臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱：心跳頻率之函數數學模型

學校／作者：國立臺南女子高級中學　　鄭雅文
國立臺南女子高級中學　　嚴致珺

目錄

作者簡介

鄭雅文

目前就讀國立台南女子高級中學數理資優班二年級，從小就對數理有著特別濃厚的興趣。在求學過程中，參加了許多次的數學競賽等活動，也以高分考進台南女中數理資優班，進而參加了數學科展。

平時我喜歡看書、學習許多新知、玩橋牌來增加腦力。對數學有著狂熱的我，喜歡尋找許多奇特、怪異的題型來解，對於那單純又深奧的數學，總讓我不忍放下。

進入了高中以後，我遇到許多聰明、有活力並且對數理也有著獨特見解的朋友們，總可以互相討論、互相請教。很高興能參加這次的展覽，讓我在未來的路上多了一份愉悅。

作者簡介

嚴致珺

現就讀國立台南女子高級中學數理資優班，今年二年級。從小就對理科特別感興趣，在高中以前，並未得到有關科展的資訊。然而，在基測後順利進入台南女中數理資優班，進而參加數學競賽、科展。關於這次科展內容，則是先聽見教授的演講而感到興趣，再順利找到有關心臟的文章，便開始著手這項具有挑戰性的數學難題。

除了學校課業、科展以外，平時我也喜歡看書、玩音樂、跑步或打排球。對跑步也有著狂熱的我，喜歡在課業、科展遇到難題時，跑個幾圈操場，總能讓我平定心情、整理思緒，有時候還會找出好方法呢！

進入了高中，讓我遇到許多聰明、有活力的朋友們，總可以互相討論、互相請教。也很感謝能夠遇到黃信淳老師並接受指導，也在做科展的過程收穫良多。很高興能參加這次的展覽，讓我在大大增加自己的人生的經歷。

心跳頻率之函數數學模型

中文摘要

本文我們研究下列問題：

1. 何時心律會成穩定的狀態呢？
2. 是否能建立出心律穩定的數學模型？
3. 什麼樣的函數會使得心律趨於穩定？

我們以 x_{mp+i} 表示第 p+1 個訊息傳到第 i 個細胞之前，第 i 個細胞的舒張時間，而且 x_k 和 $x_{k-m}, x_{k-m+1}, \cdots, x_{k-1}$ 的關係為

$$F\left(x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1}\right) = \sum_{j=k-m}^{k-1} \delta_j C\left(x_j\right) - A\left(x_{k-m}\right)$$

為了方便計算我們令 x_k（ $x_{k+1} = f\left(x_k\right)$ ）

$$f\left(x\right) = F\left(x, x, x, \ldots, x\right) = mC\left(x\right) - A\left(x\right)$$

由傳導時間 C（x）及作用時間 A（x）的特性得知，顯然 $f\left(x\right)$ 是遞減函數，為了方便討論，我們考慮 $f\left(x\right)$ 為下列各情形之一：

(1)一次函數：斜率 k 滿足 $-1 < k < 0$

(2)折線函數：其兩邊的斜率分別為 k_1, k_2 時， $0 < k_1 \times k_2 < 1$

(3)平滑曲線函數： $f\left(x\right)$ 在不動點 $x = x^*$ 的切線斜率介於 -1 到 0 之間

因此關於心跳頻率的數列 $\{x_k\}_{k \in N}$ 我們得到以下的結果：

1. 已知 $x = x^*$ 為函數 $f\left(x\right)$ 之不動點，即 $f\left(x^*\right) = x^*$ ，若 $-1 < f'\left(x^*\right) < 0$, 則 $\exists \delta > 0$ ，使得

$\forall x \in \left(x^*, x^* + \delta\right)$ ， $f\left(x\right) > f^{-1}\left(x\right)$

2. 若起始值 $x_1 \in \left(x^*, x^* + \delta\right)$ ， $x_{k+1} = f\left(x_k\right),\ k \in N$, 則 x_n 會收斂到 x^*

本文中的引理 4，要求 $f(x)$ 在 $x = x^*$ 處可微分且 $-1 < f'(x^*) < 0$ ，如此一來自然導致 $\exists \delta > 0$ ，使得， $f(x) > f^{-1}(x),\ \forall x \in \left(x^*, x^* + \delta\right)$ 。

事實上，本文中從下面兩個理由來看，以引理 4 來取代 [1](A4)是比較恰當的：

1. [1](A4)較不自然且難以檢驗
2. [1](A4)在[1]中的引理 3 的假設條件下

   $x_2 < x_4 < x_6 < \cdots < x_{2n} < \cdots < x^* < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < x_5 < x_3 < x_1$ 並不一定會導致 $\lim_{n \to \infty} x_{2n}$ 與

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$ 收斂到同一值，所以引理 3 並不完整；但在我們引理 4 的假設條件下這兩件事是可以克服的。

最後我們有下列的結果

$f(x) \equiv F(x, x, ..., x)$ ，若 $f(x)$ 在 $x = x^*$ 處可微分， $-1 < f'(x^*) < 0$ 且給定初始條件則存在一正數 δ , 使得當 $x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1} \in \left(f\left(x^* + \delta\right), x^* + \delta \right)$ 時，數列 $x_k = F\left(x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1}\right)$ 則此數列會收斂到 x^* 。

The Mathematic model of Heart beats

Abstract

In this paper we study the problems as follows:

When will the rhythm of heart beats approach to a steady state? Can we set up the mathematics model with steady rhythm of heart beats? What kind of function will make the rhythm of the heart beating tend to be stable?

The result of our study is as follows:

If the periodical function of the rhythm of the heart beats is x_k, the sequence $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ satisfies:

$$x_k = F\left(x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1}\right) = \sum_{j=k-m}^{k-1} \delta_j C\left(x_j\right) - A\left(x_{k-m}\right)$$

By CV function $C(x)$ and APD function $A(x)$, $f(x)$ is decreasing function. For easy discusstion, we set $f(x)$ in different cases as follows:

1. linear function: the slope k satisfies $-1 < k < 0$
2. The derivative the function has a jump gap at $x = x^*$: the slopes $k_1 = f'(x^{*+}) \equiv \lim_{x \to x^{*+}} f'(x)$, $k_2 = f'(x^{*-}) \equiv \lim_{x \to x^{*-}} F'(x)$, satisfy $0 < k_1 \times k_2 < 1$.
3. smooth-curve function: The slope at the fixed point $f'\left(x^*\right) \in (-1, 0)$.

Moreover, we have proved the following two results:

1. If the function $f(x)$ has a fixed point, namely x^* ($f\left(x^*\right) = x^*$), and satisfies $-1 < f'\left(x^*\right) < 0$, then there exists a positive number δ, and make $f(x) > f^{-1}(x)$ for all $x \in \left(x^*, x^* + \delta\right)$.
2. If $f(x)$, x^* and δ are defined as above, then we have the sequence is defined by $x_{n+1} \equiv f(x_n),\ n \in N$ will converge to x^* for all the initial value $x_1 \in \left(x^*, x^* + \delta\right)$.

In fact, in our study, Lemma 4 is better than the assumption (A4S) in [1], by the following two reasons：First, the assumption (A4S) in [1] is hard to check and is unnatural.

Second, under the assumption that (A4S) in [1] Lemma 3 is wrong, even if the sequence $\{x_n\}$ satisfies $x_2 < x_4 < x_6 < \cdots < x_{2n} < \cdots < x^* < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < x_5 < x_3 < x_1$, it does not imply that

$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1}$.

But in our study, from the condition $-1 < f'(x^*) < 0$, we obtain Lemma 4, so we can avoid the assumption (A4S) in [1].

Finally, we obtain the following result.

Let $f(x) \equiv F(x, x, ..., x)$. If $f(x)$ is differentiable at $x = x^*$ and $-1 < f'(x^*) < 0$, then there exists appositive number δ, which makes when $x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1} \in \left(f\left(x^* + \delta\right), x^* + \delta \right)$, the sequence $\{x_n\}$ is defined as $x_k = F\left(x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1}\right)$, $\{x_n\}$ is converging to x^* 。

壹、研究動機

在學校所舉辦的數理資優專題講座當中，我們聽到一位大學教授所介紹的數列規律的議題。其中，教授簡單地提到了心臟脈動的數學模型，並淺顯地討論了如何使心律穩定、心臟脈動的規律等等的相關議題。

在聽完這個演講之後，我們便對於這個和人體相當重要的器官－心臟，有著十分濃厚的興趣。我們想要知道更多有關心臟的數學研究、想要找出心臟的數學模型，並更深入的去研究探討有關心臟的問題。

在老師的幫助下，我們找到了有關心臟數學模型的研究議題及文章，發現其中還有我們不知道、不明白，且可以發展的空間，我們便將其作為科展的題目，來找出能否成功形成穩定的條件。

我們存著許多的疑問：何時心律會成穩定的狀態呢？是否能建立出心律穩定的數學模型？該帶入什麼樣的函數才會使得心律趨於穩定？我們測試帶入不同函數後產生的結果，討論各種不同情況，希望能建立出使心律穩定之模型的條件，進而使函數帶入後找出是否能形成穩定的狀態。雖然我們僅是高中生，但希望這能在未來的醫學及數學領域裡提供一些有意義的研究！

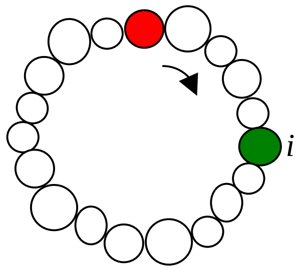
貳、研究目的

希望能找出使其心律穩定之數學模型的條件，並且能夠在未來與生物、數學及醫學結合。我們提供使得心律穩定得條件這方面的初步研究，希望在未來能夠提供一些資訊，增進病患福祉。

參、前言

一、心臟模型

心臟的跳動是由節律點所控制的，節律點發出電流訊號傳過心臟的每一個肌肉細胞引發心臟收縮。爲了方便討論，我們將訊號的傳遞路徑視爲一個環，即訊號由節律點發出，傳遍每一個細胞後傳回節律點。



於是，我們將一整圈細胞的總長度爲 L，而一整圈總共有 m 個細胞，第 i 個細胞的長度則爲 L_i，$L_i > 0$，$i = 1, 2, ..., m$，顯然 $L = \sum_{i=1}^{m} L_i$，並令 $\overline{L}\,(= L/m)$爲細胞的平均長度，而 $\delta_i = \frac{L_i}{\overline{L}}$，爲第 i 個細胞的相對長度，顯然 $\sum_{i=1}^{m} \delta_i = m$。

訊息在心臟肌肉細胞內會有一段作用時間，我們令這一段時間爲 APD (*the action potential duration*)，而 $APD_{i,n}$ 即爲第 n 個訊號在第 i 個細胞中的作用時間。在訊號離開細胞後到下一個訊號再度進入細胞前，細胞會有一段舒張的時間，我們以 DI (*the diastolic interval*)來表示，而 $DI_{i,n-1}$ 表示第 $n-1$ 個訊號離開第 i 個細胞後，到第 n 個訊號再度進入第 i 個細胞前，第 i 個細胞舒張的時間。舒張的時間越長，接下來的 APD 就持續的越久，所以我們可將 $APD_{i,n}$ 看成 $DI_{i,n-1}$ 的嚴格遞增函數，即 $APD_{i,n} = A\left(DI_{i,n-1}\right)$。

因爲細胞各有些微不同，造成訊號在細胞中傳遞的時間並不完全相同，爲簡化起見，我們以 CV (*conduction velocity*)來表示訊號在細胞中的平均傳遞速度，而 $CV_{i,n}$ 爲第 n 個訊號在第 i 個細胞中的平均傳遞速度。舒張的時間越長，傳遞的速度越快，所以 $CV_{i,n}$ 可以看成 $DI_{i,n-1}$ 的遞增函數，即

$$CV_{i,n} = V\left(DI_{i,n-1}\right) \qquad i = 1, 2, ..., m$$

由於訊號並不是一進入細胞就立即作用，可能會先有一段緩衝期，或者作用完卻未立即離開細胞。所以訊號進入細胞後到離開細胞並不完全等於 APD，而是會稍大於 APD。我們便以

*CT (conduction time restitution)*來表示訊號在細胞中的時間，而$CT_{i,n}$即為第n個訊號在第i個細胞中的時間。所以可得

$$CT_{i,n}=T\left(DI_{i,n-1}\right)=\frac{L_i}{\mathrm{V}\left(\mathrm{DI_{i,n-1}}\right)}=\frac{\delta_i\overline{L}}{\mathrm{V}\left(\mathrm{DI_{i,n-1}}\right)}$$

令$C\left(t\right)=\dfrac{\overline{L}}{V\left(t\right)}$，則上式可以重新表示為

$$CT_{i,n}=\delta_i C\left(DI_{i,n-1}\right)$$

由上述得知，我們可以得到$APD_{i,n}+DI_{i,n}=\sum_{j=i}^{m}CT_{j,n}+\sum_{j=1}^{i-1}CT_{j,n+1}\quad i=1,2,...,m$，也就是說

$$DI_{i,n}=\sum_{j=i}^{m}T\left(j,DI_{j,n-1}\right)+\sum_{j=1}^{i-1}T\left(j,DI_{j,n}\right)-A\left(DI_{i,n-1}\right)\quad i=1,2,...,m \tag{1}$$

二、心臟模型的簡化

令$x_{mn+i}=DI_{i,n}$，可得$A\left(DI_{i,n-1}\right)=A\left(x_{m(n-1)+i}\right)$，且

$$\sum_{j=i}^{m}T\left(j,DI_{j,n-1}\right)+\sum_{j=1}^{i-1}T\left(j,DI_{j,n}\right)=\sum_{j=i}^{m}T\left(j,x_{m(n-1)+j}\right)+\sum_{j=1}^{i-1}T\left(j,x_{mn+j}\right)=\sum_{j=mn-m+i}^{mn+i-1}T\left(j,x_j\right)$$

又令$k=mn+i$，則上式可簡化為$\sum_{j=k-m}^{k-1}T\left(j,x_j\right)$，因此(1)可以改寫成

$$x_k=\sum_{j=k-m}^{k-1}T\left(j,x_j\right)-A\left(x_{k-m}\right)=\sum_{j=k-m}^{k-1}\delta_j C\left(x_j\right)-A\left(x_{k-m}\right) \tag{2}$$

並定義$F\left(x_{k-m},x_{k-m+1},x_{k-m+2},\ldots,x_{k-1}\right)=\sum_{j=k-m}^{k-1}T\left(j,x_j\right)-A\left(x_{k-m}\right)=\sum_{j=k-m}^{k-1}\delta_j C\left(x_j\right)-A\left(x_{k-m}\right)$

$$F\left(x\right)=\sum_{j=k-m}^{k-1}\delta_j C(x)-A(x)=C(x)\times\sum_{j=k-m}^{k-1}\delta_j-A(x)=mC\left(x\right)-A\left(x\right) \tag{3}$$

在[1]中

$A\left(t\right)=a-be^{-\sigma t}+pe^{-\gamma(t-\tau)^2}$ *a,b,* τ, σ, γ *,p* 為常數，其中 *a,b,* τ, σ, γ>0。

且$C\left(t\right)=\dfrac{\overline{L}}{c}\left[1+de^{-\omega t}\right]$，$c,d,\omega>0$。

肆、研究過程及方法

當 $x_{k-m}=x_{k-m+1}=\cdots=x_{k-1}$ 時，

$$F\left(x_{k-1},x_{k-1},x_{k-1},\ldots,x_{k-1}\right)=\sum_{j=k-m}^{k-1}\delta_j C\left(x_{k-1}\right)-A\left(x_{k-1}\right)=C\left(x_{k-1}\right)\sum_{j=k-m}^{k-1}\delta_j-A\left(x_{k-1}\right)=mC\left(x_{k-1}\right)-A\left(x_{k-1}\right)$$

令 $f\left(x_{k-1}\right)=F\left(x_{k-1},x_{k-1},x_{k-1},\ldots,x_{k-1}\right)=mC\left(x_{k-1}\right)-A\left(x_{k-1}\right)$ ， $x_k=f\left(x_{k-1}\right)$

1.固定點（*fixed point*）的唯一性

若此心臟的數學模型有一個靜止狀態(*steady state*)解,($x^*=f(x^*)$),即 x^* 為 f(x)的固定點（*fixed point*）。

由 $A(t)$ 與 $C(t)$ 函數的特性，可知 $f(x)$ 爲一遞減函數，而且 $f(0)>0$，關於 $f(x)$ 得到性質一，

存在唯一一個 x^*>0 使得

$$x^*=f(x^*)$$

引理 1：若 $f(x)$ 爲遞減函數，且 $f(0)>0$，則存在唯一一個 x^*>0 使得

$$x^*=f(x^*)$$

Proof：

若令 $g(x)=f(x)-x$ ，則 $f(x)=x$ 的解爲 $g(x)=0$ 的根

因爲 $f(0)>0$ 所以 $g(0)=f(0)-0>0$ ，令 $a=f(0)>0$

而且 $f(x)$ 爲一遞減函數，故由 $a>0$ ，則可得到

$$f(a)<f(0)=a$$

$$\Rightarrow g(a)=f(a)-a<0$$

由勘根定理，因爲 $g(0)>0,g(a)<0$ ，所以 $\exists x^*\in(0,a)$，使得 $g(x^*)=0$。即 x^* 是 $f(x)$ 的固定點，

又因爲 $f(x)$ 爲遞減函數，所以若有 $x_1>x_2$ 且 x_1,x_2 皆爲 $f(x)$ 的固定點，則

$x_1=f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)=x_2 \rightarrow\leftarrow$

所以 $f(x)$ 的固定點存在且唯一。

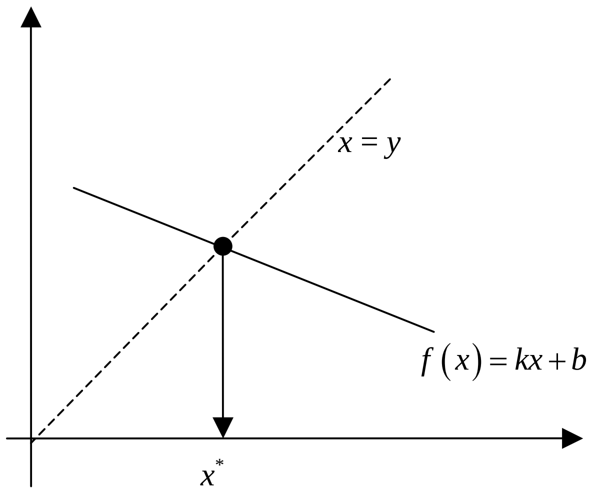
2.各種遞減函數疊代趨向穩定的條件

在 $f(x)$ 爲遞減函數的前提下，我們考慮各種不同類型的函數，並研究在何種條件下，其無窮疊代之後會趨向穩定。

(1)直線型函數

首先考慮最簡單的情形，設 $f(x)=kx+b, k<0, b>0$ ，經過幾番嘗試之後，我們發現只要當斜率 k 滿足 $-1<k<0$ 時，其無窮疊代之後就會趨向穩定，且 x_n 會收斂到 x^* (如下圖)，其證明如下：

引理 2：函數 $f(x)=kx+b$，其中 $-1<k<0$ 且 $b>0$，若數列 $\langle x_k \rangle$，滿足 $x_n = f(x_{n-1})$，則數列 $\langle x_k \rangle$ 收斂且 $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ 。



Proof：

令 $a_n = x_n - x^*$ ，若 $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ ，則 $\lim_{n\to\infty} a_n = x^* - x^* = 0$

$$a_n = x_n - x^* = f(x_{n-1}) - x^* = f(a_{n-1}+x^*) - x^*$$

所以 $a_n = g(a_{n-1})$ ，其中 $g(x) = f(x+x^*) - x^*$

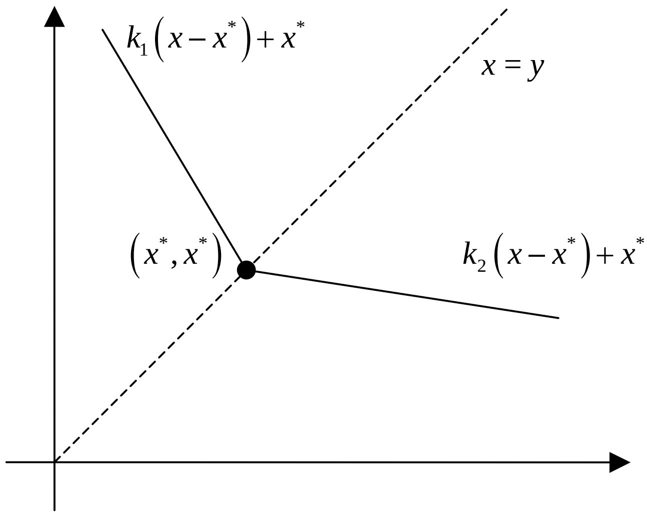
又 $f(x)=kx+b, k<0, b>0$

所以 $g(x) = f(x+x^*) - x^* = k(x+x^*) + b - x^* = kx + (kx^* + b - x^*) = kx$

於是 $a_n = g(a_{n-1}) = ka_{n-1} = k^{n-1}a_1$

所以 $-1<k<0$ 時， $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ 。

(2)接著考慮函數圖形為折線，令其兩邊的斜率分別為k_1,k_2，$k_1<0$，$k_2<0$，一樣歷經過幾番嘗試之後，我們終於歸結出一個結論，那就是只要當k_1,k_2滿足$0<k_1\times k_2<1$，其無窮疊代之後就會趨向穩定，且x_n會收斂到x^*(如下圖)，但是如果$k_1\times k_2=1$，則其無窮疊代會在兩點之間互換，其證明如下：



引理 3：函數 $f(x)=\begin{cases}k_1(x-x^*) & 當x<0時\\ k_2(x-x^*) & 當x\geq 0時\end{cases}$，其中$,k_1<0,k_2<0$ 且 $0<k_1k_2<1$, 若數列$\langle x_k\rangle$, 滿足$x_n=f\left(x_{n-1}\right)$，則 數列$\langle x_k\rangle$收斂且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$。

Proof：

不妨設 $f(x)=\begin{cases}k_1x & 當x<0\\ k_2x & 當x\geq 0\end{cases}$$,k_1<0,k_2<0$, 此時$x^*=0$。

令$a_{n+1}=f\left(a_n\right)$。經由歸納法可得$a_{2n+1}=\left(k_1k_2\right)^n a_1$及$a_{2n+2}=k_2\left(k_1k_2\right)^n a_1$。

又$k_1k_2<1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

若$x^*\neq 0$，考慮$x_{n+1}=f\left(x_n\right)$，令$a_n=x_n-x^*$同樣可得$a_{2n+1}=\left(k_1k_2\right)^n a_1$及$a_{2n+2}=k_2\left(k_1k_2\right)^n a_1$。

所以 $x_n-x^*=a_n\to 0$ 即$x_n\to x^*$。

※附註：

當$k_1k_2=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{2n+1}-x^*\right)=\left(x_1-x^*\right)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=x_1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{2n+2}-x^*\right)=k_2\left(x_1-x^*\right)=\left(x_2-x^*\right)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+2}=x_2$

所以x_n會在x_1、x_2兩點之間跳動。

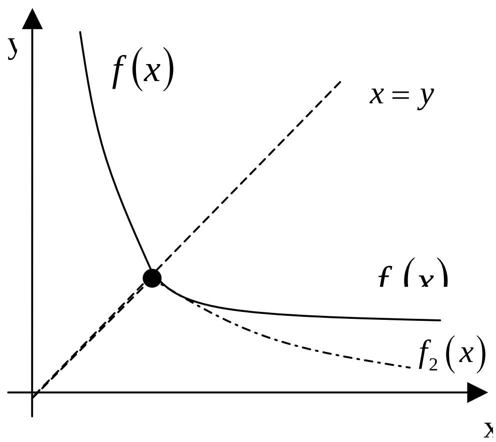
(3)一般的平滑曲線函數

在解決了簡單的直線和折線的問題之後，我們開始嘗試比較複雜一點的遞減函數，經過任意畫了一些函數圖形為平滑曲線的例子之後，我們發現到一個很有趣的現象，那就是如果 $x=x^*$ 為此函數的不動點，當函數圖形在 $x<x^*$ 的部份，對於 $x=y$ 這條直線對稱之後的新圖形($f^{-1}(x)$)，如果位於原來函數圖形在 $x>x^*$ 的部份的下方時，則 x_n 會收斂，且其收斂值為 x^*。而且我們發現當上述事實成立時， $f(x)$ 在不動點 $x=x^*$ 的切線斜率會介於 -1 到 0 之間這件事會伴隨著發生。於是我們嘗試找出這兩件事彼此之間的關係，並試著證明他們是否為等價條件。

引理 4： $f(x)$ 為一嚴格遞減函數，若 $f(x^*)=x^*$, $f(x)$ 在 $x=x^*$ 處可微分且 $-1<f'(x^*)<0$ 則 $f(x)$ 的反函數 f^{-1} 存在而且 $\exists\delta>0$，使得， $f(x)>f^{-1}(x),\ \forall x\in(x^*,x^*+\delta)$。

Proof：

我們定義 $f_1(x)=f(x)$， $f_2(x)=f^{-1}(x)$。



a.因為 $f_1'(x^*)>-1$，即 $\lim\limits_{x\to x^*}\dfrac{f_1(x)-f_1(x^*)}{x-x^*}>-1$，所以 $\exists\delta_1>0$，使得 $\forall x\in(x^*,x^*+\delta_1)$，$\dfrac{f_1(x)-f_1(x^*)}{x-x^*}>-1$，整理可得 $f_1(x)>f_1(x^*)-(x-x^*)$

b.因為 $f_2(x)=f^{-1}(x)$，所以 $\left[f_2\left(f_1\left(x^*\right)\right)\right]'=f_2'\left(f\left(x^*\right)\right)\cdot f_1'\left(x^*\right)=f_2'\left(x^*\right)\cdot f_1'\left(x^*\right)=\left(x^*\right)'=1$

又因為 $f_1'(x^*)>-1$，所以 $f_2'(x^*)<-1$ 即 $\lim\limits_{x\to x^*}\dfrac{f_2(x)-f_2(x^*)}{x-x^*}<-1$

所以 $\exists\delta_2>0$，使得 $\forall x\in(x^*,x^*+\delta_2)$， $\dfrac{f_2(x)-f_2(x^*)}{x-x^*}<-1$，整理可得 $f_2(x)<f_2(x^*)-(x-x^*)$

c.取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，由固定點 x^*, f 及 f^{-1} 的定義得知 $f(x^*)=f_1(x^*)=f_2(x^*)$

所以 $f_1(x) > f_1(x^*) - (x - x^*) = f_2(x^*) - (x - x^*) > f_2(x)$

即$\exists \delta > 0$，使得$\forall x \in (x^*, x^* + \delta)$， $f_1(x) > f_2(x)$

引理 5：若函數 $f(x)$滿足性質 4 的條件，且給定起始値$x_1 \in (x^*, x^* + \delta)$，$x_{n+1} = f(x_n)$，$n \in N$，則數列$\langle x_n \rangle$會收斂到 x^*。

Proof：

對於任意的$x_1 \in (x^*, x^* + \delta)$，若$x_2 = f(x_1)$， $x_0 = f^{-1}(x_1)$，由引理 4 可得

$x_0 = f^{-1}(x_1) < f(x_1) = x_2 < x^*$

又因爲 $f(x)$爲遞減函數，所以$x^* < x_3 := f(x_2) < f(x_0) = x_1$。

同樣定義： $x_{n+1} := f(x_n),\ n \in N$，則依數學歸納法可推得$x^* < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < x_5 < x_3 < x_1$及

$x_2 < x_4 < x_6 < \cdots < x_{2n} < \cdots < x^*$，因爲$x_{2n-1}$遞減且有下界$x^*$，所以$x_{2n-1}$會收斂

(x_{2n}遞增，且有上界x^*，所以x_{2n}一樣會收斂)

所以整體來說： $x_2 < x_4 < x_6 < \cdots < x_{2n} < \cdots < x^* < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < x_5 < x_3 < x_1$當$x_1 > x^*$

因爲$x_2 < x_4 < x_6 < \cdots < x_{2n} < \cdots < x^* < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < x_5 < x_3 < x_1$，所以存在$\tilde{x} \in [x^*, x^* + \delta)$及$\bar{x} \in (f(x^* + \delta), x^*]$使得 $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \bar{x}$，$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \tilde{x}$。 由簡單的推論可得$f^2(\bar{x}) = \bar{x}$， $f^2(\tilde{x}) = \tilde{x}$及$\bar{x} = f(\tilde{x})$。

接著我們要証明$\bar{x} = \tilde{x} = x^*$，由反証法假若$\bar{x} \neq \tilde{x}$，則由引理 4 可得$f(\tilde{x}) < f^{-1}(\tilde{x})$，又由 f 嚴格遞減，所以 $f^2(\tilde{x}) > \tilde{x}$ $\rightarrow\leftarrow$。

又因爲$\tilde{x} = x^*$，可得

$$\bar{x} = f(\tilde{x}) = f(x^*) = x^*。$$

故x_n收斂，且$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$。

定理 1：若 $f(x)$ 如同(3)中之定義為， $f(x) \equiv F(x, x, ..., x)$ ，若存在一實數 r ，使得 $f(r) > r$ 則存在 $x^* > r$ 使得 $f(x^*) = x^*$ 。更進一步，若 $f(x)$ 在 $x = x^*$ 處可微分， $-1 < f'(x^*) < 0$ ，則存在一正數 δ，使得且給定初始條件 $x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1} \in \left(f\left(x^* + \delta\right), x^* + \delta \right)$ ，若數列定義成 $x_k = F\left(x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1}\right)$ 此數列會收斂到 x^* 。

Proof： $x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1}$ 皆在 $\left(f\left(x^* + \delta\right), x^* + \delta \right)$ 中，則存在 $q \in (f^{-1}(x^* + \delta), m)$ 使得 $f(q) \in (M, x^* + \delta)$

其中 $m = \min\left\{x^*, x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1}\right\}$ 、 $M = \max\left\{x^*, x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1}\right\}$ ，

所以 $f^{-1}(x^* + \delta) < q < m < x_j < M < f(q)$

又因為 $C(x)$ 和 $-A(x)$ 是遞減函數，因此

$$\sum_{j=k-m}^{k-1} \delta_j C(q) < \sum_{j=k-m}^{k-1} \delta_j C(M) < \sum_{j=k-m}^{k-1} \delta_j C(x_j) < \sum_{j=k-m}^{k-1} \delta_j C(m) < \sum_{j=k-m}^{k-1} \delta_j C\left(f(q)\right) \quad \text{及}$$

$$-A(q) < -A(m) < -A(x_j) < -A(M) < -A\left(f(q)\right)$$

所以

$$f(q) < F(M, M, M, \ldots, M) < F\left(x_{k-m}, x_{k-m+1}, x_{k-m+2}, \ldots, x_{k-1}\right) < F(m, m, m, \ldots, m) < f^2(q)$$

由數學歸納法同理可得

$$f^n(q) < F(x_{k+(n-2)m}, ..., x_{k+(n-1)m-1}) < f^{n+1}(q)$$

又由引理 5 知，數列 $\{f^n(q)\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂到 x^* ，所以數列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 會收斂到 x^* 。

伍、討論

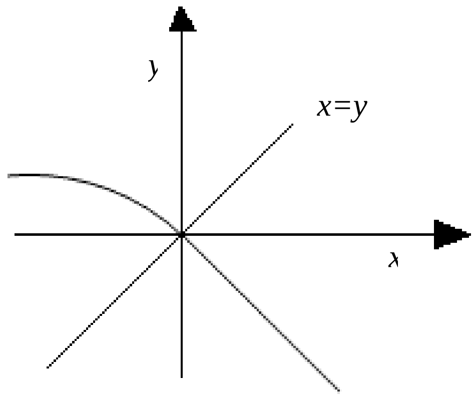
在[1]中，有一個假設(A4)：存在$s\in(r,x^*)$，使得$s\le f^2(s)$。我們認爲這個假設並不自然，而且在[1]中的引理 3 的假設條件下

$x_2<x_4<x_6<\cdots<x_{2n}<\cdots<x^*<\cdots<x_{2n-1}<\cdots<x_5<x_3<x_1$並不一定會導致$\lim_{n\to\infty}x_{2n}$與

$\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}$收斂到同一值。

因爲，令$s=-\frac{1}{\sqrt{2}}$， $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+a, & x\le-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -x, & x>-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$，其中 a 滿足$\sqrt{1/\sqrt{2}}+a=\frac{1}{\sqrt{2}}$

，其函數圖形如下：



則$f(s)=f^{2n+1}(s)=1/\sqrt{2},\ s=f^2(s)=f^{2n+2}(s)=-1/\sqrt{2},\ n\in N$，顯然對所有

$x_0\in[s,0),\ x_n\equiv f(x_{n-1}),\ n\in N$， $x_2=x_4=x_6=\cdots=x_{2n}=\cdots<x^*<\cdots=x_{2n-1}=\cdots=x_5=x_3=x_1$成立

，但在我們引理 4 的假設條件下這兩件事是可以克服的。

陸、結論

心臟的等待時間x_k的函數經過化簡之後如下：

$$f(x)\equiv F(x,\dots,x)=\sum_{j=k-m}^{k-1}\delta_j C(x)-A(x)=C(x)\times\sum_{j=k-m}^{k-1}\delta_j-A(x)=mC(x)-A(x)$$

遞減函數的給定起始值後，經過疊代，其收斂條件如下

1. 固定點兩邊的斜率分別爲k_1,k_2時， $0<k_1\times k_2<1$
2. 平滑曲線函數： $f(x)$在不動點$x=x^*$的切線斜率介於-1到 0 之間

由此條件可得到下列結果：

1.函數 $f(x)$，已知當 $x=x^*$ 爲此函數之不動點，即 $f(x^*)=x^*$，若 $-1<f'(x^*)<0$

$$\exists\delta>0\text{，使得}\forall x\in(x^*,x^*+\delta)\text{，}f(x)>f^{-1}(x)$$

2.當遞減函數 $f(x)$ 存在以下特性：

$$\exists\delta>0\text{，使得}\forall x\in(x^*,x^*+\delta)\text{，}f(x)>f^{-1}(x)\text{。}$$

若起始值 $x_1\in(x^*,x^*+\delta)$，則 x_n 會收斂，且其收斂值爲 x^*。

因此，我們進一步可以得到下列結果：

定理 1：若 $f(x)$ 如同(3)中之定義爲，$f(x)\equiv F(x,x,...,x)$，若存在一實數 r，使得 $f(r)>r$ 則存在 $x^*>r$ 使得 $f(x^*)=x^*$。更進一步，若 $f(x)$ 在 $x=x^*$ 處可微分，$-1<f'(x^*)<0$，則存在一正數 δ, 使得且給定初始條件 $x_{k-m},x_{k-m+1},x_{k-m+2},\ldots,x_{k-1}\in\left(f(x^*+\delta),x^*+\delta\right)$，若數列定義成 $x_k=F\left(x_{k-m},x_{k-m+1},x_{k-m+2},\ldots,x_{k-1}\right)$ 此數列會收斂到 x^*。

這意味著，我們從數學上証明：若心臟脈動的變化不大($-1<f'(x^*)<0$), 則在不受太大刺激的情況下心跳會回歸於平穩的脈動。

1. **引理 1**：若 $f(x)$ 爲遞減函數，且 $f(0)>0$，則存在唯一一個 $x^*>0$ 使得

$$x^*=f(x^*)$$

2. **引理 2**：函數 $f(x)=kx+b$，其中 $-1<k<0$ 且 $b>0$, 若數列 $\langle x_k\rangle$, 滿足 $x_n=f(x_{n-1})$，則數列 $\langle x_k\rangle$ 收斂且 $\lim_{n\to\infty}x_n=x^*$。

3. **引理 3**：函數 $f(x)=\begin{cases}k_1(x-x^*) & \text{當}x<0\text{時}\\ k_2(x-x^*) & \text{當}x\geq 0\text{時}\end{cases}$，其中 $k_1<0,k_2<0$ 且 $0<k_1k_2<1$, 若數列 $\langle x_k\rangle$, 滿足 $x_n=f(x_{n-1})$，則 數列 $\langle x_k\rangle$ 收斂且 $\lim_{n\to\infty}x_n=x^*$。

4. **引理 4**：$f(x)$ 爲一嚴格遞減函數，若 $f(x^*)=x^*$, $f(x)$ 在 $x=x^*$ 處可微分且 $-1<f'(x^*)<0$ 則 $f(x)$ 的反函數 f^{-1} 存在而且 $\exists\delta>0$，使得，$f(x)>f^{-1}(x)$, $\forall x\in(x^*,x^*+\delta)$。

5. **引理 5**：若函數 $f(x)$ 滿足性質 4 的條件，且給定起始值 $x_1\in(x^*,x^*+\delta)$，$x_{n+1}=f(x_n)$，$n\in N$，則數列 $\langle x_n\rangle$ 會收斂到 x^*。

柒、展望未來

1.是否存在動態的平衡狀態？在什麼模式下(即 F(x)的特徵)？

2.在外在條件的較大刺激下心臟脈動會有什麼模式？

3.什麼模式下會有心律不整的情形出現？

捌、參考文獻

[1] *H. Sedaghat , C. M. Kent , and M. A. Wood* (2005). *SIAM J. APPL. MATH. Vol.66, No.2, pp. 573-590 Criteria for the Convergence, Oscillation, and Bistability of Pulse Circulation in a Ring of Excitable Media*

評語

本作品係討論心跳頻率之數學模型，而作品中則以某些類型再簡化之模型定點存在性爲主。然未見所得到之主要定理與原始模型之間的關係，至爲可惜。事實上，此類問題之原始模型定態解的研究，對國／高中生而言，其難度實偏高。