臺灣二００八年國際科學展覽會

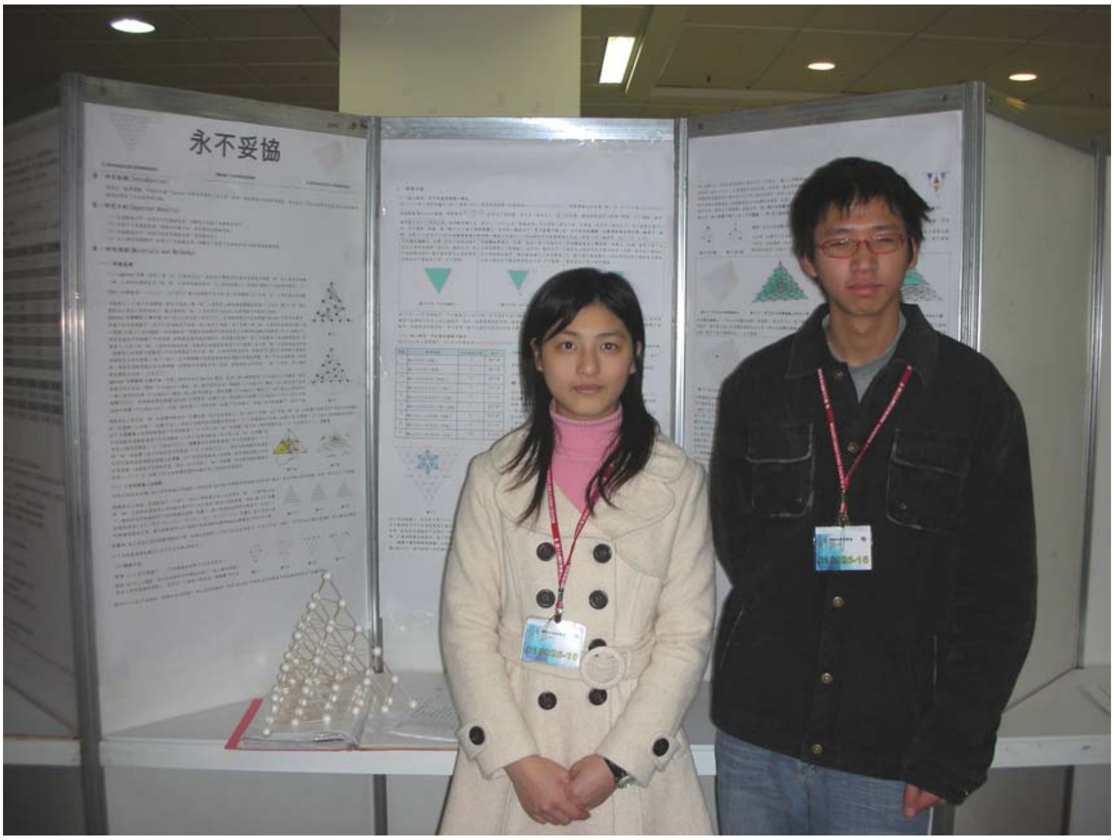
科　　　別：數學

作 品 名 稱：永不妥協

得 獎 獎 項：佳作

學校 / 作者：國立馬祖高級中學　　　林孟俞
　　　　　　國立馬祖高級中學　　　陳紹宇

作者簡介



我叫林孟俞（左一），來自馬祖高中，從小我就喜歡數學，尤其是在每一道數學問題的解題過程中，都深深的感受解題的樂趣，更著迷於數學這未知而廣博的領域，並在享受每一次找到答案的成就感。

上了高中，在因緣際會之下，參加了科學展覽，在研究的過程中，見到了數學迥異於我昔日所知另的一面，更勾起我無限的好奇，想要一探究竟，幸運地，高二時在全國科展獲得了第一名的殊榮，但是，我們知道，作品還有改良和進步的空間，因此將全國科展的作品改良之後又參加了國際科展，並期許自己未來能繼續努力。

我叫陳紹宇（右一），目前就讀於國立馬祖高級中學三年級。自幼擅長於理科、數學，享受在其間，不亦樂乎。正所謂好之者不如愛之者，享受在其間，在自我加強，有所延伸，也是我一貫的學習態度。

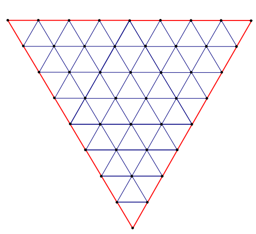
在高二時，加入學校為參加科展而開設的社團，經過一年的辛苦努力，從尋找到深入探討，乃至個別完整統整的報告。從中學習良多，更學習到做研究的精神和方法，希望可以在未來，能夠繼續將這份經驗，與精神，應用於其他研究，更盼百尺竿頭，有更傑出的表現。

目錄

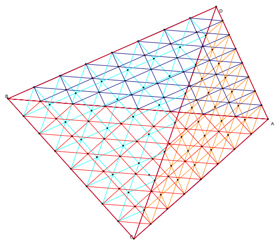
Abstract

Never Compromise

This study is mainly about an invincible method of a mathematical game and its theory from which it is derived. We want to solve the problems left by Professor Poon, K.K and Professor Shiu , W.C. and meanwhile extend it into three dimensions through the method brought up by E. Sperner[1].



2-dimensional chessboard



3-dimensional chessboard

On two dimensional case, the first player will win the game forever on condition that these two players can't change their chesses colors at will. And the fastest way to win will be just putting the chesses that along the baby triangle boundaries. If both players can change their chesses colors randomly, count the chesses number before starting the game. It is calculated that if the number of the total chesses is odd, the first player will win the game in normal and logical circumstances. On the contrary, if the number of total chesses is even, the latter will win.

On three dimensional case, the first player will definitely win the game without allowing changing chesses colors. And the best strategy is putting chesses in the inner of the big tetrahedron; what's more, going along the edge of the tetrahedron will be shortest way to win the game.

中文摘要

本文籍由一套數學遊戲的必勝方法及其背後潛藏的數學原理，來作為研究目標。透過研究德國數學家 E.Sperner 提出的方法所延伸的數學遊戲，來解決潘建強、邵慰慈兩位教授留下來沒有證完的遊戲結果[1]，並將遊戲增廣至三維空間的探討且得到如下的結論：

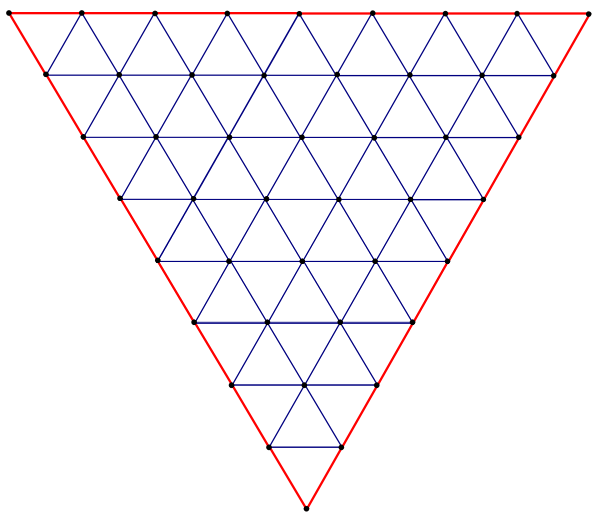
一、平面棋盤

(1)不可換色，先下者恆勝，其最快獲勝方法，為依所下位置的三角形衍生子圖周界走。

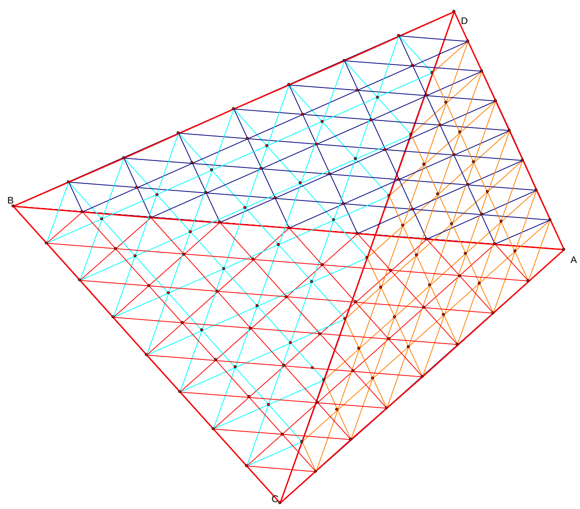
(2)可換色，獲勝規則由棋盤的總頂點數決定，若棋盤的總頂點數為奇數，先下者獲勝；若棋盤的總頂點數為偶數，則後下者獲勝。

二、空間棋盤

(3) 不可換色，先下者恆勝，而最佳下法，則是下在大四面體本身內部的某一點，且其最快獲勝方法為，依正四面體稜邊所下位置走。



平面棋盤圖



空間棋盤圖

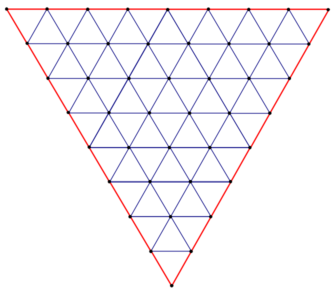
壹、研究動機(Introduction)

因緣際會下，在學校圖書館發現「數學傳播」季刊，並於季刊中看到有關『Sperner 引理及其應用』的主題，仔細閱讀內容，便對其中的數學遊戲感到濃厚興趣，該遊戲作者下一個推論，即：必存在唯一勝方(即永不和棋)。且作者留下三個問題未加以探討，即:（1）玩家不可更換棋色時，先下棋者是否有利？（2）若是，他的必勝策略如何？（3）玩家可任意更換棋色時，其結果如何？

因此，我們抱持著好奇心玩起這個遊戲，並將未答問題加以研究論證之。在完成上述問題的解決方法後，我們更嘗試將棋盤增廣為三維空間中的四面體，並透過由 Sperner Lemma 來驗證我們所提出三維棋盤的可行性，以定出新的遊戲法則，藉此來分析空間中玩家不可更換棋色時，先下棋者是否有利？若是，他的必勝策略如何？

一、平面棋盤

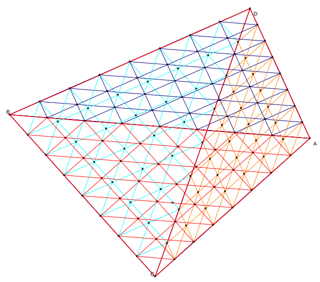
玩法：由兩位玩家來玩，規定誰先在***平面棋盤***上完成產生一條同色的棋子連線且該連線可以連接三角形最外的紅色三邊者，得勝。



平面棋盤圖

二、空間棋盤

玩法：由兩位玩家來玩，規定誰先在***空間棋盤***上完成產生一條同色的棋子連線且該連線可以連接四面體最外的四面者，得勝。



空間棋盤圖

貳、研究目的(Expected Results)

（1）在遊戲進行中，玩家不可更換棋色時，判斷先下或後下何者較有利？

（2）玩家不可更換棋色時，遊戲的必勝方法，及其最佳的致勝策略。

（3）在遊戲進行中，玩家可任意更換棋色時，其結果如何？

（4）在三維空間棋盤時，玩家不可更換棋色時，判斷先下或後下何者較有利？及其最佳致勝策略。

參、研究過程(Materials and Methods)

一、理論基礎

1911 年，L. Brouwer 發表著名的不動點定理，它對分析、拓樸等多方面都有深遠的影響[8]。1928 年，德國數學家 E.Sperner 發現一個簡單的證明，他利用組合學的方法證明 Brouwer 不動點定理。而我們藉由 Sperner 引理及應用 Sperner 引理證明[1]其所提出數學遊戲存在唯一勝方，並嘗試找到可能獲勝的規律及其方法[7]。

(一) Sperner 引理

給定一個‘大’三角形$V_1V_2V_3$，並將它**三角化**(把它畫分成有限多個較‘細’的三角形且每個‘細’三角形的邊都是另一個‘細’三角形的邊或落在‘大三角形的邊上)。若將各頂點以下述的規定標記：

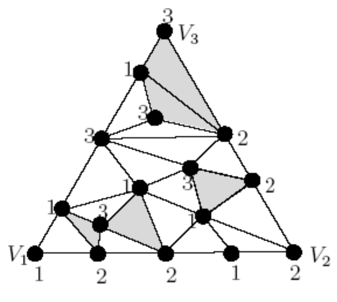


圖 3-1

- 頂點V_i的標號為i，$i=1,2,3$
- 在V_iV_j邊上的頂點只可以用i或j作為標號
- 不在‘大’三角形邊上的頂點可隨意以 1，2 或 3 作為標號

則至少存在一個‘細’三角形其三個頂點的標號分別為 1，2 及 3。

圖 3-1 是一個已標號的三角化三角形的例子，劃上陰影的‘細’三角形就是 Sperner 引理結論中所說的三角形。要證明這個定理須以握手定理來協助，這個定理通常在圖論書上都以握手來舉例，因此稱為握手定理 [1][3]。

握手定理(Degree Theory)：設G為一n階圖，則G的n個頂點的度之和等於邊數的兩倍。即G中n個頂點為v_1，v_2，…，v_n，邊數為e，則

$$d(v_1)+d(v_2)+...+d(v_n)=2e$$

證明：所有頂點的度之和$d(v_1)+d(v_2)+...+d(v_n)$，表示以頂點v_1，v_2，…，v_n中某個頂點為一個端點的邊之總數，由於一條邊有二個端點，因此圖G的每條邊在和$d(v_1)+d(v_2)+...+d(v_n)$中被計入兩次，所以，所有頂點的度之和為邊數的兩倍。

Sperner **引理證明-2 維平面**:設T為已三角化的三角形$V_1V_2V_3$，其頂點的標記方法是根據 Sperner 引理中的要求。考慮T的半對偶圖T'，其中T'的頂點是T的面，為了表示T'的點，在T中每一個‘細’三角形和無限面內劃一個小圓點(如圖 3-2 的白圓點)，兩白圓點有一連線且這兩點所代表的面其公共邊的兩端點分別標著 1 和 2。

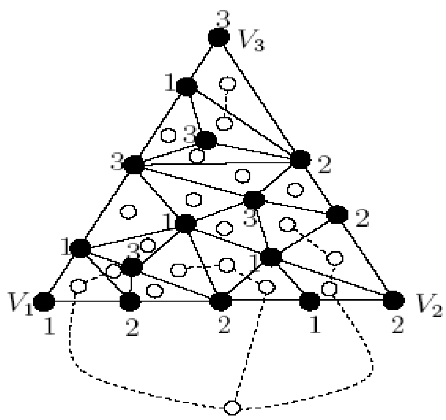


圖 3-2

由圖 3-2：我們很容易看出半對偶圖T'中的頂點，除對應著無限面的頂點外，其度數不超過 2。在T'中度數為 1 的頂點對應著T中標著 1，2 及 3 的‘細’三角形所組成的面；度數為 2 的頂點對應著T中只標著 1 及 2 的‘細’三角形所組成的面；度數為 0 的頂點只對應著T中不同時標著 1 和 2 的‘細’三角形所組成的面。因為在V_1V_2邊上只得單數多條邊的兩端點是分別記號為 1 及 2，所以，在半對偶圖中對應著無限面的頂點的度數是單數。若T'中沒有度數為 1 的頂點，那麼其頂點度數之和必為單數，這與握手定理相矛盾。因此，結論就是必定存在一‘細’三角形，其三個頂點的標號分別為 1，2 及 3[1]。

Sperner 引理證明-3 維平面:：考慮三維空間中的 Sperner 圖形，是由一個n維單純形（n-simplex）所構成，因在零維空間中是由一個點（0-simplex）構成，在一維空間中是由一個線段(1-simplex)構成，在二維空間中是由一個三角形的平面(2-simplex)構成，故三維空間應由一個四面體（3-simplex）構成[7]。設T為已三角化的四面體$V_1V_2V_3V_4$，其頂點的標記根據 Sperner 引理要求，如圖 3-3b，因此我們將大四面體（3-simplex）予以三角化分割成細四面體（3-simplices），且每一面皆為一三角形平面，如圖 3-3b 所標示。考慮T的半對偶圖T'，其中T'的頂點為在三角化後‘細’四面體內部內任一立體位置，但不在四個面上，為了表示T'的點，在T中每一個‘細’四面體和無限空間中異於大四面體的任一位置劃一小白點，（如圖 3-3a），若兩小白點所在四面體共用面為 1、2、3 則連接兩小白點，如圖 3-3b 中標號 1、2、3 的三角形網狀面所標示。在T'中**度數為 1** 的頂點對應著T中同時標著 1、2、3 及 4 的‘細’四面體（因只有 1 個同時標記為 1、2、3 的面$V_1V_2V_3$）；**度數為 2** 的頂點其頂點對應著T中同時標著 1、2 及 3，但第四點為 1 或 2 或 3 的‘細’四面體（因會有二個同時標為 1、2、3 的面$V_1V_2V_3$）；**度數為 0** 的頂點對應著T中不同時標為 1、2、3 的‘細’四面體（表示此時沒有同時標為 1、2、3 的面$V_1V_2V_3$）。因在半對偶圖中對應著空間中無限面的頂點的度數必是**單數**。若T'中沒有度數為 1 的頂點，則其頂點度數之和也必為單數，這與握手定理相矛盾。因此，必定存在一‘細’四面體，其四個頂點的標號分別為 1、2、3、4，如圖 3-3b 大四面體旁邊的四塊不同三角形的位置情形。

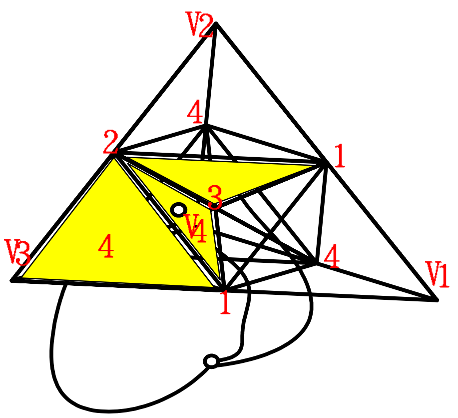


圖 3-3a

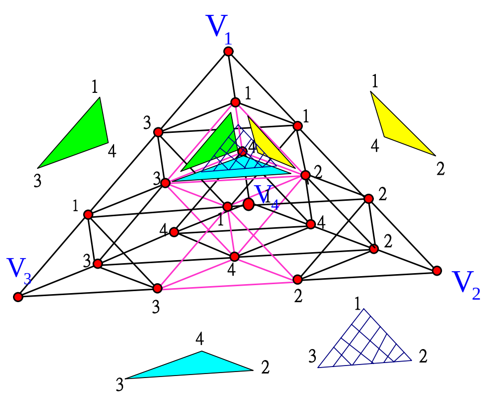


圖 3-3b

（二）三角形棋盤上的遊戲

在此介紹本文主題—在三角形棋盤上的遊戲，同時利用 Sperner 引理證明該遊戲必存在唯一勝方。本文所謂三角形棋盤，就是一個大的正三角形板簡稱為大三角板，其頂點為V_1，V_2及V_3。把大三角板畫分成一些全等的‘細’ 三角形板且這些‘細’三角形的邊與該三角形板之邊平行。記T_l為有l層的三角形棋盤。例如:

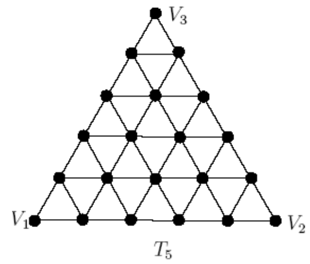


圖 3-4

定義一：線段的相交點稱為該三角形棋盤的頂點。

定義二：將三角形板的周界分解為P_1，P_2及P_3三直線段使得$V_i \notin P_i$，即

$$P_1 = (V_2, \cdots, V_3) \text{ 、 } P_2 = (V_1, \cdots, V_3) \text{ 、 } P_3 = (V_1, \cdots, V_2)$$

定義三:設 S 為該三角形棋盤頂點的子集。將 S 的點連同以 S 的點作為兩端點的邊所組成的圖稱為 S 的衍生子圖。

定義四:設 S 為該三角形棋盤頂點的子集，且滿足下列兩條件：

(1)若 S 至少包含著P_1，P_2及P_3中各一頂點，

(2)其衍生子圖是連通圖，

則 S 稱為連通集。

以下是兩連通集如圖 3-5 及 3-6 白色點)的例子:

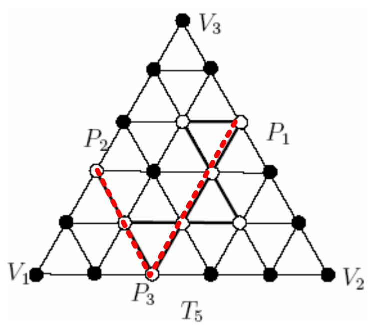


圖 3-5

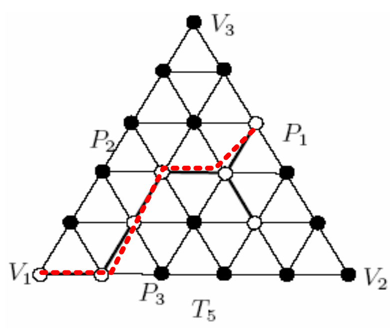


圖 3-6

(三)遊戲的方法:

用具:(1)三角形棋盤T_l。　　(2)兩種顏色的棋子(白色及黑色)。

玩法:此乃二人遊戲,每人分別使用不同顏色的棋子。各人輪流將棋子放在三角形棋盤的頂點上,若其中一人的棋子能組成一**連通集**(滿足定義四中(1)及(2)兩條件,結果如下四張圖),那人就是得勝者。

這遊戲的規則簡單,但發現其原理與 Sperner 引理有關[1]。因此,我們命名遊戲方式為『永不妥協』。並發現其存在的結果為**永不妥協定理**。

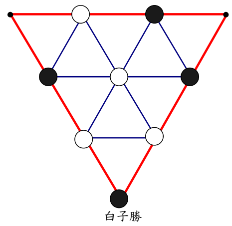


圖 3-7

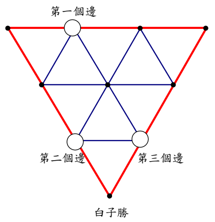


圖 3-8

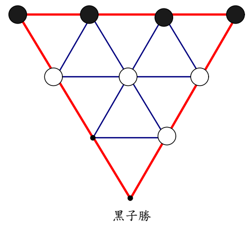


圖 3-9

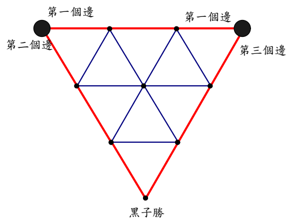


圖 3-10

永不妥協定理:在三角形棋盤上T_l下棋,若以上述的遊戲規則,則必有唯一得勝者(即:遊戲沒有和局)。

證明黑棋子和白棋子不能同時為連通集

(1) **證明黑棋子和白棋子不能同時為連通集**:設B為黑棋子的連通集,W為白棋子的連通集。因此在P_1上,存在一頂點$b \in B$及$w \in W$。在不失一般性,設b在V_3及w之間。由於W是連通的,所以,可找到一條以w的點為頂點所組成的路徑使得它連接在到P_2上,這條路徑把T_l分成上下兩部分,那麼連通集B就不可能連通了(不能連接點b與P_3上的頂點,如圖 3-11)。

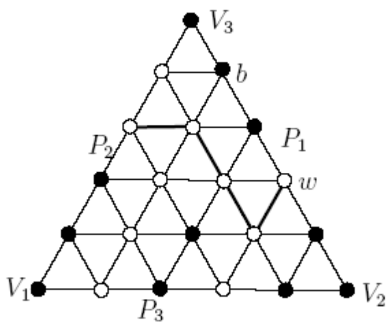


圖 3-11

（2）**證明假設出現和棋的情況**：在T_l上每個頂點都放滿棋子，但W和B都不是連通集。對任意的頂點v，至少存在著一條直線段P_1，P_2或P_3使v不能通過和本身同顏色的棋子到達。定義各頂點$v \in T_l$的標號為

$$\lambda(v)=\min\left\{i : v\text{不能透過和本身相同顏色的棋子到達 }\mathrm{P_i}\right\}.$$

因此，對每一個T_l上的頂點皆以 1，2 或 3 作標記。很容易觀察到其標號滿足 Sperner 引理的要求。根據此定理，在棋盤上存在一‘細’三角形其頂點分別以 1，2 及 3 為標號。由『鴿籠原理』知這三個頂點中至少有 2 個頂點的棋子顏色是相同。在不失一般性之下，設標號為 1，2 的頂點上棋子的顏色為黑色，並且記這兩頂點分別為a_1及a_2。根據定義，a_1不能透過黑色的棋子通往P_1而a_2則可。因a_1與a_2是相鄰，而a_2上的棋子也是黑色的。那麼a_1能通過a_2，再由a_2通過一些黑色的棋子到達P_1。矛盾，命題證畢[1]。

證明T_l三角形棋盤圖，其最小連通集的基數為 B(T_l)=ℓ+1

證明：①當ℓ=1 時，設H為該最小連通集的衍生子圖，則H為一樹，且其頂點的基數為 2=ℓ+1。所以當ℓ=1 時，命題成立。

②假設當ℓ=k 時，命題成立。

③設ℓ=k+1 時，設H'為 $\mathrm{T_{k+1}}$ 的最小連通集的衍生子圖，則H'為一樹且$P_j \cap H'$只得 1 個頂點（j=1、2、3）。設$x \in P_1 \cap H'$，則x的度數為 1。把x及它相連的邊從H中拿掉的圖記成$H'-x$，則$H'-x$是在T_l的最小連通集衍生子圖，根據歸納法假設$\left|H'-x\right|=k+1$，所以，$\left|H'\right|=k+2$。

根據數學歸納法，在T_l中的最小連通集的基數為ℓ+1。

二、研究分析

(一)兩人對奕，不可任意更換棋子顏色

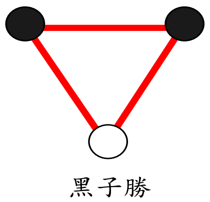
設有一個$n \times n \times n$的三角形棋盤T_l。則ℓ（層數）和n（周界的頂點數）的關係為$n=\ell+1$

（$n \geq 1 \cap n \in N$）。實驗分析：由 2x2x2 棋盤開始討論至 10x10x10 的棋盤，分析結果如下：圖 3-2-1 至 3-2-18。

（數學歸納法）

① $\ell=1$，$n=2$ 時：

頂點為 2x2x2 棋盤，奇數層，頂點數為 3（奇數）-先下者得勝



$\Rightarrow$

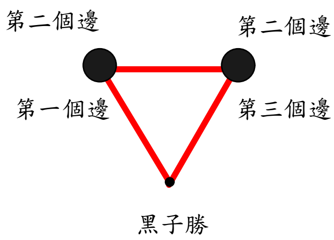


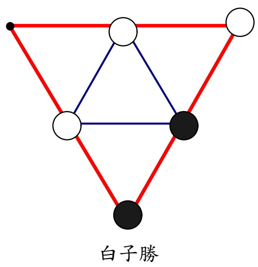
圖 3-2-1　　圖 3-2-2

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 1 個邊、2 個點；勝利條件最少 2 個同色點。

---

② $\ell=2$，$n=3$ 時：

頂點為 3x3x3 棋盤，偶數層，頂點數為 6（偶數）-先下者得勝



$\Rightarrow$

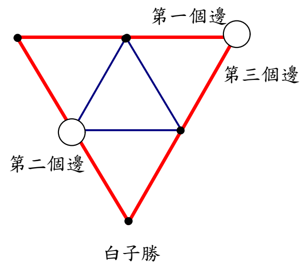


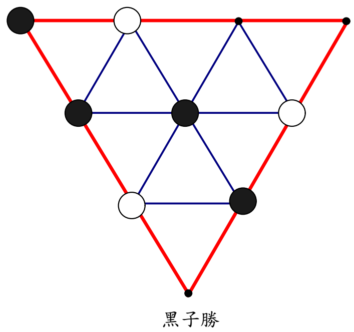
圖 3-2-3　　圖 3-2-4

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 2 個邊、3 個點；勝利條件最少 3 個同色點。

---

③ $\ell=3$，$n=4$ 時：

頂點為 4x4x4 棋盤，奇數層，頂點數為 10（偶數）-先下者得勝



⇒

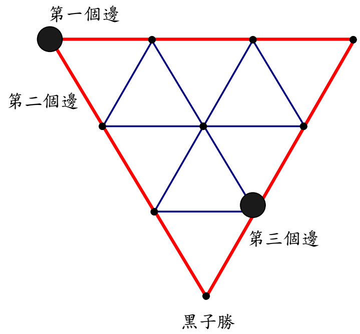


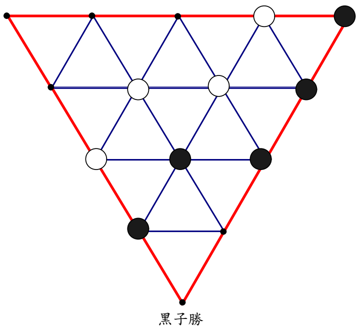
圖 3-2-5　　　　圖 3-2-6

在不失一般性之下，$\boxed{\text{先下者恆勝}}$，其勝利的路徑至少經過 3 個邊、4 個點；勝利條件$\boxed{\text{最少 4 個同色點}}$。

---

④ $\ell=4$，$n=5$ 時：

頂點為 5x5x5 棋盤，偶數層，頂點數為 15（奇數）-先下者得勝



⇒

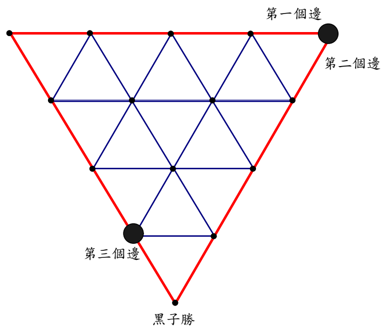
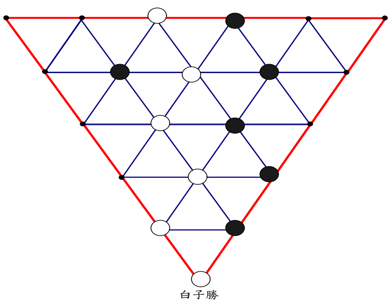


圖 3-2-7　　　　圖 3-2-8

在不失一般性之下，$\boxed{\text{先下者恆勝}}$，其勝利的路徑至少經過 4 個邊、5 個點；勝利條件$\boxed{\text{最少 5 個同色點}}$。

⑤ $\ell=5$，$n=6$ 時：

頂點為 6x6x6 棋盤，奇數層，頂點數為 21（奇數）-先下者得勝



⇒

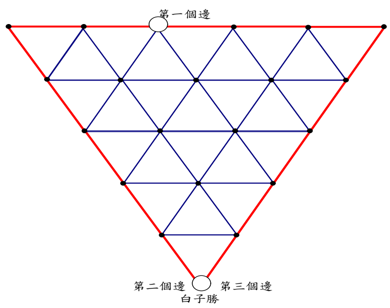


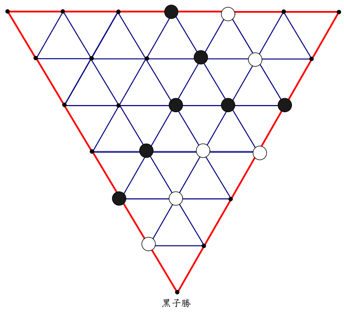
圖 3-2-9　　　　圖 3-2-10

在不失一般性之下，$\boxed{\text{先下者恆勝}}$，其勝利的路徑至少經過 5 個邊、6 個點；勝利條件

最少 6 個同色點。

⑥ ℓ =6， n =7 時：

頂點為 7x7x7 棋盤，偶數層，頂點數為 28（偶數）–先下者得勝



⇒

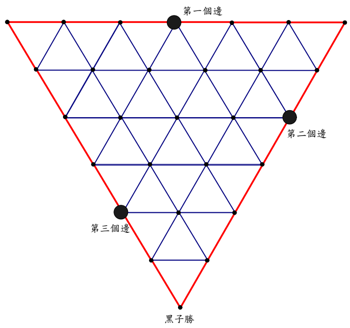


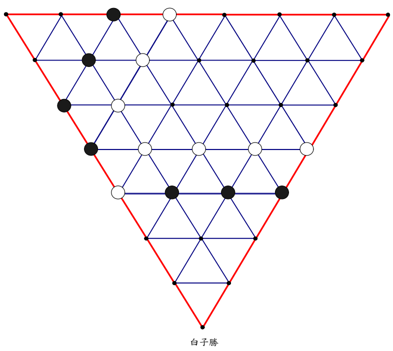
圖 3-2-11　　　　　　　　　　圖 3-2-12

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 6 個邊、7 個點；勝利條件最少 7 個同色點。

---

⑦ ℓ =7， n =8 時：

頂點為 8x8x8 棋盤，奇數層，頂點數為 36（偶數）–先下者得勝



⇒

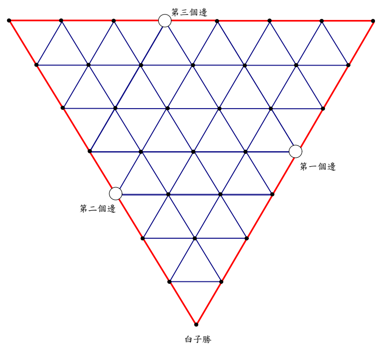


圖 3-2-13　　　　　　　　　　圖 3-2-14

在不失一般性之下，先下者恆勝，其勝利的路徑至少經過 7 個邊、8 個點；勝利條件最少 8 個同色點。

---

⑧ ℓ =8， n =9 時：

頂點為 9x9x9 棋盤，偶數層，頂點數為 45（奇數）–先下者得勝

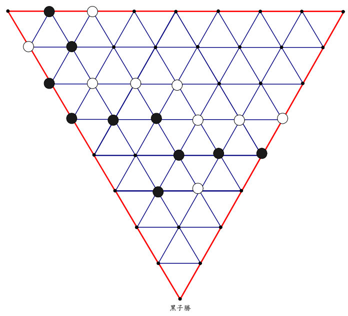
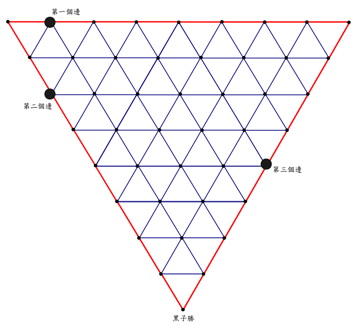
 ⇒ 

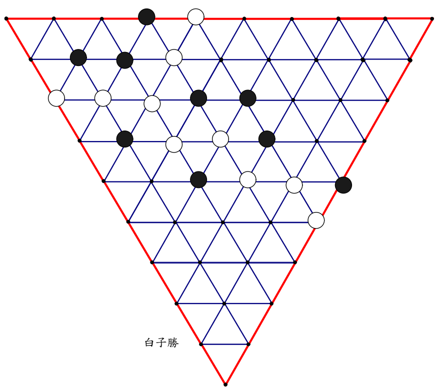
圖 3-2-15　　　　圖 3-2-16

在不失一般性之下，$\boxed{\text{先下者恆勝}}$，其勝利的路徑至少經過 8 個邊、9 個點；勝利條件 $\boxed{\text{最少 9 個同色點}}$。

---

⑨ ℓ=9，n=10 時：

頂點為 10x10x10 棋盤，奇數層，頂點數為 55（奇數）－先下者得勝



⇒

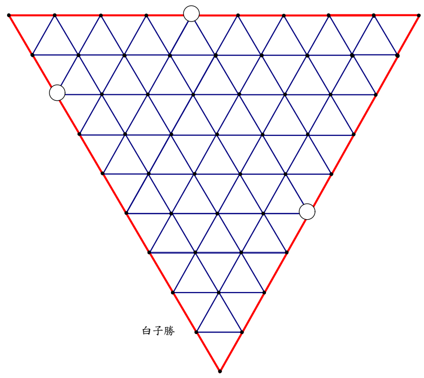


圖 3-2-17　　　　圖 3-2-18

在不失一般性之下，$\boxed{\text{先下者恆勝}}$，其勝利的路徑至少經過 9 個邊、10 個點；勝利條件 $\boxed{\text{最少 10 個同色點}}$。

（由上類推）

設 $\ell = k$，$n = k+1$ 時（$k \geq 2$ $k \in N$）：頂點為 $k \times k \times k$ 棋盤，頂點數為 $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$－先下者得勝。在不失一般性之下，$\boxed{\text{先下者恆勝}}$，其勝利的路徑至少經過 k 個邊、$k+1$ 個點；勝利條件 $\boxed{\text{最少 } k+1 \text{ 個同色點}}$。

由圖 3-2-1 至圖 3-2-18（即 ℓ=1−9）時，我們試驗各方面的下棋方法，在 $T_l = 1$ 時因為有三個頂點，所以，我們可以很清楚的了解先下者一定獲勝－『鴿籠原理』，而在不失一般性之下，先下者最少要下 n 次，方可獲勝。

在一個$n \times n \times n$的三角形棋盤T_l，在不失一般性之下，先下者最少要n次，方可獲勝。（即:先下棋者是否有利？若是，必勝策略如何？）

證明：設一個 n×n×n 的三角形棋盤T_l。則$n=\ell+1$（$n \geq 1 \cap n \in N$）

①n=1 時；先下者恆勝。

②由n=2 時；如圖 3-2-1 中的結果（或窮舉法、『鴿籠原理』），我們可知頂點數為 3，所以先下者有比後下者多一次的機會，故在不失一般性之下，先下者恆勝。

③同理設$n=k$、$(k \in N)$時，在不失一般性之下，先下者恆勝的條件成立。

④若$n=k+1$時；先參考下列三種情形，例:(ℓ=8，n=9)

◇① **白棋在端點上**：如右圖，若先下者將白棋下於大三角形的端點，則在不失一般性之下，先下者恆勝的條件，最少要沿著大三角形周界內的衍生子圖走完 9 步，才可獲勝。

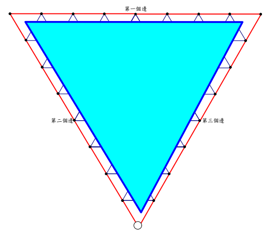


圖 3-2-19：白子在端點上

◇② **白棋在周界上**：如右圖，若先下者將白棋下於大三角形周界上（非端點），則在不失一般性之下，先下者恆勝的條件，最少要沿著相鄰大三角形周界內的二個衍生子圖的周界走完 9 步，才可獲勝。

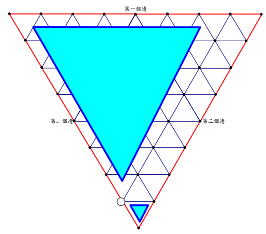


圖 3-2-20：白子在周界上

◇③ **白棋在衍生子圖的某一交點上**：如右圖，若先下者將白棋下於大三角形衍生子圖內的任一交點，則在不失一般性之下，最少要沿著相鄰大三角形周界內的三個衍生子圖的周界走完 9 步，才可獲勝。

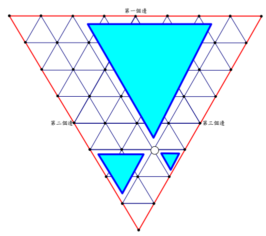


圖 3-2-21：白子在大三角形內

由(ℓ=8，n=9)這個例子，我們可以推廣至$n=k+1$時，先下者在不失一般性之下，恆勝的條件最少要下$k+1$次，而由窮舉法得知，對任一邊數的三角形棋盤其可能情形不外乎上述三種情形，因此，由數學歸納法可知，原敘述為真。

故①先下棋者在不失一般性之下恆勝。②先下者最少要下n個步驟才會勝利，其最佳的必勝策略，為沿著第一棋子之後所分割出的衍生子圖（如圖 3-2-19 至 3-2-21）才有最少步驟獲得勝利。

（二）兩人對奕，可任意更換棋子顏色

設有一個$n \times n \times n$的三角形棋盤T_l。則ℓ（層數）和n（周界的頂點數）的關係為$n = \ell + 1$（$n \geq 1 \cap n \in N$）。實驗分析：由 2x2x2 棋盤開始討論至 6x6x6 的棋盤，分析結果如下：圖 3-2-22 至 3-2-27。

（數學歸納法）

①ℓ=1，n=2 時：

頂點為 2x2x2 棋盤，奇數層，頂點數為 3（奇數）-後下者得勝

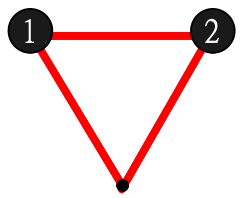


圖 3-2-22

在不失一般性之下，$\boxed{\text{後下者恆勝}}$，其勝利的路徑至少經過 1 個邊、2 個點；勝利條件$\boxed{\text{最少 2 個同色點}}$。

---

②ℓ=2，n=3 時：

頂點為 3x3x3 棋盤，偶數層，頂點數為 6（偶數）-後下者得勝

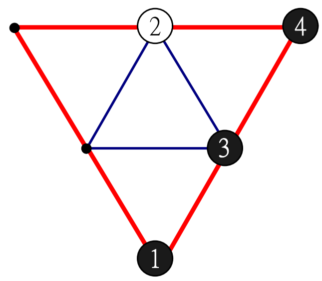


圖 3-2-23

在不失一般性之下，$\boxed{\text{後下者得勝}}$，其勝利的路徑至少經過 2 個邊、3 個點；勝利條件$\boxed{\text{最少 3 個同色點}}$。

【特例：先下者得勝的情況】

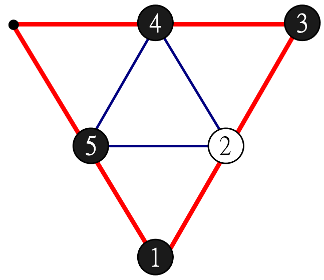


圖 3-2-24

③ $\ell=3$，$n=4$ 時：

頂點為 4x4x4 棋盤，奇數層，頂點數為 10（偶數）-後下者得勝

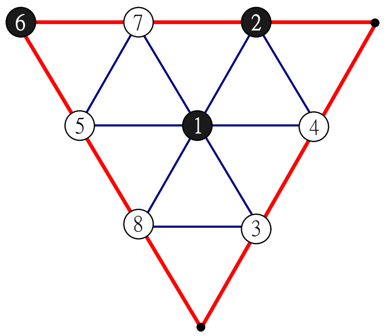


圖 3-2-25

在不失一般性之下，$\boxed{\text{後下者得勝}}$，其勝利的路徑至少經過 3 個邊、4 個點；勝利條件 $\boxed{\text{最少 4 個同色點}}$。

④ $\ell=4$，$n=5$ 時：

頂點為 5x5x5 棋盤，偶數層，頂點數為 15（奇數）-先下者得勝

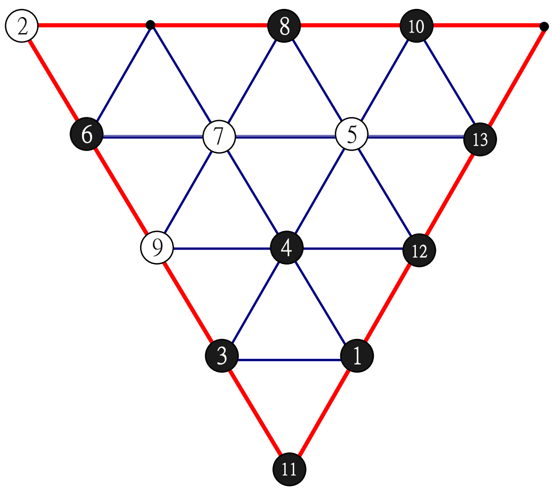


圖 3-2-26

在不失一般性之下，$\boxed{\text{先下者得勝}}$，其勝利的路徑至少經過 4 個邊、5 個點；勝利條件

最少 5 個同色點。

⑤ $\ell=5$，$n=6$ 時：

頂點為 6x6x6 棋盤，奇數層，頂點數為 21（奇數）−先下者得勝

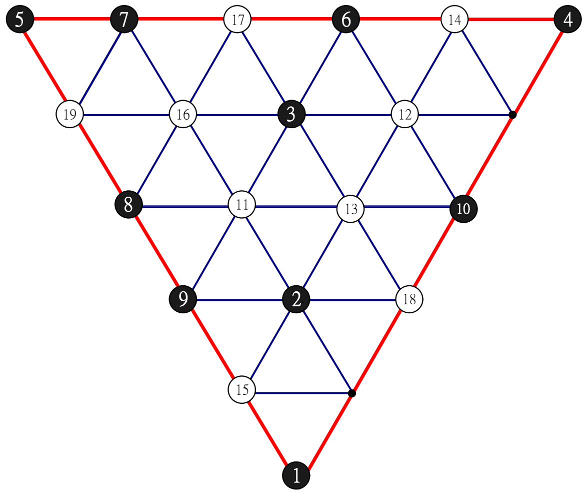


圖 3-2-27

在不失一般性之下，先下者得勝，其勝利的路徑至少經過 5 個邊、6 個點；勝利條件最少 6 個同色點。

可歸納出結果如下表：

ℓ（層數）	總頂點數	獲勝連通集的最少頂點數（最快獲勝步數）	勝方
1	$a_1=1+2=3$（奇數）	2	後下者
2	$a_2=1+2+3=6$（偶數）	3	後下者
3	$a_3=1+2+3+4=10$（偶數）	4	後下者
4	$a_4=1+2+3+4+5=15$（奇數）	5	先下者
5	$a_5=1+2+3+4+5+6=21$（奇數）	6	先下者
6	$a_6=1+2+3+4+5+6+7=28$（偶數）	7	後下者
7	$a_7=1+2+\cdots+7+8=36$（偶數）	8	後下者
8	$a_8=1+2+\cdots+8+9=45$（奇數）	9	先下者
9	$a_9=1+2+\cdots+9+10=55$（奇數）	10	先下者

推論 $a_n=1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

由數學歸納法我們可以很明顯地證出，當有n層棋盤時會有$\boxed{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$的空格可以填入（總頂點數），所以如果遊戲在進行開始前，玩家可以先依層數產生的總頂點數來評估先下或後下何者較有利的情形。

肆、 討論(Discussion)

我們成功地解決作者所留下的三個問題:（1）玩家不可更換棋色時，先下棋者是否有利？（2）若是，他的必勝策略如何？（3）玩家可任意更換棋色時，其結果如何？前二個問題為玩家不可更換棋色，則『先下者恆有獲得勝利的先機』，而勝利的方式為沿著『第一個棋子所下的位置為始點的衍生子圖周界』走。一般在兩人對奕的遊戲中，如果可以在有限步驟內完成，且存有勝負之分，則存有必勝法則[5]。

定理：兩人對奕的遊戲中，遊戲在有限步驟內完成且有勝負之分，則必定存在著『必勝法則』。

證明：(數學歸納法)我們對於『步數』做數學歸納法：若遊戲進行一步就結束，則先下者為贏。因此，有『必勝法則』。若遊戲進行兩步就結束，則進行完第一步後，再下一步則必分勝負。因此，下第一步者必盡量使其達到必勝的狀況，除非所有情況都導致先下者敗，所以，必有『必勝法則』。假設遊戲進行n步就結束，由

①若n=1、2 時，存在著『必勝法則』。

②設$n=k\geqq 2$時存在著『必勝法則』。

③則$n=k+1$時，當先下者下了第一步時，此時，遊戲變成k步結束，由前假設知必有『必勝法則』，可能是先下者也可能是後下者。若先下者下的第一步可使其達到$n=k$的必勝狀態，則先下者便有『必勝法則』；反之，若先下者在下第一步後，無法達到$n=k$的必勝狀態，則後下者有『必勝法則』。則$n=k+1$時確實存在著必勝法則。故由數學歸納法得證。

因此，兩人在棋盤中以黑、白棋輪流下子對奕必可分出勝負，先下棋者，在求勝利且不下錯棋的情況之下（即不失一般性的結果），才可以由『必勝法則』取得勝利。因

此，由研究結果發現可以歸納出本遊戲的必勝法則為：『先下者保持攻勢，在不失一般性之下，先下者恆得勝』。其實，當我們在研究下棋時，我們發現另一個簡單的證明方式，因為先下者如果下在棋盤內的頂點，後下者若想圍堵該頂點的出路，則有 6 種可行的路徑，且其第二步棋最好下在如圖 4-1 的 6 個頂點中的一個，因此時若對方阻擋了一條路，尚有另一條路可走，自然不易圍堵。即使先下者下在端點上，也有 2 種可行的路徑可走，因此，在不失一般性之下，自然先下為勝。若下棋者不一定要在開始比賽前預先選定好棋子的顏色，棋手可以在每下一步棋時才選用他認為最有利的顏色棋子，誰下最後一棋子後，得到一個同色的連通集便是勝方，即兩人對奕，可任意更換顏色時，其結果如何？此時，可在遊戲進行開始前，玩家先依層數產生的頂點數來做評估，總頂點數若是奇數，則選擇先下者較為有利；總頂點數若是偶數，則選擇後下者較為有利。

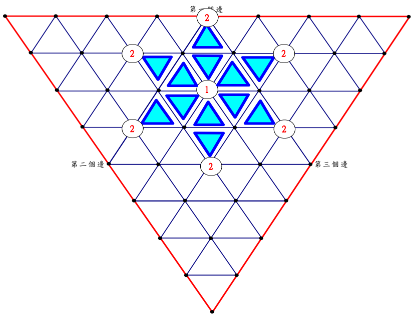


圖 4-1

3 維空間遊戲方法：以三維棋盤下棋且玩家不可更換棋色時，先下棋者是否有利？若是，他的必勝策略如何？玩法如圖 4-2，將平面三角形棋盤改至三維四面體，且仍維持二人遊戲，每人分別使用不同顏色的棋子。輪流將棋子放在四面體棋盤的頂點及交點上，若其中一人的棋子能組成一連通集(滿足定義四中(1)及(2)兩條件)，且定義二中的三角形板的周界改成四面體的四個面，那人就是得勝者。

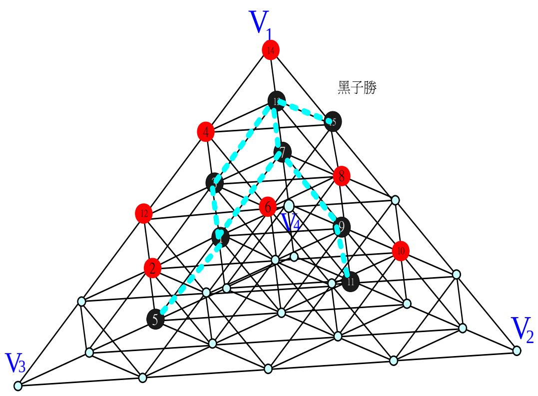


圖 4-2

伍、 結論(Results)

一、基本研究結論-2 維空間

經過無數次的實驗發現：

（1）玩家在不可更換棋色時，先下棋的玩家比較可以掌握致勝先機，無論三角形頂點數為何，玩家一定要掌握先機先下為勝。

（2）在一個 $n\times n\times n$ 的三角形棋盤下，玩家最少要下 n 次，方可獲勝，而獲勝的最佳策略為沿著圖 3-2-19 至圖 3-2-21 的藍色區域及其周界連續進攻，所獲勝的結果最快。

（3）在下棋時棋手可以任意選擇棋子顏色的進階玩法中，我們發現另一個有趣結果，也就是說這時候不再只是先下者較易為勝的情形如此簡單，而是要去分析棋盤的層數及其總頂點數，我們也得到初步的歸納結果，也就是在黑白棋輪流下且棋手下棋可不拘棋子顏色時（下到全部位置都填滿為止），在不失一般性之下且層數在 3 層之上時，我們可推論出下列二種結論：

1. 總頂點數為奇數時，先下者易獲勝，例如：5 層的棋盤中其總頂點數為 21，先下者易獲勝。
2. 總頂點數為偶數時，後下者易獲勝，例如：6 層的棋盤中其總頂點數為 28，後下者易獲勝。

我們成功地解決作者未完成的問題[1]，並進一步來探索出其結果作為本文研究的目標，因此，可以說此次的實驗有著完美的結果。

二、進階研究結論-3 維空間

由於正常下棋玩遊戲，幾乎都在平面上進行，而在我們經過二維平面的實際探討成功之後，更進而嘗試推廣至三維空間的棋盤，即空間中的正四面體、如下圖 5-1，在正

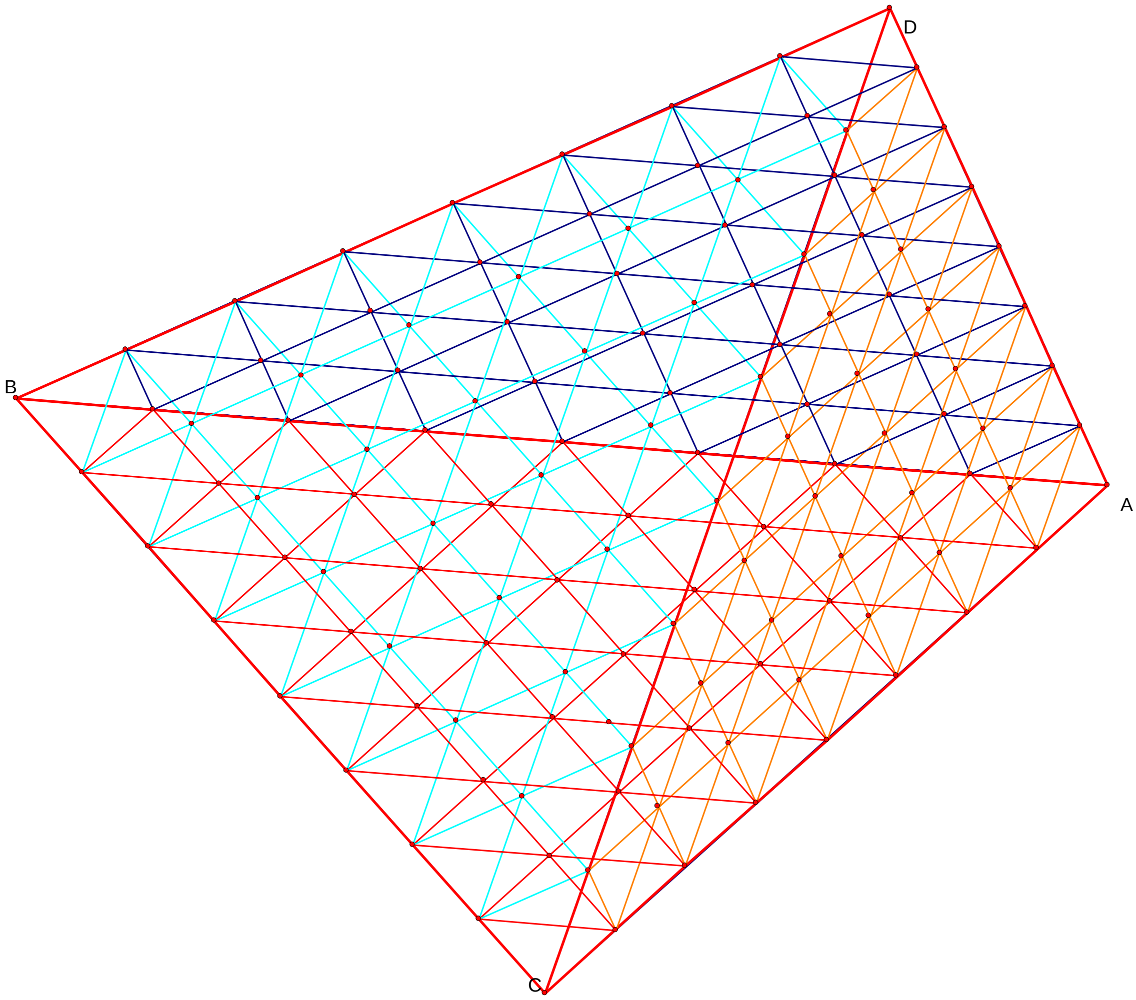


圖 5-1：空間棋盤圖

四面體 *ABCD* 中，我們發現一些有趣的結果（1）因正四面體 *ABCD* 有四個正三角形，因此將正四面體 *ABCD*，由頂點 *D* 剪開可以得到我們前面所提的大三角形，如圖 5-2

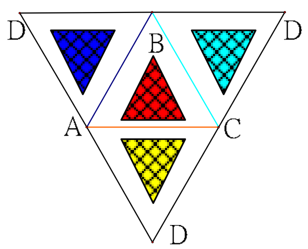


圖 5-2

，因此如果我們將三角形予以‘三角化’圖 5-1 將轉變成一個大三角形如圖 3-5 且有很多小三角形的分割（partition），如果遊戲玩法不改變（依本節一基本研究結論）則仍然有我們所分析出的結果。

（2）我們嘗試將遊戲依照不換色的方式下到三維的空間中，也就是可以下到正四面體

的內部中心及其表面，且遊戲規則從原本在平面時必須連通至三個邊擴展至正四面體的四個面，故要下到連通四個平面（修正理由：由 Sperner Lemma 推廣至三維的空間分析方式[7]）。因此我們也得出二個結論，即先下手的玩家在不失一般性之下仍然會獲勝，分析如下：

在一個正四面體中，每一個面為$n\times n\times n$的三角形棋盤T_l，在不失一般性之下，先下者最少要下n次，方可獲勝。（即:先下棋者是否有利？若是，必勝策略如何？）

證明：設在正四面體中的棋盤T_l。則$n=\ell+1$（$n\geq 1\cap n\in N$）

①n=1 時（即空間中的一個點）；先下者恆勝。

②由n=2 時；如圖 5-3 中及圖 5-4 的結果黑棋勝（窮舉法、『鴿籠原理』），我們可知頂點數為 4，所以先下者有比後下者多一次的機會，故在不失一般性之下，

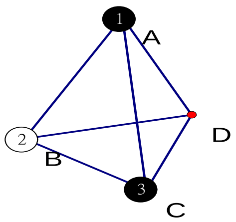


圖 5-3 黑子勝

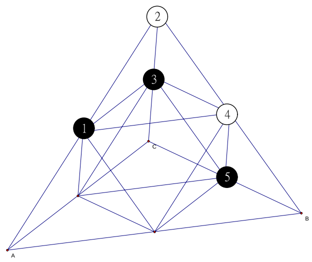


圖 5-4 黑子勝

先下者恆勝。

③同理設$n=k$ $(k\in N)$時，在不失一般性之下，先下者恆勝的條件成立。

④若$n=k+1$時；先參考下列三種情形，例:(ℓ=8，n=9)

◇①白棋在端點上：如圖 5-5，若先下者將白棋下於正四面體的端點，則在不失一般性之下，先下者恆勝的條件，最少要沿著正四面體的稜線走完 9 步（因正四面體的稜線共 9 點，且每一點有 3 條可選擇路徑），才可獲勝。（三維透視圖如 5-5-1）

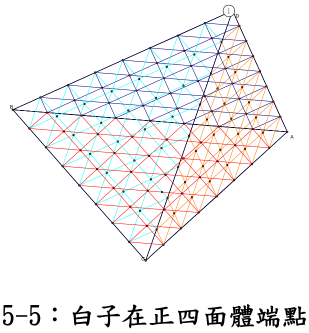


圖 5-5：白子在正四面體端點上

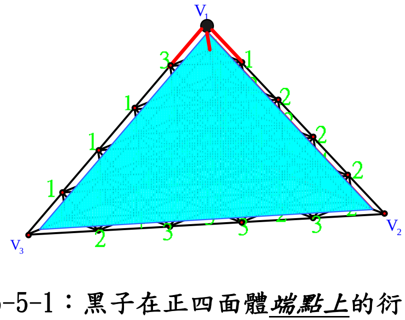


圖 5-5-1：黑子在正四面體*端點上*的衍生子圖

②**白棋在稜線上：**如圖 5-6，若先下者將白棋下於正四面體稜線上（非端點），則在不失一般性之下，先下者恆勝的條件，最少要沿著相鄰正四面體的任一面大三角形稜線內的二個面（此時每一點有 6 條可選擇路徑）走完 9 步，才可獲勝。（三維透視圖如 5-6-1）

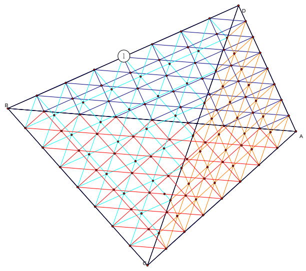


圖 5-6：白子在正四面體周界上

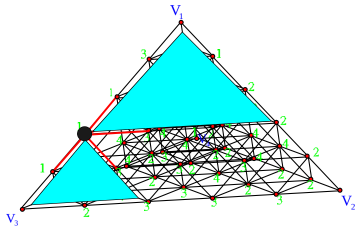


圖 5-6-1：黑子在正四面體*稜線上*的衍生子圖

③**黑棋在正四面體圖的表面上非稜線上任一點：**如圖 5-7，若先下者將黑棋下於正四面體的任一面三角形子圖的表面上內的任一交點，則在不失一般性之下，最少要沿著相鄰路徑（此時每一點有 9 條可選擇路徑）走完 9 步，才可獲勝。（三維透視圖如 5-7-1）

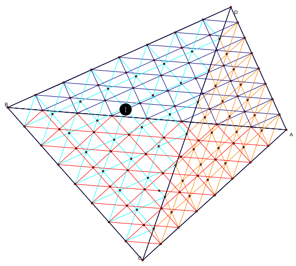


圖 5-7：黑子在正四面體的任一面上

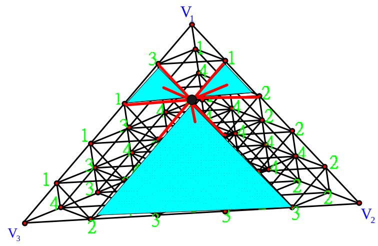


圖 5-7-1：黑子在正四面體*面上非稜*的衍生子圖

④**黑棋在正四面體圖的內部：**如圖 5-8，若先下者將黑棋下於正四面體的任一面三角形圖內的任一交點，則在不失一般性之下，最少要沿著相鄰路徑（此時每一點有 12 條可選擇路徑）走完 9 步，才可獲勝。（三維透視圖如 5-8-1）

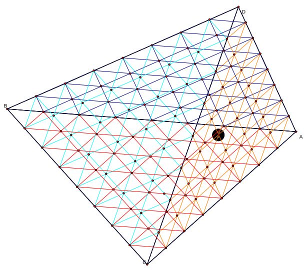


圖 5-8：黑子在正四面體的內

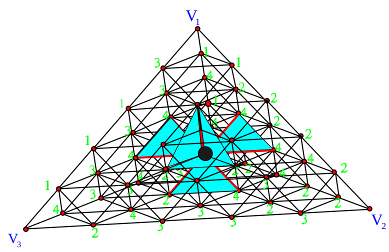


圖 5-8-1：黑子在正四面體*內*的衍生子圖

由(ℓ=8，n=9)這個例子，我們可以推廣至$n=k+1$時，先下者在不失一般性之下，恆勝的條件最少要下$k+1$次，而由窮舉法得知，對任一邊數的正四面體棋盤其可能情形不外乎上述四種情形，因此，由數學歸納法可知，原敘述為真。

由進階研究推廣部分，我們得出下列結果：

（1）玩家在不可更換棋色時，先下棋的玩家比較可以掌握致勝先機，無論正四面體頂點數為何，玩家一定要掌握先機先下為勝，而且在維度更高時，由於先玩的玩家可以選擇的路徑就更多，例如：在二維平面，時下在三角形端點有 2 條路線可選擇，但在三維空間時，正四面體卻有 3 條路線可選擇。

（2）在一個邊長有n個頂點的正四面體棋盤，玩家最少要下n次，方可獲勝，而獲勝的最佳策略為沿著圖 5-5 至圖 5-8 建議的方式連續進攻，也就是說最好玩家可以先下在正四面體的內部任一點，因為此時內部任一點會有 12 條路徑（即凸 14 面體的中心點）可供選擇，所獲勝的結果最快。

三、研究總結

本次實驗由二維平面推至三維空間中，除了想強調本組的創意及補充潘建強、邵慰慈二位教授在其文章[1]中未完成的說明之外，更想利用一套簡單的遊戲介紹 Sperner Lemma[7]的性質，而在本組的研究中，我們發現最快完成勝利的方式即連通二維平面三角形的”邊上的點”或是三維空間正四面體的”稜上的點”，因為上述二者恰好各是其不動點的位置，而且由平面的思考方式拓展至空間中正四面體的凸集合也正是在歐氏空間中討論的一個幾何n維單純形（Geometric n-Simplex），也就是遊戲中的頂點集（Vertices）即v_0、v_1、⋯、v_n等，而由平面遊戲推廣至三維遊戲也正如同，在一個幾何n維空間中考慮一個n維單純形a_0、a_1、⋯、a_n中的三角形分割K，並令$\widetilde{K}=\{v_0,v_1,\cdots,v_k\}$而$\widetilde{K}$可以生成$K$中的一個單純形，則$\widetilde{K}$是一個複合形，即遊戲中的棋盤格本身，也就是$K$中的頂點系統（Vertex Scheme）。而在下棋時我們發現最快獲勝的路徑是由頂點沿著邊線或稜線所構成的連通集，而端點、邊線或稜線上的棋盤格，正好也是其不動點的位置，因此也驗證了當年 Sperner 提出這套方法來簡化對 Brouwer's 的不動點證明。

陸、 參考資料(References)

[1] 潘建強、邵慰慈，Sperner引理及其應用，數學傳播108期，2003。

[2] 張　垚 編著，數學競賽中的組合問題，上海華東師大出版社，2005。

[3] 熊　斌、鄭仲義 編著，圖論，上海華東師大出版社，2005。

[4] 傅恆霖，圖上的數字，數學傳播十九卷三期，1995。

[5] 陳健儒、陳褘中、林芷音、董佳玲，「矩」棋不定，中華民國第四十六屆中小學科學展，2006。

[6] 李炯生，棋盤染色問題與二部 Ramsey 數，數學傳播 83 期，1997。

[7] Jonathan Huang，On The Sperner Lemma And Its Applications，from www.cs.cmu.edu/~jch1/research/old/sperner.pdf [英文]。

[8] Brouwer's Fixed Point Theorem，from，http://cepa.newschool.edu/het/essays/math/fixedpoint.htm [英文]。

評語

本作品係研究在四面體上所設計空間棋盤得獲勝策略，其策略引用 Sperner 引理來建構，然推導過程中似未能充分理解數學歸納法之本質。另外，科展之介紹宜以最熟悉的語言，較能呈現完整之成果。