臺灣二〇〇八年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作品名稱：六圓定理

得獎獎項：第三名

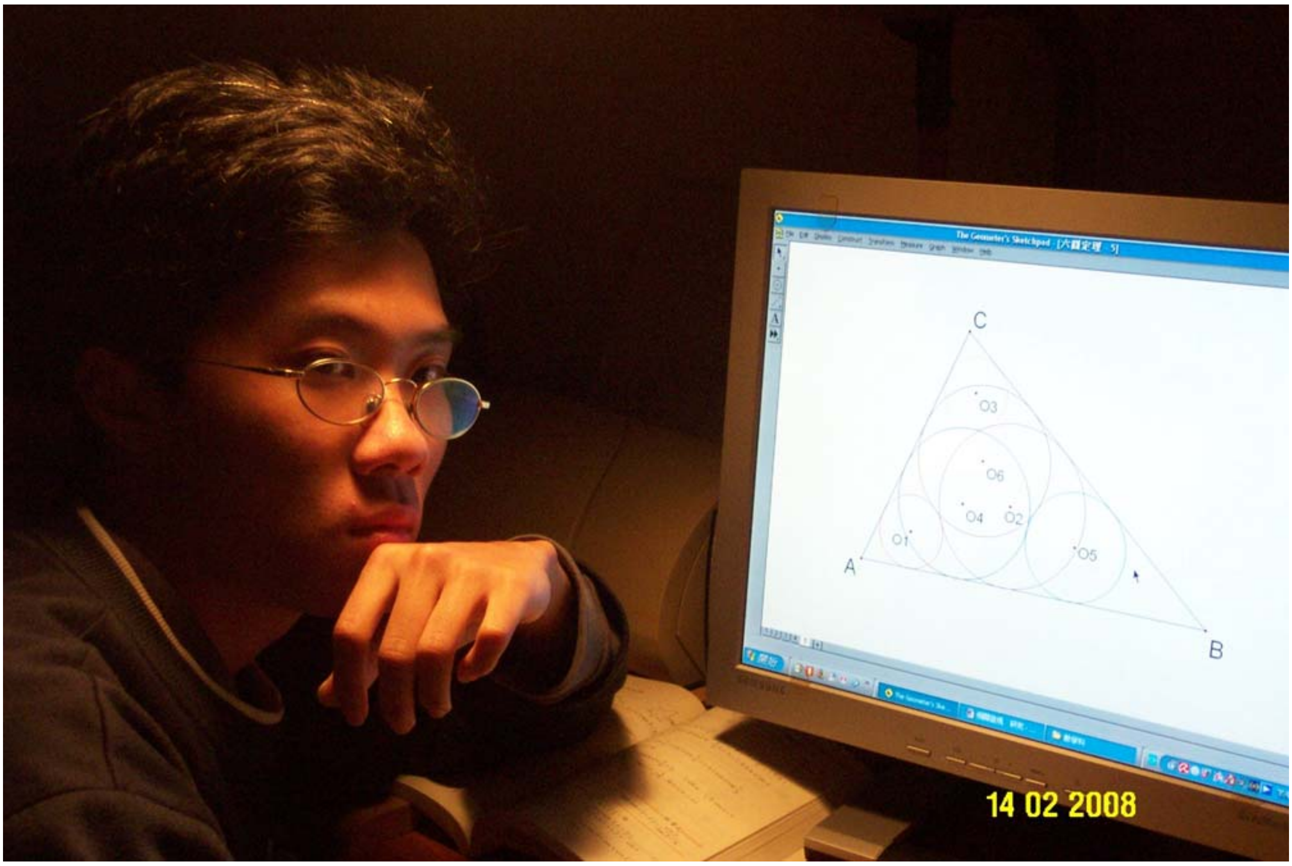
學校／作者：國立新竹科學工業園區實驗高級中學　曾士豪

六圓定理

Six Circles Theorem

目次

作者簡介



↑曾士豪（顯然是左邊的那個）

我是一名普通的高三生，愛好棋藝、音樂、棒球、數學，而它們也伴我度過了沉悶的高三上。

數學是一門奧妙的學問，而幾何可以說是其中最富有美感的一支，我對這簡明而和諧的世界十分著迷。在幾何中，又屬平面幾何最吸引我。在神奇的輔助線、關鍵的相似型中，蘊含著驚人的性質。解幾何題就好像掘井，「九軔而不及泉，猶為棄井也。」但是，我相信，只要持續不懈地努力，總有挖到寶的一天，而寶藏絕不會令掏金客失望。

六圓定理

英文摘要(Abstract)

Six Circles Theorem

In 2007 National Experimental High School Science Exhibition, one of the exhibit works, "*Inscribed Circles in Triangles*", shows that the centers of the consecutive inscribed circles has something to do with the parabola's trajectory. To learn more about inscribed circles and parabolas, I referred to literature. By accident, I am faced with the problem on *six circles theorem*, in the book *The Small Flower of Plane Geometry*(平面幾何中的小花). Out of my interest in this problem, I tried to prove it. The other results are as follows:

With the initial circle of six circles moved, in certain circumstances, the six circles merge into three. Further in studying this coincidence leads to an algebraic method to solve the Malfatti's Problem.

Applying six circles theorem to the odd-number-sided polygons exists the same characteristic. It indicates that the inscribed circles will form a cycle. However, it hasn't been successfully proven. The even-number-sided polygons show no similar results.

中文摘要

六圓定理

在實驗中學2007年校內科展，參展作品《三角形中的切圓》的研究中，研究三角形內的切圓時，發現連續切圓的圓心與拋物線的軌跡有關。於是去查資料，在偶然的情況下，翻閱《平面幾何中的小花》時，接觸了「六圓定理」。因為覺得這問題非常有趣，於是便著手證明（見報告內文）。

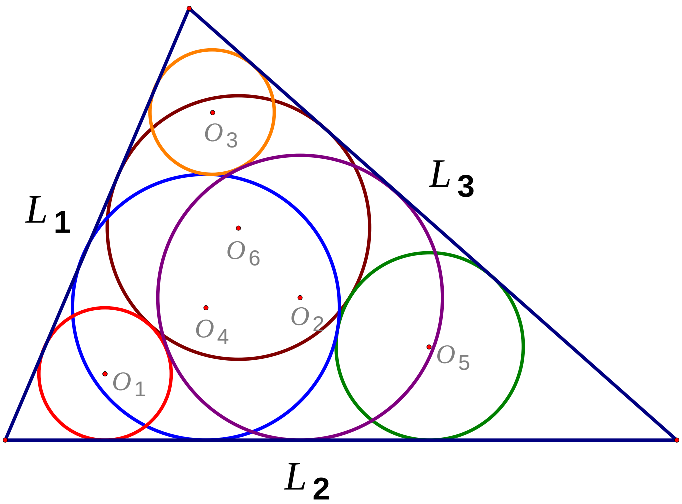
又發現，當移動六個圓中的起始圓時，總是在某種情況下，六個圓會重合成三個圓。繼續研究其重合的狀況，發現了馬爾法蒂問題（Malfatti’s Problem）的一種代數解法。

當我試著推廣六圓定理至多邊形時，發現奇數邊的多邊形似乎也有如六圓定理般圓循環的狀況，於是著手證明，但目前尚未證明成功。而偶數邊的多邊形則無類似的結果。

壹、研究動機：

在單墫教授所著《平面幾何中的小花》一書中，在書末提到下列的問題，並徵求解答：

「給定一個三角形，對其中兩個邊 L_1、L_2 作切圓，設為 O_1，接著對 L_2、L_3 及 O_1 作切圓，設為 O_2，同理作切圓 O_3、O_4、O_5、O_6，試證：O_6 與 O_1 相切。」如圖（一）所示。此問題在 MathWorld 網站上被稱為「六圓定理（six circles theorem）」，由於查不到此定理的證明，在好奇心的驅使之下，於是著手嘗試證明。



圖（一）

貳、研究目的：

一、證明「六圓定理」。
二、研究原命題與馬爾法蒂問題（Malfatti's Problem）的關連。
三、推廣原命題至多邊形。

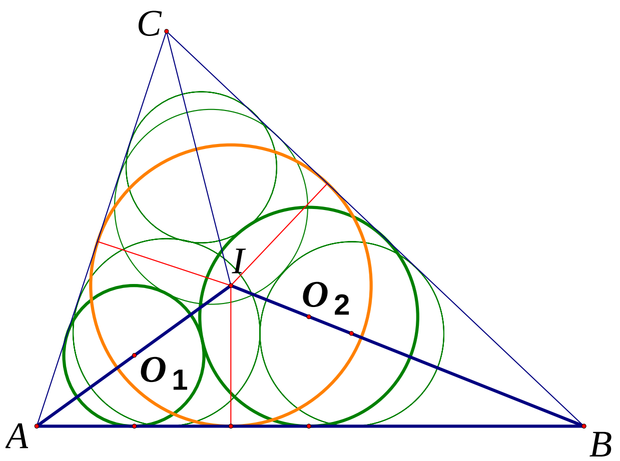
參、研究器材與設備：

一、紙
二、筆
三、GSP 幾何畫板
四、Word 文書處理程式
五、Math Type 方程式編輯器

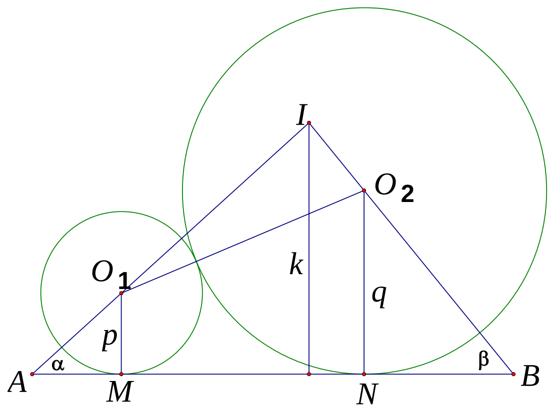
肆、研究過程：

一、六圓定理的證明：

如圖（二）所示，三角形 ABC 中，對任意圓 Oi（i＝1、2、3、…、6），都與三角形 ABC 其中的兩邊相切，所以，其圓心都落在三角形的內角平分線上。考慮圖（二）中粗線的部份，如圖（三）所示。



圖（二）



圖（三）

如圖（三）中，令 k 爲 ΔABC 的內切圓半徑，p、q 爲相外切之兩圓 O_1 、 O_2 的半徑，O_1 、 O_2 兩圓分別切 $\overline{AB}$ 於 M、N，$\alpha=\dfrac{1}{2}\angle A$ ，$\beta=\dfrac{1}{2}\angle B$ 。

設 $\overline{MN}$ 爲 d，則

$d=\sqrt{(p+q)^2-(p-q)^2}=2\sqrt{pq}$ ，

又 $d=k(\cot\alpha+\cot\beta)-p\cot\alpha-q\cot\beta$ ，

由上述兩式得 q 的一元二次方程式：

$[k(\cot\alpha+\cot\beta)-p\cot\alpha-q\cot\beta]^2=4pq$ ，

解方程式得：

$$q=\frac{(\pm\sqrt{k\cot\beta(\cot\alpha+\cot\beta)+p(1-\cot\alpha\cot\beta)}-\sqrt{p})^2}{\cot^2\beta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{（1）}$$

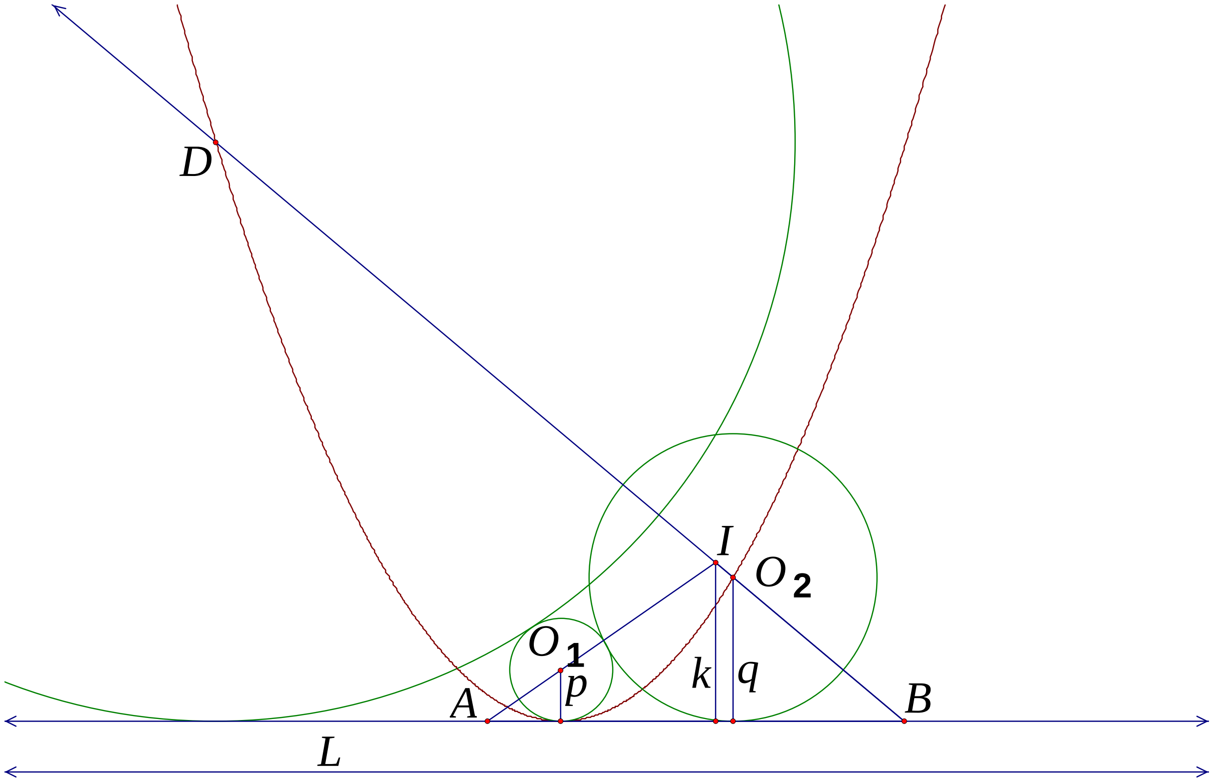
探討上述解的意義：

以圓心 O_1 爲焦點，M 爲頂點，作一拋物線 Γ ，且此拋物線的準線爲直線 L，如圖（四）所示。

又 $\overline{O_1O_2}=p+q$ ，且圓心 O_2 到直線 L 的距離＝p＋q，所以圓心 O_2 落在拋物線 Γ 上。

而上述 q 的解就是該拋物線與 $\angle B$ 斜邊的交點，

故求解此方程式有兩解（如圖中 D 與 O_2 ），取正，解的值較小，爲要求的解（ O_2 之半徑），另一解爲外側，不合（即圖中 D 點）。



圖（四）

現設圓O_i的半徑＝R_i，$i=1,2,\ldots$，即$R_1=p$，$R_2=q$，代入（1）式，得

$$R_2=\frac{(\sqrt{k\cot\beta(\cot\alpha+\cot\beta)-R_1(\cot\alpha\cot\beta-1)}-\sqrt{R_1})^2}{\cot^2\beta},$$

又利用和角公式$\cot\alpha+\cot\beta=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot(\alpha+\beta)}$，得

$$R_2=\frac{(\sqrt{(\cot\alpha\cot\beta-1)[k\dfrac{\cot\beta}{\cot(\alpha+\beta)}-R_1]}-\sqrt{R_1})^2}{\cot^2\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由於α,β是三角形其中兩個角的半角，故$\alpha+\beta\le\dfrac{\pi}{2}$，又$\cot\theta$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$爲遞減函數，所以

$\dfrac{\cot\beta}{\cot(\alpha+\beta)}\ge 1$。

故可令$R_1=\dfrac{k\cot\beta}{\cot(\alpha+\beta)}\sin^2\theta$，其中，我們取適當之$\theta$，使得$R_1\le k$。代入（2）式，得

$$R_2=\frac{k}{\cot(\alpha+\beta)}\cdot\frac{(\sqrt{\cot\alpha\cot\beta-1}\cos\theta-\sin\theta)^2}{\cot\beta}。$$

因爲$\cot\alpha\cot\beta\ge 0$，所以

$$R_2=\frac{k\cot\alpha\cot\beta}{\cot(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha\cot\beta}}\cos\theta-\sqrt{\frac{1}{\cot\alpha\cot\beta}}\sin\theta\right)^2}{\cot\beta}$$ ，

令 $\sin\varphi_{\alpha\beta}=\sqrt{\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha\cot\beta}}$ ，則 $\cos\varphi_{\alpha\beta}=\sqrt{\frac{1}{\cot\alpha\cot\beta}}$ ，

故 $R_2=\frac{k\cot\alpha}{\cot(\alpha+\beta)}(\sin\varphi_{\alpha\beta}\cos\theta-\cos\varphi_{\alpha\beta}\sin\theta)^2$ 。

利用和角公式 $\sin A\cos B-\cos B\sin A=\sin(A-B)$ ，得

$$R_2=\frac{k\cot\alpha}{\cot(\alpha+\beta)}\sin^2(\varphi_{\alpha\beta}-\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（3）$$

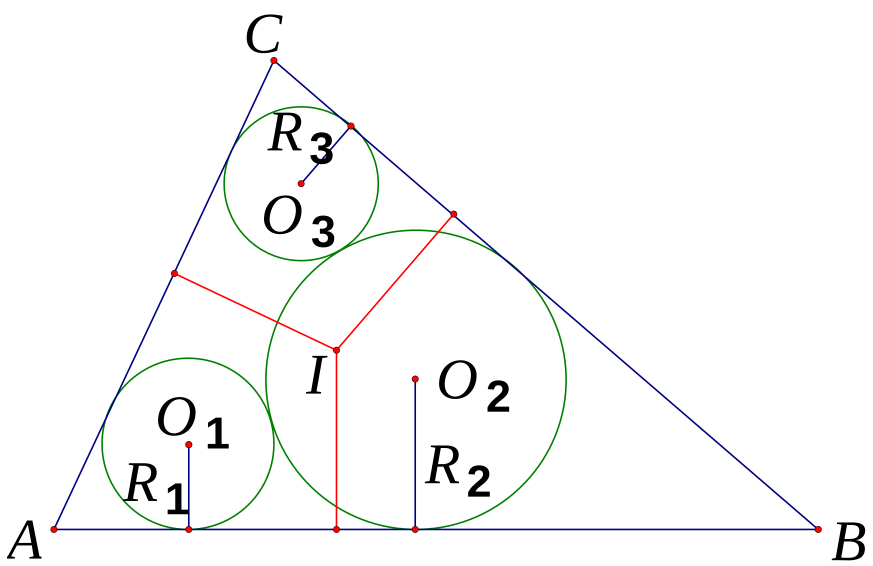
令 $\frac{1}{2}\angle C=\gamma$ ，所以 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ ，則

$\cot(\alpha+\beta)=\cot(\frac{\pi}{2}-\gamma)=\tan\gamma=\frac{1}{\cot\gamma}$ ， $\cot\alpha=\tan(\beta+\gamma)=\frac{1}{\cot(\beta+\gamma)}$ ，代入（3）得

$$R_2=\frac{k\cot\gamma}{\cot(\beta+\gamma)}\sin^2(\varphi_{\alpha\beta}-\theta)$$ 。

設 $\sin\varphi_{\beta\gamma}=\sqrt{\frac{\cot\beta\cot\gamma-1}{\cot\beta\cot\gamma}}$ ， $\sin\varphi_{\alpha\gamma}=\sqrt{\frac{\cot\alpha\cot\gamma-1}{\cot\alpha\cot\gamma}}$ ，同理可得，對下一個角 $\angle C$ 的切圓 O_3 的半徑 R_3 ，

$$R_3=\frac{k\cot\beta}{\cot(\beta+\gamma)}\sin^2(\varphi_{\beta\gamma}-\varphi_{\alpha\beta}+\theta)$$ 。如圖（五）所示。



圖（五）

同理可得下列：

$$R_4=\frac{k\cot\gamma}{\cot(\alpha+\gamma)}\sin^2(\varphi_{\alpha\gamma}-\varphi_{\beta\gamma}+\varphi_{\alpha\beta}-\theta)\text{，}$$

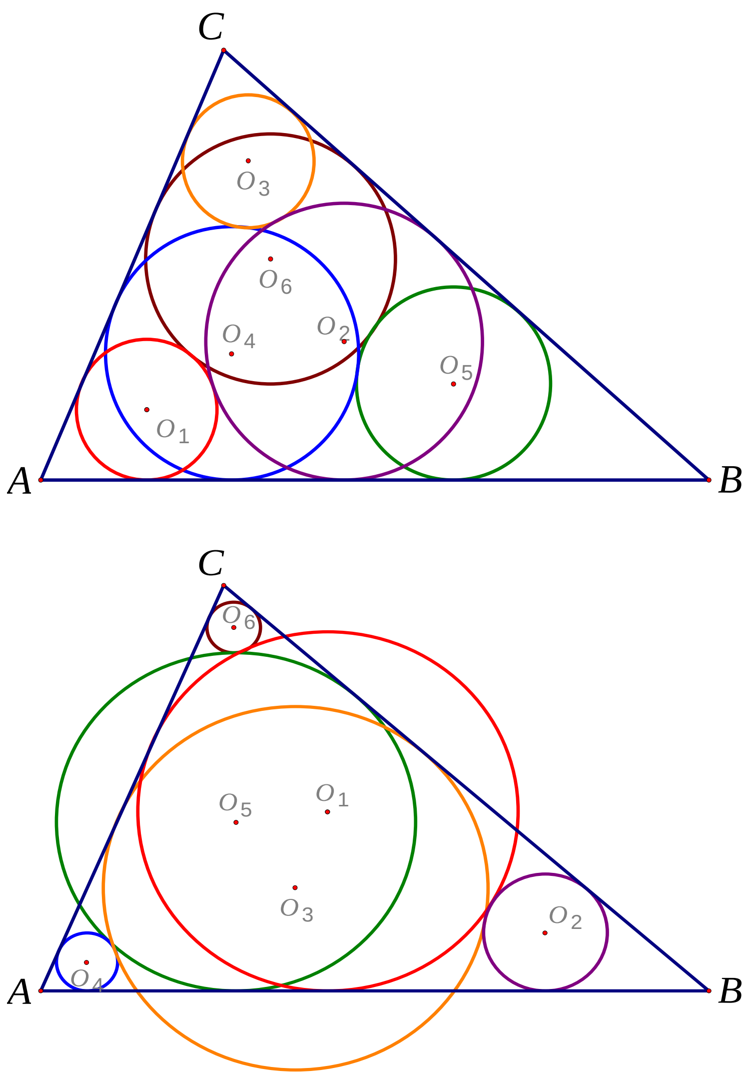
$$R_5=\frac{k\cot\alpha}{\cot(\alpha+\beta)}\sin^2(-\varphi_{\alpha\gamma}+\varphi_{\beta\gamma}+\theta)\text{，}$$

$$R_6=\frac{k\cot\beta}{\cot(\beta+\gamma)}\sin^2(\varphi_{\alpha\gamma}-\theta)\text{，}$$

$$R_7=\frac{k\cot\gamma}{\cot(\alpha+\gamma)}\sin^2\theta\text{，}$$

但是因爲$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$，則$\dfrac{\cot\gamma}{\cot(\alpha+\gamma)}=\dfrac{\tan(\alpha+\gamma)}{\tan\gamma}=\dfrac{\cot\beta}{\cot(\alpha+\beta)}$，

又$R_1=\dfrac{k\cot\beta}{\cot(\alpha+\beta)}\sin^2\theta$，所以$R_1=R_7$，意即圓$O_7$＝圓$O_1$，所以第六個圓與原先的圓相切，故六圓定理得證。如圖（六）。



圖（六）

二、馬爾法蒂問題（Malfatti's Problem）：

義大利數學家馬爾法蒂（Malfatti，1731~1807）於 1803 年提出下列的作圖題：

「在一個已知三角形內畫三個圓，每個圓與其他兩個圓以及三角形的兩邊相切。」

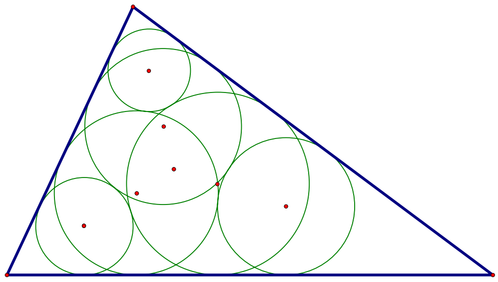
我們將其稱為「馬爾法蒂問題」。

根據六圓定理，馬爾法蒂問題即是使第四個圓半徑等於第一個圓半徑的特例。

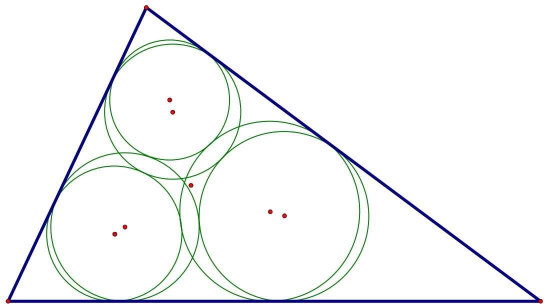
所以，由方程式 $R_1=\dfrac{k\cot\beta}{\cot(\alpha+\beta)}\sin^2\theta=\dfrac{k\cot\beta}{\cot(\alpha+\beta)}\sin^2(\varphi_{\alpha\gamma}-\varphi_{\beta\gamma}+\varphi_{\alpha\beta}-\theta)=R_4$，可得解

$\theta=\dfrac{\varphi_{\alpha\gamma}-\varphi_{\beta\gamma}+\varphi_{\alpha\beta}}{2}$，將 θ 代入 R_1 即可得所求之圓 O_1 的半徑。如圖（七）。

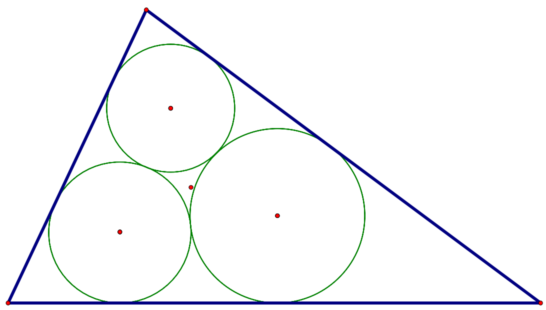
又 θ 可利用尺規作圖求出，所以，可以得到馬爾法蒂問題的一種作法。



圖（七）之一



圖（七）之二



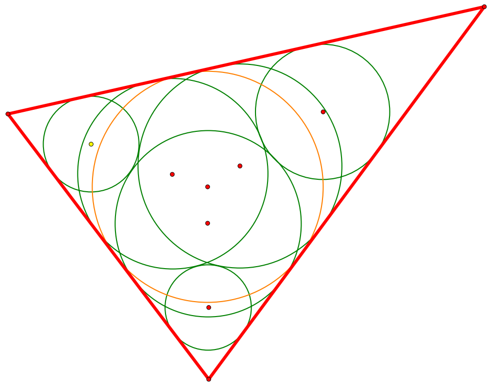
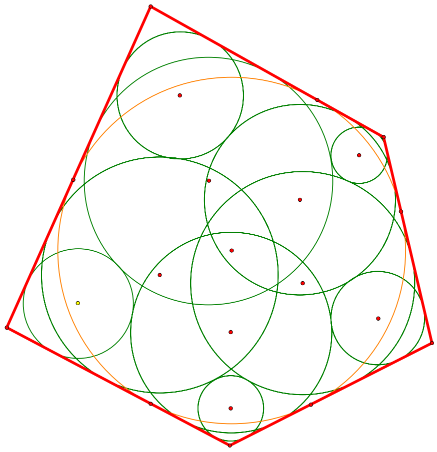
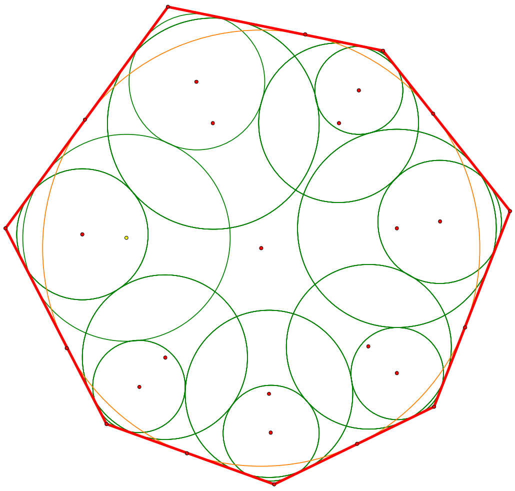
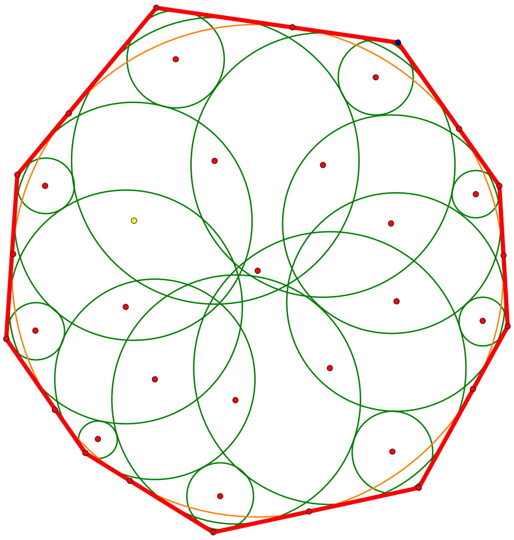
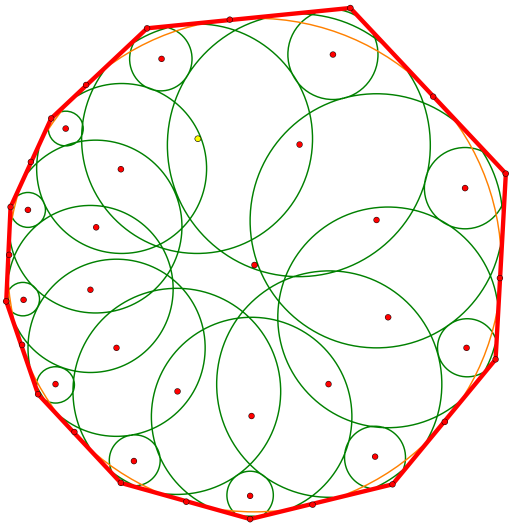
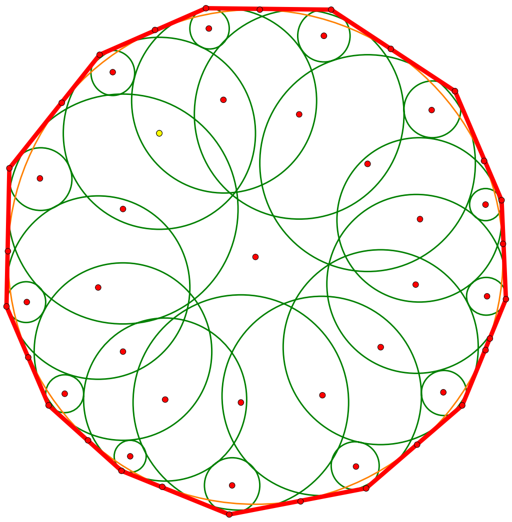
圖（七）之三

三、推廣到奇數多邊形：

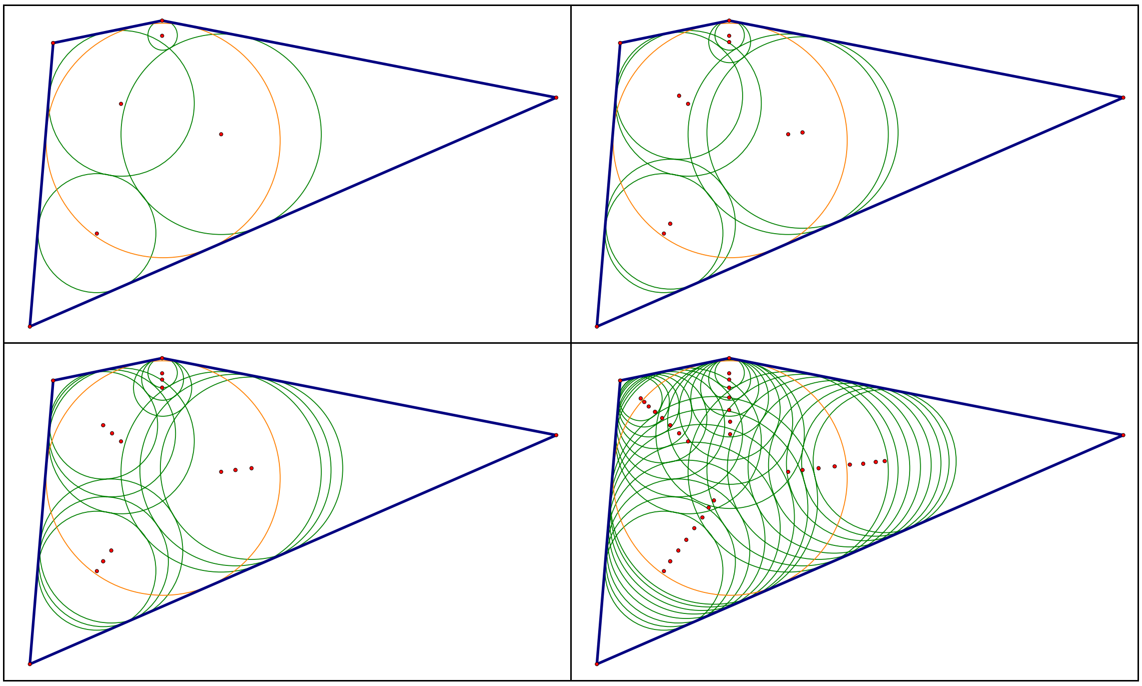
研究過程中發現，若一個具有奇數個邊且有內切圓的多邊形，可能也具有此循環相切的性質，將此命題敘述如下：

命題一：「若一個多邊形具有 $2n+1$（$n\in N$）個邊且有內切圓，作圓 O_1 與多邊形其中的兩邊相切，接著對相鄰角與 O_1 作圓 O_2 與其相切，接著再對下一個鄰角作切圓 O_3，…，重複上述步驟，則第 $4n+2$ 個圓會與起始圓 O_1 相切。」

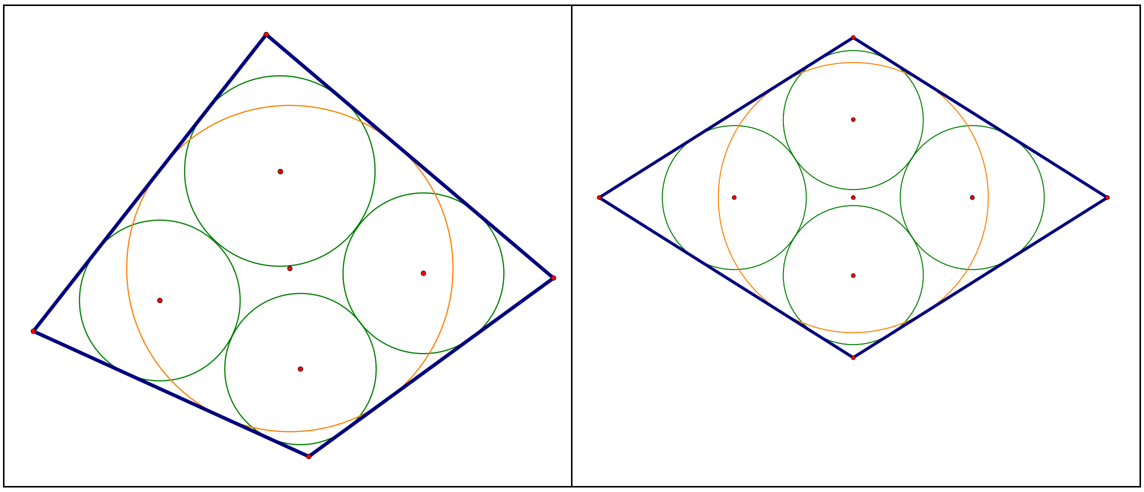
關於上述命題的幾個圖如下：

n=1	n=2
	
n=3	n=4
	
n=5	n=6
	

但是，偶數邊形並不全具有這樣的性質，以四邊形為例：



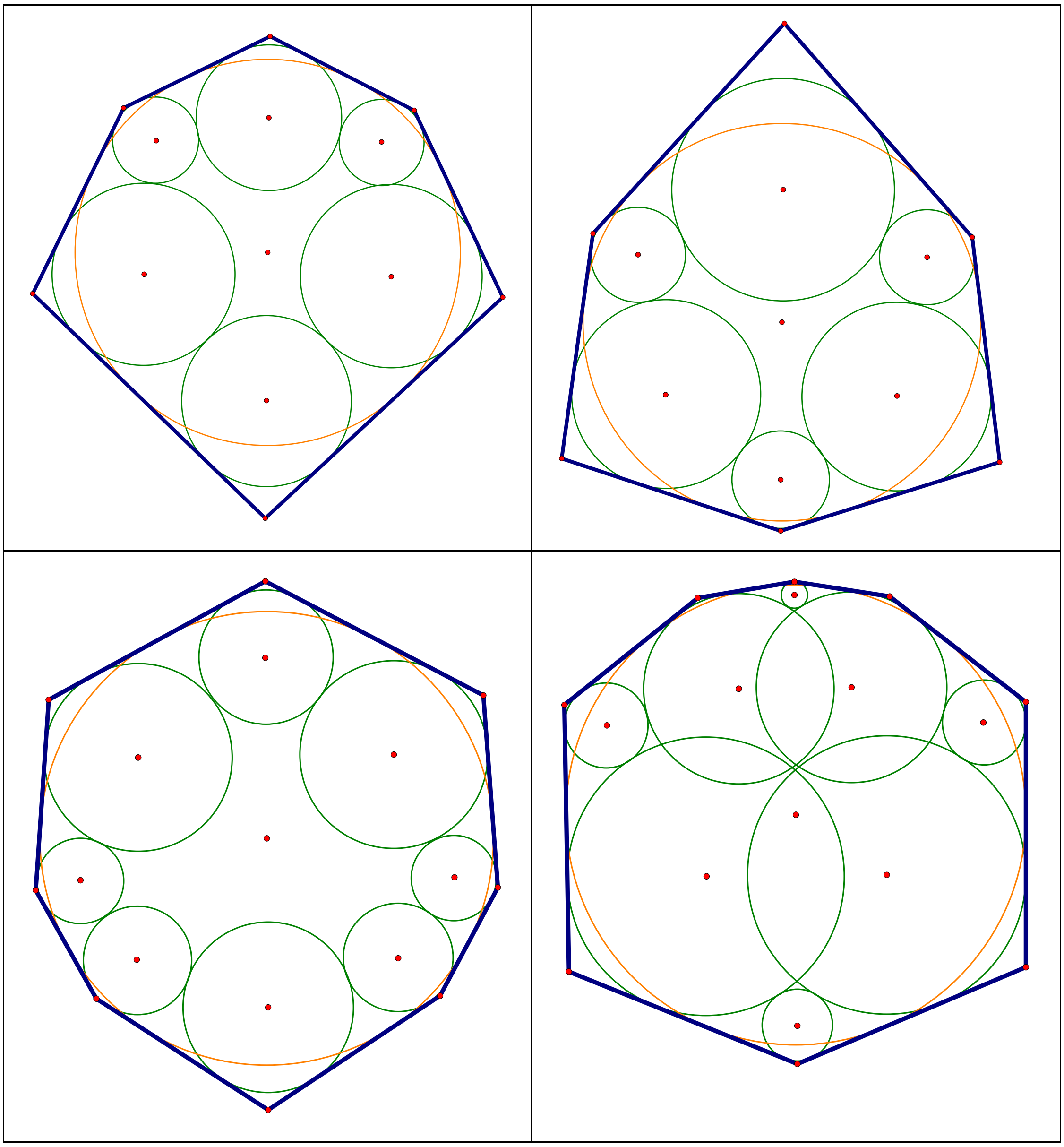
但是，也有例外的情形如下：



觀察上述例外的例子，可以發現，

「若一 $2n$（$n \geq 2$）邊形，有一條對角線爲其對稱軸，則該圖形會有切圓循環相切的性質，但以邊的個數爲循環。」

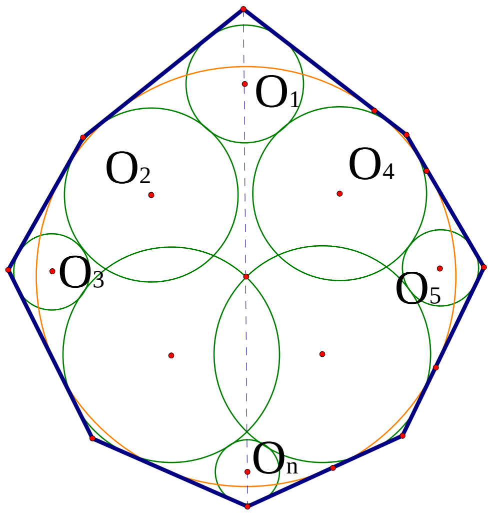
下列爲上述性質的一些例子：



性質一：「若一 $2n$（$n \geq 2$）邊形，有一條對角線爲其對稱軸，則該圖形會有切圓循環相切的性質，但以邊的個數爲循環。」

證明：

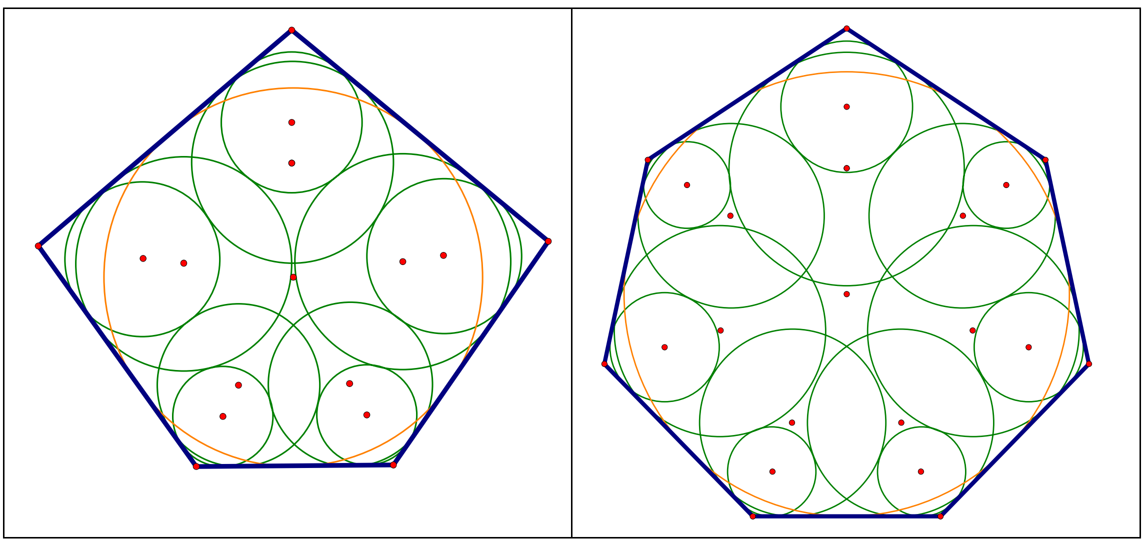
先考慮如圖（八）中以虛線爲對稱軸的偶數邊圖形，由於對稱的關係，當 O_1 與 O_2 相切時，也意味著 O_1 與 O_4 相切，同理，當 O_2 與 O_3 相切時，也意味著 O_4 與 O_5 相切，持續下去，由於對稱，最後一個切到的圓 O_n 是相同的，即形成一個環，由於每個角有一個圓，故以角的個數個圓循環。

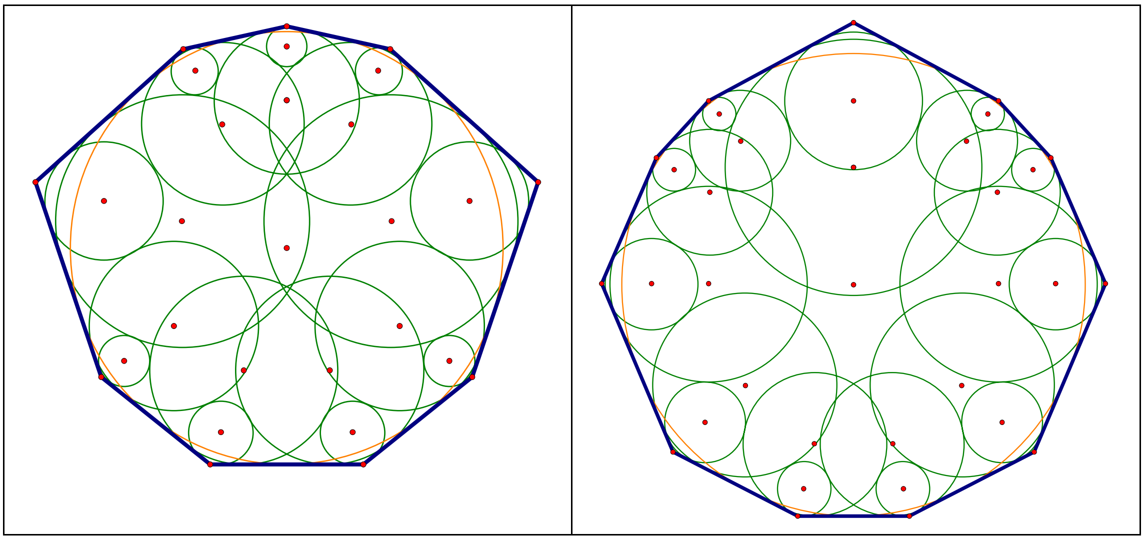


圖（八）

與上述性質相似，若奇數邊的多邊形，有一條對稱軸通過其中一個頂點，則命題一會成立。我們將此稱爲性質二。

例如：

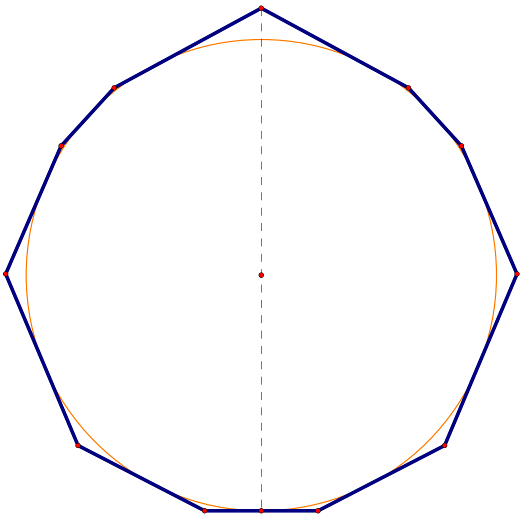




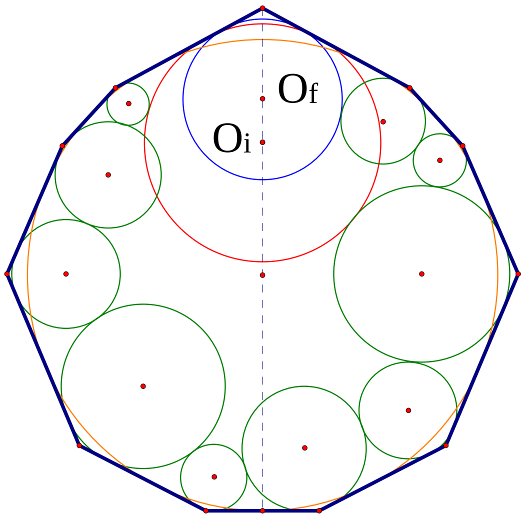
性質二：若一個多邊形具有 $2n+1$（$n \in N$）個邊且有內切圓，且有一條對稱軸通過其中一個頂點，作圓 O_1 與多邊形其中的兩邊相切，接著對相鄰角與 O_1 作圓 O_2 與其相切，接著再對下一個鄰角作切圓 O_3，…，重複上述步驟，則第 $4n+2$ 個圓會與起始圓 O_1 相切。

證明：

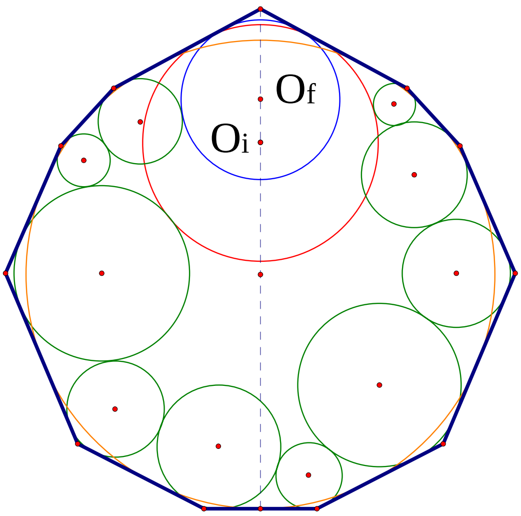
如圖（十），考慮連續作圓一圈時的情形，因爲有對稱軸，所以可以以 O_i 與 O_f 爲起始與結束，再造一組（鏡射）。



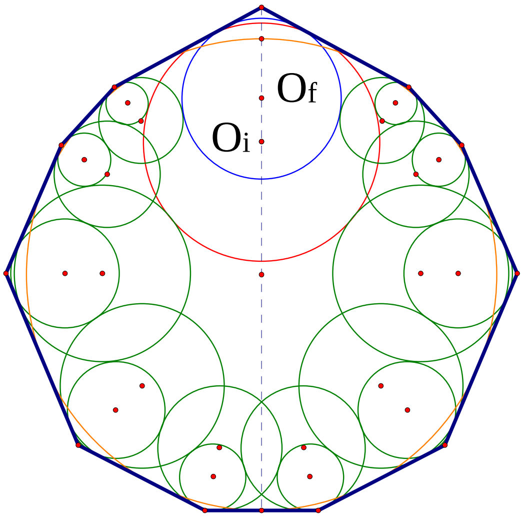
圖（九）



圖（十）



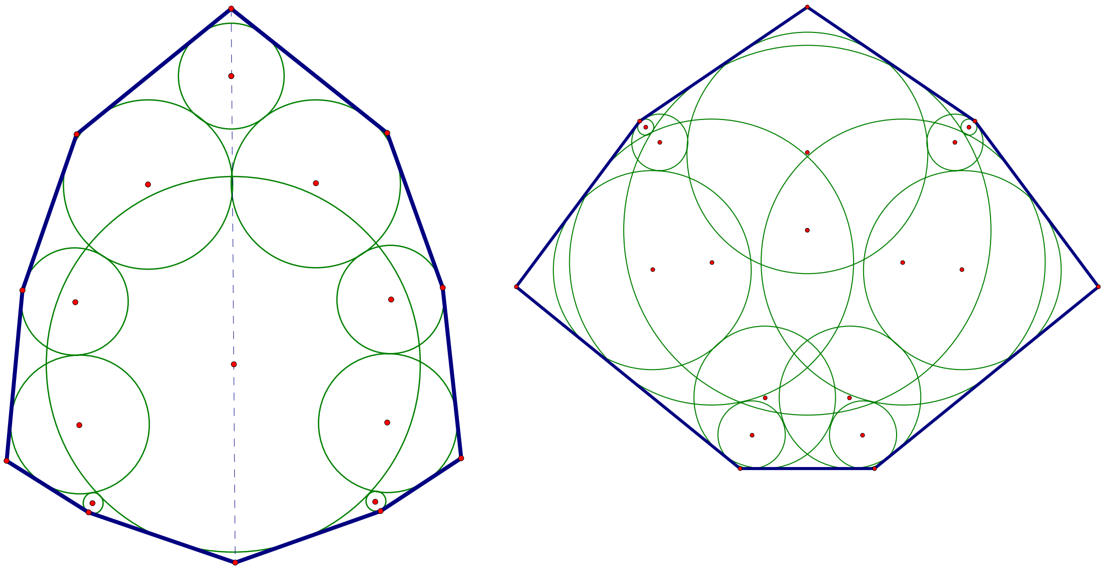
圖（十一）



圖（十二）

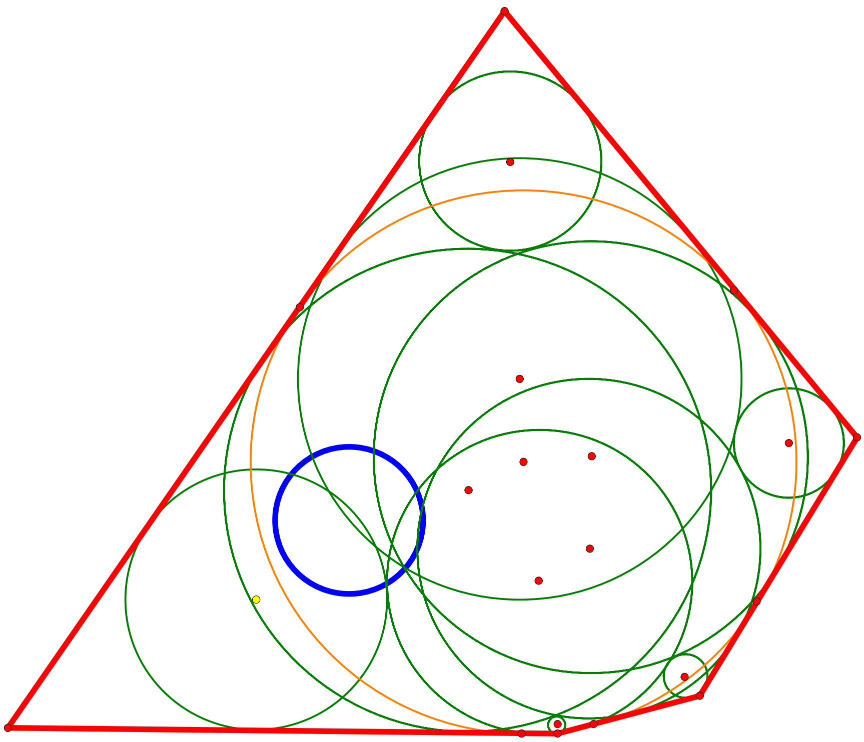
將兩組疊合，如圖（十二），由於O_i與O_f是相同的，故此為一循環，又由於每個角有兩個圓，若此為 2*n*+1 邊形，則共有 4*n*+2 個圓，即第 1 個圓與第 4*n*+2 個圓相切。

事實上，就算沒有內切圓，只要具有對稱性質的圖形，都具有此循環相切的性質，如圖（十三），證明與前述同理。



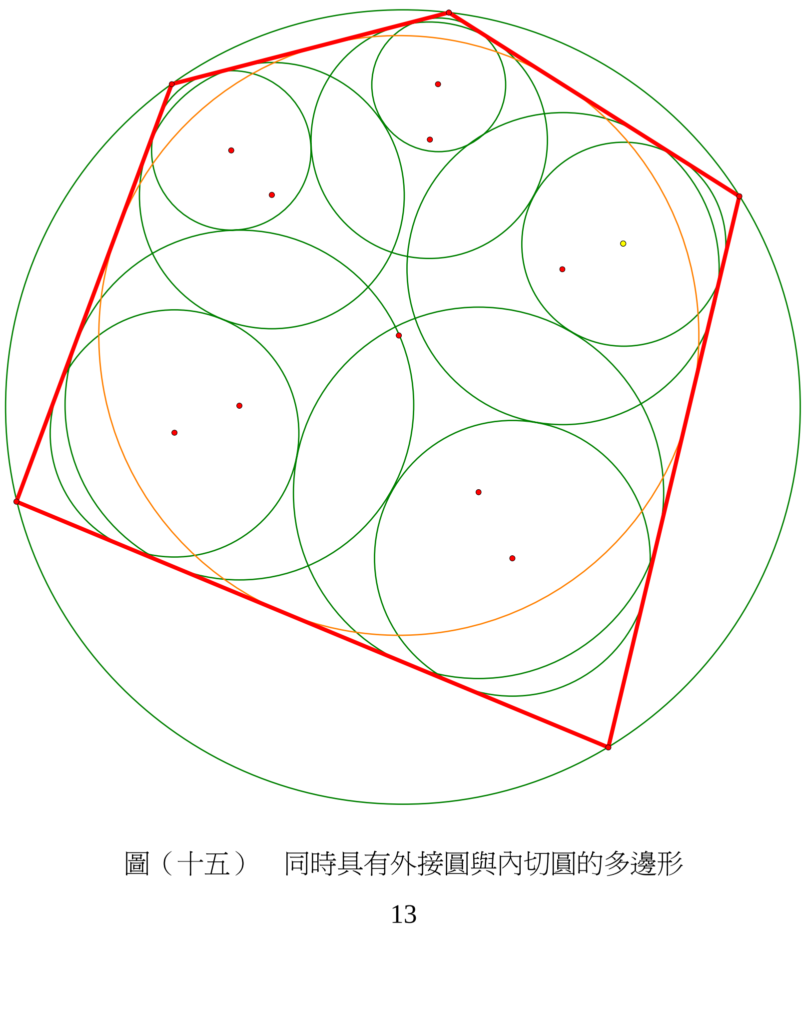
圖（十三）

繼續研究時，發現命題一似乎不完備，如圖（十四）：



圖（十四）

於是著手探討三角形與多邊形的不同處，經推測，三角形同時具有外接圓可能是原因。於是嘗試如圖（十五）。



圖（十五）　同時具有外接圓與內切圓的多邊形

目前看來似乎較爲可能，於是修改命題一如下：

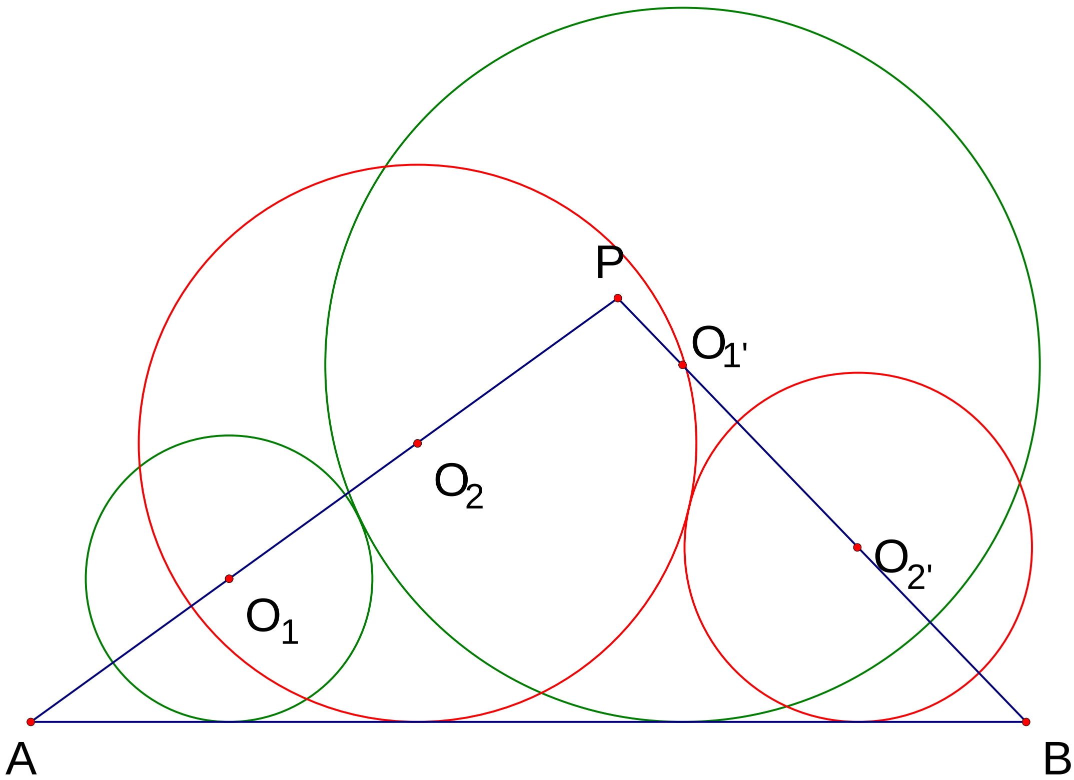
命題一：「若一個多邊形具有 $2n+1$（$n \in N$）個邊且有內切圓及外接圓，作圓 O_1 與多邊形其中的兩邊相切，接著對相鄰角與 O_1 作圓 O_2 與其相切，接著再對下一個鄰角作切圓 O_3，⋯，重複上述步驟，則第 $4n+2$ 個圓會與起始圓 O_1 相切。」

相關證明仍尚未發現。

四、馬爾法蒂問題的推廣：

命題二：「對任意奇數凸多邊形，存在循環相切的情形。」

證明：

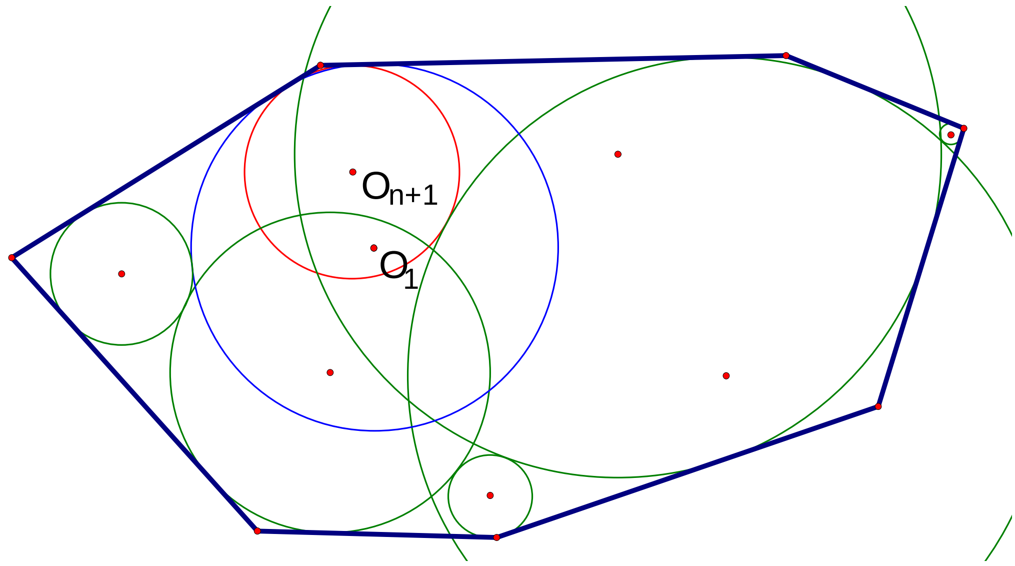


圖（十六）

先考慮如圖（十六）的情況，$\overrightarrow{AP}$ 、$\overrightarrow{BP}$ 分別爲某兩個相鄰角的角平分線，已知 O_1 與 $O_{1'}$ 相切，O_2 與 $O_{2'}$ 相切，半徑 $O_2 > O_1$，底下證半徑 $O_{1'} > O_{2'}$：

利用反證法，若否，$O_{2'} > O_{1'}$（因爲顯然有 $O_{1'} \neq O_{2'}$，否則 $O_2 = O_1$ 不合），則因爲 O_2 與 $O_{1'}$ 的水平距離小於 O_2 與 $O_{2'}$ 的水平距離（由假設 $O_{2'} > O_{1'}$，知 $O_{2'}$ 比較靠近 P），而 $O_2 > O_1$，又 $O_{2'}$ 在以 O_2 爲焦點的拋物線上，水平距離縮短，焦距卻加長了，故 $O_{2'}$ 不在以 O_2 爲焦點的拋物線上，矛盾，故得證。（拋物線與角平分線的另一個交點不在考慮範圍之內）

同理若半徑 $O_2 < O_1$，則半徑 $O_{1'} < O_{2'}$。

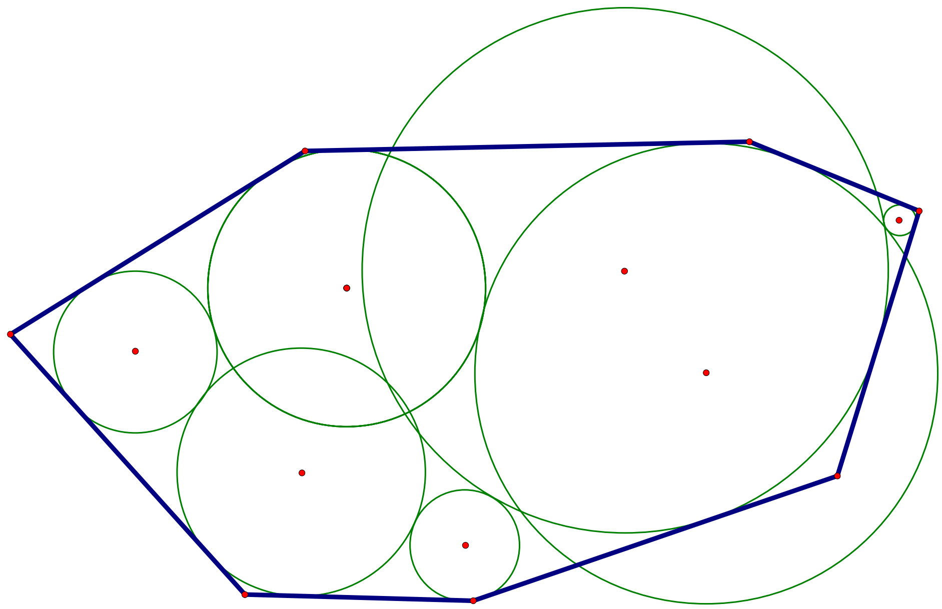


圖（十七）

接著考慮任意凸 n 邊形，$n=2k+1$，$k\in\mathrm{N}$，例如圖（十七）。設某個圓循環O_i，$i=1\sim n$，若$O_1=O_{n+1}$則命題得證，若$O_1\neq O_{n+1}$，假設$O_1>O_{n+1}$，則設另一個圓循環R_i，$i=1\sim n$，半徑$R_1<O_1$。因爲$R_1<O_1$，所以$R_2>O_2$（由上述性質），$R_3<O_3\cdots\cdots R_{n+1}>O_{n+1}$，$O_1<O_{n+1}$時同理。即當$R_1$往$O_{n+1}$靠近時，$R_{n+1}$往$O_1$靠近。

引進**公設一**：「任意直線及曲線具有連續性。」

利用公設一，調整R_1往O_{n+1}靠近時，R_{n+1}往O_1靠近，必存在某時使$R_1=R_{n+1}$，得證。



圖（十八）

五、相關的發現：

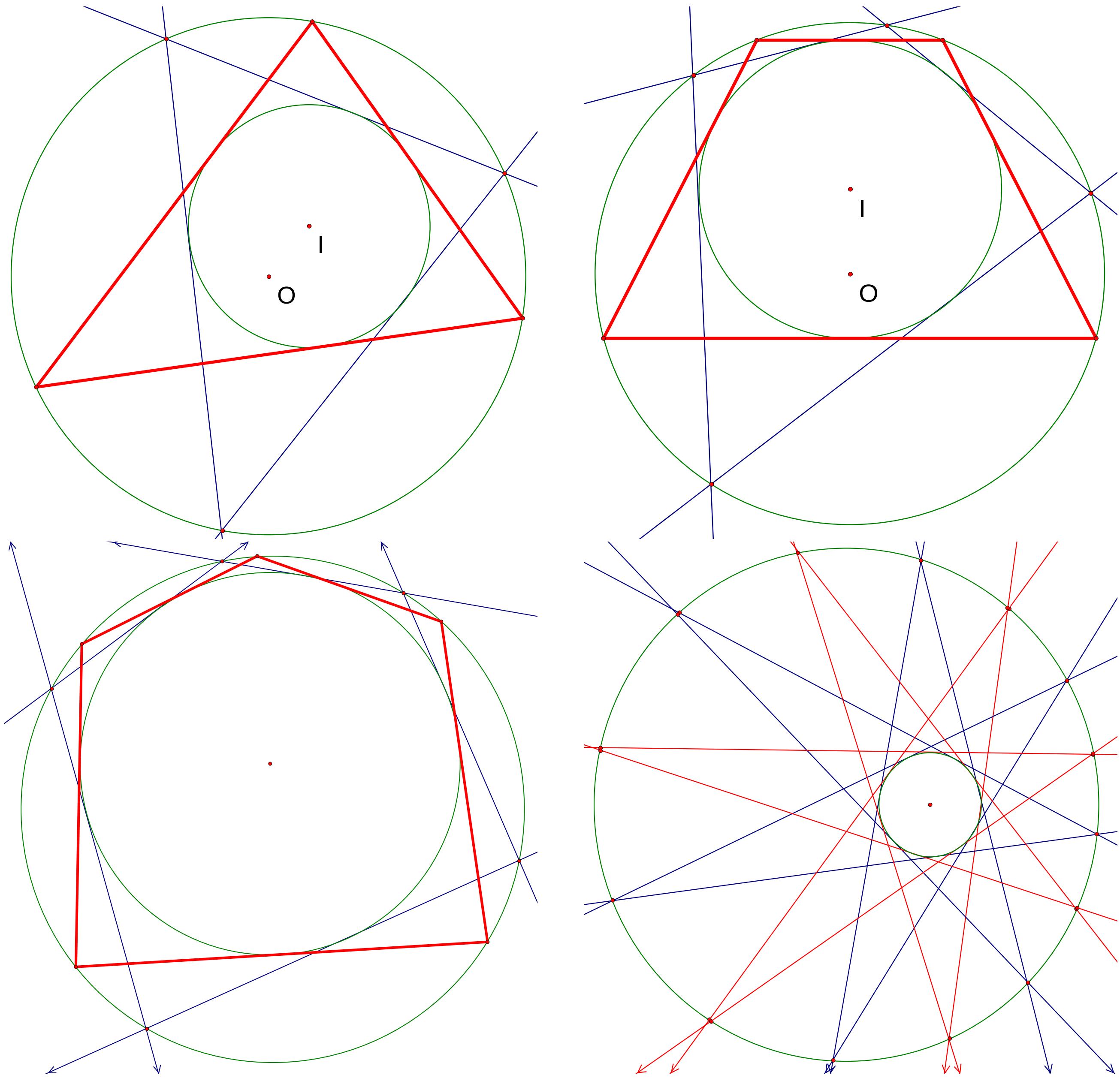
研究連續切圓的同時，如何簡單地產生同時具有內切圓與外接圓的多邊形令人困擾，但經過嘗試，發現一個好用的方法：

命題三：「對任意凸 n 邊形，若同時存在外接圓與內切圓，在其外接圓周上任選一相異點對內切圓作切線，交外接圓於另一點，再以此點對內切圓作切線，重複上述動作，最後會得到一個凸 n 邊形，擁有同樣的外接圓與內切圓。」

此命題可以推廣如下：

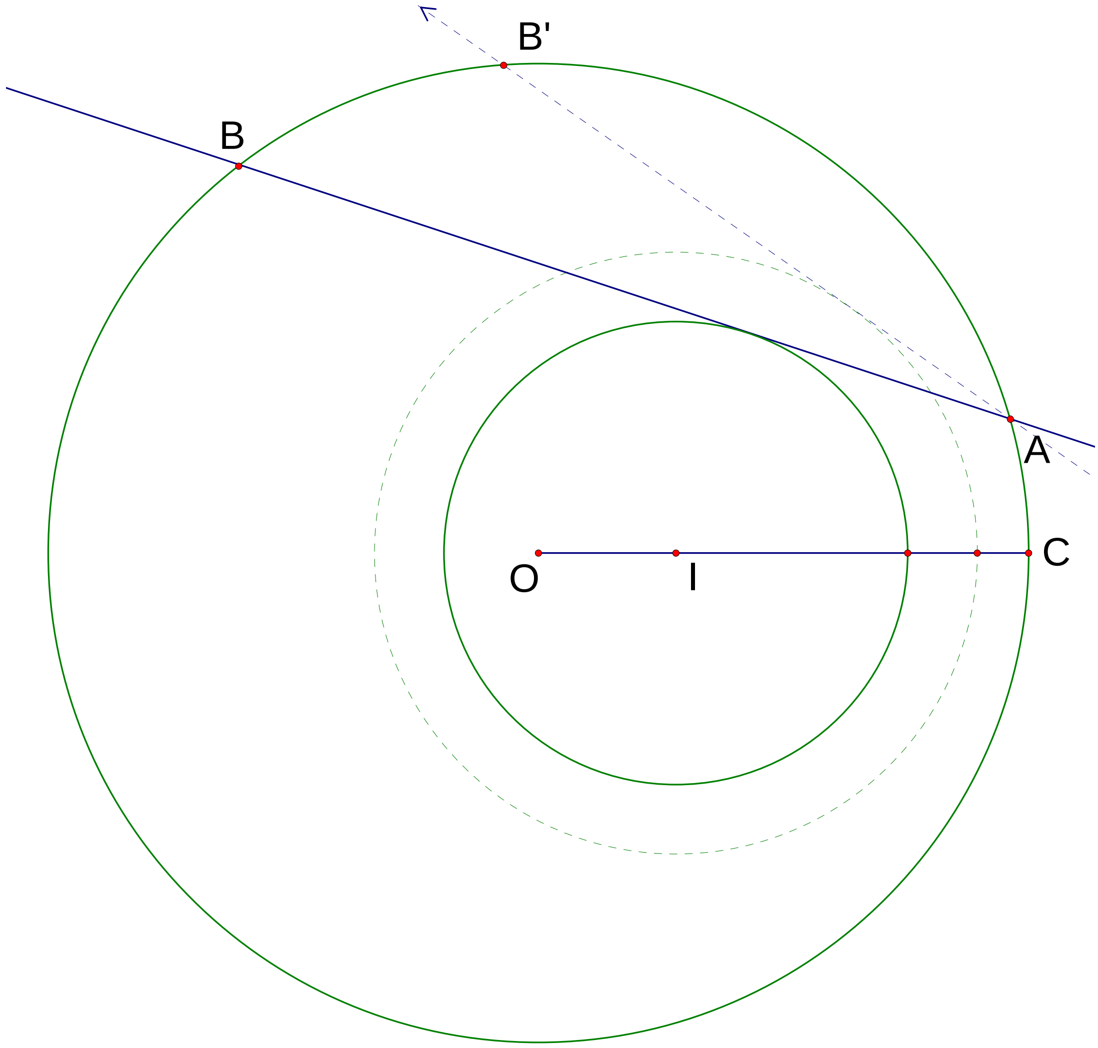
命題三廣義型：「對任意形狀，若每個角都與一內切圓相切，且外接於一圓，在其外接圓周上任選一相異點對內切圓作切線，交外接圓於另一點，再以此點對內切圓作切線，重複上述動作，最後會得到一個類似形狀（不一定相似），擁有同樣的外接圓與內切圓。」

證明尚在努力中。



圖（十九）

先證明同時具有外接圓與內切圓的多邊形存在：



圖（二十）

引理一：「若 $\overleftrightarrow{AB}$ 是圓 I 的一條切線，另有一與 I 同心但半徑較大的圓 I’，及同方向（順時針或逆時針）的圓 I’切線 $\overleftrightarrow{AB'}$，則 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AB'}$ 」

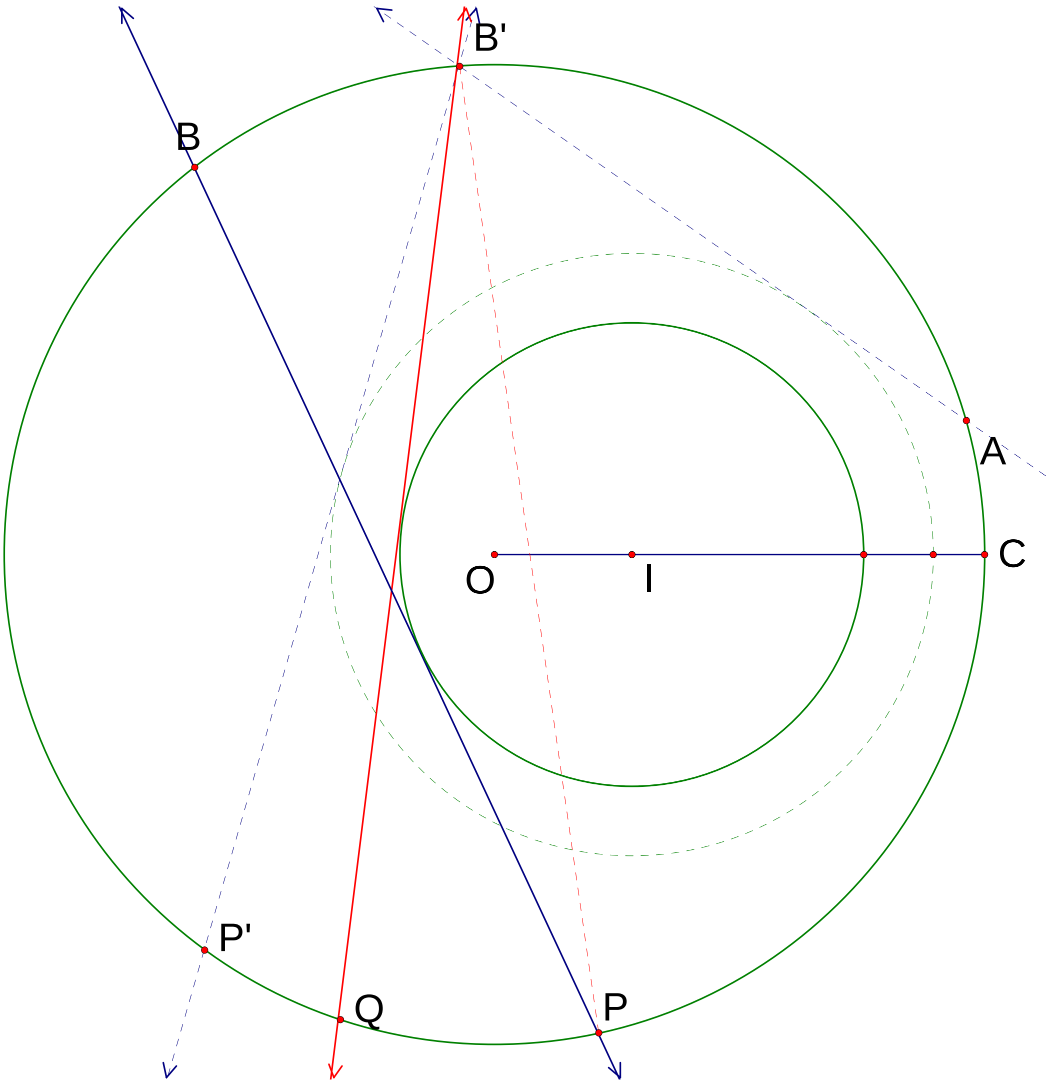
證明：

以下皆以逆時針方向證明，順時針同理。

如圖（二十），因為半徑 $I' > I$ ，所以有部分圓 I’在 $\overline{AB}$ 的另一側，B’必須落在 $\overset{\frown}{AB}$ 之間，故 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AB'}$ 。

＊證法二：

因為 I’>I，所以 $\angle IAB' > \angle IAB$ ， $\angle BIB' > 0$ ， $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'} + \overset{\frown}{BB'} > \overset{\frown}{AB'}$ 。



圖（二十一）

引理二：「若 $\overleftrightarrow{BP}$ 是圓 I 的一條切線，另有一與 I 同心但半徑較大的圓 I’，及同方向（順時針或逆時針）的圓 I’切線 $\overleftrightarrow{B'P'}$，且 $\angle COB' < \angle COB$（這裡角度爲 $0^\circ \sim 360^\circ$），則 $\overset{\frown}{CBP} > \overset{\frown}{CB'P'}$」

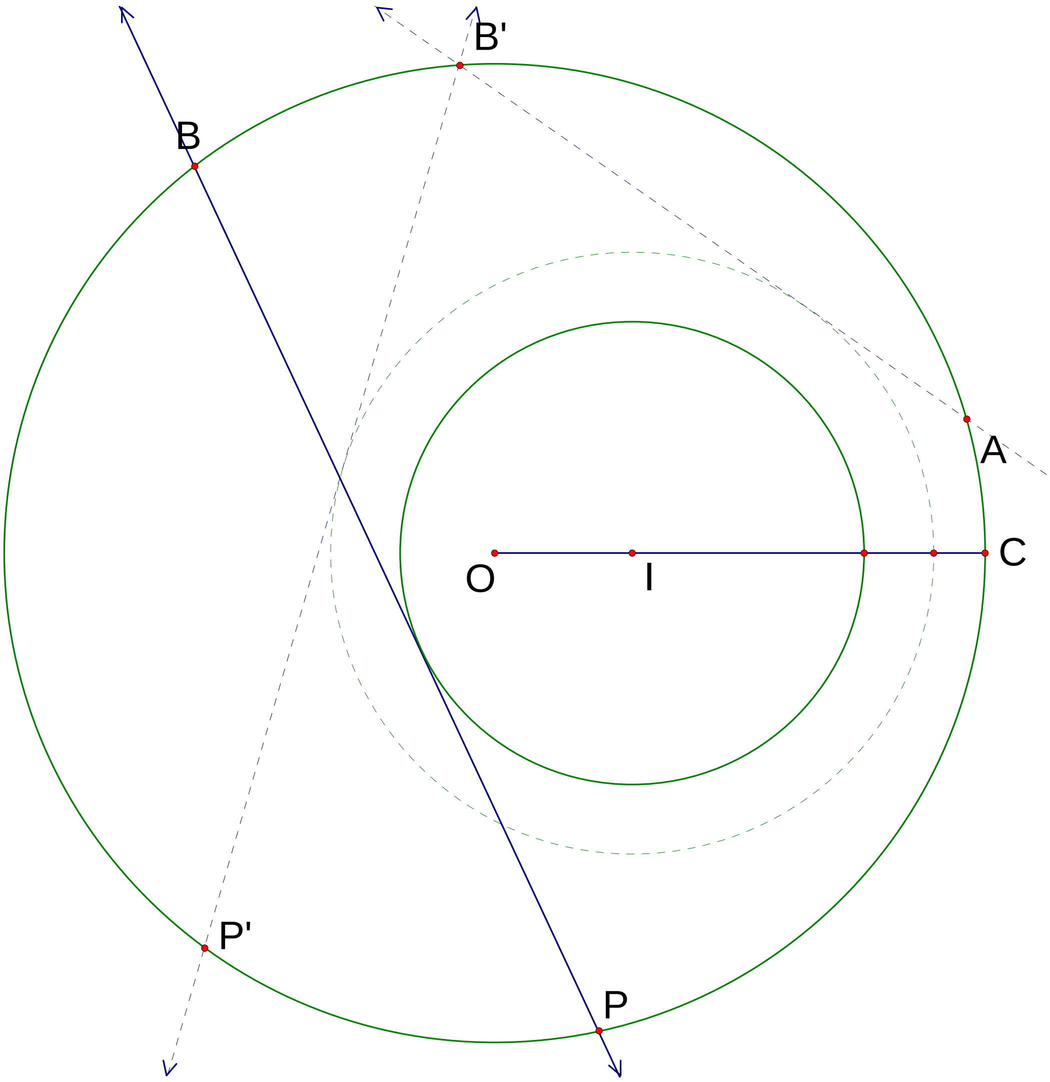
證明：

同樣挑逆時針方向證明，順時針同理。

先考慮 B’對 I 的切線 $\overleftrightarrow{B'Q}$，Q 必須在 P 的順時針側，否則 $\overleftrightarrow{B'Q}$ 與 $\overleftrightarrow{BP}$ 在圓內不相交，中間有空隙，但 I 要同時切 $\overleftrightarrow{B'Q}$ 與 $\overleftrightarrow{BP}$，又不能通過空隙，矛盾。故 Q 在 P 的順時針側，接著應用引理一，有 $\overset{\frown}{B'Q} > \overset{\frown}{B'P}$，所以 $\overset{\frown}{CBP} > \overset{\frown}{CB'Q} > \overset{\frown}{CB'P'}$ 得證。

接著證明原題：

命題四：「同時具有外接圓與內切圓的多邊形必存在。」



圖（二十二）

同樣挑逆時針方向證明，順時針同理。

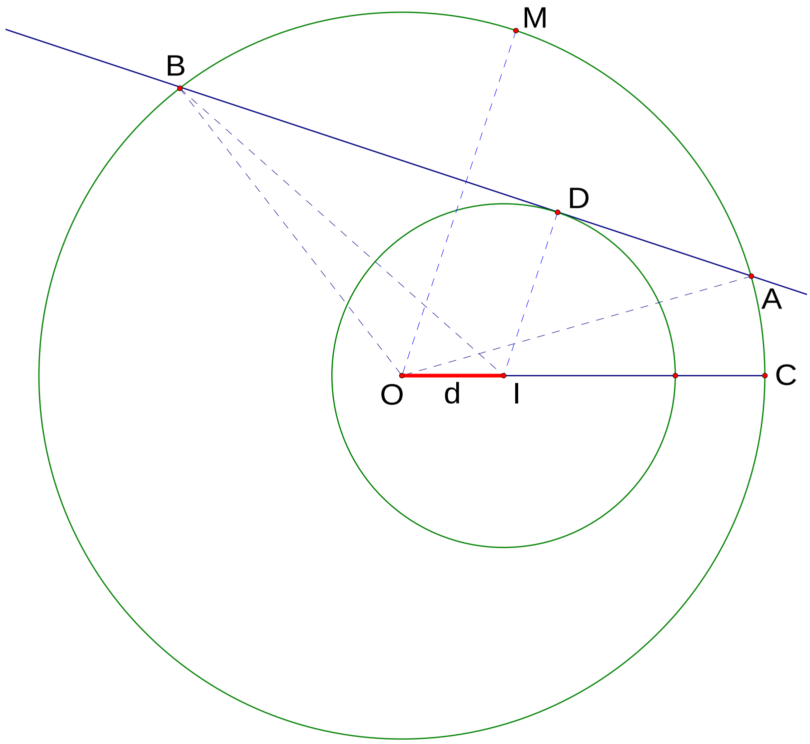
首先，對於任意 d，我們必可找到半徑為 0 的圓，假設其連續切線的交點為 A_i ，$i=1\sim n$ 。

參考圖（二十二），同時應用引理一及二有當 I 增大時，P’在 P 的順時針側，應用引理一有 B’在 B 的順時針側。假設當圓 I 擴大為 I’時，其連續切線的交點為 B_i ，$i=1\sim n$ ，$B_1=A_1$ 。有前述有對任意 $i\geq 2$ ，B_i 在 A_i 的順時針側，即 $\angle COB_i<\angle COA_i$（廣義角）。現考慮 n 邊形，n≧2，

由上述可知，因 I 半徑可以不停擴大（利用公設一），必有某時使 $\angle COB_{n+1}=360^{\circ}+\angle COA_1$ ，

即同時具有外接圓與內切圓的 n 邊形，得證。

六、切線的研究：



圖（二十二）

先考慮如圖（二十二）中的切線，

其中$\overline{OI}=d,\overline{OM}=R,\overline{ID}=r$，

$\angle AOC=\varphi,\angle BOA=2\theta$，

$\overline{OM}$ 及 $\overline{ID}\perp\overline{AB}$，因爲

$\overline{OM}\cdot\overline{IB}=\overline{OM}\cdot\overline{ID}=rR$，

令$\overleftrightarrow{OC}$ 爲 x 軸，O 爲原點，

可得到：

$$R\cos(\theta+\varphi)[R\cos(2\theta+\varphi)-d]+R\sin(\theta+\varphi)R\sin(2\theta+\varphi)=rR$$

整理得

$$R\cos\theta=r+d\cos(\theta+\varphi)$$

以和角公式展開，並以 r’代$\frac{r}{R}$ 、d’代$\frac{d}{R}$ ，整理得：

$$\cos\theta=r'+d'(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)$$

$$(1-d'\cos\varphi)\cos\theta+(d'\sin\varphi)\sin\theta=r'$$

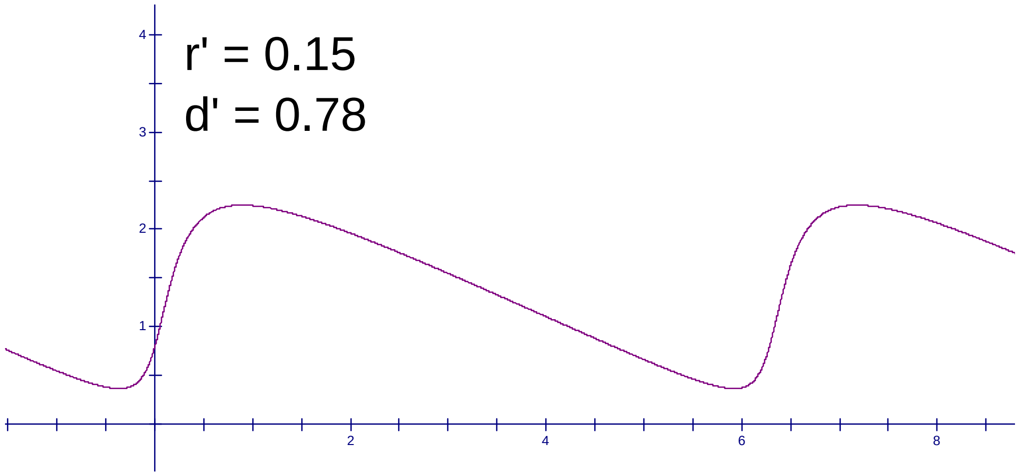
設$\cos\delta=\frac{1-d'\cos\varphi}{\sqrt{(1-d'\cos\varphi)^2+(d'\sin\varphi)^2}}=\frac{1-d'\cos\varphi}{\sqrt{1+d'^2-2d'\cos\varphi}}$（注意到$\delta$亦有正負，其正負與$\sin\varphi$

相同。），有$\cos(\theta-\delta)=\frac{r'}{\sqrt{1+d'^2-2d'\cos\varphi}}$

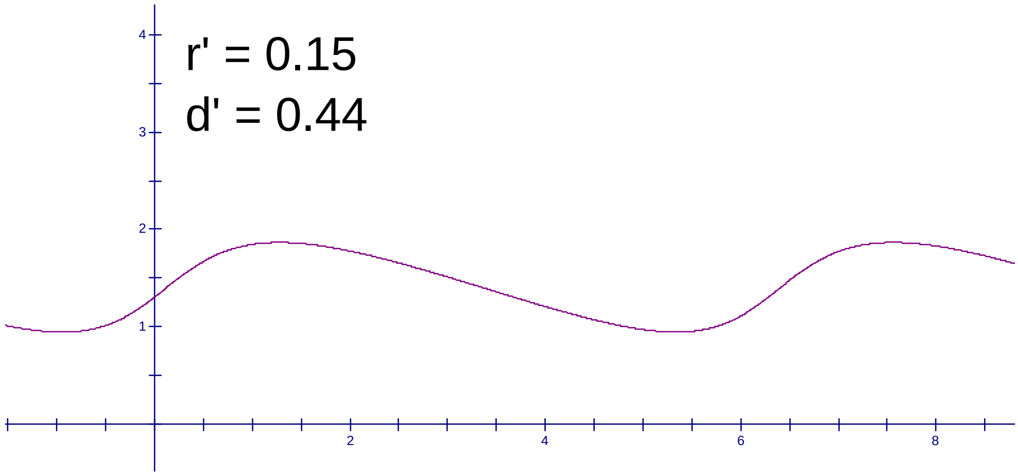
所以$\theta=\delta\pm\cos^{-1}\frac{r'}{\sqrt{1+d'^2-2d'\cos\varphi}}$

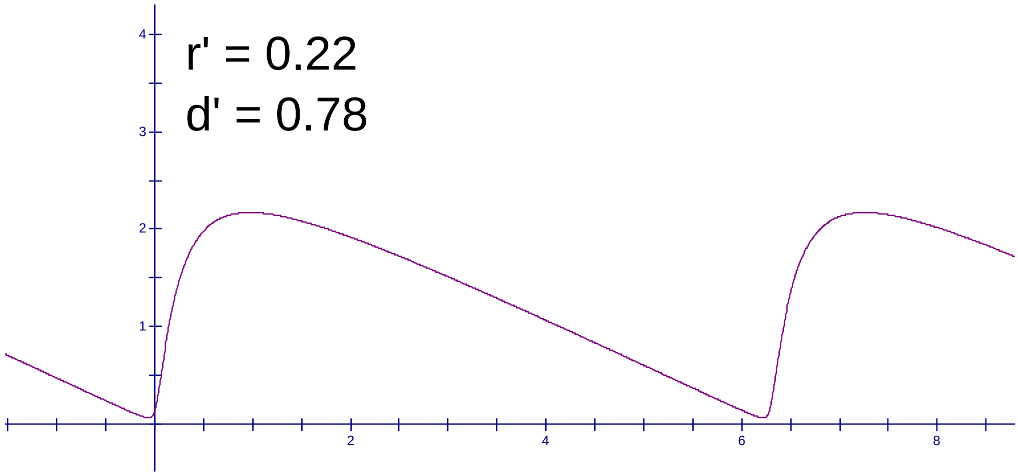
$$=\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi}}\cos^{-1}\frac{1-d'\cos\varphi}{\sqrt{1+d'^2-2d'\cos\varphi}}\pm\cos^{-1}\frac{r'}{\sqrt{1+d'^2-2d'\cos\varphi}}$$

考慮$\pm\cos^{-1}\dfrac{r'}{\sqrt{1+d'^2-2d'\cos\varphi}}$的正負，正表示向逆時針方向作切線，負表示對順時針方向作切線。將此視爲方程式$\theta=f(\varphi)$，對其作圖如下：



調整 r’與 d’可以得到不同的曲線，但形狀大致相同：





尚未發現此方程式有何可應用之特殊性質。

伍、討論：

雖然修改過的命題一似乎更為完備，但是對稱性質卻總是可以成為例外，是否兩者都是決定循環切圓的條件，又或者其中一個可包含另一者，有待研究。

六圓定理是一個關於連續切圓的定理，與此類似的有像是史坦那鏈（Steiner Chain），這些圓鏈（circles chain）之間的關係是有趣的問題。關於二次曲線與一次曲線、直線與圓，尺規帶給我們的，還有太多太多，等著我們去探索、發現。

陸、結論：

一、六圓定理成立。

二、馬爾法蒂問題是六圓定理的特殊解。

三、若一 $2n$（$n \geq 2$）邊形，有一條對角線為其對稱軸，則該圖形會有切圓循環相切的性質，但以邊的個數為循環。

四、若一個多邊形具有 $2n+1$（$n \in N$）個邊且有內切圓及外接圓，且有一條對稱軸通過其中一個頂點，作圓 O_1 與多邊形其中的兩邊相切，接著對相鄰角與 O_1 作圓 O_2 與其相切，接著再對下一個鄰角作切圓 O_3，…，重複上述步驟，則第 $4n+2$ 個圓會與起始圓 O_1 相切。

五、對任意奇數凸多邊形，存在循環相切的情形。

六、同時具有外接圓與內切圓的多邊形必存在。

柒、展望

一、希望未來能夠證明奇數多邊形的情形，即命題一的成立與否。

二、希望能夠將六圓定理推廣至三維空間的情形。

三、希望未來能夠證明連續切線循環的情形，即命題三與命題三廣義型。

捌、參考資料：

一、單墫　平面幾何中的小花　上海教育出版社。

二、謝勝雄、何應佑、曾士豪　三角形中的切圓　96 年度實驗中學校內科展作品。

三、MathWorld 網站：http://mathworld.wolfram.com/

評語

傳統的科展作品都透過靜態平面展示來呈現。本作品應該多多利用動態幾何環境，強調由一個退化情形轉變到另一退化情形的變化過程。此外，在作品當中，其展示圖會令人誤解其 Malfatti 作圖的正確性。