臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱：跛腳皇后

學校 / 作者：國立臺中第一高級中學　　王建詒
國立臺中第一高級中學　　呂季桓

作者簡介

我是王建詒，目前就讀台中市台中一中二年級，對數學有一種特別的情感。從小學就開始參加一些數學競賽，也看了很多數學的書籍，有了不錯的數學基礎。雖然在競賽方面曾在全國能力競賽得獎，也曾參加奧林匹亞選訓營，但是科展方面一直都沒有很好的結果。直到高中有了專題課的分組，並且在一次偶然的機會發現了這個不錯的題目，才開始對作科展有了一些成就感。這次很高興能在這個題目的研究下有一些不錯的結果，並且通過國際科展初審，希望能藉由這次的經驗和各地的同學切磋得到更多的收穫。

作者簡介

我是呂季桓，目前就讀於台中一中數理資優班二年級，從小對於數學特別有興趣。高中專題分組後，對於數學有了更深入的了解，也常和班上同學討論專題，社團活動時，也聽過許多教授的演講，並且在一次機緣下，能對於這個題目有更進一步的研究，這次有幸能參加國際科展的複審，相信能成爲難忘的回憶。

中文摘要

高斯曾經提出八皇后問題：八個皇后在 8×8 的棋盤上有幾種放法可以使任意兩皇后不會互相攻擊？我們在原來的問題上加上一些條件，改變皇后攻擊規則，使得皇后失去一條對角線的攻擊方向，稱之爲「跛腳皇后」。我們稱一個在棋盤上放置最多跛腳皇后使其不互相攻擊的放法爲好放法；研究跛腳皇后放置在各類棋盤上其好放法的個數和性質。我們分別在六種棋盤上做討論：

（1） 在平面 n x n 棋盤上，我們證明了其好放法與完美極致史考倫型數列之間的對應關係，並歸納出相關的性質和定理。

（2） 在平面 m x n 棋盤上，我們固定一邊長度 n，做出 n 較小時好放法數的通式；我們也將其好放法對應至廣義史考倫。

（3） 在環面 n x n 棋盤上，我們說明了其好放法與完全剩餘系排列之間的對應關係，並歸納出相關的性質和定理。

（4） 在環面 m x n 棋盤上，我們固定 gcd（m,n），做出 gcd（m,n）較小時好放法數的通式。

（5） 在柱面 n x n 棋盤上，我們證明其與環面 n x n 棋盤等價，說明其好放法具有和環面 n x n 棋盤好放法相同的性質和定理。

（6） 在柱面 m x n 棋盤上，分成左右柱面以及上下柱面來做討論。我們歸納出相關性質和定理；並固定一邊長度 n，做出 n 較小時好放法數的通式。

Abstract

Gauss had researched about putting eight queens on the chessboard on the way that doesn’t make any queen attacks another one. Thus, we added some rules on the question: the queen loses one diagonal attacking-way and become the “lame queen”. We call a way that doesn’t make any lame queen attacks another one “a good way”. We have been investigating the amount and properties of good ways based on six kinds of chessboard:

（1）We found the correspondences between the “good way” on $n \times n$ plane chessboard and the Perfect extremal Skolem-type sequence, and concluded some associated properties and theorems.

（2） On $m \times n$ plane chessboard, we fixed the length n of one side of the chessboard, and accomplished the amount of good ways when n is small. We also correspond the good way to the Generalized Skolem.

（3）We found the correspondences between the “good way” on $n \times n$ torus chessboard and the arrayal of complete residue system, and concluded some associated properties and theorems.

（4）On $m \times n$ torus chessboard, we fixed the gcd(m,n) （greatest common divisor of m and n）, and accomplished the amount of good ways when gcd(m,n) is small.

（5）On $n \times n$ cylinder chessboard, we proved that this kind of chessboard is equal to torus chessboard. So the good ways, characters, and theorems on cylinder chessboard are the same as on the torus one.

（6）On $m \times n$ cylinder chessboard, we separate it into two cases: left-right cylinder chessboard and up-down cylinder chessboard. We concluded some associated properties and theorems, and we also fixed the length n of one side of the chessboard and accomplished the amount of the good ways when n is small.

目錄

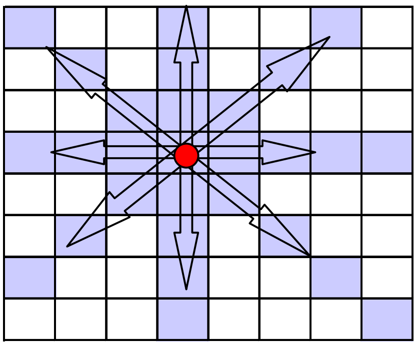
壹、 研究動機

高斯曾經提出八皇后問題：八個皇后在 8×8 的棋盤上有幾種放法可以使任意兩皇后不會互相攻擊？而我們便想到在原來的問題上加上一些條件，改變皇后攻擊規則，經過嘗試之後，啓發了許多有趣的想法，使我們想更進一步去進行研究。

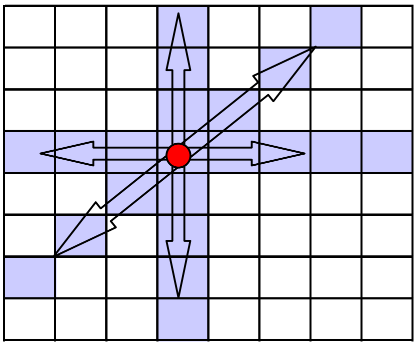
貳、 研究目的

考慮跛腳皇后在棋盤上的攻擊：跛腳皇后可以橫向直向和固定一個對角方向。我們研究三種棋盤上(正常棋盤、柱面棋盤、環面棋盤)放最多跛腳皇后時的性質。

西洋棋中的皇后能夠攻擊的範圍包括鉛直方向、水平方向和兩對角線方向。其有效攻擊區域如下示意圖：



我們則是考慮高斯八皇后問題的變形：**跛腳皇后的放法數**。皇后失去某一對角線方向的攻擊能力，考慮此情況之下 n 皇后的問題。因失去左上-右下對角線方向與失去右上-左下對角線沒有差別，爲求一致性，我們定義**皇后左上-右下跛腳**，皇后能夠攻擊的攻擊區域即下圖所示：



在棋盤上放置此種跛腳皇后，**探討棋盤上跛腳皇后的放法數**。我們考慮棋盤上可放**最多**跛腳皇后的情況，並稱一個**符合皇后不互相攻擊條件的放法爲“好放法”**。

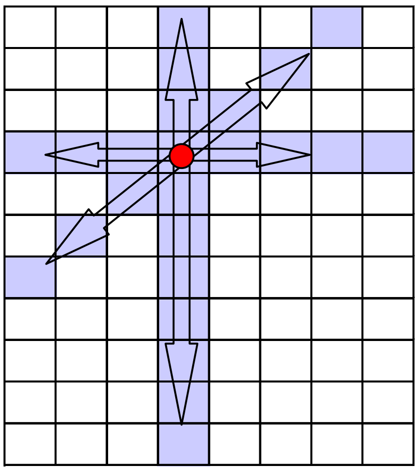
我們先來定義何謂放**最多**跛腳皇后的情況：

由於皇后有左右、上下、右上-左下對角線三個攻擊方向，分這三種來考慮：

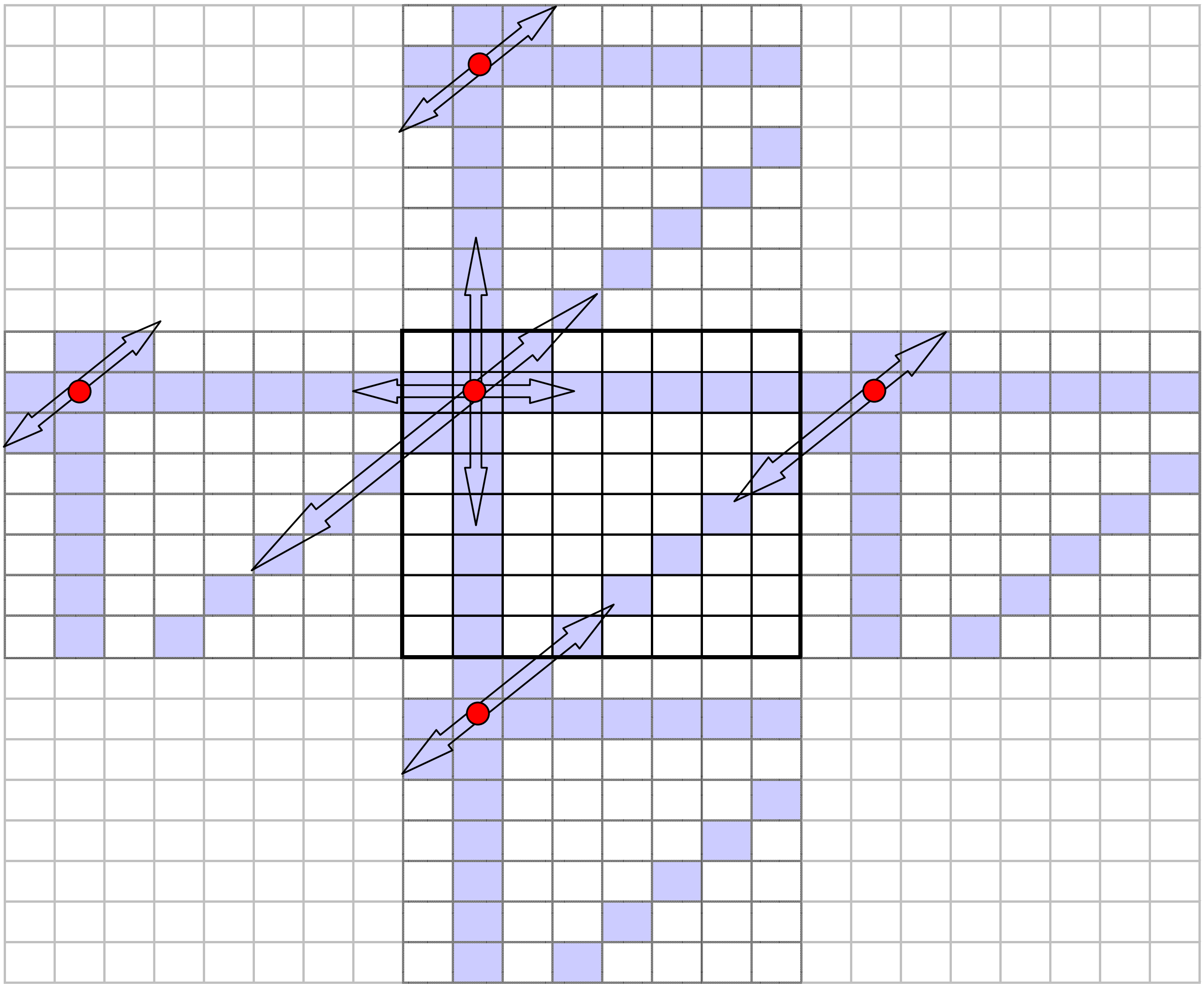
一、　考慮左右的攻擊方向，如此棋盤每一列上最多只能放一個跛腳皇后，全部最多能放的跛腳皇后個數即爲列數。
二、　考慮上下的攻擊方向，如此棋盤每一行上最多只能放一個跛腳皇后，全部最多能放的跛腳皇后個數即爲行數。
三、　考慮右上-左下的對角線攻擊方向，類似前面的概念我們可將棋盤上的位置分成互不影響的對角線組(右上-左下方向)，如此每一個對角線組上最多只能放一個皇后，全部最多能放的跛腳皇后個數即爲對角線組數。

考慮這三種情況的最小值爲我們在棋盤上可放最多跛腳皇后的個數
即個數 = min{列數,行數,對角線組數}

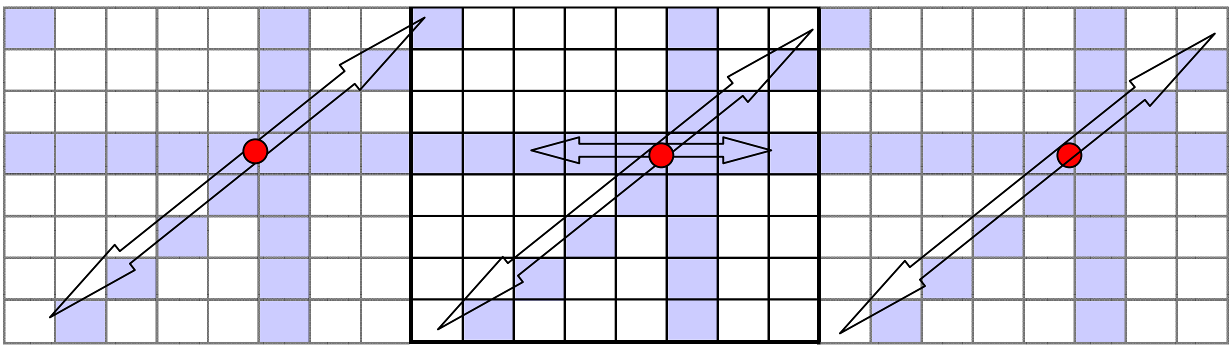
從正方形棋盤的觀點研究之後，可以將之推廣到m列n行的$m \times n$($m, n \in N$)矩形棋盤，再將跛腳皇后置於其上，其示意圖如下：(以 11×8 爲例)



並且從平面棋盤再加以推廣到環面棋盤及柱面棋盤。其中環面棋盤代表平面棋盤上下左右邊界都互相連接的情況，而跛腳皇后可以無視連接的邊界攻擊，如下圖所示：



柱面棋盤則代表平面棋盤左右邊界或上下邊界相連接，如下圖所示：(以棋盤左右相連接為例)



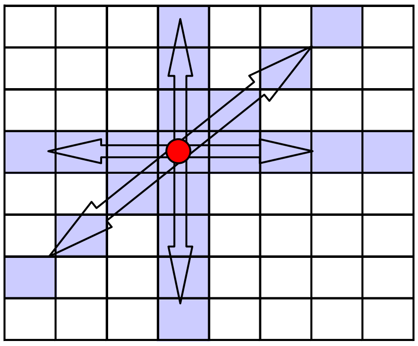
底下研究內容的第一、二、三將分別討論正常平面棋盤、環面棋盤、柱面棋盤。

參、研究內容

一、平面棋盤

1. $n \times n$ 棋盤

將失去左上-右下對角線方向的攻擊能力的皇后放置在平面 $n \times n$ 棋盤上，考慮此情況之下 n 皇后的問題。跛腳皇后能夠攻擊的攻擊區域即下圖所示：



明顯的，平面 $n \times n$ 棋盤最多可放 n 個跛腳皇后。

令 n 為正方形棋盤每邊的方格數，$f(n)$ 為好放法數。則我們以電腦程式得到的結果如下表：

n	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	1	1	3	7	23	83	405

n	8	9	10	11	12	13	14
$f(n)$	2113	12657	82297	596483	4698655	40071743	367854835

例：5×5 平面棋盤共有 23 種好放法：

				O
O				
	O			
		O		
			O	

				O
	O			
			O	
O				
		O		

				O
		O		
O				
			O	
	O			

O				
	O			
		O		
			O	
				O

O				
		O		
				O
	O			
			O	

O				
			O	
	O			
				O
		O		

	O			
		O		
			O	
				O
O				

	O			
			O	
O				
		O		
				O

	O			
				O
		O		
O				
			O	

		O		
			O	
				O
O				
	O			

		O		
				O
	O			
			O	
O				

		O		
O				
			O	
	O			
				O

			O	
				O
O				
	O			
		O		

			O	
O				
		O		
				O
	O			

			O	
	O			
				O
		O		
O				

O				
	O			
			O	
				O
		O		

O				
	O			
				O
		O		
			O	

O				
		O		
			O	
	O			
				O

	O			
		O		
O				
			O	
				O

O				
			O	
	O			
		O		
				O

		O		
O				
	O			
			O	
				O

		O		
O				
				O
	O			
			O	

	O			
			O	
O				
				O
		O		

$n \times n$ 平面棋盤好放法的數據中，看似沒有規律的數列，經過我們查閱文獻之後，發現**完美極致史考倫型數列**(perfect extremal Skolem-type sequence)各項的數值竟然完全與好放法數相同，而且此種數列在目前的數學界找不到通式，故我們便想要找到對應關係，期待對這兩種問題有突破性的發展。

首先我們先定義這類的數列：

1.史考倫型數列(Skolem sequence)：

一個有 $2n$ 個元素的數列，此 $2n$ 個元素是由 $1\sim n$ 這 n 個正整數各出現兩次所組成的，且每兩個重複的元素在數列中的位置差恰為元素本身

例: $n=4$ 時，則數列由 1~4 各出現 2 次所組成，且 1 和 1 位置差 1，2 和 2 位置差 2，3 和 3 位置差 3，4 和 4 位置差 4，譬如 23243114 即為滿足條件的數列

2.完美史考倫型數列(perfect Skolem-type sequence):

此種數列與史考倫型數列唯一的差異就是不限定此 $2n$ 個元素的範圍，這些元素可由任意 n 個相異正整數各出現兩次組成，每兩個重複的元素在數列中的位置差恰爲元素本身

例: $n=4$ 時，如果此 n 個相異正整數爲 2,3,5,6，則可構造出此種數列 63523265

3.完美極致史考倫型數列(perfect extremal Skolem-type sequence)

此種數列與完美史考倫型數列的差異在於這種數列中組成元素的 n 個相異正整數的總和必須爲 n^2

例: $n=4$ 時，如果此 n 個相異正整數爲 2,3,5,6，則可構造出此種數列 56232536，其中 5+6+2+3=16= 4^2

4.完美極致多重史考倫型數列(perfect extremal multi Skolem-type sequence):

此種數列與完美極致史考倫型數列唯一的差異就是元素可由任意 n 個正整數構成，不限定此 n 正整數爲相異，彼此之間可能相同，組成元素的 n 個正整數的總和必須爲 n^2

例: $n=4$ 時,如果此 n 個正整數爲 3,4,4,5，則可構造出此種數列 45344354，其中 4+5+3+4=16= 4^2

接下來我們先證明一個關於完美極致多重史考倫型數列的引理

引理一：完美極致多重史考倫型數列中組成元素的 n 個正整數，兩次出現在數列中的位置一個在數列的前半，另外一個則在數列的後半。

(pf):假設我們所選的 n 個數字是 $a_1, a_2, ..., a_n$ ，且在數列上的位置分別爲 s_i, t_i ($s_i, t_i \in \{1,2,3,...,2n\}$)。不失一般性，假設 $s_i > t_i$ ，故有 $s_i - t_i = a_i$ ，且由完美極致多重史考倫型數列須滿足的條件，可知

$$\sum_{i=1}^{n}(s_i - t_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i = n^2$$

$$\because \sum_{i=1}^{n}(s_i - t_i) = \sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \le [(n+1)+(n+2)+...+2n] - [1+2+...+n] = n^2$$

$\therefore$ 上式的等號成立的充要條件爲 $s_i \in \{n+1, n+2, ..., 2n\}, t_i \in \{1,2,...,n\}$ 得證。

因爲一個完美極致史考倫型數列必爲完美極致多重史考倫型數列，故經由上述引理，我們可以輕易的構造出一些完美極致史考倫型數列，方法如下：

現有 $2n$ 個空格爲待構造的數列，可以先在右半的 n 個空格任取一個位置在 i 的格子 ($i \in \{n+1, n+2, ..., 2n\}$)，然後在選取的空格與第一個空格填上 i-1，繼續類似的程序，在右半剩下的 n-1 個空格中選取一個位置在 j 的格子($j \in \{n+1, n+2, ..., 2n\}, i \ne j$)，並且在選取的格子與第二個空格填上 j-2，重複如此程序，直到右半邊的格子選完爲止。我們就可以構造出一個完美極致多重史考倫型數列(多重代表有重複的元素)，最後把有重複元素的數列刪除，即可得到所求的組成元素皆相異的完美極致史考倫型數列。

例如: n=3 時，便可以構造六個**完美極致多重史考倫型數列**

531135,441144,522225,342324,423243,333333

其中 441144,522225,333333 具有重複元素故必須刪除。剩下的三個數列 531135,342324,423243 就是所求的**完美極致史考倫型數列**。

史考倫跛腳皇后大定理：

含有 $2n$ 個元素的完美極致史考倫型數列的數列個數會與平面 $n\times n$ 棋盤上跛腳皇后的好放法數相同

(pf)：我們將**完美極致史考倫型數列**與平面 $n\times n$ 跛腳皇后作對應。

對應方法 1:

將 $n\times n$ 的棋盤填上數字，第 i 列由左至右填上 $(2n-i),(2n-1-i),\cdots,(n+1-i)$（$i\in\{1,2,...,n\}$）。**完美極致史考倫型數列**的前 n 個數字便分別是我們每一行要選取的數字，由**完美極致史考倫型數列**的構造方式，我們再進一步說明兩者之間的對應關係。在構造數列時，我們在第 k 次選取時選了右半所剩 n+1-k 個位置的任一個 i_k（$i_k\in\{n+1,n+2,...,2n\}$），並且在這個格子和左半第 k 個空格中填入 i_k-k 。這整個步驟可對應至平面跛腳皇后第 k 行的放置→先將填好數字的棋盤再做一些調整：分別把第 k 行的空格中的數字全部加上 k ，於是棋盤上變成了第 i 列上的數字都是 2n+1-i ，當我們在數列第 k 次選取選了右半所剩 n+1-k 個位置的任一個 i_k 時，等於是在調整後的棋盤的第 k 行上選了 i_k 這個數（代表了在數列中的位置），對應關係可以整理成下表：

完美極致史考倫型數列	平面 $n\times n$ 棋盤跛腳皇后
數列中是一次一次從左往右選的	棋盤上每一行只能選一次(相當於皇后上下的攻擊方向)
數列的右半每一個位置只能用一次	調整後棋盤上每一列只能選一次（每一列上填的數字都是相同的，代表著相同的位置）（相當於皇后左右的攻擊方向）
最後構造出來的**完美極致多重史考倫型數列**，需要將有重複元素的刪除，才可得到**完美極致史考倫型數列**	調整之前的棋盤上，右上-左下對角線上的數字都是相同的，不可重複選取必須刪除(相當於皇后右上-左下對角線上的攻擊方向)

由上述三個對應關係，便可將**完美極致史考倫型數列**和平面跛腳皇后做完整的對應，以下以 n=3 爲例作說明。

先將棋盤標上數字如右圖

5	4	3
4	3	2
3	2	1

還有調整後的棋盤（將第一行上全部加上 1，第二行上全部加上 2，第三行上全部加上 3）

6	6	6
5	5	5
4	4	4

數列有六個空格______，以 531135 爲例：

(1)第一次選取 $i_1 = 6$，則在第一格和第六格填上 5(=6-1)

5 _ _ _ _ 5 ⇔

5	4	3
4	3	2
3	2	1

原棋盤上第一行先選 5(代表數列上填的數)

6	6	6
5	5	5
4	4	4

調整後棋盤上第一行選 6，代表第 6 個位置已經被用掉，故同列上的 6 不可再放置（以紅底代表不能選取的數字）(相當於皇后的左右攻擊方向)

而第一次選擇我們選了 6，故同一行下面的 5 和 4 不用再考慮(相當於皇后上下的攻擊方向)

6	6	6
5	5	5
4	4	4

(2)第二次選取 $i_2 = 5$，則在第二格和第五格填上 3(=5-2)

5 3 _ _ 3 5 ⇔

5	4	3
4	3	2
3	2	1

原棋盤上第二行先選 3(代表數列上填的數)

6	6	6
5	5	5
4	4	4

調整後棋盤上第二行選 5，代表第 5 個位置已經被用掉，故同列上的 5 不可再放置(相當於皇后的左右攻擊方向)

而第二次選擇我們選了 5，故同一行下面的 4 不用再考慮(相當於皇后上下的攻擊方向)

6	6	6
5	5	5
4	4	4

(3)最後一次選取 $i_3 = 4$，則在第三格和第四格填上 1(=4-3)

5 3 1 1 3 5 ⇔

5	4	3
4	3	2
3	2	1

原棋盤上第三行選 1(代表數列上填的數)

6	6	6
5	5	5
4	4	4

調整後棋盤上第三行選 4，代表第 4 個位置被用掉。

這樣便得到了一個**完美極致多重史考倫型數列**：531135 和對應到一種平面$n\times n$棋盤上跛腳皇后的放法：

5	4	3
4	3	2
3	2	1

(4)以此方法便可構造得到六個**完美極致多重史考倫型數列**並分別對應到原棋盤

(o)531135--

5	4	3
4	3	2
3	2	1

(x)441144--

5	4	3
4	3	2
3	2	1

(x)522225--

5	4	3
4	3	2
3	2	1

(o)342324--

5	4	3
4	3	2
3	2	1

(o)423243--

5	4	3
4	3	2
3	2	1

(x)333333--

5	4	3
4	3	2
3	2	1

在數列中不要有重複的數字剛好可以由原棋盤填字和塗色方式對應至棋盤上皇后右上-左下的攻擊方向，這種情況在棋盤上是不合的（有橘色底的數字爲重複的），必須刪除。

最後得到的**完美極致史考倫型數列**剛好對應到平面$n\times n$棋盤上跛腳皇后可行的好放法。

完美極致史考倫型數列	平面$n\times n$棋盤上跛腳皇后可行的好放法
531135	5 4 3 4 3 2 3 2 1
342324	5 4 3 4 3 2 3 2 1
423243	5 4 3 4 3 2 3 2 1

故由這些說明可知**完美極致史考倫型數列**和平面$n\times n$棋盤上跛腳皇后可行的好放法可以做完美的對應關係。

對應方法 2:

我們先構造出一個$(2n)\times(2n-1)$的棋盤，並在第i列上依序填上$(2n-i),(2n-i-1),...,1$（$i\in\{1,2,...,n\}$），填到數字 1 即停止。我們爲方便記錄，用p_i代表第i列，q_i代表i行，且p_i對應到**完美極致史考倫型數列**的第i個數在q_i行中，我們將p_1=2n-i對應到

p_{2n-i+1}=2n-i, p_2=2n-i-1 對應到p_{2n-i+1}=2n-i-1,..., p_j = 2n+1-i-j 對應到

p_{2n-i+1}=2n+1-i-j $(i+j\le 2n+1)$

如此恰可滿足**完美極致史考倫型數列**的條件(**元素可由任意n個相異正整數各出現兩次組成，每兩個重複的元素在數列中的位置差恰爲元素本身**)又因爲要滿足其他**完美極致史考倫型數列**的條件，所以可以和平面$n\times n$棋盤跛腳皇后作對應，關係如下：

完美極致史考倫型數列	平面$n\times n$棋盤跛腳皇后
所填進的數都不相同	所以棋盤上，右上-左下只能選 1 個數(相當於皇后右上-左下對角線上的攻擊方向)
每一位置只能放一個數	棋盤上每一列只能選一次（相當於皇后左右的攻擊方向）
每一q_i行中的數，只能從$p_1,p_2,...,$或p_{2n-i}選一數對應到p_{2n+1-i}	棋盤上每一行只能選一次(相當於皇后上下的攻擊方向)
同一數值在數列上的位置分別爲s_i,t_i ($s_i\in\{n+1,n+2,...,2n\}$, $t_i\in\{1,2,...,n\}$)	在q_i行中，p_j和所對應的p_{2n-i+1}不可同在前半部或後半部(將不合的部分扣除後，恰爲一$n\times n$的棋盤)

以n=3 爲例,可構造出一 6×5 棋盤，並填入數字

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
p_1	5	4	3	2	1
p_2	4	3	2	1	
p_3	3	2	1		
p_4	2	1			
p_5	1				
p_6					

在q_1行中，我們將p_1=5 對應到p_6=5, p_2=4 對應到p_6=4, p_3=3 對應到p_6=3, p_4=2 對應到p_6=2, p_5=1 對應到p_6=1 同理可將q_2,q_3,q_4,q_5行的數作對應，可滿足**完美極致史考倫型數列**

(1)填進的數都不同=>所以右上-左下只能選 1 個數(即主對角線跛腳)

(2)每一位置p_i只能放一個數(即每一列只能放一個數)

(3)每一q_i行中的數，只能從$p_1,p_2,...,$或p_{6-i}選一數對應到p_{7-i},所以每一q_i只能放一個數(即每一行只能放一個數)

(4)由引理一，數列上的位置分別為 s_i ，t_i ($s_i \in \{4,5,6\}, t_i \in \{1,2,3\}$ =>灰色部分不合

以 p_1=2 為例: p_1=2 對應到 p_3=2 與引理一相矛盾

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
p_1	5	4	3	2	1
p_2	4	3	2	1	
p_3	3	2	1		
p_4	2	1			
p_5	1				
p_6					

由 1,2,3,4 即可找到所有平面 3×3 棋盤跛腳皇后的好放法且可和完美極致史考倫型數列作完美對應：

<table>
<tr><th>完美極致史考倫型數列</th><th>平面 $n \times n$ 棋盤上跛腳皇后可行的好放法</th></tr>
<tr><td>531135</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>q_1</td><td>q_2</td><td>q_3</td><td>q_4</td><td>q_5</td></tr>
<tr><td>p_1</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>p_2</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>p_3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>p_4</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>p_5</td><td>1</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>p_6</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>342324</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>q_1</td><td>q_2</td><td>q_3</td><td>q_4</td><td>q_5</td></tr>
<tr><td>p_1</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>p_2</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>p_3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>p_4</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>p_5</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>p_6</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>423243</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>q_1</td><td>q_2</td><td>q_3</td><td>q_4</td><td>q_5</td></tr>
<tr><td>p_1</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>p_2</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>p_3</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>p_4</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>p_5</td><td>1</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>p_6</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

不管由哪一種對應方法，我們皆可證明此兩個問題可以做出完美對應，故含有 $2n$ 個元素的完美極致史考倫型數列的數列個數會與平面 $n \times n$ 棋盤上跛腳皇后的好放法數相同，得証。

接著我們利用這樣的對應關係整理了一些定理：

首先我們可以發現完美極致史考倫型數列的數列個數和平面$n \times n$棋盤上跛腳皇后的好放法數的每一個數據皆為奇數，這個性質我們可以在平面$n \times n$棋盤上用簡單的方法做出證明，而在完美極致史考倫型數列上便很難去證明，因此利用這樣的對應關係我們可證明完美極致史考倫型數列的數列個數為奇數，對這個高等數學研究問題做出了一些突破。

以下為此性質在棋盤上的証明：

我們先證明一個定理，

平面$n \times n$棋盤跛腳皇后定理一：

一個平面$n \times n$棋盤上的好放法，如果我們已棋盤左上角頂點和右下角頂點的連線為對稱軸，將此好放法做對稱之後也是一個好放法。

(pf):一個好放法中的每一個跛腳皇后位置必兩兩不同列、兩兩不同行，做了對稱之後，每一個跛腳皇后位置恰好列行互換，所以後來每一個跛腳皇后的位置還是兩兩不同列、兩兩不同行，不會以左右或上下的攻擊方向互相攻擊。而在右上-左下的對角線攻擊方向，本來的好放法中跛腳皇后不會以對角線方向互相攻擊，經過對稱轉換之後，每一個跛腳皇后原來的位置和後來的位置占的是同一條對角線（右上-左下方向)，則轉換之後跛腳皇后兩兩之間還是不會以右上-左下對角線方向互相攻擊。經由以上分類說明可知經過一個好放法經對稱轉換之後還是一個好放法，得証。

平面$n \times n$棋盤跛腳皇后定理二:

平面$n \times n$棋盤上放跛腳皇后的好放法個數為奇數

(pf):由定理一可知，一個好放法以經過棋盤左上角頂點和右下角頂點連線為對稱軸做對稱轉換之後還是一個好放法。

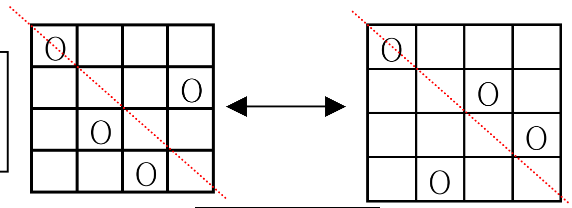
(1)如果一個好放法a經過對稱轉換後變成另一個好放法b，且a和b不會完全相同，則好放法b經過對稱轉換後會變成好放法a，我們可以將a和b兩個好放法配對。

(2)如果一個好放法a經過對稱轉換後和原來的完全相同，則a中所有跛腳皇后的位置必都在對稱軸上，否則便會有一條右上-左下的對角線上有兩個跛腳皇后會互相攻擊，故此種情況的好放法只會有一種。

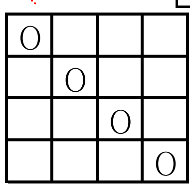
經由上面的討論可知，第一種情形的好放法數有偶數個（兩個好放法配對)，第二種情形的好放法有一個（全部的跛腳皇后都放在左上-右下的對角線上)，則兩種情形的好放法數總和為一奇數，得証。

圖示：(以$n = 4$為例)

第一種情形的兩個好放法分為一組



第二種情形的好放法只有一個



經由定理二的証明和之前所證明的對應關係我們便可證明完美極致史考倫型數列的個數爲一奇數。

平面 $n \times n$ 棋盤跛腳皇后定理三:

每邊格子數爲 $k+1$ 的棋盤，在左上角的格子已放置跛腳皇后的好放法數，恰等於每邊格子數爲 k 的棋盤所有的好放法數

例: n=4 時，在左上角有放跛腳皇后的情況有 3 種好放法

O			
	O		
		O	
			O

O			
		O	
			O
	O		

O			
			O
	O		
		O	

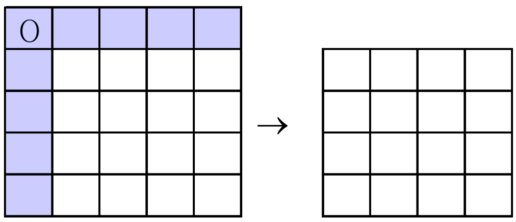
n=3 時,有 3 種好放法

O		
	O	
		O

	O	
		O
O		

		O
O		
	O	

(pf):



因爲在左上方放跛腳皇后後，第一行和第一列皆不能再放皇后，所以只剩每邊格子數爲 k 的棋盤可放皇后，得證。

完美極致史考倫型數列定理三:

$n=k+1$ 時，以 $2k+1$ 爲首項的數列個數，恰等於 $n=k$ 時數列的個數

例: n=3 時有 3 組解

531135 423243 342324

n=4 時，以 7 爲首項的也有 3 組解

75311357 74232437 73423247

(pf)： $n=k+1$ 時，以 $2k+1$ 爲首項，可決定位置 1 和 $2k+2$ 爲 $2k+1$，則待填入的位置爲 2,3,4,...,$2k$,$2k+1$ 可將所有位置向前移一格，即 1,2,3,...,$2k$-1,$2k$ 恰可對應 $n=k$ 時的數列個數。

平面$n \times n$棋盤跛腳皇后定理四:

每邊格子數爲$k+1$的棋盤，在右下角的格子有放跛腳皇后的好放法數，恰等於每邊格子數爲k的棋盤的好放法數

例: n=4 時, 在右下角有放跛腳皇后的情況有 3 種好放法

O			
	O		
		O	
			O

	O		
		O	
O			
			O

		O	
O			
	O		
			O

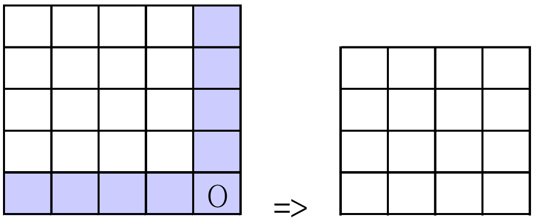
n=3 時,有 3 種好放法

O		
	O	
		O

	O	
		O
O		

		O
O		
	O	

(pf):



因爲在右下方放跛腳皇后後，最後一行和最後一列皆不能再放皇后，所以只剩每邊格子數爲k的棋盤可放皇后，得證。

完美極致史考倫型數列定理四:

$n=k+1$時，以 1 爲末項的數列個數，恰等於$n=k$時，數列的個數

例: n=3 時有 3 組解

531135,423243,342324

n=4 時，以 1 爲末項的也有 3 組解

75311357,64511465,56411546

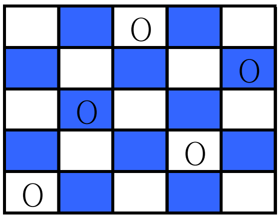
(pf)：

$n=k+1$ 時，以 1 爲末項，可決定位置$k+1$ 和$k+2$ 爲 1，則待填入的位置爲 1,2,3,...,k,$k+3$,...,2k+1,2k+2 可將後半的位置向前移兩格，即 1,2,3,...,2k-1,2k 恰可對應$n=k$時的數列個數，最後再將所對應的數加 2 即爲$n=k+1$ 時所對應的數列

平面 $n \times n$ 棋盤跛腳皇后定理五:

當我們將 $n \times n$ 棋盤以左上角那一格塗為白色其餘依藍白交錯塗色時，好放法中占到藍格的跛腳皇后數必為偶數個

例：



此為 5×5 棋盤上的一種好放法，其中占到藍格的跛腳皇后數共有 2 個

(pf)：我們可將棋盤座標化，從左下角開始數，令第 i 行第 j 列的格子座標為 (i,j)，再設此 n 個跛腳皇后的座標為 $(i_1,j_1)(i_2,j_2)\cdots(i_n,j_n)$，則由跛腳皇后的放置方式可知每一行和每一列上都各只有一個跛腳皇后，故 $(i_1,i_2...,i_n)$ 和 $(j_1,j_2...,j_n)$ 皆為 $1\sim n$ 的一個排列，故 $\sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} j_k = \frac{n(n+1)}{2}$ 且 $\sum_{k=1}^{n}(i_k + j_k) = n(n+1)$。接下來我們分 n 為奇數和偶數兩種情況來討論：

1.當 n 為奇數時，如果有一個跛腳皇后的位置在藍格上則此位置的　　行列和為奇數，因為 $\sum_{k=1}^{n}(i_k + j_k) = n(n+1)$ 為一偶數，代表所有放跛腳皇后的位置的行列和為一偶數，故行列和為奇數的跛腳皇后個數應為偶數個才可以，則放在藍格上的跛腳皇后為偶數個。

2.當 n 為偶數時，如果有一個跛腳皇后的位置在白格上則此位置的　　行列和為奇數，因為 $\sum_{k=1}^{n}(i_k + j_k) = n(n+1)$ 為一偶數，代表所有放跛腳皇后的位置的行列和為一偶數，行列和為奇數的跛腳皇后個數應為偶數個才可以，則放在白格上的跛腳皇后個數為偶數個。又全部有偶數個跛腳皇后，故放在藍格上的跛腳皇后也是偶數個。

由以上兩種情況的討論可知，好放法中占到藍格的跛腳皇后數必為偶數　個，得証。

完美極致史考倫型數列定理五:

任何一個完美極致史考倫型數列，其組成元素的 n 個正整數必包含了偶數個偶數

(pf):有一個完美極致史考倫型數列 $a_1 a_2 ... a_n a_{n+1} ... a_{2n}$，由完美極致史考倫型數列符合的條件可知 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2$，假設組成元素的 n 個正整數包含了奇數 個偶數，我們分 n 為奇數和偶數兩種情況來討論：

（1）當 n 為偶數時，$\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2$ 為一偶數，則 $a_1 \sim a_n$ 中的偶數和為偶數，因為有奇數個偶數，故有奇數個奇數，則 $a_1 \sim a_n$ 中的奇數和為奇數，這樣的話奇數的部分

和偶數的部分和爲一奇數，和$\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2$爲一偶數不合（矛盾）

（2）當n爲奇數時，$\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2$爲一奇數，則$a_1 \sim a_n$中的偶數和爲偶數，因爲有奇數個偶數，故有偶數個奇數，則$a_1 \sim a_n$中的奇數和爲偶數，這樣的話奇數的部分和偶數的部分和爲一偶數，和$\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2$爲一奇數不合（矛盾）

由以上的討論可知，組成元素的n個正整數不可能包含了奇數個偶數，
故組成元素的n個正整數必包含了偶數個偶數，得証。

2. $m \times n$棋盤(n行m列)

我們推廣至$m \times n$棋盤($m, n \in N$)(有n行m列)的情況。我們令平面$m \times n$棋盤的好放法數共有$F(n,m)$個，且我們先固定短邊的長度n（$m > n$），最多可放n個跛腳皇后去做探討：

（1）n=1

m	2	3	4	5	6	7	8	9
$F(1,m)$	2	3	4	5	6	7	8	9

很明顯，可放一個跛腳皇后且可放於任一列上，故$F(1,m) = m$

（2）n=2

m	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(2,m)$	4	9	16	25	36	49	64	81

我們可以用全部(考慮直的和橫的攻擊方向，先不管對角線的攻擊方向)去扣除不合(考慮對角線的攻擊方向)的情況。

全部：第一行有m個位置可放，第二行不能再放和第一行相同的位置，有m-1 個位置可選擇，故全部有m(m-1)個。

不合的：當第一行皇后放的列數剛好比第二行的多一列時，兩個皇后可以右上-左下對角線的方向互相攻擊，此種情況必須扣除，共有m-1 個。

$F(2,m)$ =m(m-1)-(m-1)=$m^2 - 2m + 1$

以m=3 爲例：不合的有以下兩種

	O
O	

	O
O	

（3）$n=3$

m	4	5	6	7	8	9	10	11
$F(3,m)$	12	33	72	135	228	357	528	747

我們可以用全部(考慮直的和橫的攻擊方向，先不管對角線的攻擊方向)去扣除不合(考慮對角線的攻擊方向)的情況。

全部：第一行有 m 個位置可放，第二行不能再放和第一行相同的位置，有 m-1 個位置可選擇，第三行有 m-2 個位置可選擇，故全部有 $m(m-1)(m-2)$個。

不合的：（皇后可以右上-左下對角線方向互相攻擊）【圖示以 $m=4$ 為例】

①. 當第一行皇后放的列數比第二行放的列數多 1 時，有$(m-1)(m-2)$個

	O	
O		

②. 當第二行皇后放的列數比第三行放的列數多一時，有$(m-1)(m-2)$個

		O
	O	

③. 當第一行皇后放的列數比第三行放的列數多二時，有$(m-2)(m-2)$個

		O
O		

④. 當第一行皇后放的列數比第二行放的列數多一，且第二行皇后放的列數剛好比第三行放的列數多一時，有$(m-2)$個。

		O
	O	
O		

我們將①,②,③的狀況都減掉時，④的狀況被減掉了 3 次，要加回兩次。

可得到：

$$F(3,m)=m(m-1)(m-2)-2(m-1)(m-2)-(m-2)(m-2)+2(m-2)$$
$$=(m-2)(m^2-4m+6)$$

(4) n=4

m	5	6	7	8	9	10	11	12
$F(4,m)$	40	139	364	799	1552	2755	4564	7159

我們利用電腦做出的數據猜測 $F(4,m)$ 的通式如下：

$$F(4,m)=m^4-12m^3+62m^2-162m+175$$

由以上的討論我們猜測可用全部扣除不合的方法做出通式，故 $F(n,m)$ 通式爲一 n 次多項式。但是 n=5,6 時無法用數據去導通式（會有係數爲分數的情況），所以當 n 大於 4 之後的狀況應該會更複雜，無法簡單的導出通式，以下爲電腦做出的數據。

(5) n=5

m	6	7	8	9	10	11	12	13
$F(5,m)$	160	661	2024	5119	11296	22505	41416	71539

(6) n=6

m	7	8	9	10	11	12	13	14
$F(6,m)$	744	3567	12528	35815	88488	195651	396448	748743

我們發現可以經由類似平面 $n\times n$ 棋盤的對應方法，將平面 $m\times n$ 棋盤對應到廣義史考倫。

首先我們先定義廣義史考倫(generalized Skolem)：

一個集合 $P=\{p_1,p_2,...,p_{2n}\}$ 表 $2n$ 個位置，另一相異正整數集合 $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$，如果可構造出一個可含有空格的數列，使得數列中的數由 A 中元素各出現兩次所組成，位置恰爲集合 P 所選的位置，且兩次出現的位置插恰爲其本身，則我們稱 (P,A) 爲一廣義史考倫。例：$P=\{1,3,4,6,7,8\}$, $A=\{1,2,4\}$ 可構造出數列 2_24_114，所以此 (P,A) 即爲一廣義史考倫。

我們現在以和平面 $n\times n$ 棋盤對應至完美極致史考倫型數列類似的方法將平面 $m\times n$ 棋盤上跛腳皇后的好放法對應至廣義史考倫。

對應方法：

將平面 $m\times n$ 棋盤（ n 行 m 列，且 $n<m$ ）填上數字，在第 i 列由左至右填上 $m+n-i,m+n-i-1,...,m+1-i$，則每一行上選的數字代表 $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ 中的元素，我們再令 $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ 集合爲一有序集合，其中的順序代表著數列中數字出現的順序，如此便可清楚的構造出唯一數列。再做一個調整後的棋盤，在原棋盤上第 j 行加上 j，則調整後的棋盤爲第 k 列上的數全部變成 $m+n+1-k$，代表數字第二次出現的位置。則用這樣和之前類似的對應方式，我們可將一個平面 $m\times n$ 棋盤上跛腳皇后的好放法對應至一個廣義史考倫（ P,A ），其中 $P=\{1,2,...,n,p_{n+1},p_{n+2},...,p_{2n}\}$（ $p_{n+1},p_{n+2},...,p_{2n}$ 爲從 $(n+1)\sim m$ 中選出的相異 n 個數），$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$，且可再由有序集合 B 構造出一個數列說明（ P,A ）爲一廣義史考倫。

以下以實例做說明：

以5×4的平面棋盤的一種好放法

O			
		O	
			O
	O		

爲例，將之對應至一廣義史考倫。

先將棋盤填上數字

8	7	6	5
7	6	5	4
6	5	4	3
5	4	3	2
4	3	2	1

，再做一個調整後的棋盤

9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7
6	6	6	6
5	5	5	5

。

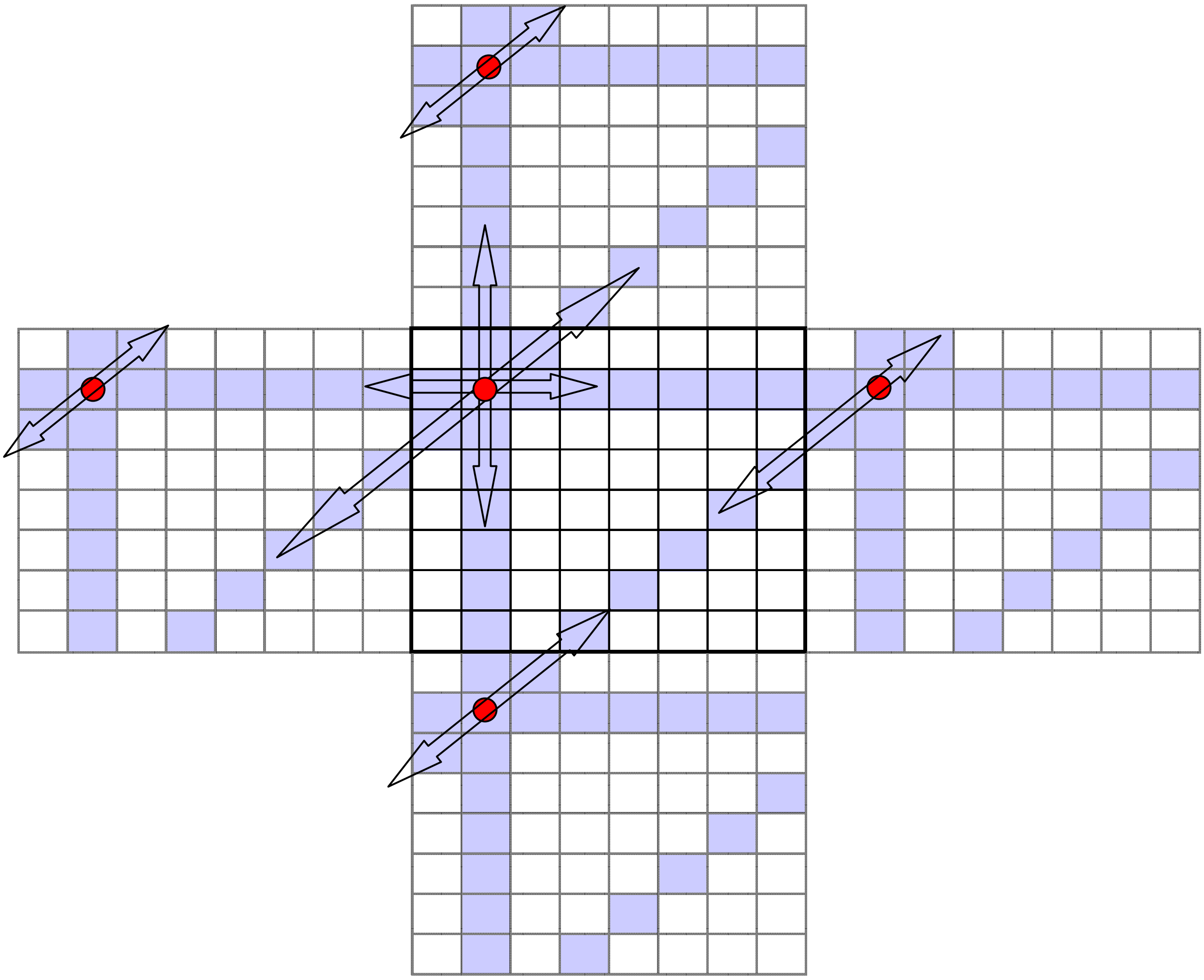
則這種好放法在原棋盤對應到的數字 8,3,5,2 則爲廣義史考倫（P,A）中A集合中的元素，即$A=\{2,3,5,8\},B=\{8,3,5,2\}$。且調整後棋盤上的數字 9,5,8,6 代表數字第二次所出現的位置，即爲 p_1,p_2,p_3,p_4 ，故$P=\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$，並可構造出一可含有空格的數列 835232_58，即說明了此組（P,A）爲一廣義史考倫。

但是因爲棋盤的限制條件和廣義史考倫不完全相同，故此種對應只能由平面$m\times n$棋盤的好放法對應至一個廣義史考倫集合組（P,A），無法由給定的廣義史考倫對應至平面$m\times n$棋盤上的好放法。

經我們查閱參考文獻後發現之前有數學家做了許多有關廣義史考倫的研究和相關定理，期望能由這樣的一個對應關係對廣義史考倫或是平面$m\times n$棋盤的好放法再有所突破。

二、環面棋盤

所謂環面棋盤就是平面棋盤上下左右邊界都互相連接的情況，致使廣義對角線也成爲跛腳皇后可行的走法，每一個跛腳皇后能夠攻擊的區域如下圖所示：



1. $n \times n$ 棋盤

環面 $n \times n$ 棋盤上的列數、行數、和對角線組數皆爲 n，故最多可放跛腳皇后的個數爲 n。令 $f(n)$ 表示 $n \times n$ 環面棋盤上”跛腳皇后”的好放法數，由參考文獻得知數據如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	1	0	3	0	15	0	133	0	2025

由以上資料我們強烈猜測當棋盤邊長 n 爲偶數時，沒有好放法。

例：5×5 棋盤共有 15 種好放法。

				O
O				
	O			
		O		
			O	

				O
	O			
			O	
O				
		O		

				O
		O		
O				
			O	
	O			

O				
	O			
		O		
			O	
				O

O				
		O		
				O
	O			
			O	

O				
			O	
	O			
				O
		O		

	O			
		O		
			O	
				O
O				

	O			
			O	
O				
		O		
				O

	O			
				O
		O		
O				
			O	

		O		
			O	
				O
O				
	O			

		O		
				O
	O			
			O	
O				

		O		
O				
			O	
	O			
				O

			O	
				O
O				
	O			
		O		

			O	
O				
		O		
				O
	O			

			O	
	O			
				O
		O		
O				

我們先來討論 n 爲偶數時的情形，去證明這種情形沒有好放法。

環面 $n\times n$ 棋盤跛腳皇后定理一：

當 n 爲偶數時，環面 $n\times n$ 棋盤跛腳皇后問題沒有好放法

(pf):

3			O	
2	O			
1				O
0		O		
	0	1	2	3

n 是偶數時，可將棋盤列行編號,編成 $0\sim n-1$。如果一個跛腳皇后位在第 i 行第 j 列，則令此跛腳皇后的位置爲 (i, j) 。如上圖爲 n=4 的一種放法，跛腳皇后的位置分別爲（1,0）（3,1）（0,2）（2,3）。

現在每一列，每一行都只能放一個皇后，否則會互相攻擊，故此 n 個跛腳皇后的 i 值和 j 值分別爲 0~n-1 的排列,互相不重複。現在再考慮右上-左下的攻擊向，如果兩個跛腳皇后（a,b）（c,d）可以右上-左下的方向（環面）互相攻擊，會有 c-a≡d-b (mod n)，則 c-d≡a-b (mod n) 。故如果 n 個跛腳皇后不互相攻擊，其 i - j 值也應爲 0~n-1 的排列，設此 n 個跛腳皇后的位置爲(a_i, b_i) ($i=1,2,3,\ldots n$)，故有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \equiv \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \equiv 0+1+2+\ldots+n-1 \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod n$$

而且此時又滿足

$$\frac{n(n-1)}{2} \equiv \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \equiv 0 \pmod n$$

但是當 n 爲偶數時這是不可能的，故當 n 爲偶數時環面跛腳皇后問題無可行的好放法，得証。

因爲 n 爲偶數時環面跛腳皇后問題無可行的好放法，故我們再去探討 n 爲奇數時的情形。n 是奇數時問題看來很複雜，所以我們把這個問題轉化成特殊排列的計數。

我們先定義

完全剩餘系排列：

如果有一長度爲 n 的 $1\sim n$ 的排列 $(a_1, a_2, ..., a_n)$，並且在模 n 意義下作減法，減去排列 $(1,2,\cdots,n)$ 變成 $(a_1-1, a_2-2, ..., a_n-n)$，如果後來的排列在模 n 的意義下（限定剩餘系的範圍在 $1\sim n$）也是一長度爲 n 的 $1\sim n$ 的排列，則稱原來的排列 $(a_1, a_2, ..., a_n)$ 爲一完全剩餘系排列。

例：$n=7$ 時，(7,6,5,4,3,2,1)爲一長度爲7的完全剩餘系排列，因爲 (7-1,6-2,5-3,4-4,3-5,2-6,1-7)=(6,4,2,0,-2,-4,-6)≡(6,4,2,7,5,3,1) (mod7)恰爲 $1\sim 7$ 的一個排列，符合條件。

利用電腦程式，做出完全剩餘系排列的個數，如下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R(n,n)$	1	0	3	0	15	0	133	0	2025

可以發現和環面 $n\times n$ 跛腳皇后的好放法數完全相同。

接著我們去找完全剩餘系排列和環面 $n\times n$ 棋盤跛腳皇后的好放法的對應關係：

考慮下列五種排列

12345
23451
34512
45123
51234

第一列在 mod5 之下分別減去 12345 的差都等於 0，第二列在 mod5 之下分別減去 12345 的差都等於 1，以此類推，第三、四、五列所得的差分別爲 3,4,5。因爲一個完全剩餘系排列由 1,2,3,4,5 這五個數字所組成，且分別減去 1,2,3,4,5 之後還是 1,2,3,4,5。所以在上表中，每一行每一列只能選一個數字，而且每個數字只能選一次。比如說我們可以有如下選法：

1	2	3	4	**5**
2	3	4	5	1
3	**4**	5	1	2
4	5	**1**	2	3
5	1	2	**3**	4

1	2	3	4	5
2	3	**4**	5	1
3	4	5	1	**2**
4	**5**	1	2	3
5	1	2	**3**	4

1	**2**	3	4	5
2	3	4	5	**1**
3	4	**5**	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	**3**	4

由於每行每列只能選定一個數字，而右上-左下方向的廣義對角線也只能選定一個，且左上-右下方向的對角線沒有限制，於是此問題就可以利用這種方法對應到環面跛腳皇后問題。

我們先研究剩餘系排列的性質，試著將兩者之間做出聯繫，間接發現跛腳皇后問題的性質。

透過剩餘系排列，容易發現長度是偶數時不存在完全剩餘系排列，我們將偶數不存在的情況做了證明：

完全剩餘系排列定理一：不存在長度爲偶數的完全剩餘系排列

(pf)：

假設 $n=2k$ 時,存在 1 組數(A_1, A_2, A_3 ,..., A_{2k})滿足完全剩餘系

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_{2k} \\ -\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2k \\ \hline A_1+2k\,a_1-1 & A_2+2k\,a_2-2 & A_3+2k\,a_3-3 & \cdots & A_{2k}+2k-2k \end{array}$$

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_{2k-1}, a_{2k} \in \{0,1\})$

$A_1+A_2+A_3+\ldots\ldots+A_{2k}=(A_1+2k\,a_1-1)+(A_2+2k\,a_2-2)+(A_3+2k\,a_3-3)+\ldots\ldots+(A_{2k}+2k-2k)$

$\Rightarrow 1+2+3+\ldots\ldots+2k-1=2k\,a_1+2k\,a_2+2k\,a_3+\cdots+2k\,a_{2k-1}=2k\,t \quad (t \in n)$

$\Rightarrow \dfrac{(2k-1)2k}{2}=2k\,t$

$\Rightarrow 2k-1=2t$ (矛盾)

故不存在長度爲偶數的完全剩餘系排列，得証。

接著我們可構造長度爲奇數的完全剩餘系排列，藉以證明存在長度爲奇數的完全剩餘系排列。

構造方法：

當 $n=2k-1$ 時，將這 $2k-1$ 個數字倒寫，即爲 $2k-1, 2k-2, 2k-3, \ldots, 3, 2, 1$，再分別減去 1,2,3,...,$2k$-3,$2k$-2,$2k$-1，如下所示：

$$\begin{array}{ccccccc} 2k-1 & 2k-2 & 2k-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ -\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2k-3 & 2k-2 & 2k-1 \\ \hline 2k-2 & 2k-4 & 2k-6 & \cdots & 5 & 3 & 1 \end{array}$$

而 1,3,5,...,$2k$-3,$2k$-1 和 $2k$-2,$2k$-4,...,4,2 即爲一完全剩餘系排列。

以 12345 爲例

$$\begin{array}{r} 5\ 4\ 3\ 2\ 1 \\ -1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \hline 4\ 2\ 5\ 3\ 1 \end{array}$$

完全剩餘系排列有奇無偶的情形恰可對應環面 $n \times n$ 棋盤跛腳皇后的情況。

環面$n \times n$棋盤跛腳皇后定理二：

一個環面$n \times n$棋盤上的好放法，如果我們以棋盤左上角頂點和右下角頂點的連線為對稱軸，將此好放法做對稱之後也是一個好放法。

(pf):一個好放法中的每一個跛腳皇后位置必兩兩不同列、兩兩不同行，做了對稱之後，每一個跛腳皇后位置恰好列行互換，所以後來每一個跛腳皇后的位置還是兩兩不同列、兩兩不同行，不會以左右或上下的攻擊方向互相攻擊。而在右上-左下的對角線攻擊方向，本來的好放法中跛腳皇后不會以對角線方向互相攻擊，經過對稱轉換之後，每一個跛腳皇后原來的位置和後來的位置在環面觀點下占的是同一條對角線（右上-左下方向），則轉換之後跛腳皇后兩兩之間還是不會以右上-左下對角線方向互相攻擊。經由以上分類說明可知經過一個好放法經對稱轉換之後還是一個好放法，得証。

環面$n \times n$棋盤跛腳皇后定理三:

當n為奇數時，環面$n \times n$棋盤上的好放法數為奇數。

(pf):由定理二可知，一個好放法以經過棋盤左上角頂點和右下角頂點連線為對稱軸做對稱轉換之後還是一個好放法。

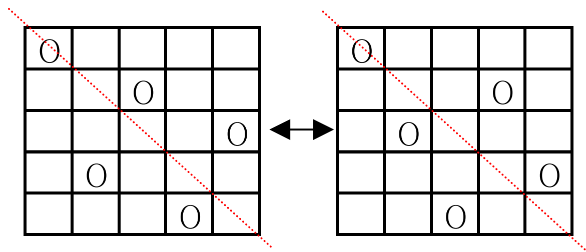
（1）如果一個好放法a經過對稱轉換後變成另一個好放法b，且a和b不會完全相同，則好放法b經過對稱轉換後會變成好放法a，我們可以將a和b兩個好放法配對。

（2）如果一個好放法a經過對稱轉換後和原來的完全相同，則a中所有跛腳皇后的位置必都在對稱軸上，否則便會有一條右上-左下的對角線上有兩個跛腳皇后會互相攻擊，故此種情況的好放法只會有一種。

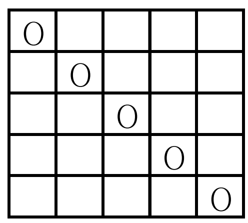
經由上面的討論可知，第一種情形的好放法數有偶數個（兩個好放法配對），第二種情形的好放法有一個（全部的跛腳皇后都放在左上-右下的對角線上），則兩種情形的好放法數總和為一奇數，得証。

圖示：以$n=5$為例

第一種情形的兩個好放法分為一組



第二種情形的好放法只有一個



由這個定理和之前所證明的對應關係，我們間接證明了長度為奇數的完全剩餘系排列個數有奇數個。

完全剩餘系排列定理四：

如果有一排列$(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$為完全剩餘系排列，則把第一個數調至最後一個數的排列$(a_2,a_3,a_4,...,a_n,a_1)$也為一完全剩餘系排列

(pf): 因為$(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$為一完全剩餘系排列，故$\{a_1-1,a_2-2,..,a_n-n\}$的n個元素為一完全剩餘系。而$\{a_2-1,a_3-2,a_4-3,...a_n-n+1,a_1-n\}$的$n$個元素如果有兩個$a_i-(i-1),a_j-(j-1)$在模$n$意義下是相同的($i,j\in\{1,2,...,n\}$)，

則有

$$a_i-(i-1)\equiv a_j-(j-1)\pmod{n}$$

$$a_i-i\equiv a_j-j\pmod{n}\ 導致矛盾$$

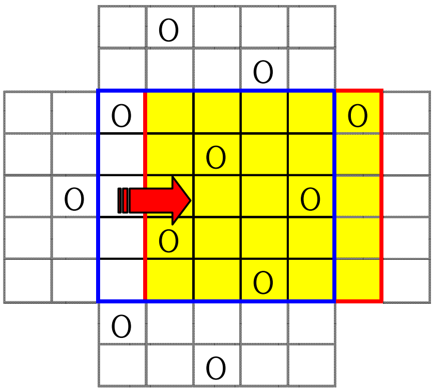
所以$\{a_2-1,a_3-2,a_4-3,...a_n-n+1,a_1-n\}$為一完全剩餘系，故$(a_2,a_3,a_4,...a_n,a_1)$也為一完全剩餘系排列，得證。

環面$n\times n$棋盤跛腳皇后定理四：

有一種符合環面跛腳皇后($n\times n$)的好放法，則在環面的觀點下，我們可將棋盤的外框往右移動一格，則後來外框中棋盤的放法也是一種好放法。

(pf):因為我們在環面觀點下只移動外框，所以移動前後的環面上的跛腳皇后相對位置都是不變的，故在環面觀點下皇后間還是不能以右上-左下的方向互相攻擊。而我們將外框往右移動一格，等於是將棋盤的第一行調至最後一行，所以每一行或是每一列還是都各只有一個皇后，他們之間不能以橫的或縱的方向互相攻擊，故後來外框中棋盤的放法也是一種好放法。

圖示：(以 5×5 為例)



原符合好放法的棋盤為：

O				
		O		
				O
	O			
			O	

棋盤外框再向右移動一格後，得到另外一種好放法：

				O
	O			
			O	
O				
		O		

對應關係：

利用完全剩餘系排列定理二，從 15432 可以導出另一完全剩餘系排列 54321，由環面 $n \times n$ 跛腳皇后定理二則可以如此推導：

		4	5	1	2	3		
		5	1	2	3	4		
4	5	1	2	3	4	5	1	2
5	1	2	3	4	5	1	2	3
1	2			5	1	2	3	4
2	3	4	5	1	2	3	4	5
3	4	5	1	2	3	4	5	1
		1	2	3	4	5		
		2	3	4	5	1		

由原本的

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

可得到

2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4
1	2	3	4	5

則依定理二，我們便可由一個完全剩餘系排列得到另外 n-1 個完全剩餘系排列（也就是可以將所有可行的排列分成 n 個一組）。在環面跛腳皇后問題上也是可由一個好放法得到另外 n-1 個好放法(也就是可以將所有的好放法分成 n 個一組)。

完全剩餘系排列定理五：

形如 $(a, a+k, a+2k, \ldots, a+(n-1)k)$ 的排列(模 n 意義下)爲完全剩餘系排列，其中 $a \in \{1,2,\ldots,n\}, k \in \{2,3,4,\ldots,n-1\}$

(pf):如果 $\{a-1, a+k-2, \ldots, a+(n-1)k-n\}$ 中存在 $a+ik-(i+1), a+jk-(j+1)$ 在模 n 的意義下是相同的（$i, j \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}, i \neq j$），則會有

$$a+ik-(i+1) \equiv a+jk-(j+1) \pmod{n}$$
$$(i-j)(k-1) \equiv 0 \pmod{n}$$

但是 n 不整除(k-1)，所以 $i \equiv j \pmod{n}$，又 $i, j \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$，有 $i = j$ （不合）故 $\{a-1, a+k-2, \ldots, a+(n-1)k-n\}$ 中的元素兩兩在模 n 意義下互不相同，從而形如 $(a, a+k, a+2k, \ldots, a+(n-1)k)$ 的排列爲完全剩餘系排列，得證。

環面 $n\times n$ 棋盤跛腳皇后定理五：

在環面觀點下，每一行上放皇后的位置在縱向上皆與前一行差 k 格的放法爲好放法 $(k\in\{1,2,\ldots,n-2\})$

(pf):不失一般性，我們第一行可以先選第一格去放置皇后。因爲是在環面觀點下，而每一行上放皇后的位置在縱向上皆與前一行差 k 格，故在第 i 行上放的位置爲 a_i，其中 $i\in\{1,2,..,n\}$，且 a_i 爲 $1+(i-1)\ k$ 除以 n 的餘數。如果有兩行放的位置是相同的（也就是在同一列），設爲第 i 行和第 j 行，則有 $a_i=a_j$，即

$$1+(i-1)k\equiv 1+(j-1)k \pmod{n}$$

$$(i-j)k\equiv 0 \pmod{n}$$

n 不整除 k，故有 $i\equiv j \pmod{n}$，但是 $i,j\in\{1,2,..,n\}$，所以 $i=j$（不合）故每一列，每一行上都各只放一個皇后，接著再討論右上-左下的攻擊方向。如果此種放法中存在兩個跛腳皇后放置在同一右上-左下的方向上，設爲第 i 行和第 j 行上的跛腳皇后，則會有

$$j-i\equiv[1+(i-1)k]-[1+(j-1)k] \pmod{n}$$

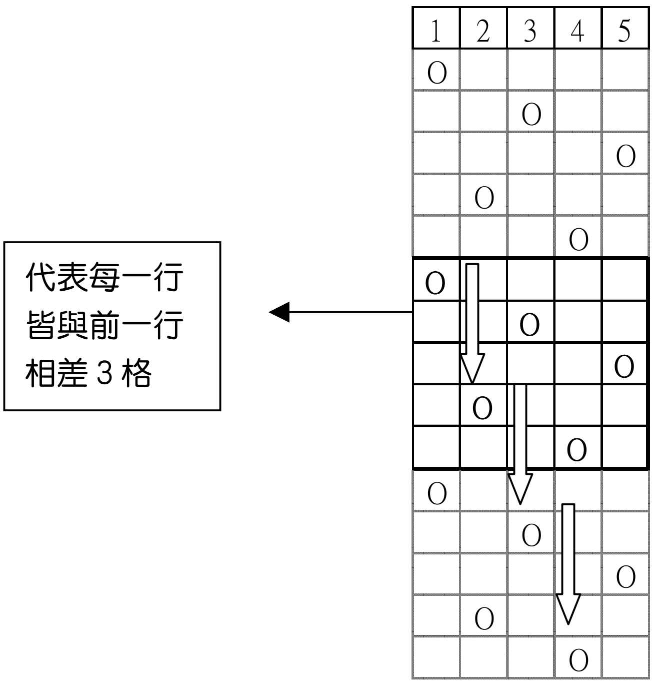
$$(i-j)(k+1)\equiv 0 \pmod{n}$$

n 不整除 $k+1$，故有 $i\equiv j \pmod{n}$，但是 $i,j\in\{1,2,..,n\}$，所以 $i=j$（不合）

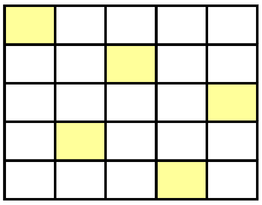
故此種放法中任意兩個皇后在環面的觀點上不會發生右上-左下的方向互相攻擊。

經由上面的討論，我們證明了每一行上放皇后的位置在縱向上皆與前一行差 k 格的放法爲好放法 $(k\in\{1,2,\ldots,n-2\})$。

圖示:



對應關係:

完全剩餘系排列($a, a+k, a+2k, \cdots, a+(n-1)k$)對應至棋盤上每一行跛腳皇后在縱向上的位置皆與前一行差(k-1)格的好放法，其中a對應至棋盤上第一行跛腳皇后放的位置。
如下圖爲元素有 5 個的剩餘系排列對應至 5×5 的棋盤的情況(其中$a=1, k=4$)，
完全剩餘系排列(1,5,4,3,2)與環面跛腳皇后的好放法  相對應。

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

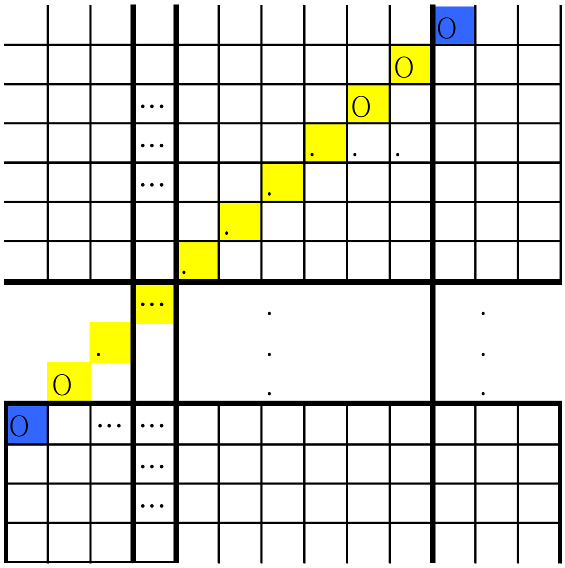
2. $m \times n$ 環面棋盤(n行m列)

環面$m \times n$棋盤跛腳皇后定理一：

在環面$m \times n$棋盤上可放的最多皇后個數爲$\gcd(m, n)$

(pf):因爲在環面觀點上，一條右上-左下的對角線上最多只能放一個跛腳皇后，故我們只需討論一個棋盤上的位置可被分成幾個對角線組，因爲每一組最多只能放一個，故可放的最多皇后個數不超過對角線組數。我們可先從任一個位置開始，在環面的觀點上畫出一條右上-左下方向的對角線，標出可攻擊的所有位置，這樣就可將這些位置連同原來的位置當做一個對角線組，因爲每個位置在環面的觀點上是對稱的，故每一個對角線組中的位置個數應會是相等的，我們只需算出一組中包含幾個位置，再用全部位置個數去除即得對角線組數。

經由作圖可發現一條右上-左下的對角線上的位置會形成一段一段的循環，而一段循環中包含的位置個數恰爲m和n的最小公倍數，圖示證明如下：



我們在環面的觀點下從一個棋盤的左上角開始（藍底）畫出一條右上-左下的對角線並標出可攻擊的位置（黃底），最後會第一次回到另ㄧ個棋盤的左上角位置形成一段循環。設這兩個位置上下差了 a 個棋盤，左右差了 b 個棋盤，一段循環包含的位置數有 x 個，則有

$$x = m\,a = n\,b$$

a 和 b 必互質，否則設$(a,b)=d$ $(d>1)$，則 $m\dfrac{a}{(a,b)} = n\dfrac{b}{(a,b)}$，即在這段循環中存在一個位置已經是某一個棋盤的左上角位置，與假設不合，故$(a,b)=1$。又由 $x=m\,a=n\,b$ 有

$$\frac{x}{(m,n)} = \frac{m}{(m,n)}a = \frac{n}{(m,n)}b$$

$$\because \left(\frac{m}{(m,n)}, \frac{n}{(m,n)}\right) = 1, (a,b) = 1$$

$$\therefore a = \frac{n}{(m,n)}, b = \frac{m}{(m,n)} \quad \text{即 } x = \frac{mn}{(m,n)} = [m,n]$$

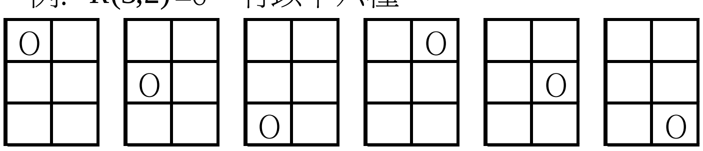
故一段循環包含的位置數有$[m,n]$個，全部可分成$\dfrac{mn}{[m,n]} = (m,n)$個對角線組，

又$(m,n) \le \min\{m,n\}$（對角線組數不比行數或列數多），所以最多只可(m,n)個跛腳皇后，得証。

我們以 $R(n,m)$ 表示在環面 $m \times n$ 棋盤上放跛腳皇后的好放法數(好放法皆是討論放最多跛腳皇后的情況)

（1）由定理一可知當 $\gcd(m,n)=1$ 時，只能放一個跛腳皇后，放在什麼位置都可以，所以 $R(n,m) = m\,n$（m 和 n 互質時)

例: $R(3,2)=6$，有以下六種



當 $\gcd(m,n) \neq 1$ 時，先從 $\gcd(m,n)$ 較小的開始討論

（2） $\gcd(m,n)$=2 時，最多只能放兩個跛腳皇后，兩個對角線組恰爲將棋盤藍白交　　錯塗色之後的藍白兩組，由作圖即可知當我們任意先放一個跛腳皇后在棋盤上時，將可攻擊的位置刪除剩下的位置有 $\frac{1}{2}(mn-m-n)$ 個，一個好放法會被算兩次，故全部的好放法數 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mn(mn-m-n)=\frac{1}{4}(m^2n^2-m^2n-mn^2)$ 個。

所以 $R(n,m)=\frac{1}{4}(m^2n^2-m^2n-mn^2)$ （當 $\gcd(m,n)$=2 時)

例: $n=4$, $m=6$ 時，

先任意放一個位置，則會剩下 $\frac{1}{2}(6\times4-6-4)$ =7 個位置

可得到

$R(4,6)=\frac{1}{4}(6^2\times4^2-6^2\times4-6\times4^2)$ =84

O	X	X	X
X	X		X
X		X	
X	X		X
X		X	
X	X		X

（3） $\gcd(m,n)$=3 時，無法如前面兩種情況一樣直接去做計算，我們可先從 n =3， m =3 k （ k 爲正整數）去做討論：

先將棋盤從左上角開始依序以黃藍綠三色分成三個對角線組(如下例所示),我們可一行一行依序來放跛腳皇后。

①. 當第一行先在黃格處放皇后時，第二行剩下 k 格綠格、 k -1 格藍格可放跛腳皇后。假如第二行在綠格上放跛腳皇后，則第三行會剩下 k 格藍格可放跛腳皇后；假如第二行在藍格上放跛腳皇后，則第三行會剩下 k -2 格綠格可放跛腳皇后。故此種情況共有 $k\times k\times k+k\times(k-1)\times(k-2)=2k^3-3k^2+2k$ 種好放法。

②. 當第一行先在藍格處放皇后時，第二行剩下 k 格黃格、 k -1 格綠格可放跛腳皇后。假如第二行在黃格上放跛腳皇后，則第三行會剩下 k 格綠格可放跛腳皇后；假如第二行在綠格上放跛腳皇后，則第三行會剩下 k -2 格黃格可放跛腳皇后。故此種情況共有 $k\times k\times k+k\times(k-1)\times(k-2)=2k^3-3k^2+2k$ 種好放法。

③. 當第一行先在綠格處放皇后時，第二行剩下 k 格藍格、 k -1 格黃格可放跛腳皇后。假如第二行在藍格上放跛腳皇后，則第三行會剩下 k 格黃格可放跛腳皇后；假如第二行在黃格上放跛腳皇后，則第三行會剩下 k -2 格藍格可放跛腳皇后。故此種情況共有 $k\times k\times k+k\times(k-1)\times(k-2)=2k^3-3k^2+2k$ 種好放法。

由以上討論可知 $R(3,3k)=6k^3-9k^2+6k$

例： $n=3, m=6$ 時

O	X	X
X		X
X	X	
X		
X		X
X	X	

左圖示為第一行先放跛腳皇后在黃格上的情況，可看出放了之後，第二行剩下 2 格綠格和 1 格藍格可放跛腳皇后。以下再分成兩種情況。

①

O	X	X
X	O	X
X	X	
X	X	X
X	X	X
X	X	

第二行放跛腳皇后於綠格，則第三行會剩下 2 格藍格可放跛腳皇后。

②

O	X	X
X	X	X
X	X	X
X	O	X
X	X	X
X	X	X

第二行放跛腳皇后於藍格，則第三行會剩下 0 格綠格可放跛腳皇后。

可得到 R(3,6)=24

其他 $\gcd(m,n)$=3 的狀況不能像這樣一行一行的來放置，故我們改成依照顏色順序來討論：

先將棋盤從左上角開始依序以黃藍綠三色分成三個對角線組，先將第一個跛腳皇后放在某一種顏色的格子上，因爲環面上是互相對稱的，故只需討論一種即可。不妨假設第一個跛腳皇后放在黃色的格子上，經由作圖將第一個跛腳皇后可攻擊的格子刪除之後，可發現剩下有 $\frac{1}{3}(mn-m-n)$ 藍格和 $\frac{1}{3}(mn-m-n)$ 綠格，接著藍格和綠格也是對稱的，我們就不妨假設第二個跛腳皇后放在藍色的格子上。

剩下的藍格分成兩種類型：

①. 第二個跛腳皇后放置了之後會使得多了 $\frac{1}{3}(m+n)$ 格綠格不能放置第三個跛腳皇后，此類的藍格經作圖計算之後有 $\left(\frac{m}{3}-1\right)\frac{n}{3}+\left(\frac{n}{3}-1\right)\frac{m}{3}=\frac{2mn}{9}-\frac{m}{3}-\frac{n}{3}$ 個

②. 第二個跛腳皇后放置了之後會使得多了 $\frac{1}{3}(m+n)-2$ 格綠格不能放置第三個跛腳皇后，此類的藍格經作圖計算之後有 $\frac{m}{3}\cdot\frac{n}{3}=\frac{mn}{9}$ 個

故經由以上的討論可計算出第一個跛腳皇后放黃格的好放法數：

$$\frac{mn}{3}\cdot 2\left[\left(\frac{2mn}{9}-\frac{m}{3}-\frac{n}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}(mn-m-n)-\frac{1}{3}(m+n)\right)+\frac{mn}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}(mn-m-n)-\frac{1}{3}(m+n)+2\right)\right]$$

$$=\frac{2}{27}\left(m^3n^3-3m^3n^2-3m^2n^3+6m^2n^2+2m^3n+2mn^3\right)$$

總放法數爲(最後因爲一種好放法會被重複算 3!=6 次所以乘上 $\frac{1}{6}$)

$$\frac{2}{27}\left(m^3n^3-3m^3n^2-3m^2n^3+6m^2n^2+2m^3n+2mn^3\right)\cdot 3\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{27}\left(m^3n^3-3m^3n^2-3m^2n^3+6m^2n^2+2m^3n+2mn^3\right)$$

R(n , m)= $\frac{1}{27}\left(m^3n^3-3m^3n^2-3m^2n^3+6m^2n^2+2m^3n+2mn^3\right)$ (當 $\gcd(m,n)$=3 時)

(當 n 用 3、 m 用 $3k$ 代入上述公式時，也可得到之前所導的公式： $R(3,3k)=6k^3-9k^2+6k$ ，故可將其併入此公式。)

例： $n=6, m=9$ 時

X		X	X		
X	X	O	X	X	X
	X	X		X	
X		X	X		
		X			X
	X	X		X	
X		X	X		
		X			X
	X	X		X	

1. 先隨意放置一個跛腳皇后於黃格中，則會分別剩下 $\frac{1}{3}(6\cdot 9-6-9)=13$ 格藍格和綠格

X		X	X		
X	X	O	X	X	X
	X	X		X	a
X		X	X		
a		X	a		X
	X	X		X	a
X		X	X		
a		X	a		X
	X	X		X	a

2. 剩下的藍格分成兩種類型：

①第二個跛腳皇后放置了之後會使得多了 $\frac{1}{3}(6+9)=5$ 格綠格不能放置第三個跛腳皇后，此類的藍格有 $\left(\frac{6}{3}-1\right)\frac{9}{3}+\left(\frac{9}{3}-1\right)\frac{6}{3}=7$ 格（以 a 代表）

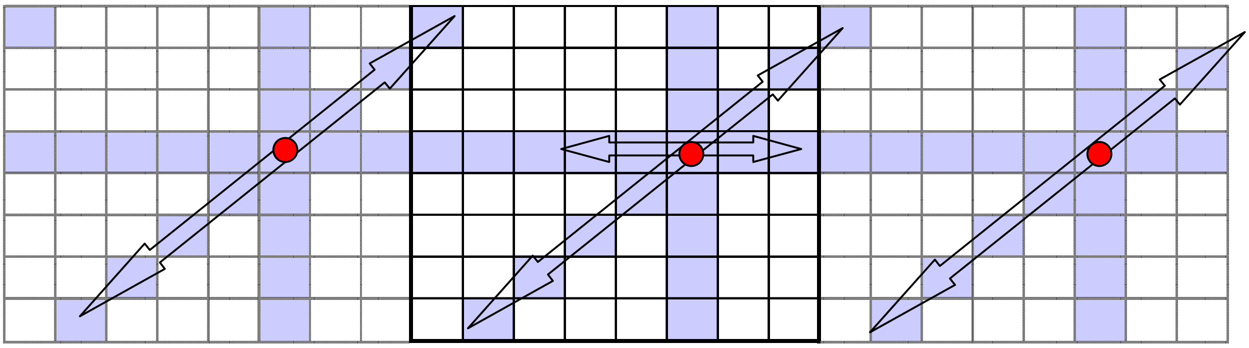
X	b	X	X	b	
X	X	O	X	X	X
	X	X		X	
X	b	X	X	b	
		X			X
	X	X		X	
X	b	X	X	b	
		X			X
	X	X		X	

②第二個跛腳皇后放置了之後會多了$\frac{1}{3}(6+9)-2=3$格綠格不能放置第三個跛腳皇后，此類的藍格有$\frac{6}{3}\cdot\frac{9}{3}=6$格（以$b$代表）

可得到 R(6,9)=2088

三、柱面棋盤

柱面棋盤是指將棋盤的左右(或上下)兩邊視爲同一條邊。皇后因此能無視左右(或上下)邊界攻擊，如下圖所示：



1.n*n 柱面棋盤

定理：柱面$n\times n$棋盤跛腳皇后問題和環面$n\times n$棋盤跛腳皇后問題等價

(pf):

	1	2	•	•	•	n-1	n	n+1	n+2	•	•	•	2n-1	2n
1	x			x				x						
2				x			x							
•				x		x								
•				x	x									
•	x	x	x	O	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
n-1			x	x										
n		x		x										
n+1	x			x										
n+2				x										
•				x										
•				x										
•				x										
2n-1				x										
2n				x										

不失一般性,可假設跛腳皇后放置於(h,k),且$h+k>n$

(1)在左右柱面棋盤上,$(n+1,h+k-n-1)$,$(n+2,h+k-n-2)$,..., $(h+k-2,2)$,$(h+k-1,1)$不能放皇后可對應到$(1,h+k-n-1)$,$(2,h+k-n-2)$,...,$(h+k-n-2,2)$,$(h+k-n-1,1)$不能放皇后

(2)在環面棋盤上,$(n+1,h+k-n-1),(n+2,h+k-n-2),\ldots,$
$(h+k-2,2),(h+k-1,1),(h+k-n-1,n+1),(h+k-n-2,n+2),\ldots,$
$(2,h+k-2),(1,h+k-1)$可對應到$(1,h+k-n-1),(2,h+k-n-2)$
$,\ldots,(h+k-n-2,2),(h+k-n-1,1)$不能放皇后。

由(1),(2)可知柱面$n\times n$棋盤跛腳皇后問題和環面$n\times n$棋盤跛腳皇后問題等價，得証。

以 5 爲例：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1			x		x			x		
2		x			x		x			
3	x				x	x				
4	x	x	x	x	O	x	x	x	x	x
5				x	x					
6			x		x					
7		x			x					
8	x				x					
9					x					
10					x					

假設皇后放置於(5,4)

(1)在左右柱面棋盤上，(6,3),(7,2),(8,1)不能放皇后可對應到(1,3),(2,2),
(3,1)不能放皇后

(2)在環面棋盤上，(6,3),(7,2),(8,1),(3,6),(2,5),(1,4)可對應到(1,3),
(2,2),(3,1)不能放皇后

由(1)、(2)可得知柱面 5×5 棋盤跛腳皇后問題和環面 5×5 棋盤跛腳皇后問題等價，得証。

故柱面$n\times n$的好放法數和環面$n\times n$的好放法數相同,且具有環面$n\times n$棋盤上的所有性質和定理。

2. $m\times n$柱面棋盤(n行m列)

和平面$m\times n$棋盤的討論方法類似，我們先固定其中一邊的長度n，可假設
$m>n$，最多可放置n個跛腳皇后。因爲現在長寬不同，故柱面要分成兩種情況：

(1)左右柱面觀點

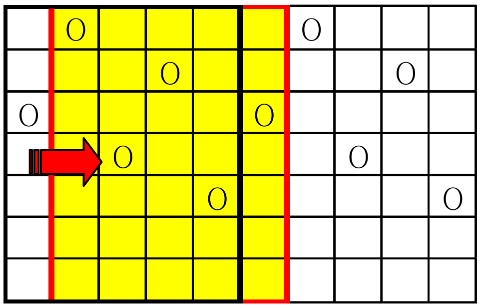
左右柱面$m\times n$跛腳皇后定理一：

有一種符合柱面跛腳皇后($m\times n$)的好放法，則在柱面的觀點下，我們可將棋盤的外框往右移動一格，則後來外框中棋盤的放法也是一種好放法。

(pf):因爲我們在左右柱面觀點下只移動外框，所以移動前後的柱面上的跛腳皇后位置都是不變的，故在左右柱面觀點下任兩個皇后間還是不會發生右上-左下的方向互相攻擊。
而我們將外框往右移動一格，等於是將棋盤的第一行調至最後一行，所以每一行或是每

一列還是都各只有一個皇后，他們之間不會發生橫的或縱的方向互相攻擊，故後來外框中棋盤的放法也是一種好放法。

例： $n=5$ 時



原符合好放法的棋盤為：

	O			
			O	
O				
		O		
				O

棋盤外框再向右移動一格後，得到另外一種好放法：

O				
		O		
				O
	O			
			O	

左右柱面 $m \times n$ 跛腳皇后定理二：

有一種符合左右柱面跛腳皇后 $(k \times n)(n \le k < m)$ 的好放法，則在左右柱面 $(m \times n)$ 的觀點下，將 $(k \times n)$ 的好放法的皇后位置放在 $(m \times n)$ 棋盤的最上層，也會是左右柱面 $(m \times n)$ 的好放法，若再將皇后的位置向下平移若干列，也可得到一種好放法。

(pf):因為我們在左右柱面觀點下將外框向下加長，移動前後的柱面上的棋子位置都是不變的，故在左右柱面觀點下皇后間還是不會發生右上-左下的方向互相攻擊(所影響到的只是向下增加列數，對原 $(k \times n)$ 棋盤沒有影響)，又因為沒改變皇后的相對位置，所以皇后間仍不會發生橫或縱的方向互相攻擊，所以在左右柱面 $(m \times n)$ 的觀點下，也是好放法。

而我們將皇后位置向下移動若干格，等於是將皇后的所影響的範圍下移若干格，所以皇后間的相對位置並沒有改變，故後來外框中棋盤的放法也是一種好放法。

例： $n=3$, $m=4$ 時

原符合好放法的棋盤為：

			O	x	x		x	
		x	x	O	x	x		
	x		x	x	O			
x		x	x	x	x			

在 $n=3$, $m=5$ 時符合好放法的棋盤為：

			O	x	x		x	
		x	x	O	x	x		
	x		x	x	O			
x		x	x	x	x			
	x		x	x	x			x

皇后位置再向下移動一格後，得到另外一種好放法：

			x	x	x	x		x
			O	x	x		x	
		x	x	O	x	x		
	x		x	x	O			
x		x	x	x	x			

左右柱面 $m\times n$ 跛腳皇后定理三：

在已放入部分跛腳皇后的 m x n 左右柱面棋盤中,若在未放皇后的同一行中存在 2 列的位置相差 n 且仍可放跛腳皇后,則在這兩位置放跛腳皇后的好放法數相同

我們將先證明「在已放入” n-2” 個跛腳皇后的 m x n 左右柱面棋盤中，若在未放皇后的同一行中存在 2 列的位置相差 n 且仍可放跛腳皇后,則在這兩位置放跛腳皇后的好放法數相同」，進一步推到 n-3 的情況，最後再推得左右柱面跛腳皇后定理三。

(pf)：第一步：先證明已放入” n-2” 個跛腳皇后

x	x	x	
x	O	x	x
x	x	A	x
x	x	x	x
x	x	x	
x	x	x	x
x	x	x	x
x	x	x	x
x	x	x	
O	x	x	x

x	x	x	
x	O	x	x
x	x	x	x
x	x	x	x
x	x	x	
x	x	x	x
x	x	B	x
x	x	x	x
x	x	x	
O	x	x	x

因爲在$m \times n$的左右柱面棋盤中，在未放皇后的同一行中可放跛腳皇后的兩位置，其列數相差n時(如上圖A,B)，通過A,B之右上-左下對角線所掃過的棋盤格是相同的(如上圖)，又因爲是同一直行，所以直的掃過的格子相同，且因爲橫列所多掃到的格子數亦相同(因爲已確定至少有n-2 個不能放)，所以剩下最後的一行中，可以放跛腳皇后的格子數會相同，所以好放法數會相同。

以 9×4 的棋盤爲例，假設已放入 2 個皇后Q和q，在 A 放皇后的好放法數=在 B 放皇后的好放法數=2

	x			Q	x	x	x				
x			x	x	x	A	x				
		x		x	x	x	x				x
	x			x	x	x				x	
x				x	x		x		x		
				x	x	B	x	x			x
				x	x	x	x			x	
				x	x	x			x		
				x	q	x	x	x			

第二步：再證明已放入” n-3” 個跛腳皇后

x	O	x	x	x
x	x	x	x	
x	x	A	x	x
x	x	x	x	
x	x	x		x
x	x	x	x	x
x	x	x	x	
x	x	x	M	x
O	x	x	x	x

圖(一)

x	O	x	x	x
x	x	x	x	
x	x	x	N	x
x	x	x	x	
x	x	x		x
x	x	x	x	x
x	x	x	x	
x	x	B	x	x
O	x	x	x	x

圖(二)

因爲在$m \times n$的左右柱面棋盤中，在未放皇后的同一行中可放跛腳皇后的兩位置，其列數相差n時(如上圖A,B)，通過A,B之右上-左下對角線所掃過的棋盤格是相同的(如上圖)，又因爲是同一直行，所以直的掃過的格子相同，又橫的所多掃到的格子(如圖(一)(二)的深藍色格子)的列數相差n ，即M , N 所在的列數相差n ，又由第一步得知：**在已放入n-2 跛腳皇后的$m \times n$左右柱面棋盤中,若同一行中存在 2 列的位置相差n且仍可放跛腳皇后,則在這兩位置放跛腳皇后的好放法數相同**。

所以跛腳皇后放在M , N 的好放法數相同，得證。

第三步：同理可推得已放入” n-4” 個跛腳皇后，進一步可推到定理三。

我們以$Q(n,m)$表示在左右柱面$m\times n$棋盤的好放法數，我們先固定 n，並討論$Q(n,m)$的通式：

（1）$n=1$

很明顯的，這m個位置皆可擺放皇后，故$Q(1,m)=m$

（2）$n=2$

當我們在第一行上選個位置放了皇后之後，在左右柱面的觀點下將第二行上不合的位置去除，便可發現第二行上放的皇后位置的列數和第一行的差爲偶數(不含 0)

①. m爲偶數時，設$m=2k$（k爲正整數），不管第一行上放哪一個位置，第二行上皆有k-1 個位置可以放，故$Q(2,2k)=(2k)\times(k-1)=2k^2-2k$

以$m=4$爲例：

		O	x		
	x	x	x		
x		x	O		
		x	x		x

		x	x		
		O	x		
	x	x	x		
x		x	O		

		x	O		
		x	x		
	x	O	x		
x		x	x		

		x	x	x	
		x	O		
		x	x		
	x	O	x		

②. m爲奇數時，設$m=2k+1$（k爲正整數），除了第一行上放第二列和倒數第二列上時第二行有k-1 個位置可放，其他第一行上放哪一個位置，第二行上皆有k個位置可以放，故$Q(2,2k+1)=(2k-1)\times(k)+2\times(k-1)=2k^2+k-2$

以$m=5$爲例：

		O	x		
	x	x	x		
x		x	O		
		x	x		x
		x	x	x	

		O	x		
	x	x	x		
x		x	x		
		x	x		x
		x	O	x	

		x	x		
		O	x		
	x	x	x		
x		x	O		
		x	x		x

		x	O		
		x	x		
	x	O	x		
x		x	x		
		x	x		x

		x	x	x	
		x	x		
		O	x		
	x	x	x		
x		x	O		

		x	x	x	
		x	O		
		x	x		
	x	O	x		
x		x	x		

		x	O		
		x	x		
	x	x	x		
x		x	x		
		O	x		x

		x	x		x
		x	x	x	
		x	O		
		x	x		
	x	O	x		

（3）$n=3$

由左右柱面 $m\times n$ 跛腳皇后定理一可知，如果有一種好放法其第一列第一個位置放有跛腳皇后，則可將此好放法往右平移一行和兩行，推得另外兩種好放法，分別爲第一列的第二個位置有放跛腳皇后和第一列的第三個位置有放跛腳皇后的兩種情況，則可得知第一列上不管放哪個位置皆有相同的好放法數，我們可以只討論一種即可。而又由定理二可知，如果棋盤最後幾列或是頭幾列上沒有放跛腳皇后，則可將這幾列去掉，回到列數較少的情況，故我們可只需討論第一列和最後一列上有放跛腳皇后的情況的好放法數，其他的好放法數可由之前的結果結合定理二來求得。

由以上的說明可知，我們可以只討論棋盤上左上角放有跛腳皇后和最後一列有放跛腳皇后的情形，再結合遞迴觀念和定理二便可求得全部的好放法數。

以下我們分成 3 種情況做討論：

①. $m=3k$

左上角有放跛腳皇后時，將不合的位置刪除之後，可推得第三行,最後一列放跛腳皇后。接著可再推得第二行的,第 $3t$-1 列($1\leq t\leq k$)可放跛腳皇后，所以第一列和最後一列有放皇后的情況共有 $3\times k$ 種。

例： $m=9$

第 2,5,8 列可放皇后，所以共 3×3 種

			O	x	x			
		x	x		x			
	x	x	x	x	x			
x	x		x	x	x			
x			x		x			x
			x	x	x		x	x
			x	x	x	x	x	
			x		x	x		
			x	x	O			

②. $m=3k+1$

左上角有放跛腳皇后時，將不合的位置刪除之後，可推得在最後一列可於第二或第三行放皇后，以下分兩種討論：

<1>如果在第二行,最後一列放皇后，可推得第三行的位置上,第 $3t+1$ 列($1\leq t\leq(k-1)$)可放皇后，所以第一列和最後一列第二行有放皇后的情形共有 $3\times(k-1)$種。

例：$m=10$，在第 2 行中,最後一列放皇后，則在第 3 行中第 4.7 列可放皇后，所以共 3×2 種

			O	x	x			
		x	x	x	x			
	x	x	x	x	x			
x	x		x	x				
x			x	x	x			x
			x	x	x		x	x
			x	x		x	x	
			x	x	x	x		
			x	x	x			
			x	O	x			

<2>如果在第三行,最後一列放皇后，可推得第二行的位置上,第 $3t+1$ 列($1\leq t\leq(k-1)$)可放皇后，所以第一列和最後一列第三行有放皇后的情形共有 $3\times(k-1)$種。

例： $m=10$，在第 3 行,最後一列放皇后，第 4.7 列可放皇后，所以共 3×2 種

			O	x	x			
		x	x	x	x			
	x		x	x	x			
x		x	x		x			
	x		x	x	x			x
x			x	x	x		x	
			x		x	x		x
			x	x	x		x	
			x	x	x	x		
			x	x	O			

綜合以上兩種狀況可知此種情形共有 $6\times(k-1)$種

③. $m=3k+2$

左上角有放跛腳皇后時，將不合的位置刪除之後，最後一列可於第二行上放跛腳皇后。接著可再推得第三行的,第 $3t$ 列($1\leq t\leq k$)可放皇后，所以第一列和最後一列有放皇后的情形共有 $3\times k$ 種。

例： $m=11$

第 3,6,9 列可放皇后，所以共 3×3 種

			O	x	x			
		x	x	x	x			
	x		x	x				
x		x	x	x	x			
	x		x	x	x			x
x			x	x			x	
			x	x	x	x		x
			x	x	x		x	
			x	x		x		
			x	x	x			
		x	x	O	x			

經由這三種討論之後，我們便可以由遞迴關係將通式找出：

（a）$Q(3,3k)$的通式：①的情況中，$3\times 3i$ $(1\leq i\leq k)$的好放法（有$3i$ 個）可在$3\times 3k$ 的棋盤中向下平移$3(k-i)$次，故此種情況的好放法個數共有$\sum_{i=1}^{k}[(3i)\times(3k-3i+1)]$個；②的情況中，$3\times(3i+1)$ $(1\leq i\leq k-1)$的好放法（有$6(i-1)$個）可在$3\times 3k$ 的棋盤中向下

平移$3(k-i)$-1 次，故此種情況的好放法個數共有$\sum_{i=1}^{k-1}[(6i-6)\times(3k-3i)]$個；③的情況中，$3\times(3i+2)$ $(1\le i\le k-1)$的好放法（有$3i$ 個）可在$3\times 3k$ 的棋盤中向下平移$3(k-i)-2$次，故此種情況的好放法個數共有$\sum_{i=1}^{k-1}[(3i)\times(3k-3i-1)]$個；則

$$
\begin{aligned}
Q(3,3k) &= \sum_{i=1}^{k}[(3i)\times(3k-3i+1)]+\sum_{i=1}^{k-1}[(6i-6)\times(3k-3i)]+\sum_{i=1}^{k-1}[(3i)\times(3k-3i-1)] \\
&= 6k^3-9k^2+6k
\end{aligned}
$$

（b）$Q(3,3k+1)$的通式：①的情況中，$3\times 3i$ $(1\le i\le k)$的好放法（有$3i$ 個）可在$3\times 3k$ 的棋盤中向下平移$3(k-i)+1$次，故此種情況的好放法個數共有$\sum_{i=1}^{k}[(3i)\times(3k-3i+2)]$個；②的情況中，$3\times(3i+1)$ $(1\le i\le k)$的好放法（有$6(i-1)$個）可在$3\times 3k$ 的棋盤中向下平移$3(k-i)$次，故此種情況的好放法個數共有$\sum_{i=1}^{k}[(6i-6)\times(3k-3i+1)]$個；③的情況中，$3\times(3i+2)$ $(1\le i\le k-1)$的好放法（有$3i$ 個）可在$3\times 3k$ 的棋盤中向下平移$3(k-i)-1$次，故此種情況的好放法個數共有$\sum_{i=1}^{k-1}[(3i)\times(3k-3i)]$個；則

$$
\begin{aligned}
Q(3,3k+1) &= \sum_{i=1}^{k}[(3i)\times(3k-3i+2)]+\sum_{i=1}^{k}[(6i-6)\times(3k-3i+1)]+\sum_{i=1}^{k-1}[(3i)\times(3k-3i)] \\
&= 6k^3-3k^2+3k
\end{aligned}
$$

（c）$Q(3,3k+2)$的通式：①的情況中，$3\times 3i$ $(1\le i\le k)$的好放法（有$3i$ 個）可在$3\times 3k$ 的棋盤中向下平移$3(k-i)+2$次，故此種情況的好放法個數共有$\sum_{i=1}^{k}[(3i)\times(3k-3i+3)]$個；②的情況中，$3\times(3i+1)$ $(1\le i\le k)$的好放法（有$6(i-1)$個）可在$3\times 3k$ 的棋盤中向下平移$3(k-i)+1$次，故此種情況的好放法個數共有$\sum_{i=1}^{k}[(6i-6)\times(3k-3i+2)]$個；③的情況中，$3\times(3i+2)$ $(1\le i\le k)$的好放法（有$3i$ 個）可在$3\times 3k$ 的棋盤中向下平移$3(k-i)$次，故此種情況的好放法個數共有$\sum_{i=1}^{k}[(3i)\times(3k-3i+1)]$個；則

$$
\begin{aligned}
Q(3,3k+2) &= \sum_{i=1}^{k}[(3i)\times(3k-3i+3)]+\sum_{i=1}^{k}[(6i-6)\times(3k-3i+2)]+\sum_{i=1}^{k}[(3i)\times(3k-3i+1)] \\
&= 6k^3+3k^2+3k
\end{aligned}
$$

(2)上下柱面觀點

上下柱面棋盤 $m \times n$ 跛腳皇后定理一：

有一種符合上下柱面跛腳皇后($m \times n$)的好放法，則在上下柱面的觀點下，將所有皇后的位置往下平移若干列，也是一種好放法

(pf):因為我們在上下柱面觀點下將皇后位置向下平移，移動前後的上下柱面上的跛腳皇后的相對位置都是不變的，故在上下柱面觀點下皇后間還是不會發生右上-左下的方向互相攻擊，且皇后間仍不會發生橫或縱的方向互相攻擊，所以在上下柱面的觀點下，也是好放法。

以m＝6為例：

此為原本的好放法

			x
		x	
	x		
O	x	x	x
x	x	O	x
x	x	x	O
x	O	x	x
x	x	x	x
x	x	x	x

將皇后位置向下平移一列後，得到另一種好放法

			x
		x	
x	x	x	x
O	x	x	x
x	x	O	x
x	x	x	O
x	O	x	x
x	x	x	x

我們以 $q(n,m)$ 表示上下柱面 $m \times n$ 棋盤的好放法數，討論如下：

(1) $n=1$

很明顯的，這 m 個位置皆可擺放跛腳皇后，故 $q(1,m)=m$

(2) $n=2$

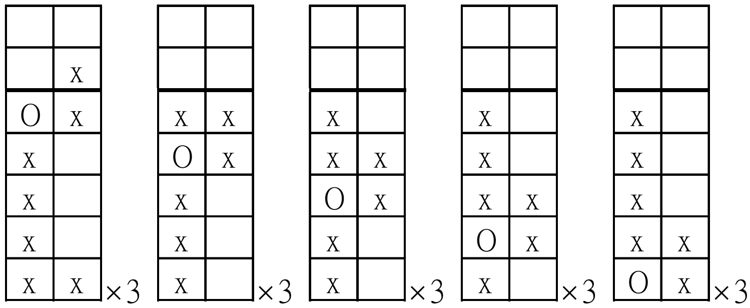
①. m 為偶數時，設 $m=2k$ (k 為正整數)，不管第一行上放哪一個位置，第二行上皆有 $2k$-2 個位置可以放，故 $q(2,2k)=(2k)\times(2k-2)=4k^2-4k$

以 $m=4$ 為例：共 8 種

	x		x												
O	x	O	x	x	x	x	x	x	O	x	x	x	O	x	x
x	O	x	x	O	x	O	x	x	x	x	x	x	x	x	O
x	x	x	O	x	O	x	x	O	x	O	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	O	x	x	x	O	O	x	O	x

②. 爲奇數時，設 $m=2k+1$（k 爲正整數），不管第一行上放哪一個位置，第二行上皆有 $2k-1$ 個位置可以放，故 $q(2,2k)=(2k+1)(2k-1)=4k^2-1$

以 $m=5$ 爲例：共 15 種



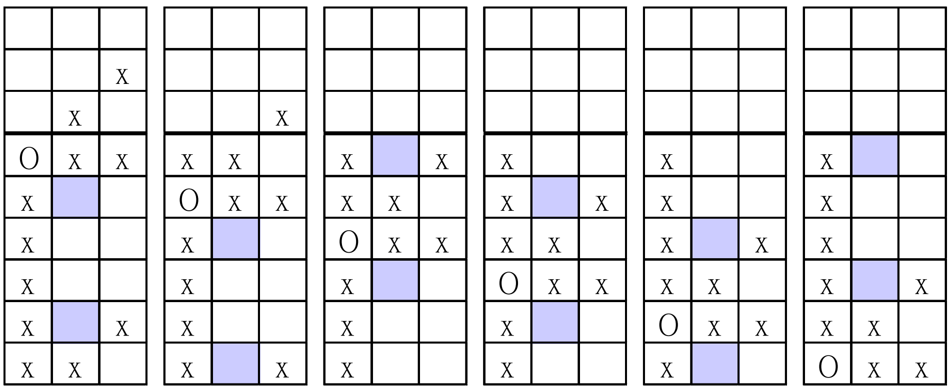
綜合①②，可將 k 用 m 表示，得 $q(2,m)=m(m-2)$

（3）$n=3$

①. $m=3k$，不管第一行上放哪一個位置，除了第二行可放的位置的其中 2 個格子(在未放入皇后前，格子的右邊或右上方已不能放跛腳皇后)使在第三行有 $3k-3$ 個位置可放，其他第二行可放的位置，皆使第三行上有 $3k-4$ 個位置可以放，故

$q(3,3k)=3k[3k-3+3k-3+(3k-4)(3k-4)]=27k^3-54k^2+30k$

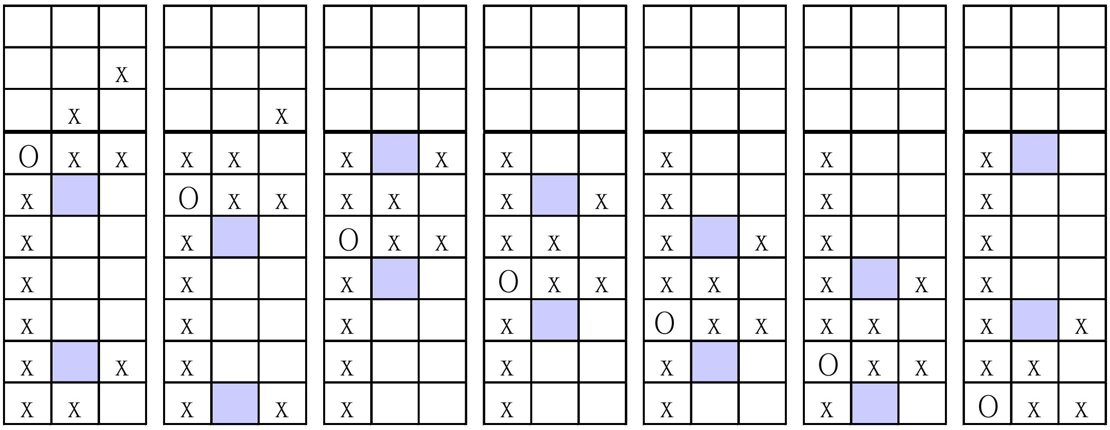
以 $m=6$ 爲例：共 60 種



②. $m=3k+1$，不管第一行上放哪一個位置，除了第二行可放的位置的其中 2 個格子(在未放入皇后前，格子的右邊或右上方已不能放跛腳皇后)在第三行有 $3k-2$ 個位置可放，其他第二行可放的位置，在第三行上皆有 $3k-3$ 個位置可以放，故

$q(3,3k+1)=(3k+1)[3k-2+3k-2+(3k-3)(3k-3)]=27k^3-27k^2+3k+5$

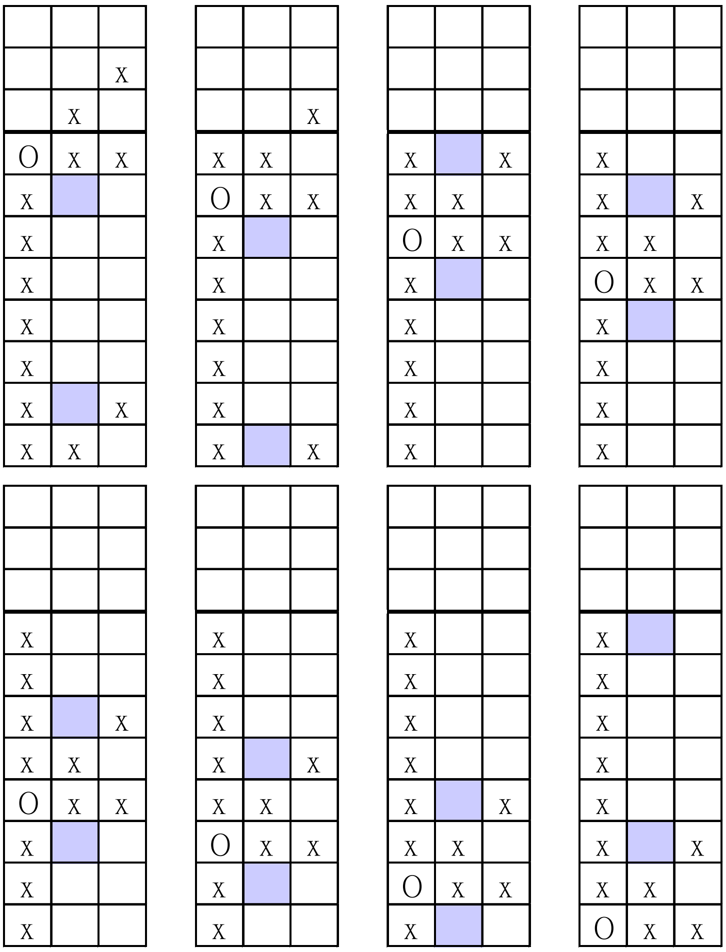
以 $m=7$ 爲例：共 119 種



③. $m=3k+2$，不管第一行上放哪一個位置，除了第二行可放的位置的其中 2 個格子(在未放入皇后前，格子的右邊或右上方已不能放跛腳皇后)在第三行有 $3k-1$ 個位置可放，其他第二行可放的位置，在第三行上皆有 $3k-2$ 個位置可以放，故

$$q(3,3k+2)=(3k+2)[3k-1+3k-1+(3k-2)(3k-2)]=27k^3-6k+4$$

以 $m=8$ 爲例：共 208 種



綜合①②③，可將 k 用 m 表示，得 $q(3,m)=m(m^2-6m+10)$

肆、研究結果

一、平面棋盤

1. $n \times n$ 棋盤

（1）我們證明了平面 $n \times n$ 棋盤和**完美極致史考倫型數列**(perfect extremal Skolem-type sequence 之間的對應關係，稱之爲**史考倫跛腳皇后大定理**：含有 $2n$ 個元素的完美極致史考倫型數列的數列個數會與平面 $n \times n$ 棋盤上跛腳皇后的好放法數相同。

（2）平面 $n \times n$ 棋盤跛腳皇后定理一：

一個平面 $n \times n$ 棋盤上的好放法，如果我們以棋盤左上角頂點和右下角頂點的連線爲對稱軸，將此好放法做對稱之後也是一個好放法。

（3）平面 $n \times n$ 棋盤跛腳皇后定理二:

平面 $n \times n$ 棋盤上放跛腳皇后的好放法個數爲奇數

由這個定理和之前所證明的對應關係我們便可以證明完美極致史考倫型數列的個數也是奇數，對史考倫型數列相關性質做出了一點結果。

（4）平面 $n \times n$ 棋盤跛腳皇后定理三:

每邊格子數爲 $k+1$ 的棋盤，在左上角的格子有放跛腳皇后的好放法數，恰等於每邊格子數爲 k 的棋盤所有的好放法數。

完美極致史考倫型數列定理三:

$n=k+1$ 時，以 $2k+1$ 爲首項的完美極致史考倫型數列個數，恰等於 $n=k$ 時，完美極致史考倫型數列的個數。

（5）平面 $n \times n$ 棋盤跛腳皇后定理四:

每邊格子數爲 $k+1$ 的棋盤，在右下角的格子有放跛腳皇后的好放法數，恰等於每邊格子數爲 k 的棋盤的好放法數。

完美極致史考倫型數列定理四:

$n=k+1$ 時，以 1 爲末項的完美極致史考倫型數列個數，恰等於 $n=k$ 時，完美極致史考倫型數列的個數。

（6）平面 $n \times n$ 棋盤跛腳皇后定理五:

當我們將 $n \times n$ 棋盤以左上角那一格塗爲白色其餘依藍白交錯塗色時，好放法中占到藍格的跛腳皇后數必爲偶數個。

完美極致史考倫型數列定理五:

任何一個完美極致史考倫型數列，其組成元素的 n 個正整數必包含了偶數個偶數。

2. $m\times n$ 棋盤(n 行 m 列)

我們令平面 $m\times n$ 棋盤的好放法數共有 $F(n,m)$ 個，則我們固定 n 做出一些結果 $(m>n)$：

（1）$F(1,m)=m$

（2）$F(2,m)=m^2-2m+1$

（3）$F(3,m)=(m-2)(m^2-4m+6)$

（4）$F(4,m)=m^4-12m^3+62m^2-162m+175$ (猜測)

我們利用和平面 $n\times n$ 棋盤對應至完美極致史考倫型數列相同的方法將平面 $m\times n$ 棋盤上跛腳皇后的好放法對應至廣義史考倫(generalized Skolem)。

二、環面棋盤

1. $n\times n$ 棋盤

（1）我們證明了環面 $n\times n$ 棋盤和完全剩餘系排列之間的對應關係，說明環面 $n\times n$ 棋盤上的好放法數和長度爲 n 的完全剩餘系排列個數是相同的。

（2）完全剩餘系排列定理一：

不存在長度爲偶數的完全剩餘系排列。

環面 $n\times n$ 棋盤跛腳皇后定理一：

當 n 爲偶數時，環面 $n\times n$ 棋盤跛腳皇后問題沒有好放法。

（3）環面 $n\times n$ 棋盤跛腳皇后定理二：

一個環面 $n\times n$ 棋盤上的好放法，如果我們以棋盤左上角頂點和右下角頂點的連線爲對稱軸，將此好放法做對稱之後也是一個好放法。

（4）環面 $n\times n$ 棋盤跛腳皇后定理三：

當 n 爲奇數時，環面 $n\times n$ 棋盤上的好放法數爲奇數。

由這個定理和之前所證明的對應關係，我們可間接證明了長度爲奇數的完全剩餘系排列個數有奇數個。

（5）完全剩餘系排列定理四：

如果有一排列 $(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$ 爲完全剩餘系排列，則把第一個數調至最後一個數的排列 $(a_2,a_3,a_4,...a_n,a_1)$ 也爲一完全剩餘系排列。

環面 $n\times n$ 棋盤跛腳皇后定理四：

有一種符合環面跛腳皇后($n\times n$)的好放法，則在環面的觀點下，我們可將棋盤的外框往右移動一格，則後來外框中棋盤的放法也是一種好放法。

（6）完全剩餘系排列定理五：

形如($a,a+k,a+2k,...,a+(n-1)k$) 的排列(模 n 意義下)爲完全剩餘系排列，其中 $a\in\{1,2,...,n\},k\in\{2,3,4,...,n-1\}$

環面 $n\times n$ 棋盤跛腳皇后定理五：

在環面觀點下，每一行上放皇后的位置在縱向上皆與前一行差 k 格的放法為好放法 $\left(k\in\{1,2,\dots,n-2\}\right)$

2. $m\times n$ 棋盤(n 行 m 列)

（1）環面 $m\times n$ 棋盤跛腳皇后定理一：

在環面 $m\times n$ 棋盤上可放的最多皇后個數為 $\gcd(m,n)$

我們以 $R(n,m)$ 表示在環面 $m\times n$ 棋盤上放跛腳皇后的好放法數，則有以下結果：

（2）$R(n,m)=m\ n$ (當 m 和 n 互質時)

（3）$R(n,m)=\frac{1}{4}(m^2n^2-m^2n-mn^2)$ (當 $\gcd(m,n)$=2 時)

（4）$R(n,m)=\frac{1}{27}\left(m^3n^3-3m^3n^2-3m^2n^3+6m^2n^2+2m^3n+2mn^3\right)$(當 $\gcd(m,n)$=3 時)

三、柱面棋盤

1. $n\times n$ 棋盤

我們證明柱面 $n\times n$ 棋盤的情況其實和環面 $n\times n$ 棋盤的情況等價，故柱面 $n\times n$ 棋盤的好放法數和環面 $n\times n$ 棋盤的好放法數相同,且具有環面 $n\times n$ 棋盤上的所有性質和定理。

2. $m\times n$ 棋盤(n 行 m 列)

（1）左右柱面棋盤 $(m>n)$

① 左右柱面 $m\times n$ 跛腳皇后定理一：

有一種符合柱面跛腳皇后($m\times n$)的好放法，則在柱面的觀點下，我們可將棋盤的外框往右移動一格，則後來外框中棋盤的放法也是一種好放法。

② 左右柱面 $m\times n$ 跛腳皇后定理二：

有一種符合左右柱面跛腳皇后($k\times n$)($n\le k<m$)的好放法，則在左右柱面($m\times n$)的觀點下，將($k\times n$)的好放法的皇后位置放在($m\times n$)棋盤的最上層，也會是左右柱面($m\times n$)的好放法，若再將皇后的位置向下平移若干列，則後來棋盤中的放法也是一種好放法。

③ 左右柱面 $m\times n$ 跛腳皇后定理三：

在已放入部分跛腳皇后的 m x n 左右柱面棋盤中,若同一行中存在 2 列的位置相差 n 且仍可放跛腳皇后,則在這兩位置放跛腳皇后的好放法數相同。

我們令 $Q(n,m)$ 為左右 $m\times n$ 柱面棋盤的好放法數，則有以下結果：

④ $Q(1,m)=m$

⑤ $Q(2,2k)=2k^2-2k$

$Q(2,2k+1)=2k^2+k-2$（k 為正整數）

⑥ $Q(3,3k)=6k^3-9k^2+6k$

$Q(3,3k+1)=6k^3-3k^2+3k$

$Q(3,3k+2)=6k^3+3k^2+3k$ （ k 為正整數）

(2)上下柱面棋盤$(m>n)$

① 上下柱面棋盤$m\times n$跛腳皇后定理一：

有一種符合上下柱面跛腳皇后($m\times n$)的好放法，則在上下柱面的觀點下，我們可將皇后的位置往下移動一格，則後來外框中棋盤的放法也是一種好放法。

我們令$q(n,m)$為上下$m\times n$柱面棋盤的好放法數，則有以下結果：

② $q(1,m)=m$

③ $q(2,m)=m(m-2)$

④ $q(3,m)=m(m^2-6m+10)$

伍、未來展望

1.在平面$n\times n$棋盤上我們找到了和完美極致史考倫型數列之間的對應關係，由於此種數列在數學界仍找不到通式，可見是一個很複雜的數學問題，目前我們也藉由這個對應關係間接對這個問題做出了一些結果，期望能藉由這個對應關係再多做研究對平面$n\times n$棋盤上的好放法數或是完美極致史考倫型數列有所突破。

2.在平面$m\times n$棋盤上我們可用類似容斥原理的方法將較單純的情況做出通式，但是在n大於等於 5 的情況會變的很複雜，以致於無法經由分開討論做出通式，期望能藉由電腦數據的幫助再有所突破。

3.在環面$n\times n$棋盤上和平面類似都有和另一個看似不相關的問題有巧妙的對應關係，目前只能歸納出一些定理和結果，期望能再對通式部分有所突破。

4.環面$m\times n$棋盤、柱面棋盤都能藉由分類討論做出n值較小時的通式，目前還沒找到較一般可遞推的公式，使得之後的狀況無法輕易的解決，期望能再有所突破。

5.n值較大的情況，我們希望能用一些已證明的對應或方法求得好放法數的上界。

陸、參考資料

1.林佩蓉,剩餘系排列,台北市立第一女子高級中學校內科展作品說明書

2. Gustav Nordh, Perfect Skolem sets, 2005

3.Gustav Nordh. Generalization of Skolem sequences. Master’ s thesis, Department of Mathematics, Link¨opings universitet, Sweden, 2003.

4.潘承洞, 簡明數論, 九章出版社, 2002

評語

本作品討論跛腳皇后”好放法”之個數，作品中亦導入 skolem 序列與跛腳皇后遊戲間對應關係，然而未見此序列之相關性質，如何與”好放法”個入互相結合之相關討論，因此也相對減低本作品之數學內涵，至爲可惜。