臺灣二００八年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱：穿越網格愛上你

學校 / 作者：國立臺南女子高級中學　　何念青
國立臺南女子高級中學　　林奕含

目錄

作者簡介

(右爲林奕含，左爲何念青)

我叫林奕含，現在就讀台南女中數理資優班二年級，從小便對數學有濃厚的興趣，喜歡向各式各樣的題目挑戰，也參加過許多數學競試。除此之外，課餘時間喜歡閱讀課外讀物的我，對文學也頗有研究，常代表班上甚至學校參加作文和演講比賽。

第一次接觸科展是在小學的時候，而在研究這件作品的過程中，除了數學的相關知識外，也在其中得到不少，包括處理事情的方法、學習與人溝通……，真的很高興又有機會來參加這項活動。

我叫何念青，現在就讀台南女中數理資優班二年級，因爲喜歡解出題目那一瞬間的快感而喜歡數學，對物理也頗感興趣。升上高中以後，更是瘋狂的愛上打排球，幾乎每節下課都準時在排球場報到。

我第一次接觸科展也是在小學的時候，而一開始研究這個問題時一直無法突破，感謝夥伴的支持，才有今天小小的結果，這段與”網格”爲伍的時光，肯定會是高中生涯裡，一段難忘的回憶。

中文摘要

在此文中我們研究： 一個 n×4 的長方形網格中，所有從(1, 1)或(1, 4)出發，在不重複且經過每個格子點的情況下，走到(n, 1)結束的所有路徑總數分別爲T_n 、U_n 。

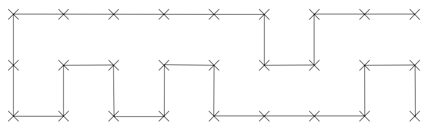
我們先定義：

(1) $T_{h(1)}(n)$ (horizontal)表 n×4 的網格中第一步走水平方向，即包含(1, 1)→(2, 1)的所有路徑之個數；

(2) $T_{v(1)}(n)$ (vertical)表 n×4 的網格中第一步走垂直方向，即包含(1, 1)→(1, 2)的所有路徑之個數。

(3)同理，我們可以定義：$U_{h(1)}(n)$、$U_{v(1)}(n)$、$T_{h(1,2)}(n)$、$T_{v(1,2)}(n)$、$T_{h(1)v(2)}(n)$，…，$T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n)$，$U_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n)$， …。

(4) M_k 表示爲由(k, 1)開始，(k, 3)結束的所有路徑之個數(如右圖)；$M_{h(1)}(k)$ 、($M_{v(1)}(k)$) 爲其中第一步走水平(垂直)方向的所有路徑之個數。



依下列等式：

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_{h(1,\ldots,k)v(k+1)}$$

我們討論了 $T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n)$ 的值, $n \geq 3,\ n \in N,\ k = 0,1,2,\ldots,n-1$, 並得到下列性質：

1. $T_{v(1,2)}(n) = U_{n-1}$ ，$T_{v(1)h(2)}(n) = T_{n-2}$ ，故 $T_{v(1)}(n) = U_{n-1} + T_{n-2}$
   同理，$U_{v(1)}(n) = T_{n-1} + U_{n-2}$
2. $M_{2p+1} = 2^p$ ，$M_{2p} = 0$ ，$M_k = M_{h(1)}(k) + M_{v(1)}(k)$
3. $T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n) = M_{k-1} \times T_{n-(k+2)} + M_{k+1} \times U_{n-(k+1)} + M_k \times U_{n-(k+2)}$
   $U_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n) = M_{k-1} \times U_{n-(k+2)} + M_{k+1} \times T_{n-(k+1)} + M_k \times T_{n-(k+2)} + M_n$
4. 藉由上述的性質，我們可以建立數列$\{T_n\}$及$\{U_n\}$遞迴式：

$$T_n = T_{n-2} + U_{n-1} + \sum_{p=1}^{[\frac{n}{2}]-1} (3 \cdot 2^{p-1}) U_{n-(2p+1)} + \sum_{p=1}^{[\frac{n-3}{2}]} 2^{p-1} T_{n-(2p+2)}$$

$$U_n = U_{n-2} + T_{n-1} + \sum_{p=1}^{[\frac{n}{2}]-1} (3 \cdot 2^{p-1}) T_{n-(2p+1)} + \sum_{p=1}^{[\frac{n-3}{2}]} 2^{p-1} U_{n-(2p+2)} + M_n$$

T_1=0, U_1=1, T_2=1, U_2=0, T_3=0, U_3=4, T_4=8, U_4=0

Abstract

In our research, we study a n×4 rectangular network lattice, of which all the routes are starting from (1, 1) (resp.(1, 4)), and ending at (n, 1) (situations are considered only on the conditions of passing every spot and not being repeated). And we set the sum of all the different routes as T_n (resp.U_n).

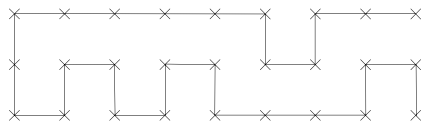
First, we define :

(1) $T_{n(h_1)}$ (horizontal) as the number of the routes of which first path is horizontal;

(2) $T_{n(v_1)}$ (vertical) as the number of the routes of which first path is vertical.

(3) then in the same way, we define $U_{n(h_1)}, U_{n(v_1)}, T_{n(h_1,h_2)}, T_{n(v_1,v_2)}, T_{n(h_1,v_2)}, U_{n(v_1,v_2)}$, $T_{n(h_1,\ldots,h_k,v_{k+1})}$, ……

(4) M_k (picture on the right) as the number of every route starting from (k, 1), ending at (k, 3); $M_{k,n(h_1)}$ ($M_{k,n(v_1)}$)as the number of the routes of which first path is horizontal(vertical).



Based on the following formula:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_{h(1,\ldots,k)v(k+1)}$$

We discuss the number of $T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n)$ $(n \geq 3,\ n \in N,\ k = 0,1,2,\ldots,n-1)$, and we obtain the following properties:

1. $T_{v(1,2)}(n) = U_{n-1}$, $T_{v(1)h(2)}(n) = T_{n-2}$, so $T_{v(1)}(n) = U_{n-1} + T_{n-2}$;
   in the same way, $U_{v(1)}(n) = T_{n-1} + U_{n-2}$
2. $M_{2p+1} = 2^p$, $M_{2p} = 0$, $M_k = M_{h(1)}(k) + M_{v(1)}(k)$
3. $T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n) = M_{k-1} \times T_{n-(k+2)} + M_{k+1} \times U_{n-(k+1)} + M_k \times U_{n-(k+2)}$
   $U_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n) = M_{k-1} \times U_{n-(k+2)} + M_{k+1} \times T_{n-(k+1)} + M_k \times T_{n-(k+2)} + M_n$
4. According to the results mentioned above, we obtain recursive relation formulas of the sequences $\{T_k\}_{k\in N}$ and $\{U_k\}_{k\in N}$:

$$T_n = T_{n-2} + U_{n-1} + \sum_{p=1}^{[\frac{n}{2}]-1} (3\cdot 2^{p-1}) U_{n-(2p+1)} + \sum_{p=1}^{[\frac{n-3}{2}]} 2^{p-1} T_{n-(2p+2)}$$

$$U_n = U_{n-2} + T_{n-1} + \sum_{p=1}^{[\frac{n}{2}]-1} (3\cdot 2^{p-1}) T_{n-(2p+1)} + \sum_{p=1}^{[\frac{n-3}{2}]} 2^{p-1} U_{n-(2p+2)} + M_n$$

T_1=0, U_1=1, T_2=1, U_2=0, T_3=0, U_3=4, T_4=8, U_4=0

壹、研究動機

我們在$[1]$中看到一個關於網格的數學問題：

$S_{n,3}=\{(a,b)\in N^2 \mid 1\le a\le n, 1\le b\le 3\}$，而$L_{n,3}$表示所有由許多鉛直與水平的單位線段連接而成的路徑，即若$l\in L_{n,3}$，則$l=\{\ p_1\to p_2\to p_3\to\cdots\to p_{3n}\ \}$由點$p_1, p_2, p_3,\cdots, p_{3n}\in S_{n,3}$構成。而且滿足：

(1) $p_1, p_2, p_3,\cdots, p_{3n}$互異

(2) p_i及p_{i+1}相距一單位長，且 1≤ i＜3n

(3)每一個$p\in S_{n,3}$都有特定的 i 使得$p_i = p$

試問從(1, 1)走到(n, 1)有多少種(即$T_{n,3}=|L_{n,3}|$)走法?

這引發了我們極大的興趣：如果將集合$S_{n,3}$推廣至$n\times 4$，$n\times 5,\ldots$甚至一般的$n\times k$網格，則$T_{n,k}$之值爲何？

貳、研究目的

在本文的研究中，我們考慮了$T_{n,4}$ ((1, 1)走到(n, 1)的網格路徑)及$U_{n,4}$ ((1, 4)走到(n, 1)的網格路徑)。爲了簡化起見，將$T_{n,4}, U_{n,4}$分別記爲T_n及U_n，並定義：

(1)$T_{h(1)}(n)$ **(horizontal)**表 **n×4** 的網格中第一步走水平方向的所有路徑之個數；

(2)$T_{v(1)}(n)$ **(vertical)**表 **n×4** 的網格中第一步走垂直方向的所有路徑之個數。

(3)$T_{v(1,2)}(n)$、$T_{h(1,2)}(n)$分別表 **n×4** 的網格中第一及二步皆走垂直方向的所有路徑之個數**;**第一及二步皆走水平方向的所有路徑之個數。

(4) 同理，我們可以定義：$U_{h(1)}(n)$**,**$U_{v(1)}(n)$**,**$T_{h(1)v(2)}(n)$**,…,**$T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n)$，$U_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n)$**,…**。

則顯然下列等式成立：

$$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}T_{h(1,\ldots,k)v(k+1)}\ ，U_n=\sum_{k=0}^{n-1}U_{h(1,\ldots,k)v(k+1)}$$

經由逐一討論 $T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}$及$U_{h(1,\ldots k)v(k+1)}$，$n\ge 3,\ n\in N,\ k=0,1,2,\ldots,n-1$的值，我們得以建立數列$\{T_n\}$及$\{U_n\}$的遞迴關係，進而解答$T_n$及$U_n$ 。

參、研究過程與方法

一、$T_{v(1)}(n)$的討論：

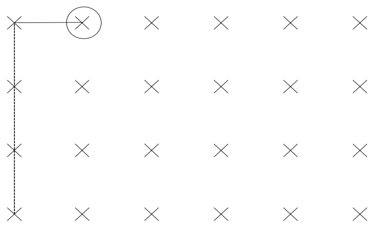
顯然

(1) $$T_{v(1)}(n)=T_{v(1,2)}(n)+T_{v(1)h(2)}(n)$$

1. $T_{v(1,2)}(n)$：

令$n\big(v(1,2)\big)$表示$n\times 4$的網格中包含(1, 1)→(1, 2)→(1, 3)的路徑所成的集合。

若路徑$l\in n\big(v(1,2)\big)$，則其必經過(1, 1)→(1, 2)→(1, 3)→(1, 4)→**(2, 4)**(見圖一)



(圖一)

因此

$l=$(1, 1)→(1, 2)→(1, 3)→(1, 4)→**(2, 4)**→……(n, 1)$\mapsto$ $l'=$(2, 4)→……(n, 1)為一對一映成。

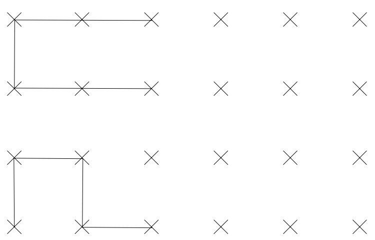
故我們可得

(2) $$T_{v(1,2)}(n)=U_{n-1}$$

2. $T_{v(1)h(2)}(n)$：

令$n\big(v(1)h(2)\big)$表示$n\times 4$的網格中包含(1, 1)→(1, 2)→(2, 2)的路徑所成的集合。

若路徑$l\in n\big(v(1)h(2)\big)$，則其必經過(1, 1)→(1, 2)→(2, 2)→(2, 1)→**(3, 1)**→……→(3, 3)→(2, 3)→(1, 3)→(1, 4)→(2, 4)→(3, 4)(見圖二)



(圖二)

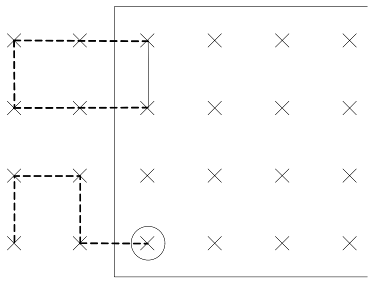
因此

l=(1, 1)→(1, 2)→(2, 2)→(2, 1)→**(3, 1)**→……→(3, 3)→(2, 3)→(1, 3)→(1, 4)→(2, 4)→(3, 4) $\mapsto$ l'=**(3, 1)**→……→(3, 3)→(3, 4)→…….→(n , 1)為一對一映成。

另一方面，以(3, 1)變成新的出發點的路徑必通過(3, 4)，而連結(3, 4)的路徑必為(3, 3)—(3, 4)—(4, 4)。

故

經過(3, 1)→……→(3, 3)→(3, 4)→…….→(n , 1)之所有走法的集合，等同於經過(3, 1)→……→(n , 1)之所有走法的集合，即T_{n-2}。(見圖三)


(圖三)

故可得

(3) 當 $n>3$ $T_{v(1)h(2)}(n)=T_{n-2}$

當 $n\le 3$ $T_{v(1)h(2)}(n)=0$，即本情況不成立

由(1)、(2)及(3)得以下引理：

***引理 1*：(4)** 當 $n>3$，$T_{v(1)}(n)=U_{n-1}+T_{n-2}$

二、$T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n)$，$1\le k\le n-1$的討論：

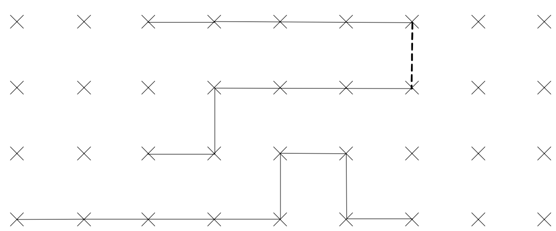
考慮路徑 (1, 1)→(2, 1)→……→(k, 1)→(k+1, 1)→(k+1, 2)→**(*a*, *b*)**→……

則 **(*a*, *b*)**之值可能為 1. **(k+2, 2)** 2. **(k+1, 3)** 3. **(k, 2)**

1. **(*a*, *b*)= (k+2, 2)**時：

令所有包含此種路徑的集合為$n\left(h(1,2,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)\right)$，走法的數目 $T_{h(1,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)}(n)$。

若路徑$l\in n\left(h(1,2,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)\right)$，則其必經過(1, 1)→(2, 1)→……→(k, 1)→(k+1, 1)→(k+1, 2)→(k+2, 2)→(k+2, 1)→**(k+3, 1)→……→(k+3, 3)**→(k+2, 3)→(k+1, 3)→(k, 3) →(k, 2)→**(k-1, 2)→……→(k-1, 4)**→(k, 4)→(k+1, 4)→(k+2, 4)→**(k+3, 4)**(見圖四)


(圖四) (以 k=4 為例)

由於路徑l中

a.(1, 1)→(2, 1)→……→(k, 1)→(k+1, 1)→(k+1, 2)→(k+2, 2)→(k+2, 1)

b.(k+2, 3)→(k+1, 3)→(k, 3)→(k, 2)

c.(k, 4)→(k+1, 4)→(k+2, 4)

三段為固定的路徑，因此，我們考慮以下這兩個網格的組合：

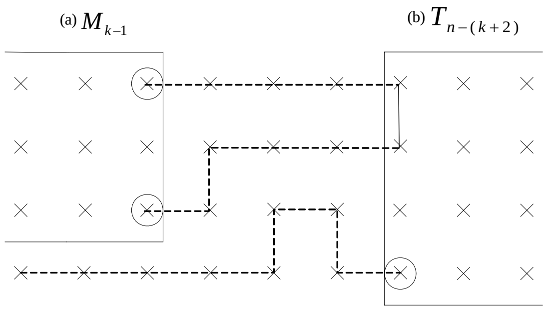
$(a)\,l_a=$ **(k-1, 2)→……→(k-1, 4)**，即為新網格(k-1)×3 中，從(k-1, 2)出發，最後在(k-1, 4)結束的路徑。並令其總數為M_{k-1}。

$(b)\,l_b=$ **(k+3, 1)**→……→(k+3, 3)→(k+3, 4)→……→(n, 1)，由討論一之 2 可推知其總

數爲$T_{n-(k+2)}$。

事實上路徑l與l_a, l_b之間存在一個一對一映成的對應關係，即

$l \quad \mapsto \quad (l_a\ ,\ l_b)$ 爲一對一映成。(見圖五)



(圖五) (以 k=4 爲例)

所以

(5) 當$k < n-3$ $\quad T_{h(1,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)}(n) = M_{k-1} \times T_{n-(k+2)}$

當$k \ge n-3$ $\quad T_{h(1,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)}(n) = 0$

關於M_p, $p \in N$ 的值，我們有以下引理：

引理 2 *若M_p, $p \in N$ 表示 p×3 網格中由(p, 1)開始，(p, 3)結束之路徑總數，則我們可得*

(6) $$M_p = \begin{cases} 2^{(p-1)/2} & \text{當 } p\text{爲奇數} \\ 0 & \text{當 } p\text{爲偶數} \end{cases}$$

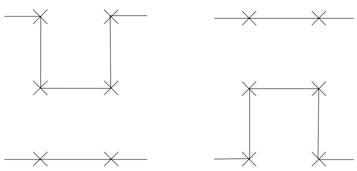
証明：

因爲 p×3 網格中由(p, 1)開始，(p, 3)結束之路徑必由下列(i)(ii)之一所組合而成：

(i)……→(k+1, 1)→(k, 1)→…→(k, 3)→(k, 2)→(k+1, 2)→(k+1, 3)→……

(ii)……→(k+1, 1)→(k+1, 2)→(k, 2)→(k, 1)→…→(k, 3)→(k+1, 3)→……

(見圖六)


(i) (ii) (圖六)

因此$M_p = 2M_{p-2}$, $p > 2$

而顯然$M_1 = 1$, $M_2 = 0$ ，故等式(6)成立。

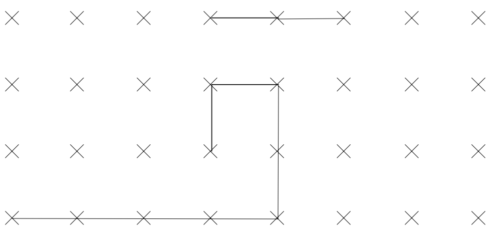
由(5)及引理 **2** 得知，當$k < n-3$

(7) $$T_{h(1,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)}(n) = \begin{cases} 2^{k/2-1} \times T_{n-(k+2)} & \text{當}k\text{是偶數時} \\ 0 & \text{當}k\text{是奇數時} \end{cases}$$

2. **(a, b)= (k+1, 3)**時：

令所有包含此種路徑的集合爲$n\left(h(1,2,\ldots k)v(k+1,k+2)\right)$，走法的數目 $T_{h(1,\ldots k)v(k+1,k+2)}(n)$。

若路徑$l\in n\left(h(1,2,\ldots k)v(k+1,k+2)\right)$，則其必經過(1, 1)→(2, 1)→……→(k+1, 1)→**(k+1, 2)→(k+1, 3)→……→(k+1, 4)**→**(k+2, 4)**(見圖七)



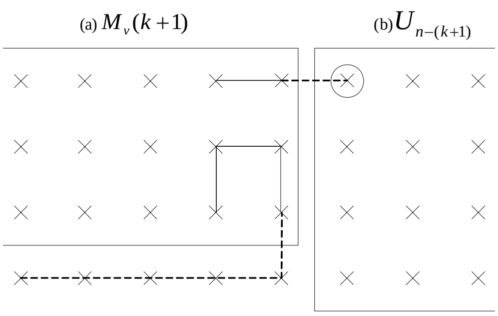
(圖七) (以 k=4 爲例)

其中，因爲路徑l中(1, 1)→(2, 1)→……→(k+1, 1)是固定的，所以考慮底下二種網格路徑：

(a) l_a = **(k+1, 2)→(k+1, 3)→……→(k+1, 4)**，即爲新網格(k+1)×3 中，從(k+1, 2)出發，連接至(k+1, 3)，最後在(k+1, 4)結束的路徑。

(b) l_b = **(k+2, 4)**→……→(n, 1)，爲網格$\left[n-(k+1)\right]\times 4$中，從(k+2, 4)出發，(n, 1)結束的的路徑。顯然此種路徑其總數爲$U_{n-(k+1)}$。

則 $l \mapsto (l_a, l_b)$ 爲一對一映成。(見圖八)



(圖八) (以 k=4 爲例)

若l_a的路徑總數記爲$M_v(k+1)$，則我們可以得到

(8) 當$k<n-1$ $\quad T_{h(1,\ldots k)v(k+1,k+2)}(n)=M_v(k+1)\times U_{n-(k+1)}$

當$k=n-1$ $\quad T_{h(1,\ldots k)v(k+1,k+2)}(n)=0$

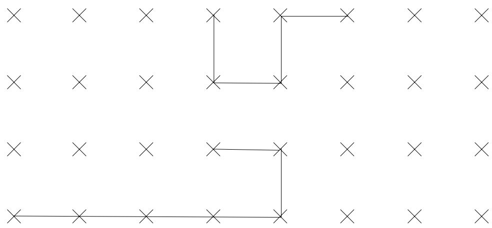
*值得一提的是，路徑l_a恰好是**引理 2** 中所討論的(k+1)×3 網格路徑中，第一步走垂直之路徑。*

3. **(a, b)=(k, 2)**時：

令所有包含此種路徑的集合爲$n\left(h(1,2,\ldots k)v(k+1)hl(k+2)\right)$，走法的數目 $T_{h(1,\ldots k)v(k+1)hl(k+2)}(n)$。

若路徑$l\in n\left(h(1,2,\ldots k)v(k+1)hl(k+2)\right)$，則其所經過的路徑有下列$(A)$、$(B)$兩種可能：

$(A)\, l'$=(1, 1)→(2, 1)→……(k+1, 1)→**(k+1, 2)**→(k, 2)→……→(k, 4)→(k, 3)→(k+1,3)→**(k+1,4)**→**(k+2,4)**(見圖九)



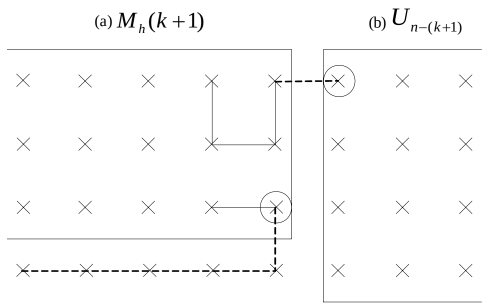
(圖九) (以 k=4 爲例)

關於(A)種的路徑，如同討論二之 2，可以表示成底下二種路徑的組合：

$(a)\, l_a' =$ **(k+1, 2)→**(k, 2)→**……**→(k+1, 3)→**(k+1, 4)**，即爲新網格(k+1)×3 中，從(k+1, 2)出發，連接至(k, 2)，最後在(k+1, 4)結束的路徑。

$(b)\, l_b' =$ **(k+2, 4)**→……→(n, 1)，爲網格$[n-(k+1)]\times 4$ 中，從(k+2, 4)出發，(n, 1)結束的的路徑，顯然此種路徑其總數爲$U_{n-(k+1)}$ 。

則$l' \;\mapsto\; (l_a',\ l_b')$ 爲一對一映射。(見圖十)



(圖十) (以 k=4 爲例)

而若所有如l_a'的路徑數記爲$M_h(k+1)$ ，則我們得到走法(A)總數爲

(9) $M_h(k+1)\times U_{n-(k+1)}$ ，當$k<n-1$

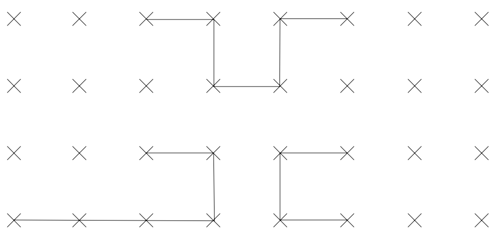
或是 0 ，當$k=n-1$

*值得一提的是，路徑l_a'恰好是**引理 2** 中所討論的(k+1)×3 網格路徑中，第一步走水平之路徑。*

更進一步，由二之 2 中最後對$M_v(k+1)$的討論，我們顯然可以得到

$M_v(k+1)+M_h(k+1)=M_{k+1}$

$(B)\, l''$ =(1, 1)→(2, 1)→……(k, 1)→(k+1, 1)→(k+1, 2)→**(k, 2)→……(k, 4)**→(k+1, 4)→(k+1, 3)→(k+2, 3)→(k+2, 4)→**(k+3, 4)**→……(k+3, 2)→(k+2, 2)→(k+2, 1)→(k+3, 1)(見圖十一)



(圖十一) (以 k=3 爲例)

關於此種網格，我們考慮底下二種網格路徑：

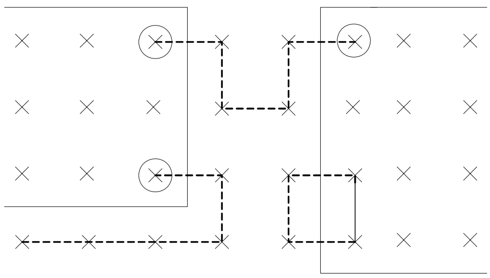
$(a)\, l_a'' =$ **(k, 2)→……→(k, 4)**，即爲新網格 k×3 中，從(k, 2)出發，在(k, 4)結束的路徑，

顯然此種路徑其總數爲引理二提過的 M_k 。

$(b)\, l_b'' =$ **(k+3, 4)**→……→(n, 1)，爲網格 $\left[n-(k+2)\right]\times 4$ 中，從(k+3, 4)出發，(n, 1)結束的的路徑，顯然此種路徑其總數爲 $U_{n-(k+2)}$ 。

則 $l'' \mapsto (l_a'',\ l_b'')$ 爲一對一映射。(見圖十二)

(a) M_k (b) $U_{n-(k+2)}$



(圖十二) (以 k=3 爲例)

故我們得到走法(B)總數爲

(10) $M_k \times U_{n-(k+2)}$ ，當 $k \le n-3$ 時

或爲 0 ，當 $k = n-2,\ n-1$ 時

> ***引理 3***：
>
> 當 $k \le n-3$ 時
>
> **(11)** $T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n) = M_{k-1} \times T_{n-(k+2)} + M_{k+1} \times U_{n-(k+1)} + M_k \times U_{n-(k+2)}$
>
> 而當 $k = n-2$ 或 $n-1$ 時
>
> (11') $T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n) = \begin{cases} M_{n-1} \times U_1 & \text{當 } k = n-2 \text{時} \\ 0 & \text{當 } k = n-1 \text{時} \end{cases}$

証明：

由(5)、(8)、(9)及(10)，我們可得

當 $k = n-2$ 或 $n-1$ 時

$T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n)$

$= \begin{cases} M_{n-1} \times U_1 & \text{當 } k = n-2 \text{時} \\ 0 & \text{當 } k = n-1 \text{時} \end{cases}$

而當 $k \le n-3$ 時

$T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n)$

$= T_{h(1,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)}(n) + T_{h(1,\ldots k)v(k+1,k+2)}(n) + T_{h(1,\ldots k)v(k+1)hl(k+2)}(n)$

$= M_{k-1} \times T_{n-(k+2)} + M_v(k+1) \times U_{n-(k+1)} + M_h(k+1) \times U_{n-(k+1)} + M_k \times U_{n-(k+2)}$

由 $M_v(k+1)$ 及 $M_h(k+1)$ 的定義，$M_v(k+1) + M_h(k+1) = M_{k+1}$

故

$T_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n) = M_{k-1} \times T_{n-(k+2)} + M_{k+1} \times U_{n-(k+1)} + M_k \times U_{n-(k+2)}$

再由引理 **2,3** 可得：

當$k \le n-3$時

$$T_{h(1,\dots k)v(k+1)}(n)=\begin{cases} 2^{k/2-1}T_{n-(k+2)}+2^{k/2}U_{n-(k+1)} & \text{當 } k \text{ 爲偶數時} \\ 2^{(k-1)/2}U_{n-(k+2)} & \text{當 } k \text{ 爲奇數時} \end{cases}$$

當$k=n-2$時

$$T_{h(1,\dots k)v(k+1)}(n)=M_{n-1}=2^{n/2-1}$$

當$k=n-1$時

$$T_{h(1,\dots k)v(k+1)}(n)=0$$

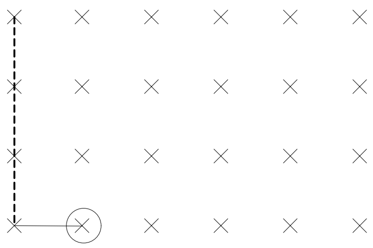
三、$U_{v(1)}(n)$的討論：

類似於討論一的論述，我們可得$U_{v(1)}(n)=U_{v(1,2)}(n)+U_{v(1)h(2)}(n)$

1.$U_{v(1,2)}(n)$：

令$n\left(v(1,2)\right)$表示$n\times 4$的網格中包含(1, 4)→(1, 3)→(1, 2)的路徑所成的集合。

若路徑$l\in n\left(v(1,2)\right)$，則其必經過(1, 4)→(1, 3)→(1, 2)→(1, 1)→**(2, 1)**(見圖十三)



(圖十三)

因此，對照討論一之 1 及圖十三，得

$l \;\mapsto\; l'$=(2, 1)→…(n, 1)爲一對一映成。

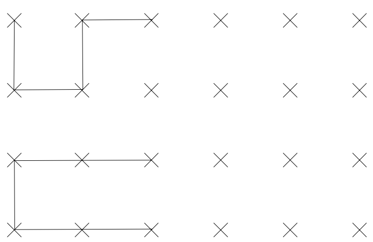
由此可得

(12) $U_{v(1,2)}$(n)=T_{n-1}

2.$U_{v(1)h(2)}(n)$：

令$n\left(v(1)h(2)\right)$表示$n\times 4$的網格中包含(1, 4)→(1, 3)→(2, 3)的路徑所成的集合。

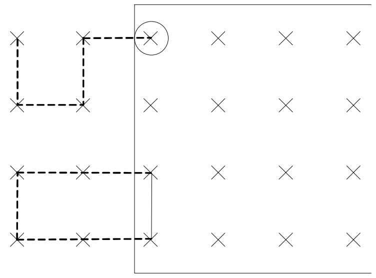
若路徑$l\in n\left(v(1)h(2)\right)$，則其必經過(1, 4)→(1, 3)→(2, 3)→(2, 4)→**(3, 4)**→……→(3, 2)→(2, 2)→(1, 2)→(1, 1)→(2, 1)→(3, 1)(見圖十四)



(圖十四)

因此，對照討論一之 2 與下方圖十五，可得知

$l \mapsto l'=$**(3, 4)**→……→(3, 2)→(3, 1)→……→(n , 1)爲一對一映成。



(圖十五)

又所有路徑l'的總數爲U_{n-2}，所以

(13)　　當 $n \geq 3$　　$U_{v(1)h(2)}(n) = U_{n-2}$

　　　　當 $n < 3$　　$U_{v(1)h(2)}(n) = 0$

由(11)、(12)得以下引理

引理 4：**(14)**　　$U_{v(1)}(n) = T_{n-1} + U_{n-2}$

四、$U_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n)$，$1 \leq k \leq n-1$的討論：

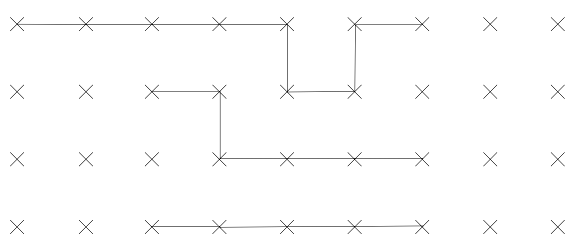
如同討論二，我們考慮路徑(1, 4)→(2, 4)→……→(k, 4)→(k+1, 4)→(k+1, 3)→**(*a, b*)**→……

則 **(*a, b*)**之值可能爲 1. **(k+2, 3)**　2. **(k+1, 2)**　3. **(k, 3)**

1. **(*a, b*)= (k+2, 3)**時：

令所有包含此種路徑的集合爲$n\left(h(1,2,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)\right)$，走法的數目$U_{h(1,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)}(n)$。

若路徑$l \in n\left(h(1,2,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)\right)$，則其必經過(1, 4)→(2, 4)→……→(k, 4)→(k+1, 4)→(k+1, 3)→(k+2, 3)→(k+2, 4)→**(k+3, 4)→……→(k+3, 2)**→(k+2, 2)→(k+1, 2)→(k, 2)→(k, 3)→**(k-1, 3)→……→(k-1, 1)**→(k, 1)→(k+1, 1)→(k+2, 1)→**(k+3, 1)**(見圖十六)

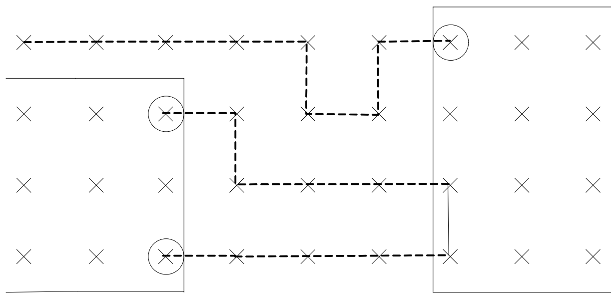


(圖十六) (以 k=4 爲例)

對照討論二之 1 與下方圖十七，可得知l與$l_a=$**(k-1, 3)→……→(k-1, 1)**及$l_b=$**(k+3, 4)→……→(k+3, 2) →(k+3, 1)**→……→(n, 1)之間，存在一個一對一映成的對應關係，即

$l \mapsto (l_a, l_b)$　爲一對一映成。

其中又可以相同的手法，將l_a視爲從(k-1, 3)出發，最後在(k-1, 1)結束的一新網格$(k\text{-}1)\times 3$。並令其總數爲M_{k-1}。



(a) M_{k-1}　　(b) $U_{n-(k+2)}$　　(圖十七) (以 k=4 爲例)

所以

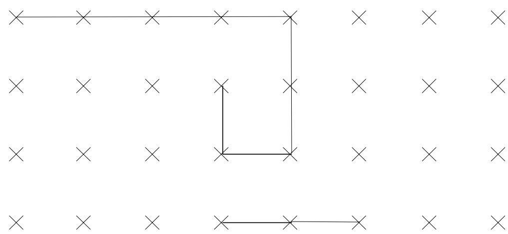
(15)　　當 $k \le n-3$　　$U_{h(1,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)}(n) = M_{k-1} \times U_{n-(k+2)}$

　　　　當 $k > n-3$　　$U_{h(1,\ldots k)v(k+1)hr(k+2)}(n) = 0$

2. **(*a*,*b*)= (k+1, 2)**時：

令所有包含此種路徑的集合爲 $n\big(h(1,2,\ldots k)v(k+1,k+2)\big)$，走法的數目 $U_{h(1,\ldots k)v(k+1,k+2)}(n)$ 。

若路徑 $l \in n\big(h(1,2,\ldots k)v(k+1,k+2)\big)$，則其必經過(1, 4)→(2, 4)→……→(k+1, 4)→**(k+1, 3)**→(k+1, 2)→**……→(k+1, 1)**→**(k+2, 1)**(見圖十八)

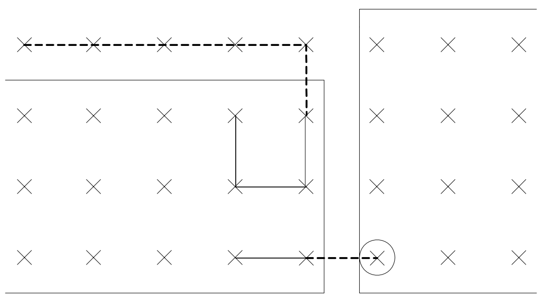


(圖十八) (以 k=4 爲例)

對照討論二之 2 與下方圖十九，可得知 l 與 l_a =**(k+1, 3)**→(k+1, 2)→**……→(k+1, 1)**及 l_b =**(k+2, 1)**→……→(n, 1)之間，存在一個一對一映成的對應關係，即

$l \mapsto (l_a, l_b)$ 爲一對一映成。

其中，將 l_a 的總數記爲 $M_v(k+1)$ ；l_b 爲 $T_{n-(k+1)}$



(a) $M_v(k+1)$　　(b) $T_{n-(k+1)}$　　(圖十九) (以 k=4 爲例)

故可得

(16)　　當 $k \le n-2$　　$U_{h(1,\ldots k)v(k+1)v(k+2)}(n) = M_v(k+1) \times T_{n-(k+1)}$

　　　　當 $k = n-1$　　$U_{h(1,\ldots k)v(k+1)v(k+2)}(n) = M_v(k+1)$

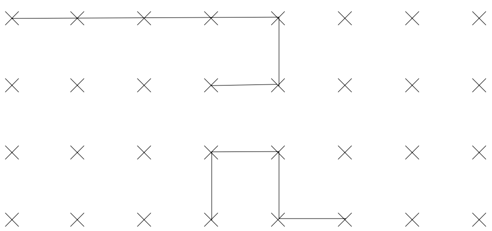
*值得一提的是，路徑l_a恰好是**引理二**中所討論的$(k+1)\times 3$網格路徑中，第一步走垂直之路徑。*

3. **(a, b)=(k, 3)**時：

令所有包含此種路徑的集合為$n\left(h(1,2,\ldots k)v(k+1)hl(k+2)\right)$，走法的數目$U_{h(1,\ldots k)v(k+1)hl(k+2)}(n)$。

若路徑$l \in n\left(h(1,2,\ldots k)v(k+1)hl(k+2)\right)$，則其所經過的路徑有兩種可能：

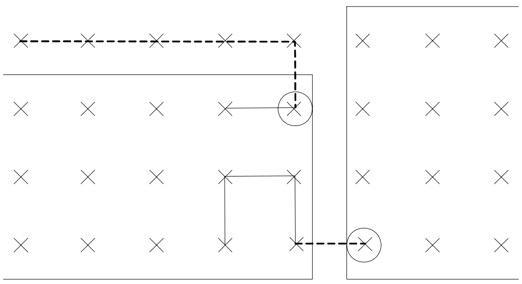
$(A)\, l'$=(1, 4)→(2, 4)→……(k, 4)→(k+1, 4)→**(k+1, 3)**→(k, 3)→……→(k, 1)→(k, 2)→(k+1, 2)→**(k+1, 1)**→**(k+2, 1)**(見圖二十)



(圖二十) (以 k=4 為例)

對照討論二之 3 與下圖二十一，可知l'與$l_a' =$ **(k+1, 3)** →(k, 3)……→(k+1, 2)→**(k+1, 1)** 及$l_b' =$**(k+2, 1)**→……→(n, 1)之間，存在一個一對一映成的對應關係，即

$l' \;\mapsto\; (l_a',\ l_b')$為一對一映成。



(a) $M_h(k+1)$ (b) $T_{n-(k+1)}$ (圖二十一) (以 k=4 為例)

其中，將l_a'的總數記為$M_h(k+1)$；l_b'為$T_{n-(k+1)}$

故(A)走法總數為

(17) $M_h(k+1)\times T_{n-(k+1)}$，當$k \le n-2$

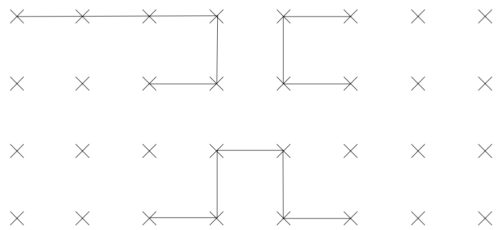
或是 $M_h(k+1)$ ，當$k = n-1$

*值得一提的是，路徑l_a'恰好是**引理二**中所討論的$(k+1)\times 3$網格路徑中，第一步走水平之路徑。*

更進一步，由四之 2 中最後對$M_v(k+1)$的討論，我們顯然可以得到

$M_v(k+1)+M_h(k+1)=M_{k+1}$

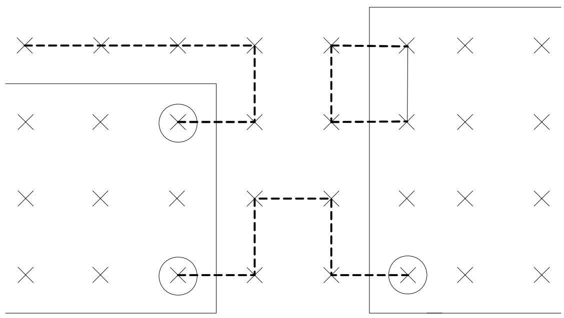
(*B*) l'' =(1, 4)→(2, 4)→……(k+1, 4)→(k+1, 3)→**(k, 3)→……(k, 1)**→(k+1, 1)→(k+1, 2)→(k+2, 2)→(k+2, 1)→**(k+3, 1)**→……(k+3, 3)→(k+2, 3)→(k+2, 4)→(k+3, 4)(見圖二十二)



(圖二十二) (以 k=3 爲例)

對照討論二之3與下圖二十三，可知l''與$l_a'' =$ **(k, 3)→……→(k, 1)**及$l_b'' =$ **(k+3, 1)**→……→(n, 1)之間，存在一個一對一映成的對應關係，即

$l'' \mapsto (l_a'', l_b'')$爲一對一映成。



(a) M_k (b) $T_{n-(k+2)}$ (圖二十三) (以 k=3 爲例)

其中，顯然l_a''總數爲M_k；l_b''爲$T_{n-(k+2)}$

故我們得到走法(*B*)總數爲

(18) $M_k \times T_{n-(k+2)}$，當$k < n-3$

或是 0，當$k \geq n-3$

***引理5*：**

當$k \leq n-3$時

(19) $U_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n) = M_{k-1} \times U_{n-(k+2)} + M_{k+1} \times T_{n-(k+1)} + M_k \times T_{n-(k+2)}$

而當$k = n-2$或$n-1$時

(19') $U_{h(1,\ldots k)v(k+1)}(n) = \begin{cases} 0 & 當\ k = n-2時 \\ M_n & 當\ k = n-1時 \end{cases}$

証明：

由(15)、(16)、(17)及(18)，我們可得

當$k = n-2$或$n-1$時

$$U_{h(1,\dots k)v(k+1)}(n)=\begin{cases}0 & \text{當 } k=n-2\text{時}\\ M_n & \text{當 } k=n-1\text{時}\end{cases}$$

而當$k\le n-3$時

$U_{h(1,\dots k)v(k+1)}(n)$

$= U_{h(1,\dots k)v(k+1)hr(k+2)}(n)+U_{h(1,\dots k)v(k+1,k+2)}(n)+U_{h(1,\dots k)v(k+1)hl(k+2)}(n)$

$= M_{k-1}\times U_{n-(k+2)}+M_v(k+1)\times T_{n-(k+1)}+M_h(k+1)\times T_{n-(k+1)}+M_k\times T_{n-(k+2)}$

由$M_v(k+1)$及$M_h(k+1)$的定義，知$M_v(k+1)+M_h(k+1)=M_{k+1}$

故

$U_{h(1,\dots k)v(k+1)}(n)=M_{k-1}\times U_{n-(k+2)}+M_{k+1}\times T_{n-(k+1)}+M_k\times T_{n-(k+2)}$

再由**引理 2,5** 可得：

當$k\le n-3$時

$$U_{h(1,\dots k)v(k+1)}(n)=\begin{cases}2^{k/2-1}U_{n-(k+2)}+2^{k/2}T_{n-(k+1)} & \text{當 } k \text{ 爲偶數時}\\ 2^{(k-1)/2}T_{n-(k+2)} & \text{當 } k \text{ 爲奇數時}\end{cases}$$

當$k=n-2$時

$$U_{h(1,\dots k)v(k+1)}(n)=0$$

當$k=n-1$時

$$U_{h(1,\dots k)v(k+1)}(n)=M_n=2^{(n-1)/2}$$

肆、研究結果

令$T_n(k)=T_{h(1,2,\ldots k)v(k+1)}(n)$，則我們得到下列結果：

對所有$n\in N,\ n>3$，則下列等式成立：

	T_n	U_n
當$k=0$時	$T_n(0)=T_{n-2}+U_{n-1}$	$U_n(0)=U_{n-2}+T_{n-1}$
當$k\le n-3$時	$T_n(2p)=2^{p-1}T_{n-(2p+2)}+2^pU_{n-(2p+1)}$ $T_n(2p-1)=2^{p-1}U_{n-(2p+1)}$	$U_n(2p)=2^{p-1}U_{n-(2p+2)}+2^pT_{n-(2p+1)}$ $U_n(2p-1)=2^{p-1}T_{n-(2p+1)}$
當$k=n-2$時	$T_n(n-2)=2^{n/2-1}$	$U_n(n-2)=0$
當$k=n-1$時	$T_n(n-1)=0$	$U_n(n-1)=2^{(n-1)/2}$

且$p\in N$，$\dfrac{n-1}{2}\ge p\ge 1$

伍、結論

藉由上述的性質，我們可以建立數列$\{T_k\}_{k\in N}$及$\{U_k\}_{k\in N}$遞迴式：

$$T_n=T_{n-2}+U_{n-1}+\sum_{p=1}^{[\frac{n}{2}]-1}(3\cdot 2^{p-1})U_{n-(2p+1)}+\sum_{p=1}^{[\frac{n-3}{2}]}2^{p-1}T_{n-(2p+2)}$$

$$U_n=U_{n-2}+T_{n-1}+\sum_{p=1}^{[\frac{n}{2}]-1}(3\cdot 2^{p-1})T_{n-(2p+1)}+\sum_{p=1}^{[\frac{n-3}{2}]}2^{p-1}U_{n-(2p+2)}+M_n$$

初始條件爲：

T_1=0, U_1=1, T_2=1, U_2=0, T_3=0, U_3=4, T_4=8, U_4=0

令$V_k=T_k+U_k$，$W_k=T_k-U_k$，k=1,2,3,$\cdots$，則可得下列等式

(19) $$V_n=V_{n-2}+V_{n-1}+\sum_{p=1}^{[\frac{n}{2}]-1}(3\cdot 2^{p-1})V_{n-(2p+1)}+\sum_{p=1}^{[\frac{n-3}{2}]}2^{p-1}V_{n-(2p+2)}+2^{[\frac{n}{2}]-1}(1+(-1)^{n-1})$$

(20) $$W_n=W_{n-2}-W_{n-1}-\sum_{p=1}^{[\frac{n}{2}]-1}(3\cdot 2^{p-1})W_{n-(2p+1)}+\sum_{p=1}^{[\frac{n-3}{2}]}2^{p-1}W_{n-(2p+2)}-2^{[\frac{n}{2}]-1}(1+(-1)^{n-1})$$

其中初始條件爲

(21) V_1=1, W_1=-1, V_2=1, W_2=1, V_3=4, W_3=-4, V_4=8, W_4=8

經由簡單的計算，(19)及(20)可以化簡爲

(22) $V_{k+4}=V_{k+3}+3V_{k+2}+V_{k+1}-V_k$ ，

(23) $W_{k+4}=-W_{k+3}+3W_{k+2}-W_{k+1}-W_k$ ，

其中 k=1,2,3,⋯。

(22)及(23)的特徵方程式分別為

(24) $f(x)\equiv x^4-x^3-3x^2-x+1=0$

(25) $g(x)\equiv x^4+x^3-3x^2+x+1=0$

令$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$及$\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8$分別表示方程式$f(x)=0$及$g(x)=0$的四個相異實根，則

(26) $V_k=\lambda_1\alpha_1^{\ k}+\lambda_2\alpha_2^k+\lambda_3\alpha_3^{\ k}+\lambda_4\alpha_4^{\ k}$

(27) $W_k=\lambda_5\alpha_5^{\ k}+\lambda_6\alpha_6^k+\lambda_7\alpha_7^{\ k}+\lambda_8\alpha_8^{\ k}$

其中常數λ_i，$i=1,2,3,...,8$，滿足

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\alpha_i=1\\ \sum_{i=1}^{4}\lambda_i\alpha_i^{\ 2}=1\\ \sum_{i=1}^{4}\lambda_i\alpha_i^{\ 3}=4\\ \sum_{i=1}^{4}\lambda_i\alpha_i^{\ 4}=8\end{cases}\quad\text{及}\quad\begin{cases}\sum_{i=5}^{8}\lambda_i\alpha_i=-1\\ \sum_{i=5}^{8}\lambda_i\alpha_i^{\ 2}=1\\ \sum_{i=5}^{8}\lambda_i\alpha_i^{\ 3}=-4\\ \sum_{i=5}^{8}\lambda_i\alpha_i^{\ 4}=8\end{cases}$$

因此，我們可得到下列結論：

(28) $T_k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{8}\lambda_j\alpha_j^{\ k}$ ， $U_k=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\alpha_i^{\ k}-\sum_{i=5}^{8}\lambda_i\alpha_i^{\ k}\right\}$ ，$k\in\boldsymbol{N}$

陸、討論

在本研究中是將$n\times3$的長方形網格推廣至$n\times4$，我們期望能推導出$n\times5$、$n\times6$⋯⋯$n\times k$甚至立體的$n\times k\times l$之公式。但當我們進一步推廣到$n\times5$的時候發現，雖然它的走法數可以求得，但必須經過非常繁雜的計算與推演；至於$n\times6$、$n\times7$則幾乎不能以相似的手法推導。所以我們冀望日後能找到更好的想法來解決此問題。

柒、參考文獻

[1] *The* 66t*h* *W*illi*a*m *L*owell *P*utnam *Mathe*matica*l* *C*ompet*it*i*on* *Sa*turd*ay*, *Dece*mb*e*r 3, 2005, *A*5

評語

研究精神可嘉，對本研究相當投入，文中所使用的符號及數式很複雜，作者均能清晰的推導，並建立數列的遞迴關係式，值得鼓勵。