

(2)觀察 ABC 面積

=△DBI 面積+△GFC 面積+△ODG 面積-凹四邊形 FOIA 面積

=△DBI 面積+△GFC 面積+△OFI 面積-凹四邊形 FOIA 面積

=△DBI 面積+△GFC 面積+△AIF 面積……①

$\therefore$令△AIF 面積=$\overline{IF}^2$k，△DBI 面積=$\overline{BI}^2$k，△GFC 面積=$\overline{FC}^2$k

△ABC 面積=$\overline{BC}^2$k

代入①式可得$\overline{BI}^2$k+$\overline{FC}^2$k+$\overline{IF}^2$k=$\overline{BC}^2$k

$\therefore$得證$\overline{BI}^2+\overline{CF}^2+\overline{IF}^2=\overline{BC}^2$ ($\overline{BC}$是鈍角三角形最長邊)

上式即爲**鈍角△最長邊的畢氏定理**，更神奇的是此時：

$\overline{AE}^2+\overline{CG}^2+\overline{EG}^2=\overline{CA}^2$ 、 $\overline{BD}^2+\overline{DH}^2+\overline{AH}^2=\overline{BA}^2$

說明如下：

因爲在圖(23)中，連$\overline{EG}$

由△ABC 面積=△AHE 面積+△GFC 面積+四邊形 BGOE 面積-△OFH 面積
=△AHE 面積+△BEG 面積+△GFC 面積

$\therefore\overline{AE}^2+\overline{CG}^2+\overline{EG}^2=\overline{CA}^2$得證

同理，連$\overline{DH}$

由△ABC 面積=△BIG 面積+△AEH 面積+四邊形 ODCH 面積-△OEI 面積
=△BID 面積+△CDH 面積+△AEH 面積

$\therefore\overline{BD}^2+\overline{DH}^2+\overline{AH}^2=\overline{BA}^2$得證

結論：鈍角△三邊的畢氏定理爲$\overline{BI}^2+\overline{CF}^2+\overline{IF}^2=\overline{BC}^2$ ($\overline{BC}$是鈍角三角形最長邊)

$\overline{AE}^2+\overline{CG}^2+\overline{EG}^2=\overline{CA}^2$ ，$\overline{EG}\,//\,\overline{AC}$

$\overline{BD}^2+\overline{DH}^2+\overline{AH}^2=\overline{BA}^2$ ，$\overline{DH}\,//\,\overline{AB}$

研究到此，我們已經完整的找到了直角△、銳角△及鈍角△各邊的廣義畢氏定理。

二、畢氏數的探討：

由本文第一部份的理論探討得知，利用△的「平行線段」可以建立四元二次方程式，由於這裡的△已不只是直角△而已，任何△都包括在內，因此若討論這種四元二次廣義畢氏定理關係式的整數解，理論上來說是足夠的。我們先從直角△任一股的畢氏數談起，再到正△的畢氏數，接下來是等腰△的畢氏數，最後則是找出一般化的畢氏數。方法是我們先由各圖形理論上正式的畢氏圖畫法中尋找各自的快速畫法，並進而推出其畢氏數。

※說明：

一、在第三十八屆的全國科展的優勝作品「從畢氏定理談起」中，作者研究出五個方程式的解，並推廣一些結果，以下為該作者所研究的方程式：

1. $x^2+y^2=\mathrm{n}xy$
2. $x^2+y^2=\mathrm{n}z^2$
3. $x^2+y^2+z^2=\mathrm{n}xyz$
4. $x^2-y^2=\mathrm{n}z^2$
5. $x^2+y^2=\mathrm{n}z^3$

改變畢氏定理 $x^2+y^2=z^2$ 的係數及未知數形式，作者創造了多種三元二次不定方程，他利用數論的方法來分析各個方程式並求得整數解，但可惜作者未探討 N 元二次不定方程的整數解。

二、由嚴鎮軍、盛立人所著的從勾股定理談起中有一章探討畢氏定理的推廣，該作者給出四元二次不定方程的一般解 $x=mn$ 、 $y=m^2+mn$ 、 $z=mn+n^2$ 、 $w=m^2+mn+n^2$ ，不過我們發現，有很多組解都無法從這一般解中找出，例如(12、15、16、25)。他們是利用長方體的長、寬、高來代表 x、y、z，但導出來的一般解形式卻是漏洞百出。

三、基於上文一、二的概念，我們希望利用我們發現的廣義畢氏定理去修正嚴書中的四元二次不定方程的整數解公式，接著整合三元和四元二次不定方程的整數解公式後，探討出 N 元二次不定方程的畢氏數解。

(一)、直角△兩股的平行線段速畫法及其畢氏數探討

直角△斜邊及兩股各自的畢氏定理是最容易操作的，它們的快速畫法敘述如下：

甲：股 $\overline{AC}$ 畢氏定理平行線段的速畫法，如圖(24)

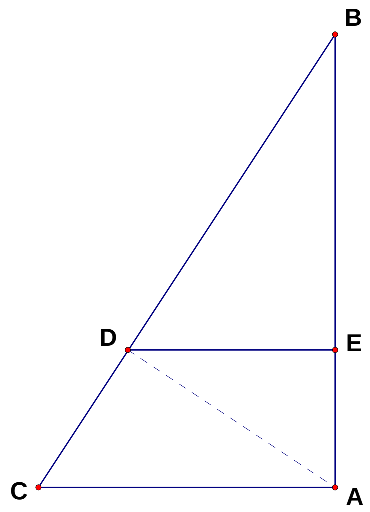
(1)作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D

(2)作 $\overline{DE}\perp\overline{AB}$ 於 E 則 $\overline{AE}^2+\overline{ED}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2$ ， $\overline{ED}//\overline{AC}$ 即為所求。

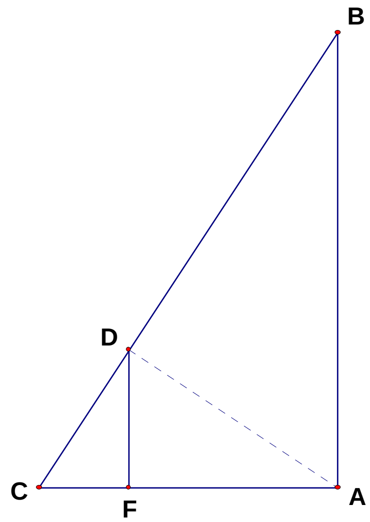
乙：股 $\overline{AB}$ 畢氏定理平行線段的速畫法，如圖(25)

(1)作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D

(2)作 $\overline{DE}\perp\overline{AC}$ 於 E 則 $\overline{AF}^2+\overline{FD}^2+\overline{DB}^2=\overline{AB}^2$ ， $\overline{FD}//\overline{AB}$ 即為所求。



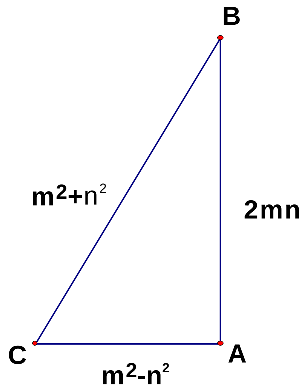
圖(24)



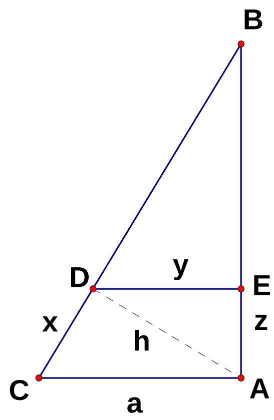
圖(25)

接著我們來探討直角△中兩股的畢氏數：

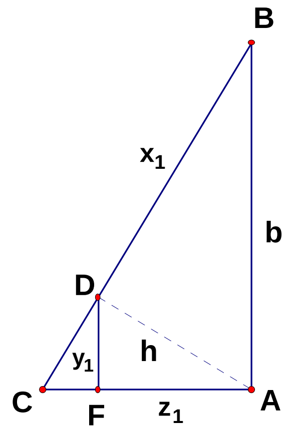
由於我們常使用的直角△畢氏數，如(3、4、5)、(5、12、13)、(7、24、25)…等，皆可由畢氏數的產生式m^2-n^2 、 $2mn$ 、 m^2+n^2來取得，如圖(26)。現在我們想要利用這些產生式來推出「短股」以及「長股」的畢氏數，作法如下：



圖(26)



圖(27)



圖(28)

如圖(27)，令$\overline{CD}$=x， $\overline{DE}$=y， $\overline{EA}$=z， $\overline{AC}$=a， $\overline{AD}$=h，且$\overline{DE}\,//\,\overline{AC}$ ， $x^2+y^2+z^2=a^2$

如圖(28)，令$\overline{BD}=x_1$，$\overline{DF}=y_1$，$\overline{FA}=z_1$，$\overline{AB}$=b，$\overline{AD}$=h，且$\overline{DF}\,//\,\overline{AB}$，${x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2=b^2$

(1)短股：

由△CDA～△CAB 得 $\overline{CD}$ ： $\overline{AC}=\overline{CA}$ ： $\overline{CB}$

即 x：$(m^2-n^2)=(m^2-n^2)$ ：(m^2+n^2)

$\therefore$x=$\dfrac{(m^2-n^2)^2}{m^2+n^2}$

同理可得：y=$\dfrac{4m^2n^2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}$ ，z=$\dfrac{2mn(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}$ ，h=$\dfrac{2mn(m^2-n^2)}{m^2+n^2}$ ，

因為畢氏數是最簡整數比，因此我們只要將這些相關數據拿來化簡即可：

$$x：y：z：a=\frac{(m^2-n^2)^2}{m^2+n^2}：\frac{4m^2n^2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}：\frac{2mn(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}：(m^2-n^2)$$

$$=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}：\frac{4m^2n^2}{(m^2+n^2)^2}：\frac{2mn(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}：1$$

$$=(m^2-n^2)(m^2+n^2)：4m^2n^2：2mn(m^2-n^2)：(m^2+n^2)^2$$

$$=(m^4-n^4)：(4m^2n^2)：2mn(m^2-n^2)：(m^2+n^2)^2$$ 即為所求。

例如原直角△畢氏數（3、4、5）中，是取 m=2，n=1 產生的，當我們以 m=2，n=1 代入上式可得：

$$x：y：z：a=(2^4-1^4)：4\times2^2\times1^2：2\times2\times1\times(2^2-1^2)：(2^2+1^2)^2$$

$$=15：16：12：25$$

檢驗：$15^2+16^2+12^2=225+256+144=625=25^2$ 成立

因此直角△「短股」的畢氏數為$(m^4-n^4)：(4m^2n^2)：2mn(m^2-n^2)：(m^2+n^2)^2$

我們列出一些「短股」畢氏數組，如下表(1)：更多的組合請見附件(一)。

原直角△畢氏數組(a、b、c)	短股畢氏數組(x：y：z：w)
(3、4、5)	15：16：12：25
(5、12、13)	65：144：60：169
(7、24、25)	175：576：168：625
(15、8、17)★	255：64：120：289
(11、60、61)	671：3600：660：3721
(21、20、29)★	609：400：420：841

表(1)

註：(15、8、17)是以 m=4、n=1 代入得到，故 m^2-n^2 會較 $2mn$ 大，但我們仍將 m^2-n^2 視為短股並計算其畢氏數組，其他特殊的例子亦同。(以★標示之)

(2)長股：

同理，在圖(27)中，我們可以計算得：

$$y_1=\frac{2mn(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}，z_1=\frac{4m^2n^2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}，$$

$$x_1=(m^2+n^2)-\frac{(m^2-n^2)^2}{m^2+n^2}=\frac{(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2}{m^2+n^2}=\frac{2m^2\times2n^2}{m^2+n^2}=\frac{4m^2n^2}{m^2+n^2}$$

我們可以開始來求直角△「長股」的畢氏數了。

$$x_1：y_1：z_1：b=\frac{4m^2n^2}{m^2+n^2}：\frac{2mn(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}：\frac{4m^2n^2(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}：2mn$$

$$=\frac{2mn}{m^2+n^2}：\frac{(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}：\frac{2mn(m^2-n^2)}{(m^2+n^2)^2}：1$$

$$=2mn(m^2+n^2)：(m^2-n^2)^2：2mn(m^2-n^2)：(m^2+n^2)^2$$ 即為所求

例如原直角△的畢氏數(3、4、5)中，是取 m=2，n=1 產生的，當我們以 m=2，n=1 代入上式可得：

$x_1 : y_1 : z_1 : b = 2\times2\times1\times(2^2+1^2) : (2^2-1^2)^2 : 2\times2\times1\times(2^2-1^2) : (2^2+1^2)^2$
$= 20 : 9 : 12 : 25$

檢驗：$20^2+9^2+12^2=400+81+144=625=25^2$ 成立

因此直角△「長股」的畢氏數為 $2mn(m^2+n^2) : (m^2-n^2)^2 : 2mn(m^2-n^2) : (m^2+n^2)^2$

我們也列出一些「長股」畢氏數組，如下表(2)：更多的組合請見附件(一)。

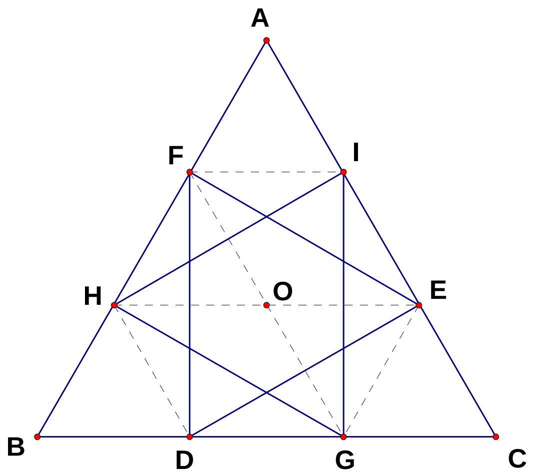
原直角△畢氏數組(a、b、c)	長股畢氏數組($x_1 : y_1 : z_1 : w$)
(3、4、5)	20：9：12：25
(5、12、13)	156：25：60：169
(7、24、25)	600：49：168：625
(15、8、17)★	136：225：120：289
(11、60、61)	3660：121：660：3721
(21、20、29)★	580：441：420：841

表(2)

註：(15、8、17)是以 m=4、n=1 代入得到，故 $2mn$ 會較 m^2-n^2 大，但我們仍將 $2mn$ 視為長股並計算其畢氏數組，其他特殊的例子亦同。(以★標示之)

結論：直角△兩股的畢氏定理產生在那兩個子△的斜邊上的高的垂足點處。其畢氏數有無限多組，短股畢氏數為 $(m^4-n^4) : (4m^2n^2) : 2mn(m^2-n^2) : (m^2+n^2)^2$
長股畢氏數為 $2mn(m^2+n^2) : (m^2-n^2)^2 : 2mn(m^2-n^2) : (m^2+n^2)^2$

(二)、正△平行線段速畫法及其畢氏數探討



圖(29)

在正△ABC 中，如圖(29)，若△DEF 及△GHI 為兩個依序垂直三邊的△，明顯的由對稱關係可以看出來 $\overline{HE} // \overline{BC}$，又 $\overline{FI} // \overline{BC}$，$\therefore \overline{FI} // \overline{HE} // \overline{BC}$，∴△AFI 為正△，$\therefore \overline{AF} = \overline{FI}$，

同理 $\overline{BH}=\overline{HD}$，又因 D、G、E、I、F、H 六點共圓，設圓心為 O，明顯的由對稱性可知六邊形 DGEIFH 必為正六邊形，因此 $\overline{FI}=\overline{FH}=\overline{HD}$，$\therefore \overline{AF}=\overline{FH}=\overline{HB}$，因此我們找到了正△畢氏定理的速畫法也就是說那平行線段 $\overline{FI}$ 位在正△邊長的三等分點處。速畫方法如下：

(1)過 A 任畫一直線 L，如圖(30)

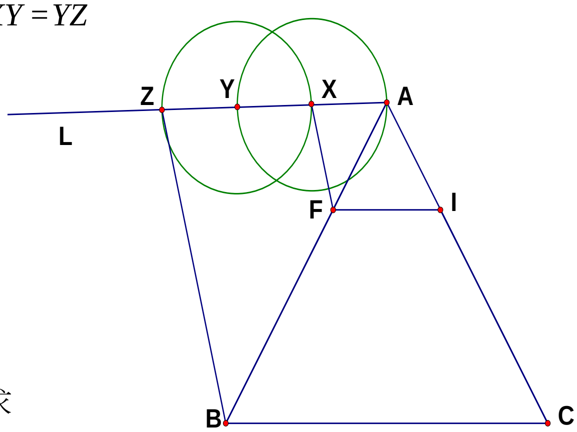
(2)在 L 上依序取三點 X、Y、Z，使 $\overline{AX}=\overline{XY}=\overline{YZ}$

(3)連 $\overline{ZB}$

(4)作 $\overline{XF} // \overline{ZB}$ 交 $\overline{AB}$ 於 F

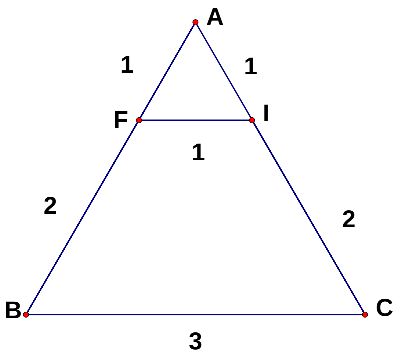
(5)作 $\overline{FI} // \overline{BC}$ 交 $\overline{AC}$ 於 I

則 $\overline{BC}^2=\overline{BF}^2+\overline{FI}^2+\overline{IC}^2$，$\overline{FI} // \overline{BC}$ 即為所求



圖(30)

進一步我們以邊長為 3 的正△為例，如圖(31)



圖(31)

取 $\overline{BF}$ =2，$\overline{FI}$ =1，$\overline{IC}$ =2，$\overline{BC}$ =3

檢驗：$\overline{BF}^2+\overline{FI}^2+\overline{IC}^2=2^2+1^2+2^2$=4+1+4=9=$\overline{BC}^2$　　完全正確！

對於任何正△都有 $\overline{BF}$ ： $\overline{FI}$ ： $\overline{IC}$ ： $\overline{BC}$ =2：1：2：3。(其中 $\overline{FI} // \overline{BC}$)

結論：

正△的畢氏定理產生在三邊的三等分點處。它的畢氏數比為 2：1：2：3，僅此一組。

(三)、等腰△平行線段的速畫法及其畢氏數探討

如圖(32)，△ABC 為銳角等腰△，$\overline{AB}=\overline{AC}$，我們先專注於底邊 $\overline{BC}$ 的畢氏定理快速畫法，較有特色及實用性，先分析如下：設△ABC 中，底邊 $\overline{BC}=a$，腰 $\overline{AB}=\overline{AC}=b$，以及 $\overline{DB}=\overline{EC}=c$(對稱性)作 $\overline{AN}\perp\overline{BC}$ 交 $\overline{DE}$ 於 M，$\therefore\overline{BN}=\frac{1}{2}a$

由△ADM~△ABN 知 $\overline{AD}$ ： $\overline{AB}=\overline{DM}$ ： $\overline{BN}$

$\therefore$(b-c)：b=$\overline{DM}$ ： $\frac{1}{2}a$

$\therefore\overline{DM}=\frac{a(b-c)}{2b}$

$\therefore\overline{DE}=2\overline{DM}=\frac{a(b-c)}{b}$

由於 D、E 是在底邊 $\overline{BC}$ 的畢氏定理關鍵點

$\therefore$令 $\overline{BD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EC}^2=\overline{BC}^2$

$\therefore c^2+\left[\frac{a(b-c)}{b}\right]^2+c^2=a^2$

$\therefore 2c^2+\frac{a^2(b^2-2bc+c^2)}{b^2}=a^2$

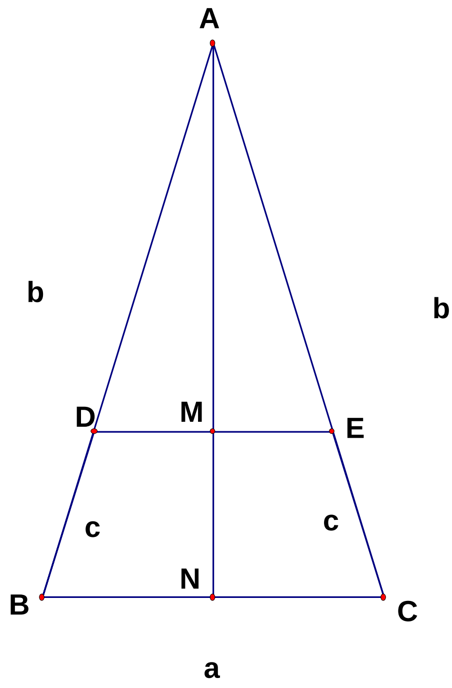
$\therefore 2b^2c^2+a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2=a^2b^2$

$\therefore 2b^2c^2-2a^2bc+a^2c^2=0$

$\therefore 2b^2c-2a^2b+a^2c=0$

$\therefore (a^2+2b^2)c=2a^2b$

$\therefore c=\frac{2a^2b}{a^2+2b^2}$



圖(32)

$\therefore\overline{AD}$ ： $\overline{DB}$=(b-c)：c=$\frac{2b^3-a^2b}{a^2+2b^2}$ ： $\frac{2a^2b}{a^2+2b^2}$=$(2b^3-a^2b)$： $2a^2b$=$(2b^2-a^2)$ ： $2a^2$

上面這個式子告訴我們任何等腰△的「平行線段」端點 D 或 E 的比例，可用腰長和底長來表示，我們只要把等腰腰長切成 $(2b^2-a^2)$ ： $2a^2$ 的兩段即可找到「平行線段」。詳細的作圖法請見附件(二)。

經由上文的探討，我們可以來計算等腰△「底邊」的畢氏數組了。

(1)銳角等腰△：

如圖(33)，在△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$=b，底邊$\overline{BC}$=a，$\overline{DE}//\overline{BC}$，$\overline{BD}=\overline{EC}$=c

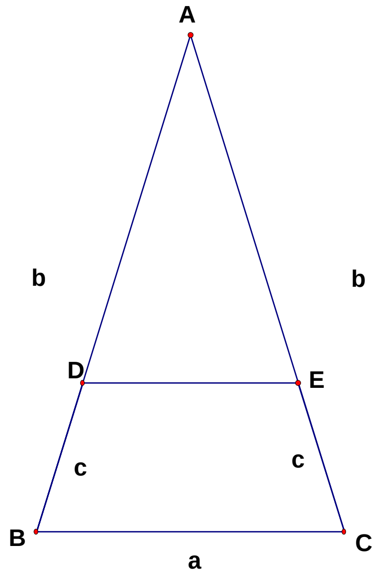
由△ADE～△ABC 得$\overline{DE}：\overline{BC}=\overline{AD}：\overline{AB}$

即$\overline{DE}$：a=(b-c)：b

$\therefore \overline{DE}=\dfrac{a(b-c)}{b}$

又 c=$\dfrac{2a^2b}{a^2+2b^2}$代入上式得$\overline{DE}=\dfrac{a(b-\frac{2a^2b}{a^2+2b^2})}{b}$

$=\dfrac{2ab^2-a^3}{a^2+2b^2}$



圖(33)

因此我們可以推算「底邊」的畢氏數組了。

$\overline{BD}：\overline{DE}：\overline{EC}：\overline{BC}=\dfrac{2a^2b}{a^2+2b^2}：\dfrac{2ab^2-a^3}{a^2+2b^2}：\dfrac{2a^2b}{a^2+2b^2}：a$

$=\dfrac{2ab}{a^2+2b^2}：\dfrac{2b^2-a^2}{a^2+2b^2}：\dfrac{2ab}{a^2+2b^2}：1$

$=(2ab)：(2b^2-a^2)：(2ab)：(a^2+2b^2)$

以銳角等腰△(3、3、2)爲例，腰 b=3，底長 a=2，代入上式得：

$\overline{BD}：\overline{DE}：\overline{EC}：\overline{BC}=(2+2\times3)：(2\times3^2-2^2)：(2+2\times3)：(2^2+2\times3^2)$

=12：14：12：22

=6：7：6：11

檢驗：$6^2+7^2+6^2$=121=11^2　成立

因此等腰銳角△的畢氏數爲$(2ab)：(2b^2-a^2)：(2ab)：(a^2+2b^2)$

我們列出一些銳角等腰△的畢氏數組，見表(3)：更多的組合請見附件(一)。

銳角等腰△三邊長(b、b、a)	「底邊」畢氏數組(x：y：z：w)
(3、3、2)	6：7：6：11
(4、4、3)	24：23：24：41
(5、5、3)	30：41：30：59
(7、7、4)	28：41：28：57
(11、11、7)	154：193：154：291

表(3)

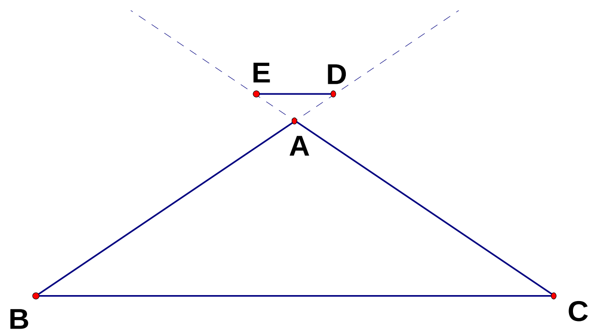
(2)鈍角等腰△：

它的平行線段 $\overline{DE}$ 產生在外部，而將兩腰切成($2b^2-a^2$)： $2a^2$ 的比例即可找到畢氏定理，但鈍角△其底邊較兩腰長，故若按照此比例的話，會造成 $2b^2-a^2$ 成負數。不過就因爲鈍角△有平行線段在外部的這個特性，我們把負號代表產生在外部。要使這比例還原成正數，就加上絕對值：(a＞b＞0，且 $2b^2<a^2$) $\left|2b^2-a^2\right|=a^2-2b^2$ 。

而鈍角△中，$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EC}^2$，銳角△中 $2b^2-a^2$ ：$2a^2$ 是 $\overline{AD}$ ：$\overline{BD}$ 的線段比，

$\overline{AD}=b-c$ ，$\overline{BD}=c$ ，不過鈍角△中 c 位於外部，(b+c)是構成畢氏定理的腰長，所以切開的兩段應是 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BD}$ (其實不是切開，而是多重疊一段，但不影響)，$\overline{AD}$ ：$\overline{BD}=a^2-2b^2$ ：$2a^2$

從上文中我們可以來推導鈍角等腰△的畢氏數組了，如圖(34)：



圖(34)

由△ABC～△AED 知：

$\overline{DE}$ ：$\overline{BC}$ ：$\overline{AE}$ ：$\overline{AB}$

$\overline{DE}$ ：a = c：b，$\overline{DE}=\dfrac{ac}{b}$

而 $c=\dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}$ 代入 $\overline{DE}$ 得 $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}=\dfrac{a(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}$

$$\overline{BD}:\overline{DE}:\overline{EC}:\overline{BC}=\left(\frac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}+b\right):\frac{a(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}:\left(\frac{b(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}+b\right):a$$

$$=\left(\frac{b\times 2a^2}{a^2+2b^2}\right):\left(\frac{a(a^2-2b^2)}{a^2+2b^2}\right):\left(\frac{b\times 2a^2}{a^2+2b^2}\right):a$$

$$=(2ab):(a^2-2b^2):(2ab):(a^2+2b^2)$$

因此等腰鈍角△的畢氏數爲 $(2ab)$ ：(a^2-2b^2) ：$(2ab)$ ：(a^2+2b^2)

我們也列出一些鈍角等腰△的畢氏數組，見下頁表(4)：更多的組合請見附件(一)。

鈍角等腰△三邊長(b、b、a)	「底邊」畢氏數組(x：y：z：w)
(3、3、5)	30：7：30：43
(4、4、6)	12：1：12：17
(5、5、8)	40：7：40：57
(7、7、10)	70：1：70：99
(11、11、16)	176：7：176：249

表(4)

結論：

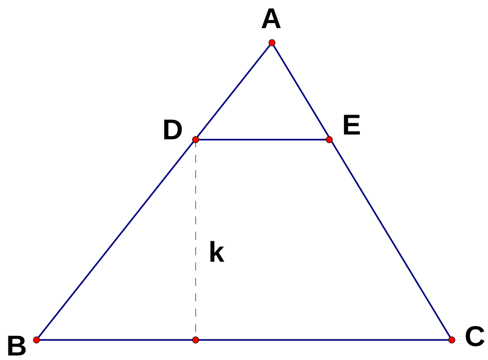
等腰△底邊的畢氏定理產生在其兩腰長$\left|(2b^2-a^2)\right|$：$2a^2$的比例分點處，其畢氏數組有無限多組，型如：

$(2ab)$：$(2b^2-a^2)$：$(2ab)$：(a^2+2b^2)，當 $a<\sqrt{2}\,b$

$(2ab)$：(a^2-2b^2)：$(2ab)$：(a^2+2b^2)，當 $a>\sqrt{2}\,b$

(四)、適用在任意△的畢氏數關係式探討

既然已證明了廣義的畢氏定理，那麼我們這邊來探討四元二次不定方程的整數解形式。



圖(35)

如圖(35)，設$\overline{AB}=m_1$，$\overline{AC}=m_2$，$\overline{BC}=m_3$，而$\overline{DE}$與$\overline{BC}$的距離為 k。

$\overline{BD}=k\times\dfrac{1}{\sin B}$，$\overline{EC}=k\times\dfrac{1}{\sin C}$，$\overline{DE}=m_3-\dfrac{\sin A}{\sin C}\times\dfrac{k}{\sin B}$

先算出 k 值以利於推算邊長

$$\overline{BD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EC}^2=\overline{BC}^2$$

$$\frac{k^2}{\sin^2 B}+\frac{k^2}{\sin^2 C}+\left(m_3\left(1-\frac{k}{\sin B\times m_1}\right)\right)^2=m_3^2$$

$$\frac{k^2}{\sin^2 B}+\frac{k^2}{\sin^2 C}-\frac{2km_3^2}{\sin B\times m_1}+\frac{k^2m_3^2}{\sin^2 B\times m_1^2}=0$$

$$k\left(\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}+\frac{m_3^2}{\sin^2 B\times m_1^2}\right)=\frac{2m_3^2}{\sin B\times m_1}$$

$$k=\frac{2m_3^2}{\sin B\times m_1}\times\frac{\sin^2B\times\sin^2C\times m_1^2}{\sin^2B\times m_1^2+\sin^2C\times m_1^2+\sin^2C\times m_3^2}=\frac{(\sin B\times\sin^2C\times m_1)\times 2m_3^2}{\sin^2C(m_1^2+m_2^2+m_3^2)}$$

$$=\frac{\sin B\times m_1\times 2m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}$$

算出 k 值後，我們便可以算出 $\overline{BD}$ 、 $\overline{EC}$ 、 $\overline{DE}$

$$\overline{BD}=\frac{\sin B\times m_1\times 2m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\times\frac{1}{\sin B}=\frac{2m_1m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}$$

$$\overline{EC}=\frac{\sin B\times m_1\times 2m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\times\frac{1}{\sin C}=\frac{\sin C\times m_2\times 2m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\times\frac{1}{\sin C}=\frac{2m_2m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}$$

$$\overline{DE}=m_3-\frac{m_3}{m_1}\times\frac{\sin B\times m_1\times 2m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\times\frac{1}{\sin B}=m_3-\frac{2m_3^3}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}=\frac{m_3(m_1+m_2+m_3)-2m_3^3}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}$$

$$=\frac{m_3(m_1+m_2-m_3)}{m_1+m_2+m_3}$$

$$\overline{BD}:\overline{DE}:\overline{EC}:\overline{BC}=\frac{2m_1m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}:\frac{m_3(m_1^2+m_2^2-m_3^2)}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}:\frac{2m_2m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}:m_3$$

$$=\frac{2m_1m_3}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}:\frac{m_1^2+m_2^2-m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}:\frac{2m_2m_3}{m_1^2+m_2^2+m_3^2}:1$$

$$=(2m_1m_3):(m_1^2+m_2^2-m_3^2):(2m_2m_3):(m_1^2+m_2^2+m_3^2)$$

驗算：代 $m_1=5$， $m_2=6$， $m_3=7$

$(2\times5\times7)^2+(25+36-49)^2+(2\times7\times6)^2=12100=110^2$ 成立

於是我們推導出了四元二次不定方程的畢氏數一般解形式了。

> **定理一**：對任意整數 m_1 、 m_2 、 m_3 ，
>
> 代數式 $x=2m_1m_3$ 、 $y=m_1^2+m_2^2-m_3^2$ 、 $z=2m_2m_3$ 、 $w=m_1^2+m_2^2+m_3^2$
>
> 恆為四元二次不定方程 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的整數解，反之亦然

(∵若 a、b、c、d 是 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的一組解，則 a、b、c、d 可表為梯形的四邊長。假設 a、b、c、d 皆為正整數，則

$$(a+b+c)^2-d^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac-d^2$$
$$=d^2+2ab+2bc+2ac-d^2$$
$$=2ab+2bc+2ac>0 \qquad ∴a+b+c>d \text{ 恆成立}$$

∴必定可用 a、b、c、d 併成一個梯形，從而找到對應的△)

前文我們已經推導出四元二次不定方程的完整形式了，自然地，我們會去想增加未知數的數目，那不定方程的形式會是如何呢？

由三元二次畢氏數解 $(m_1^2+m_2^2)^2=(m_1^2-m_2^2)^2+(2m_1m_2)^2$ ….. ①

及四元二次畢氏數解 $(m_1^2+m_2^2+m_3^2)^2=(m_1^2+m_2^2-m_3^2)^2+(2m_1m_3)^2+(2m_2m_3)^2$ ….. ②

我們觀察到①②兩式有著類似的組合

於是我們「猜想」五元二次不定方程的形式可能為：

$$(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2)^2=(m_1^2+m_2^2+m_3^2-m_4^2)^2+(2m_1m_4)^2+(2m_2m_4)^2+(2m_3m_4)^2$$

我們驗算：右式$=4m_1^2m_4^2+4m_2^2m_4^2+4m_3^2m_4^2+m_1^4+m_2^4+m_3^4+m_4^4+2m_1^2m_2^2+2m_1^2m_3^2+2m_2^2m_3^2$

$$-2m_1^2m_4^2-2m_2^2m_4^2-2m_3^2m_4^2$$

$$=2m_1^2m_4^2+2m_2^2m_4^2+2m_3^2m_4^2+m_1^4+m_2^4+m_3^4+m_4^4+2m_1^2m_2^2+2m_1^2m_3^2+2m_2^2m_3^2$$

=左式　　成立

再猜想六元二次不定方程的形式為：

$$(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_5^2)^2=(m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2-m_5^2)^2+(2m_1m_5)^2+(2m_2m_5)^2$$

$$+(2m_3m_5)^2+(2m_4m_5)^2$$

驗算：右式$=4m_1^2m_5^2+4m_2^2m_5^2+4m_3^2m_5^2+4m_4^2m_5^2+m_1^4+m_2^4+m_3^4+m_4^4+m_5^4+2m_1^2m_2^2+2m_1^2m_3^2$

$$+2m_1^2m_4^2+2m_2^2m_3^2+2m_2^2m_4^2+2m_3^2m_4^2-2m_1^2m_5^2-2m_2^2m_5^2-2m_3^2m_5^2-2m_4^2m_5^2$$

$$=2m_1^2m_5^2+2m_2^2m_5^2+2m_3^2m_5^2+2m_4^2m_5^2+m_1^4+m_2^4+m_3^4+m_4^4+m_5^4+2m_1^2m_2^2+2m_1^2m_3^2$$

$+2m_1^2m_4^2+2m_2^2m_3^2+2m_2^2m_4^2+2m_3^2m_4^2$=左式　　成立

因此我們利用數學歸納法，證明我們的猜測是正確的：

試證：$(m_1^2+m_2^2+\dots+m_n^2)^2=(m_1^2+m_2^2+\dots+m_{n-1}^2-m_n^2)^2+(2m_1m_n)^2+(2m_2m_n)^2$
$+\dots+(2m_{n-1}m_n)^2$

①當 n=1 時，

$(m_1^2-m_2^2)^2+(2m_1m_2)^2=m_1^4-2m_1^2m_2^2+m_2^4+4m_1^2m_2^2=m_1^4+2m_1^2m_2^2+m_2^4$
$=(m_1^2+m_2^2)^2$　原式成立

②設 n=k 時原式成立

即$(m_1^2+m_2^2+\dots+m_k^2)^2=(m_1^2+m_2^2+\dots+m_{k-1}^2-m_k^2)^2+(2m_1m_k)^2+(2m_2m_k)^2$
$+\dots+(2m_{k-1}m_k)^2$　成立

則 n=k+1 時，

$$右式=4m_1^2m_{k+1}^2+4m_2^2m_{k+1}^2+\ldots+4m_k^2m_{k+1}^2+m_1^4+m_2^4+\ldots+m_{k+1}^4+2m_1^2m_2^2+2m_1^2m_3^2$$

$$+\ldots+2m_1^2m_k^2+2m_2^2m_3^2+2m_2^2m_4^2+\ldots+2m_2^2m_k^2+\ldots+2m_{k-1}^2m_k^2-2m_1^2m_{k+1}^2-2m_2^2m_{k+1}^2$$

$$-\ldots-2m_k^2m_{k+1}^2$$

$$=m_1^4+m_2^4+\ldots+m_{k+1}^4+2m_1^2m_2^2+2m_1^2m_3^2+\ldots+2m_1^2m_k^2+2m_2^2m_3^2+2m_2^2m_4^2$$

$$+\ldots+2m_2^2m_k^2\ldots+2m_{k-1}^2m_k^2-2m_1^2m_{k+1}^2-2m_2^2m_{k+1}^2-\ldots-2m_k^2m_{k+1}^2$$

$$=(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_{k+1}^2)^2=左式 \quad 成立$$

故由數學歸納法得證，$\forall k\in N$，

$$(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_n^2)^2=(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_{n-1}^2-m_n^2)^2+(2m_1m_n)^2+(2m_2m_n)^2+\ldots+(2m_{n-1}m_n)^2$$

定理二：對於任意整數 m_1 、 m_2 、 m_3 、…、 m_n

代數式 $x_1=(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_{n-1}^2-m_n^2)$ 、 $x_2=(2m_1m_n)$ 、 $x_3=(2m_2m_n)$ 、…、

$x_{n-1}=(2m_{n-1}m_n)$ 、 $x_n=(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_n^2)$

恆爲 N 元二次不定方程 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_{n-1}^2=x_n^2$ 的整數解

伍、結論：

一、在直角△中，透過母子定理可導出畢氏定理，關鍵在於那兩個顯而易見的子△，如圖(4)，而在銳角△及鈍角△中也存在類似成對的子△，如圖(9)、(20)，藉由這些子△及原△面積拼湊的等式即可導出銳角△和鈍角△的畢氏定理。

(1) 銳角△的畢氏定理，型如： $\overline{BF}^2+\overline{FH}^2+\overline{HC}^2=\overline{BC}^2$ ， $\overline{FH}//\overline{BC}$

$\overline{AI}^2+\overline{ID}^2+\overline{DC}^2=\overline{CA}^2$ ， $\overline{ID}//\overline{CA}$

$\overline{AE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GB}^2=\overline{AB}^2$ ， $\overline{EG}//\overline{AB}$ ，如圖(14)

(2) 鈍角△的畢氏定理，型如： $\overline{BI}^2+\overline{FI}^2+\overline{CF}^2=\overline{BC}^2$ ， $\overline{IF}//\overline{BC}$

$\overline{BD}^2+\overline{DH}^2+\overline{HA}^2=\overline{BA}^2$ ， $\overline{DH}//\overline{BA}$

$\overline{CG}^2+\overline{GE}^2+\overline{EA}^2=\overline{CA}^2$ ， $\overline{GE}//\overline{CA}$ ，如圖(23)

二、對任意△ABC 的任一邊長的平方都可以用本文廣義畢氏定理的型式表示出來，因此完

整的畢氏定理型式應寫成$\overline{BX}^2+\overline{XY}^2+\overline{YC}^2=\overline{BC}^2$，其中$\overline{XY}//\overline{BC}$，而$\overline{BX}$落在$\overleftrightarrow{BA}$上，$\overline{YC}$

落在$\overleftrightarrow{CA}$上，且當$\overline{BC}$爲直角△的斜邊時，$\overline{XY}=0$。

三、(1)直角△一股的畢氏定理所需的畢氏數分割點產生在斜邊上的高的垂足處。

「短股」的畢氏數組有無限多組，如圖(27)，一般式爲：

$(m^2+n^2)^2$：(m^4-n^4)：$4m^2n^2$：$2mn(m^2-n^2)$，(m、n 爲任意正整數，且 m＞n)

「長股」的畢氏數組有無限多組，如圖(28)，一般式爲：

$(m^2+n^2)^2$：$2mn(m^2+n^2)$：$(m^2-n^2)^2$：$2mn(m^2-n^2)$

(2)正△的各邊的畢氏數產生在各邊 2：1 的分點處。

畢氏數組僅有一組，如圖(29)，恆爲 2：1：2：3

(3)等腰△底邊的畢氏定理所需的畢氏數分割點產生在兩腰上$\left|2b^2-a^2\right|$：$2a^2$的分點處。

(其中 b 爲腰長，a 爲底長)

底邊的畢氏數組有無限多組，其中：

當頂角爲銳角時，如圖(33)，一般式爲$(2ab)$：$(2b^2-a^2)$：$(2ab)$：(a^2+2b^2)

當頂角爲鈍角時，如圖(34)，一般式爲$(2ab)$：(a^2-2b^2)：$(2ab)$：(a^2+2b^2)

(4)對於任意△，設三邊長爲m_1、m_2、m_3時，畢氏數的一般解爲：

$(2m_1m_3)$：$(m_1^2+m_2^2-m_3^2)$：$(2m_2m_3)$：$(m_1^2+m_2^2+m_3^2)$

四、N 元二次不定方程$x_n^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+...+x_{n-1}^2$的畢氏數解的一般式爲：

$(m_1^2+m_2^2+...+m_{n-1}^2-m_n^2)$：$(2m_1m_n)$：$(2m_2m_n)$：…：$(2m_{n-1}m_n)$：$(m_1^2+m_2^2+...+m_n^2)$

只要以任意 n 個整數代入上式中即可找到一組畢氏數解。

陸：參考文獻

一、黃家禮　2001 年 10 月　幾何明珠　P1~14　九章出版社

二、盛立人、嚴鎮軍　2001 年 2 月　從勾股定理談起　P40~41　九章出版社

三、謝青文、陳佳瑜、劉哲榮　1998 年　將母子定理推廣成三代通則的利器—照妖鏡　第三十八屆全國科展

四、朱浩瑋　1998 年　從畢氏定理談起　第三十八屆全國科展

五、*Diophantine equation*　Wikipedia

六、Carmicael, R. D.　1959　*The Theory of Numbers, and Diophantine Analysis*　New York：Dover

七、Dickson, L. E.　2005　*History of the Theory of Numbers*　P41~99

八、Guy, R. K.　1994　*Unsolved Problems in Number Theory*　P139~198

九、Hardy, G. H. and Wright, E. M.　1979　*An Introduction to the Theory of Numbers*

十、Hunter, J. A. H. and Madachy, J. S.　1975　*Mathematical Diversions*　P52~64

評語

作者以幾何的方法來探討 $x^2+y^2+z^2=w^2$ 的整數解，很生動，值得鼓勵。請繼續努力，加以精簡Ｎ＝４的討論，也許可從而歸納出一理論，以增加Ｎ>４情形的研究成果。